FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO

GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS E ORBIFOLDS EUCLIDIANOS BIDIMENSIONAIS

por

ISABEL CRISTINA DA SILVA LOPES

TESE DE MESTRADO EM

MATEMÁTICA - FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES

Porto - Portugal

2004

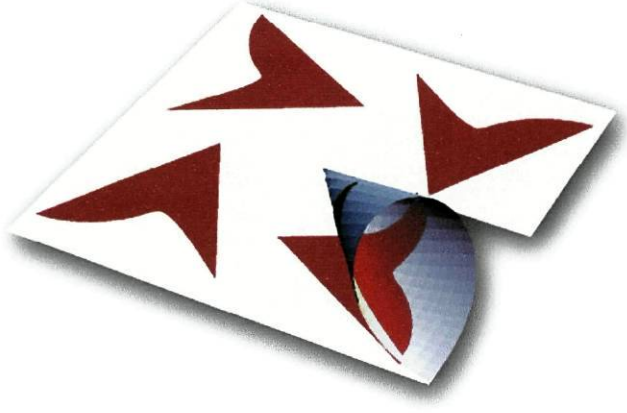
UNIVERSIDADE DO PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS

MESTRADO EM MATEMÁTICA – FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES

GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS E ORBIFOLDS EUCLIDIANOS BIDIMENSIONAIS

por

ISABEL CRISTINA DA SILVA LOPES



Orientadores: Professor Doutor Manuel Arala Chaves
Professor Doutor Eduardo Rêgo

Membros do Júri: Professor Doutor Peter Gothen
Professor Doutor António Costa González
Professor Doutor Eduardo Rêgo

Porto – Portugal
26 de Agosto de 2004

Conteúdo

1 Introdução **1**

1.1 Sobre este trabalho 1

1.2 Um pouco de História 3

2 Acções de grupo e grupos cristalográficos **7**

2.1 Acções de grupo 7

2.2 Acções discretas 10

2.3 Acções propriamente descontínuas 15

2.3.1 Grupos de isometrias de $\mathbb{R}^2$ 17

2.3.2 Grupos de isometrias de $\mathbb{R}^n$ 21

2.4 Grupos cristalográficos 24

3 Das variedades aos orbifolds **31**

3.1 Variedades 31

3.2 Revestimentos 40

3.3 Orbifolds 46

3.4 Característica de Euler 56

4 Orbifolds euclidianos bidimensionais **59**

4.1 Teorema de Gauss-Bonnet 59

4.2 O teorema dos 17 orbifolds euclidianos 62

5 Modelos de orbifolds no *Mathematica* **67**

6 Conclusões **84**

A Anexos **91**

Resumo

O tema central deste trabalho é a construção de modelos que permitam a visualização dos padrões de simetria que estão associados aos 17 orbifolds euclidianos de dimensão 2.

Um orbifold é visto aqui como o quociente de uma variedade por um grupo que age de forma propriamente descontínua, na verdade, um grupo cristalográfico, constituindo uma generalização do conceito de variedade, devido a permitir singularidades, tais como picos, espelhos ou esquinas provenientes de revestimentos ramificados.

Os modelos de orbifolds desenvolvidos foram gerados por computador, com o auxílio do programa *Mathematica*, e são apresentados em animações onde se pode observar cada orbifold a carimbar no plano um desenho correspondente ao seu padrão cristalográfico.

Palavras-Chave: orbifold, grupo cristalográfico, padrão de simetria, grupo de papel de parede, variedade, revestimento ramificado.

Abstract

The main purpose of this Master thesis is to obtain models that enable us to visualize the symmetry patterns associated with the 17 Euclidean 2-orbifolds.

An orbifold is regarded here as the quotient space of a manifold by a properly discontinuous group which is in fact a crystallographic group. An orbifold is indeed a generalization of a manifold: it allows singularities, such as cone points, mirrors and corner points that arise from branched coverings.

The orbifold models developed in this project were computer generated using the *Mathematica* software and they are presented in animations where each orbifold can be seen stamping a drawing with its correspondent crystallographic pattern on the Euclidean plane.

Keywords: orbifold, crystallographic group, symmetry pattern, wallpaper group, manifold, branched covering.

1 Introdução

1.1 Sobre este trabalho

Com a minha inscrição no curso de mestrado Matemática Fundamentos e Aplicações da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, pretendi dar continuidade à minha formação matemática e incorporar nela uma forte componente de utilização da Informática, dado que era na altura (e ainda o sou hoje) docente de Matemática e Informática no Instituto Politécnico do Porto. Quando chegou a altura de escrever a dissertação de mestrado, sabia que queria estudar um assunto que envolvesse as minhas áreas preferidas — Geometria e Topologia — e que se prestasse a um desenvolvimento didáctico com utilização de meios informáticos para a visualização da Matemática.

Quando o Professor Arala Chaves me propôs estudar a relação existente entre os 17 grupos da cristalografia e os orbifolds de dimensão 2, eu não conhecia nada sobre o assunto e foi após uma consulta dos sites [GIm] e [Bur] do Geometry Center da Universidade de Minnesota na Internet que decidi aceitar o tema.

Este tema permitiu-me aprofundar conceitos de Geometria, Topologia e até Álgebra (Teoria de Grupos) e permitiu-me aprender programação no *Mathematica* e técnicas de produção de imagens gráficas no *Adobe Photoshop* e *ImageReady*.

Através do livro [Mon1] do professor Montesinos, comecei por aprender o conceito de orbifold e o modo como estes objectos matemáticos estavam relacionados com os grupos cristalográficos. O Professor Arala Chaves tinha ouvido que existia um artigo do Professor Montesinos onde era feita uma prova da existência de apenas 17 padrões de papel de parede independente dos grupos cristalográficos. Como esse artigo era quase impossível de obter em Portugal, o Professor Arala Chaves tentou obtê-lo através do Professor António Costa, que numa das suas deslocações a Portugal teve a amabilidade de trazer uma cópia do artigo [Mon3]. Entretanto, após comunicação via e-mail com o Professor Arala Chaves, o Professor Montesinos cedeu-lhe gentilmente um exemplar dos seus artigos publicados sobre o assunto, o que foi extremamente útil e proveitoso para o meu estudo.

Um destes artigos em particular [Mon4] foi vital para o desenvolvimento deste trabalho. Nele, o Professor Montesinos apresenta um modelo do orbifold S2222 totalmente inovador: um tetraedro, com faces planas e cada vértice com um ângulo de 180°. Foi com base neste exemplo que se tornou claro o objectivo desta tese: fazer modelos concretos para todos os 17 orbifolds euclidianos que, dentro do possível, incorporassem a métrica transportada do plano euclidiano e o grupo cristalográfico que lhe estivesse associado.

A comunicação via e-mail entre o Professor Arala Chaves e o Professor Montesinos incentivou-me a prosseguir a construção destes modelos, pois o Professor Montesinos sempre

acreditou ser possível criá-los a todos como um carimbo egípcio de barro que, rolando pelo plano, marcava o desenho do grupo cristalográfico correspondente. O software escolhido para esta tarefa foi o *Mathematica*, onde fui desenvolvendo os programas que permitiram construir *frame* a *frame* todos os gráficos que, depois de transportados para o *Adobe ImageReady*, vieram a constituir as animações presentes no CD em anexo e descritas no capítulo 5. Os excelentes comentários e sugestões da Professora Maria Dedò contribuiram para melhorar muitas destas animações e, embora não tenha sido possível, no âmbito desta dissertação, seguir algumas dessas sugestões, penso vir a utilizá-las num futuro próximo quando reformular estas animações e construir uma versão manipulável destes modelos utilizando linguagem *Java*.

Já sob a orientação do Professor Eduardo Rêgo, confrontei a visão do Professor Montesinos sobre os orbifolds com o artigo [Sco] de Peter Scott, onde pude aprender mais sobre as isometrias do plano euclidiano, da esfera e do plano hiperbólico, bem como sobre revestimentos duplos de orbifolds. A leitura desse artigo levantou-me algumas questões acerca de acções discretas e propriamente descontínuas. Para um esclarecimento destas diferenças, o livro [Thu] de William Thurston foi essencial e veio trazer um novo fôlego ao processo de escrita da tese. No livro de Thurston pode ser encontrada a demonstração dos três teoremas de Bieberbach sobre grupos cristalográficos, para além de imensa informação sobre variedades e geometria hiperbólica. Para relembrar várias matérias de Álgebra e Topologia consultei o livro [Mun] de Munkres, e para os conceitos à volta dos revestimentos utilizei o livro [Lag] do Professor Elon Lages Lima.

A restrição aos orbifolds de dimensão 2 era o objectivo, logo desde o início; a certa altura pensou-se escrever também um capítulo só sobre orbifolds esféricos e outro só sobre orbifolds hiperbólicos, mas, no decorrer da escrita, para não extender muito o texto, o Professor Eduardo Rêgo aconselhou-me a restringi-lo aos orbifolds euclidianos.

Ainda neste primeiro capítulo, depois desta reflexão sobre a génese desta tese, mostraremos o que se tem vindo a estudar sobre grupos cristalográficos e orbifolds segundo uma perspectiva histórica.

O próximo capítulo desta dissertação trata de procurar os fundamentos teóricos que estão na base dos orbifolds e grupos cristalográficos. São distinguidos os pormenores que levam às definições de acções discretas, com órbitas discretas, propriamente descontínuas e errantes, e são apresentados os grupos cristalográficos.

No terceiro capítulo faremos uma progressão desde a definição simples de variedade até à definição de orbifold, passando pelas definições de revestimento e revestimento ramificado. Daremos conta da forte relação que existe entre os bons orbifolds e os grupos cristalográficos e explicaremos o que é a curvatura e a característica de Euler num orbifold.

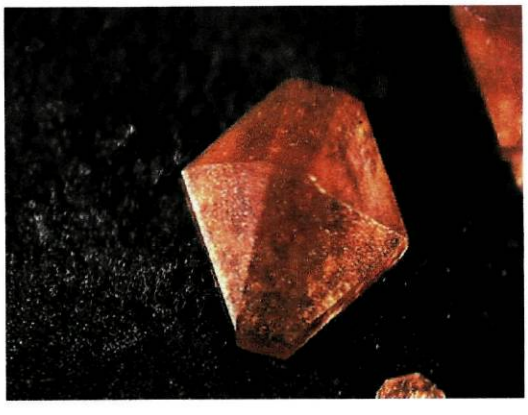
No quarto capítulo, utilizaremos uma versão do teorema de Gauss-Bonnet adaptada aos orbifolds para fazer a classificação dos 17 orbifolds euclidianos bidimensionais, apresentando assim uma prova alternativa da existência de 17 padrões de papel de parede.

Por fim, no último capítulo, descreveremos os modelos construídos no *Mathematica* em que os orbifolds euclidianos bidimensionais se desenrolam e desdobram sobre o plano, carimbando o respectivo padrão cristalográfico.

Ao longo deste trabalho iremos utilizar indistintamente $\mathbb{R}^n$ e E^n para designar o espaço euclidiano de dimensão n com a métrica euclidiana usual.

1.2 Um pouco de História

Comecemos por referir um pouco das origens da Cristalografia matemática. Desde tempos antigos que o Homem se interessa por estudar a simetria, uma vez que ela está patente na Natureza e nos objectos que o Homem cria: nos cristais a simetria tridimensional, e a simetria bidimensional nos ornamentos, como azulejos, papel de parede, frisos, etc. A Cristalografia é a área da Matemática que compreende todos os métodos para descrever a forma externa dos cristais e a sua estrutura espacial interna. As partículas que formam um cristal dispõem-se numa configuração tridimensional periódica ordenada e, em particular, os cristais que crescem em determinadas condições de equilíbrio são poliedros convexos regulares com um certo tipo de simetria.



Wulfenite (PbMoO4) © Dick Dionne

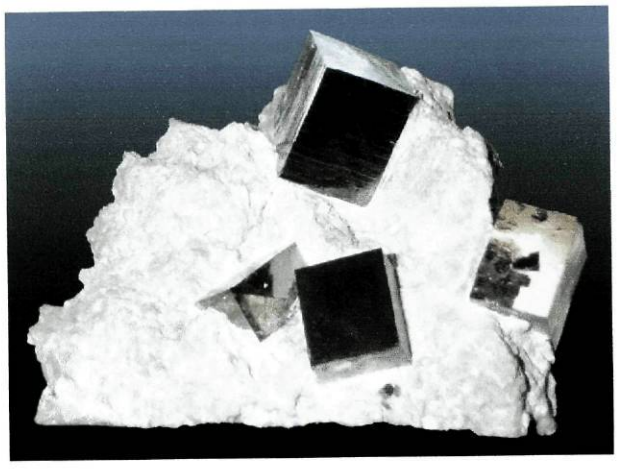
Os grupos de simetria podem ser classificados segundo vários critérios. No contexto da Cristalografia, a forma exterior dos cristais é descrita pelos grupos pontuais, que são subgrupos finitos de $\mathcal{O}(3)$. Os cristais são ainda catalogados consoante a sua estrutura atómica utilizando os grupos espaciais. Existem apenas 32 grupos pontuais que descrevem as formas externas dos cristais. Para consultar uma prova deste resultado, veja-se [Ree]. Este número de grupos pontuais foi determinado em 1830 por J. F. C. Hessel. A teoria das classes dos

cristais foi sistematizada por A. Bravais em 1948, ao identificar todos os grupos de simetria de reticulados tridimensionais (grupos de todas as transformações ortogonais que preservam um dado reticulado num espaço vectorial) e classificar os reticulados tridimensionais em 14 tipos.



Beryl (Be3Al2Si6O18) © Lou Perloff

Em 1867, C. Jordan estudou 174 grupos de isometrias, incluindo grupos cristalográficos e grupos não discretos, e identificou 16 dos 17 grupos de papel de parede. A classificação completa de todos os grupos cristalográficos de dimensão 2 e 3 só foi conseguida em 1885-1889 por E.S. Fedorov e por A. Schoenflies, independentemente, em 1891. A lista correcta dos 230 grupos cristalográficos de dimensão 3 foi conseguida comparando as obras destes dois autores. As simetrias do tipo translações existentes na estrutura interna de um cristal só são detectadas microscopicamente, por isso cada um destes 230 grupos espaciais é macroscopicamente semelhante a um dos 32 grupos pontuais. Hoje em dia, a identificação de um cristal a um destes 230 grupos é feita através de análise de raios-x.



Pyrite (FeS2) © Dave Barthelmy

Em 1910, L. Bieberbach investigou os grupos cristalográficos de dimensão n arbitrária e

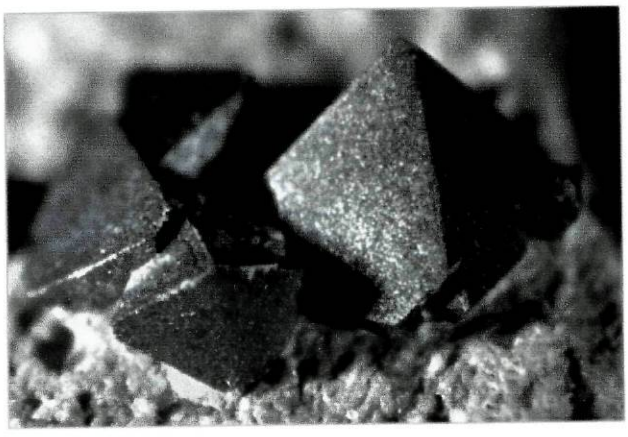
provou os seguintes teoremas[1]:

1. Um grupo cristalográfico G de dimensão n contém n translações linearmente independentes e o seu grupo pontual, correspondente ao quociente de G pelo grupo das translações em G, é finito.

2. Dois grupos cristalográficos são afim-equivalentes se e só se são isomorfos como grupos abstractos.

3. Dado n, há, a menos de equivalência, apenas um número finito de grupos cristalográficos n-dimensionais.

Este último teorema veio dar resposta ao 18º dos famosos 23 problemas matemáticos do século, propostos por David Hilbert no Congresso Internacional de Matemática de Paris em 1900. Bieberbach não mostrou qual seria esse número, apenas mostrou que seria um número finito de grupos. Na década de 70 foi possível calcular, recorrendo à ajuda de computadores, que, para dimensão $n = 4$, esse número seria 4783. Para dimensões $n > 4$ ainda não está completamente determinado o número de grupos, existindo apenas resultados parciais.



Magnetite (FeFe2O4) © Lou Perloff

A definição formal de orbifold teve a sua origem em 1956 pela mão de Ichirô Satake sob o nome *V-variedade*. A letra "V" sugeria singularidades do tipo cone, aquilo que aqui designaremos por picos. O Professor William Thurston popularizou os orbifolds com a designação actual ao introduzi-los numa disciplina de Topologia Geométrica que leccionou na Universidade de Princeton. As notas deste curso de 1978 intituladas "Three dimensional geometry and topology" circularam entre a comunidade científica e suscitaram o interesse de vários matemáticos, dando origem a vários artigos sobre o assunto, entre os quais está o artigo [Sco] escrito por Peter Scott em 1983.

[1] A demonstração dos três teoremas de Bieberbach pode ser encontrada em [Thu].

O que significa o nome *orbifold*? Se, por um lado, *orbi* sugere um espaço constituido pelas órbitas de uma acção de grupo, por outro lado, *fold* sugere a incorporação de dobragens, correspondentes a singularidades como espelhos, por analogia com aquelas dobragens de papel onde se recorta uma figurinha e depois, ao desdobrar, se vê um padrão (cristalográfico). A designação *caleidoscópio*, sugerida por Montesinos para os orbifolds de dimensão 2, vem da concepção de orbifold como sendo uma espécie de variedade onde se pode "ver" o padrão do grupo cristalográfico respectivo; os caleidoscópios que se vendem para as crianças correspondem precisamente ao orbifold com três espelhos $D\overline{333}$.

Os três tipos de grupos que estão nas bases da cristalografia geral — grupos pontuais, grupos do plano e grupos espaciais — correspondem, respectivamente, aos orbifolds elípticos bidimensionais, orbifolds euclidianos bidimensionais e orbifolds euclidianos tridimensionais. Se os grupos espaciais forem projectados ao longo dos seus eixos primários de simetria transformam-se em grupos do plano, enquanto que se forem projectados ao longo do espaço de todas as translações originam grupos pontuais.

O primeiro estudo sistemático de orbifolds cristalográficos foi levado a cabo por W. Dunbar na sua dissertação orientada por Thurston. Um outro desenvolvimento surge no manuscrito de 1983 de Bonahon e Siebenmann, em que os orbifolds euclidianos de dimensão 2 são usados como base para construir os orbifolds euclidianos tridimensionais usando espaços fibrados de Seifert. O livro [Mon1] do Professor Montesinos foca alguns aspectos deste trabalho de Bonahon e Siebenmann.

Existem variadas nomenclaturas, propostas por vários autores, para classificar os 17 orbifolds euclidianos bidimensionais. Poderíamos usar a nomenclatura proposta por Conway, ou a nomenclatura internacional dos grupos cristalográficos, mas aqui usaremos a notação proposta por Montesinos, por salientar as singularidades e a variedade subjacente em cada orbifold.

2 Acções de grupo e grupos cristalográficos

Neste capítulo vamos começar por introduzir alguns conceitos sobre acções de grupo e distinguir as várias definições semelhantes de acções de grupo discretas e propriamente descontínuas, de modo a clarificar as diferenças entre elas.

Iremos provar a equivalência entre acções discretas e propriamente descontínuas, no caso de acções de grupos de isometrias de $\mathbb{R}^n$. Esta equivalência ainda se mantém se se tratar de acções de um grupo de isometrias numa variedade completa riemanniana, o que pode ser provado utilizando um resultado clássico de Topologia — o teorema de Ascoli-Arzela — e um resultado nada trivial, que surge da noção de função de revelação (*developing map*), que é o facto de uma isometria ficar determinada num aberto.

Por fim introduziremos as noções de espaço quociente e de grupo cristalográfico, ilustrando com alguns exemplos da Topologia e da Cristalografia.

2.1 Acções de grupo

Sejam $X \neq \varnothing$ e G um grupo. Uma **acção à esquerda de G em X** é uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & G \times X \longrightarrow X \\ & (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

com as seguintes propriedades:

(*i*) $1_G \cdot x = x \quad \forall x \in X$

(*ii*) Se $g, h \in G$ então $(g\ h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \quad \forall x \in X$

Uma acção φ de G em X diz-se uma **acção por homeomorfismos**, se X é um espaço topológico e $\forall g \in G$ a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_g : \quad & X \longrightarrow X \\ & x \longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. Vamos considerar apenas **acções efectivas**, isto é, em que o único elemento que fixa todos os pontos de X é a identidade. Deste modo G pode ser visto como um grupo de homeomorfismos de X, em relação à operação de composição. De facto, se designarmos por H o conjunto dos homeomorfismos φ_g de X tais que $g \in G$, então

$$\varphi_{1_G}(x) = 1_G \cdot x = x \quad \forall x \in X$$

logo $\varphi_{1_G} = 1_H \in H$. Se $g, h \in G$ então $\varphi_g, \varphi_h \in H$ e tem-se

$$(\varphi_g \circ \varphi_h)(x) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = \varphi_g(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) = (g\ h) \cdot x = \varphi_{gh}(x) \quad \forall x \in X$$

logo $\varphi_{gh} \in H$. Como a aplicação

$$\begin{aligned} \phi: \ G &\longrightarrow H \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos sobrejectivo (por definição) e com $Ker\ \phi = 1_G$, pela acção ser efectiva, então $G \cong H \leqslant Homeo(X)$.

Consideremos, como primeiro exemplo, o grupo $G = \mathbb{R}^* = (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ e o espaço topológico $X = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: \ \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ (k,(x,y)) &\longmapsto k\cdot(x,y) = (kx,ky) \end{aligned}$$

é uma acção de grupo pois satisfaz as condições

(i) $1\cdot(x,y) = (1\cdot x, 1\cdot y) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

(ii) Se $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^*$ então

$$\begin{aligned} (k_1\cdot k_2)\cdot(x,y) &= (k_1k_2x, k_1k_2y) \\ &= k_1\cdot(k_2x, k_2y) \\ &= k_1\cdot(k_2\cdot(x,y)) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \end{aligned}$$

Esta acção é efectiva uma vez que se $k(x,y) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ então $k = 1$. Também é uma acção por homeomorfismos porque $\forall k \in \mathbb{R}^*$ a aplicação que usualmente designamos por **homotetia de razão** k

$$\begin{aligned} \varphi_k: \ \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ (x,y) &\longmapsto (kx,ky) \end{aligned}$$

é contínua, bijectiva e com inversa contínua, sendo portanto um homeomorfismo.

Vejamos outro exemplo. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $n \in \mathbb{N}$; então

$$GL(n,\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det A \neq 0\}$$

é o grupo linear, $\mathbb{K}^n$ representa as matrizes coluna de n elementos de $\mathbb{K}$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: \ GL(n,\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (A,x) &\longmapsto A\cdot x \end{aligned}$$

é uma acção à esquerda de $GL(n, \mathbb{K})$ em $\mathbb{K}^n$.

Se nada for dito em contrário, doravante usaremos simplesmente o termo **acção** para designar uma acção efectiva por homeomorfismos e identificaremos G ao correspondente subgrupo de $\mathrm{Homeo}(X)$.

Dada uma acção de G em X, designa-se por **órbita** de $x \in X$ o conjunto

$$Gx = \{gx : g \in G\}.$$

Dados dois pontos $x, y \in X$, acontece que ou têm a mesma órbita ou as suas órbitas não se intersectam. Este facto deve-se à relação $x \sim y$ definida por

$$x \sim y \iff \exists g \in G : g \cdot x = y$$

ser uma relação de equivalência entre os pontos x e y. Na verdade, é uma relação reflexiva pois

$$1_G \cdot x = x \text{ logo } x \sim x.$$

É uma relação simétrica, uma vez que:

$$\text{se } x \sim y \text{ então } \exists g \in G : g \cdot x = y$$

como G é grupo, $g^{-1} \in G$ logo

$$g^{-1} \cdot g \cdot x = g^{-1} \cdot y \iff x = g^{-1} \cdot y \text{ logo } y \sim x.$$

É também uma relação transitiva:

$$\begin{aligned} \text{se } x &\sim y \text{ então } \exists g \in G : g \cdot x = y. \\ \text{se } y &\sim z \text{ então } \exists h \in G : h \cdot y = z. \end{aligned}$$

como G é grupo, $h^{-1} \in G$ logo $y = h^{-1} \cdot z$ e portanto

$$g \cdot x = h^{-1} \cdot z \iff h \cdot g \cdot x = z$$

como G é grupo e $g, h \in G$ então $h \cdot g \in G$ e portanto $x \sim z$.

A classe de equivalência de x é a sua órbita Gx, logo, dados $x, y \in X$, tem-se que ou $Gx = Gy$ ou $Gx \cap Gy = \varnothing$.

No exemplo anterior, a órbita de um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ é a recta vectorial de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbb{R}^*(x, y) = \{(kx, ky) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} : k \in \mathbb{R}^*\}$$

O **estabilizador** (ou **grupo de isotropia**) de $x \in X$ é o conjunto

$$G_x = \{g \in G : gx = x\} = \mathrm{Stab}(x)$$

Ainda relativamente ao mesmo exemplo, o estabilizador de qualquer ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ é o conjunto constituído apenas pela identidade. Mas consideremos outros exemplos. A acção no espaço $X = \mathbb{R}^2$ do grupo cíclico G gerado por uma rotação de ângulo $\frac{2\pi}{n}$ em torno de um ponto $O \in \mathbb{R}^2$ tem como estabilizador do ponto O o próprio grupo G. Já a acção do grupo $SO(3)$ das rotações da esfera S^2 admite o conjunto das rotações em torno do eixo dos zz como estabilizador dos pontos dados pelas coordenadas $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$ (pólo Norte e pólo Sul).

Uma acção de G em X diz-se **livre** se não tem pontos fixos, isto é, se, dado um ponto qualquer de X, o único elemento de G que fixa esse ponto é a identidade. A acção referida no primeiro exemplo é uma acção livre, pois, como já vimos, o estabilizador de qualquer ponto é trivial. A acção do segundo exemplo não é livre.

2.2 Acções discretas

Diz-se que uma acção de G em X é **discreta** se G é um subconjunto discreto do grupo de homeomorfismos de X, com a topologia compacta-aberta. A **topologia compacto-aberto** no espaço $C(X, Y)$ das aplicações contínuas de X em Y é a topologia que tem como subbase os conjuntos

$$\mathcal{V}(K, U) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\},$$

onde K é um compacto de X e U é um aberto de Y. Se Y for um espaço métrico, então a topologia compacto-aberto coincide com a **topologia da convergência uniforme em compactos**, em que a base é formada por conjuntos do tipo

$$B_f(K, \epsilon) = \{g \in C(X, Y) : d(g(x), f(x)) < \epsilon \quad \forall x \in K\}.$$

O típico elemento da base desta topologia que contém a função f consiste no conjunto das funções que estão próximas de f em todos os pontos de um conjunto compacto. Note-se que

a topologia compacto-aberto não exige que Y seja um espaço métrico, logo a topologia da convergência uniforme em compactos é independente da métrica definida em Y.

Se, para além disto, X for um compacto, então esta topologia coincide com a **topologia da convergência uniforme**, em que a base é formada por conjuntos do tipo

$$B(f,\epsilon) = \{g \in C(X,Y) : d(g(x), f(x)) < \epsilon \quad \forall x \in X\}.$$

Há outras propriedades que uma acção pode ter e que implicam que a acção seja discreta. Devido às suas semelhanças de definições e terminologia, os seus termos são frequentemente confundidos. Iremos ver cuidadosamente essa sequência de atributos de uma acção, em que cada um é mais forte que o anterior, analisaremos as suas diferentes condições e esclarecer-emos as várias situações com exemplos e contra-exemplos.

A primeira destas propriedades envolve o conceito de órbita discreta.

Diz-se que uma acção de G em X tem **órbitas discretas** se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que o conjunto

$$\{g \in G : gx \in U\}$$

é finito.

Qualquer acção de um grupo finito tem órbitas discretas. Por exemplo, a acção na esfera S^2 do grupo G gerado por uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo dos zz tem órbitas discretas pois é um grupo finito. Mas, para um grupo não finito ter órbitas discretas, é preciso que não haja pontos fixos, pois caso contrário existiriam infinitos elementos do grupo (todos) que enviavam esse ponto numa qualquer sua vizinhança.

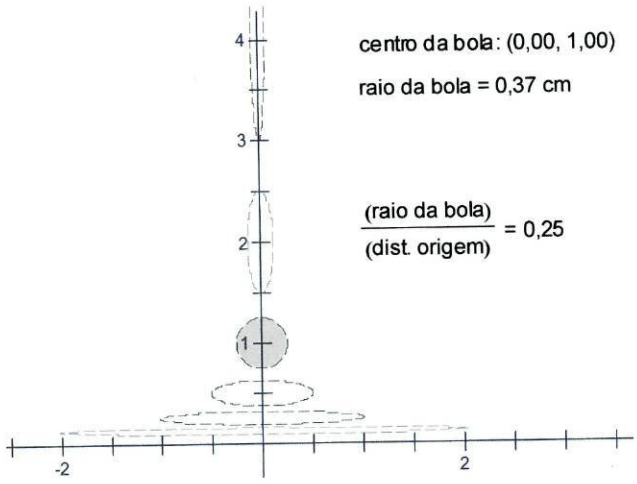
Prossigamos para outra característica de uma acção, aquela que é denominada por *wandering* em *[Thu]*.

Diz-se que uma acção de G em X é **errante** se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que o conjunto

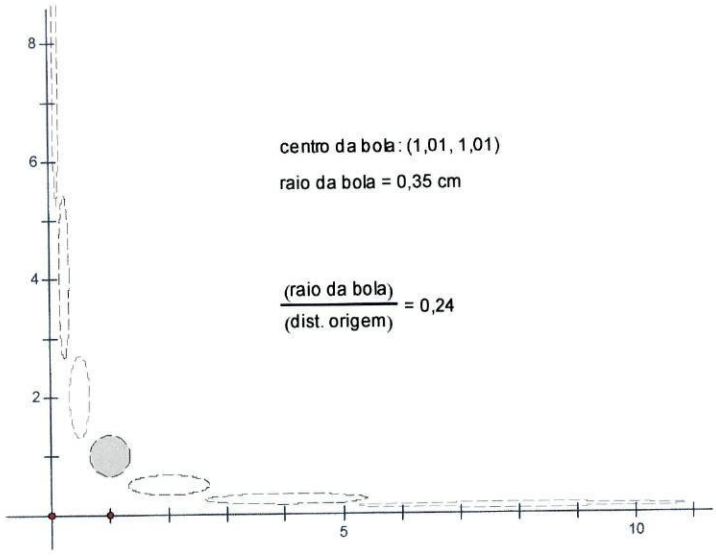
$$\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$$

é finito.

Vejamos, como exemplo, a acção em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ do grupo de difeomorfismos $G \cong \mathbb{Z}$ gerado pela aplicação linear $\phi : (x,y) \longmapsto \left(2x, \frac{1}{2}y\right)$, ilustrado na figura seguinte. Este exemplo pode ser explorado no ficheiro *Errante.gsp* contido no CD.



A acção é errante, pois dado qualquer ponto de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ podemos escolher, como sua vizinhança, uma bola com raio igual a $\frac{1}{4}$ da distância do ponto à origem, que será enviada por qualquer elemento ϕ^n, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$, em abertos disjuntos desta bola.



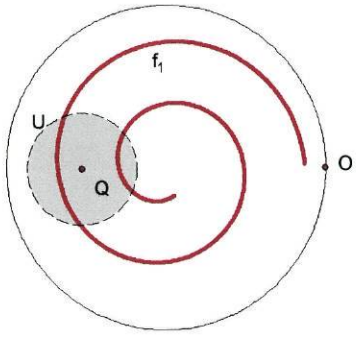
Se uma acção é errante, então tem órbitas discretas. Para o provar, dado $x \in X$, escolhamos U vizinhança de x tal que $\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$ é finito. Por U ser vizinhança de x, $gx \in gU$ e gU intersecta U no máximo para um número finito de $g \in G$, logo tem-se $gx \in U$ no máximo para um número finito de $g \in G$.

O contrário já não é verdade. Tomemos como exemplo a acção de $G = \mathbb{Z} \simeq < f_t >$ no espaço $X = (S^1 \times \mathbb{R} \times [-1,1]) \setminus (\{s_0\} \times \mathbb{R} \times \{0\})$, semelhante a um cilindro maciço, onde f_t é a seguinte família de difeomorfismos dos cilindros $C_t = S^1 \times \mathbb{R} \times \{t\}$ para $t \in [-1,1]\backslash\{0\}$

e $C_0 = (S^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \{0\}$:

$$\begin{array}{rccc} f_t: & C_t & \longrightarrow & C_t \\ & (\theta, z, t) & \longmapsto & \left(2\pi\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} + 2\pi|t|, z + \frac{t}{N}, t\right) \end{array}$$

em que N é o número de iterações necessárias para que as órbitas de uma bola no plano se intersectem apenas um número finito de vezes. As órbitas de uma bola fazem espirais no plano (θ, t), como se pode ver na imagem, e sobem no eixo dos zz fazendo hélices com declive t.



Este exemplo pode ser explorado no ficheiro *Órbitas discretas.gsp* contido no CD.

Esta acção tem órbitas discretas, pois qualquer ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U tal que $\{g \in G : gx \in U\}$ é finito (devido à escolha de N):

No caso de pontos do cilindro C_0, $x = (\theta, z, 0)$ é sempre enviado num ponto $f_0(x)$ com ângulo maior, que após sucessivas iterações tende para o ponto $(2\pi, z, 0)$ do segmento $\{s_0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$, que não pertence a C_0. Logo até é possível escolher uma vizinhança U de x que não contenha nenhum seu iterado gx e portanto tal que $\{g \in G : gx \in U\}$ é finito.

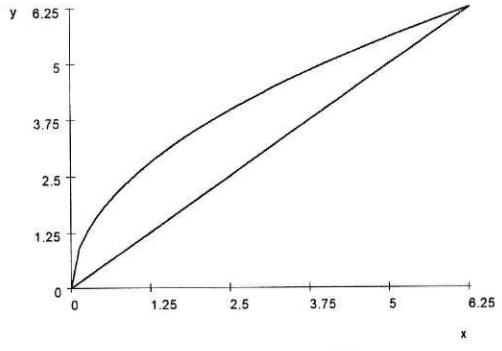


Gráfico de $f_0(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}$ e $g(\theta) = \theta$

No caso dos cilindros C_t, $t \neq 0$, um ponto $x = (\theta, z, t)$ é enviado num ponto $f_t(x)$ com

ângulo que após sucessivas iterações tende para $2\pi + 2\pi\,|t|$. Para termos órbitas discretas, é necessário que a função faça subir o ponto x sempre um pouco mais, de modo a que, ao fim de um número suficiente (k) de iterações, $f_t^k(\theta, z, t)$ não pertença à vizinhança U, nem volte a pertencer.

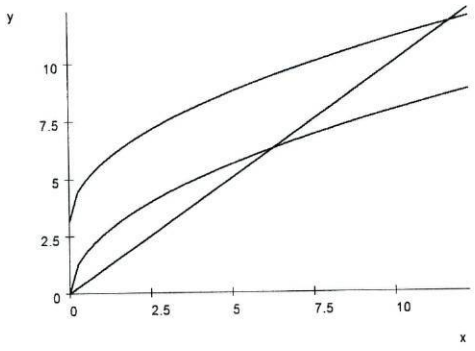


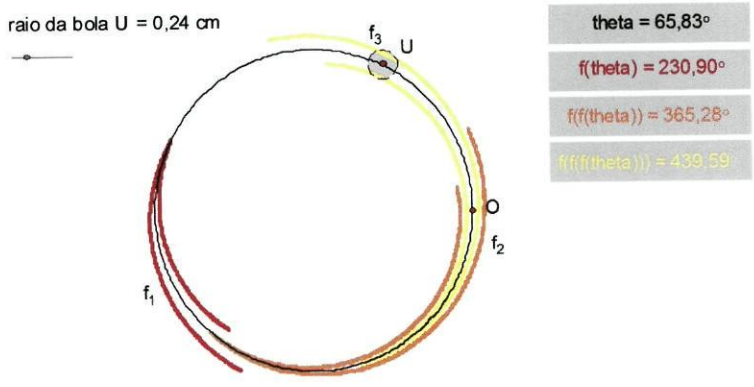
Gráfico de $f_t(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} + 2\pi\,|t|$ para $t = \frac{1}{2}$ e $g(\theta) = \theta$

Como o ponto x está a subir em altura

$$z \longmapsto z + \frac{t}{N} \longmapsto z + 2\frac{t}{N} \longmapsto \ldots \longmapsto z + k\frac{t}{N}$$

o número mínimo de iterações (k) para que o ponto $x = (\theta, z, t)$ deixe de pertencer a uma sua vizinhança original U de raio δ é tal que $k\frac{t}{N} > \delta \iff k > \delta\frac{N}{t}$.

Logo a acção tem órbitas discretas.



A acção não é errante se $\exists x \in X$ tal que, para qualquer vizinhança U de x, o conjunto $\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$ é infinito. Vamos considerar $x \in C_0$ e ver que, ao fim de um certo número de iterações, todos os iterados da vizinhança U intersectam U.

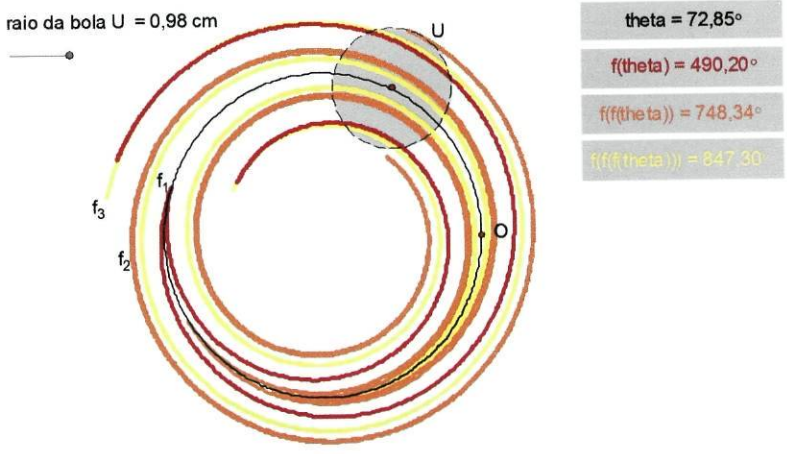
Como

$$f_0(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} = \sqrt{2\pi\theta},$$

então

$$\lim_{\theta \longrightarrow 2\pi} f_0(\theta) - \theta = \lim_{\theta \longrightarrow 2\pi} \sqrt{2\pi\theta} - \theta = 0$$

logo é possível escolher $x = (\theta, z, 0) \in C_0$ tal que ao fim de suficientes iterações o ângulo θ está próximo de 2π e qualquer vizinhança U de x com raio δ intersecta infinitas imagens suas.



Para que uma vizinhança de raio δ intersecte infinitas imagens suas, é necessário que a função nunca faça toda a vizinhança subir no eixo doz zz mais do que δ, em todas as imagens da vizinhança tem de existir sempre uma parte que subiu no eixo doz zz menos do que δ. Isso é garantido pelo facto da vizinhança conter pontos tão próximos de C_0 quanto queiramos, e que portanto sobem tão pouco quanto queiramos.

2.3 Acções propriamente descontínuas

Um espaço topológico X é **localmente compacto** se todo o ponto $x \in X$ tem uma vizinhança contida num compacto. Como exemplos de espaços localmente compactos temos o espaço euclideano, ou mesmo um qualquer conjunto compacto. Os espaços de Banach de dimensão infinita servem como exemplo de espaços que não são localmente compactos.

Sendo X localmente compacto, diz-se que uma acção de G em X é **propriamente descontínua** se para todo o compacto $K \subset X$ o conjunto

$$\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$$

é finito.

Note-se que se uma acção de G em X é propriamente descontínua, então o estabilizador de um qualquer ponto $x \in X$ tem de ser finito. Para provar esta afirmação consideremos $x \in X$, que tem como estabilizador $Gx = \{g \in G : gx = x\}$. Se a acção é propriamente descontínua então, como $\{x\}$ é um compacto, temos que é finito o conjunto

$$\{g \in G : g\{x\} \cap \{x\} \neq \emptyset\} = \{g \in G : gx = x\}$$

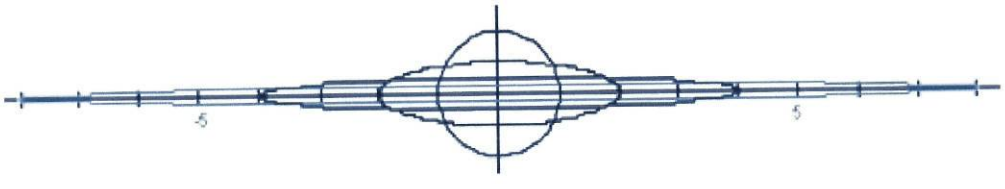
e portanto o estabilizador de x é finito.

Se uma acção é propriamente descontínua, então é errante. Para o demonstrar, consideremos $x \in X$. Como X é localmente compacto, existe uma vizinhança U de x contida num compacto K. Se a acção é propriamente descontínua, $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$ é finito, e como $U \subset K$ e $gU \subset gK$ então $(gU \cap U) \subset (gK \cap K)$ logo tem-se que $\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$ é finito, e portanto a acção é errante.

O contrário não se verifica, como mostra a acção em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ do grupo de difeomorfismos $G = \mathbb{Z}$ gerado pela aplicação linear $\phi : (x, y) \longmapsto (2x, \frac{1}{2}y)$, que serviu como exemplo de uma acção errante, na pág. 11. Esta acção não é propriamente descontínua, pois se considerarmos o compacto de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ constituído pela circunferência S^1 de centro $(0,0)$ e raio 1, ele será enviado por qualquer elemento da forma ϕ^n, $n \in \mathbb{N}$, num compacto que o intersecta, como se pode ver na imagem, resultando que o conjunto

$$\left\{\phi^n \in G : \phi^n\left(S^1\right) \cap S^1 \neq \emptyset\right\}$$

não é finito.



Podemos assim concluir, pelo que já vimos antes, que uma acção propriamente descontínua tem órbitas discretas.

Vejamos ainda que basta uma órbita discreta para que uma acção seja discreta:

Se $x \in X$ tem uma órbita discreta, existe um aberto U tal que $\{g \in G : gx \in U\}$ é finito, digamos $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$, onde $g_1 = 1_G$. Logo a função identidade 1_X , correspondente ao homeomorfismo φ_{g_1}, tem uma vizinhança, relativamente à topologia compacta-aberta, da

forma

$$V(\{x\}, U) = \{f \in \text{Homeo}(X) : f(\{x\}) \subset U\}$$

que é tal que $V(\{x\}, U) \cap G = \{g_1, g_2, ..., g_k\}$. Sendo a identidade isolada, então todas as outras funções $g \in G$ são isoladas, e portanto a acção é discreta. Para o demonstrar, suponhamos, por redução ao absurdo, que a identidade é isolada e que existe $g \in G$ não isolada. Então qualquer vizinhança

$$V_g(K, U) = \{f \in \text{Homeo}(X) : f(K) \subset U\}$$

contém um elemento $f \neq g$. Logo $g^{-1}f \neq Id$ e

$$g^{-1}f(K) \subset g^{-1}(U) = U' \text{ e } g^{-1}g(K) \subset g^{-1}(U) = U'$$

logo $Id(K) \subset U'$ e $g^{-1}f(K) \subset U'$ implica que $g^{-1}f$ pertença a uma vizinhança arbitrária da identidade $V_{Id}(K, U')$, o que é absurdo.

O facto de uma acção ser propriamente descontínua implica, assim, que seja uma acção discreta. O contrário, em geral, é falso, mas é válido para acções de um grupo de isometrias numa variedade completa riemanniana. A definição de variedade riemanniana pode ser encontrada mais à frente, na secção 3.1, página 35. No caso particular de acções de grupos de isometrias de $\mathbb{R}^2$ iremos provar a equivalência directamente, visto ser especialmente elementar.

2.3.1 Grupos de isometrias de $\mathbb{R}^2$

Designaremos por $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ o grupo de todas as isometrias do plano, também chamado grupo de Galileu. É sabido que só existem 4 tipos de isometrias do plano: translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes. Como qualquer translação pode ser vista como a composta de duas reflexões em rectas paralelas, qualquer rotação pode ser decomposta em duas reflexões em rectas concorrentes e uma reflexão deslizante é a composta de uma reflexão com uma translação segundo um vector paralelo ao eixo de reflexão, então o grupo $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ pode ser gerado apenas por reflexões. Mais geralmente, o grupo $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ é gerado por reflexões em hiperplanos.

Vamos mostrar que se uma acção de um grupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$ for discreta então também é propriamente descontínua.

Consideremos um grupo $H \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Suponhamos, por redução ao absurdo, que a acção é discreta mas não é propriamente descontínua. Deste modo, existe uma sucessão de

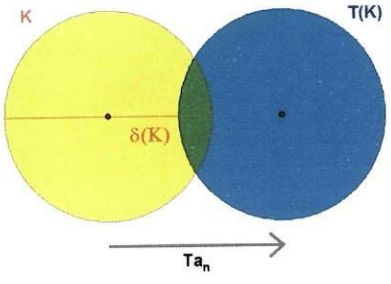
isometrias $h_n \in H,\ n = 1, 2, ...$ e um compacto K de $\mathbb{R}^2$ tal que $h_n(K) \cap K \neq \varnothing$, a menos de reindexação de subsucessões. Distinguimos quatro casos:

1. Há um número infinito de isometrias h_n que são translações.

   Designando por T_{a_n} a translação associada ao vector a_n e por $\delta(K)$ o raio do compacto K (isto é, metade da maior distância entre quaisquer dois pontos de K), temos que

   $$\|a_n\| \leq 2\ \delta(K)$$

   estando, assim, a sucessão a_n contida num subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$.

   Por isso, a_n tem uma subsucessão convergente $a_{k_n} \longrightarrow a$ e, consequentemente, de Cauchy, ou seja

   $$\forall \epsilon > 0\ \ \exists N(\epsilon) : n, m \geq N(\epsilon) \implies \|a_{k_n} - a_{k_m}\| \leq \epsilon$$

   A operação de composição de translações verifica $T_{a_n} T_{a_m} = T_{a_n + a_m}$, logo podemos tomar a translação $T_{a_{k_n} - a_{k_m}}$ e concluir que

   $$\forall \epsilon > 0\ \ \exists N(\epsilon) : n, m \geq N(\epsilon) \implies T_{a_{k_n} - a_{k_m}}(K) \subset U$$

   para algum aberto U tal que $K \subset U$, bastando considerar

   $$U = V(K, 3\delta) = \{x : d(x, K) < 3\delta\}\,.$$

   Esta translação $T_{a_{k_n} - a_{k_m}}$ está tão próxima da identidade quanto queiramos, o que significa que a identidade não é isolada para a topologia c.a., pois uma qualquer vizinhança da identidade

   $$\mathcal{V}(K', U') = \left\{f \in \text{Homeo}(\mathbb{R}^2) : f(K') \subset U'\right\}$$

   contém isometrias de $\mathbb{R}^2$, nomeadamente a translação $T_{a_{k_n} - a_{k_m}}$, e portanto a acção não é discreta, o que é absurdo.

2. Há um número infinito de reflexões deslizantes D_n.

   Decompondo cada reflexão deslizante na respectiva reflexão num eixo l_n e translação segundo um vector a_n com a mesma direcção de l_n:

$$D_n = T_{a_n} R_{l_n} = R_{l_n} T_{a_n}, \text{ onde } a_n \parallel l_n,$$

   temos de ter

$$l_n \cap K \neq \varnothing \ \forall n \text{ e } \|a_n\| \leq 2\ \delta(K).$$

   Isto origina dois subcasos:

   (a) ou há um número infinito de a_n diferentes

   e temos $D_n^2 = T_{2a_n}$ um número infinito de translações limitadas, conduzindo, como anteriormente, a um absurdo;

   (b) ou há um número infinito de l_n paralelas com o mesmo a_n

   e como $D_n D_m^{-1} = R_{l_n} T_{a_n} T_{-a_n} R_{l_m}$
   $= R_{l_n} T_{a_n - a_n} R_{l_m}$

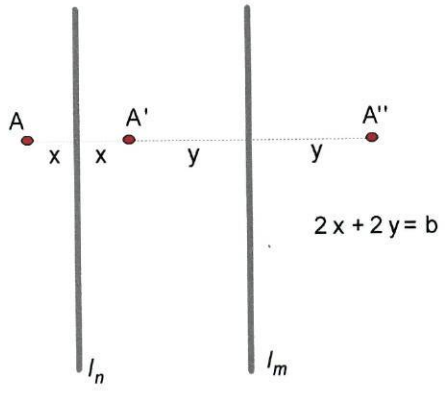
   então

$$D_n D_m^{-1} = R_{l_n} R_{l_m}$$

   Como l_n e l_m são paralelas, temos

$$D_n D_m^{-1} = T_b$$

   onde $\|b\| = 2\ d(l_n, l_m)$ e como $l_n \cap K \neq \varnothing\ \forall n$, a translação T_b considerada tem $\|b\|$ limitada por um múltiplo de $\delta(K)$.



   Assim, e como considerámos um número infinito de l_n paralelas, teríamos infinitas translações T_b limitadas, o que já vimos que é impossível.

3. Há um número infinito de h_n que são reflexões R_{l_n}.

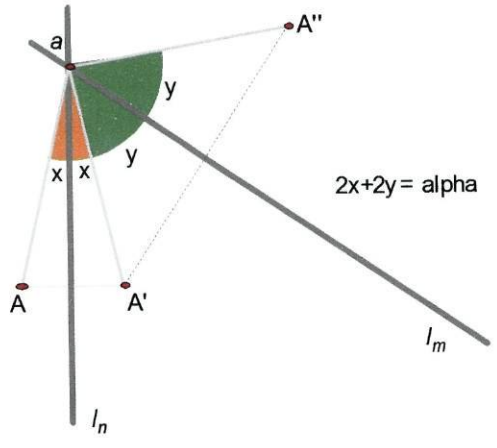
   Como já vimos, para que $h_n(K) \cap K \neq \varnothing$, tem de acontecer $l_n \cap K \neq \varnothing \ \forall n$ e temos duas possibilidades:

   (a) ou há um número infinito de paralelas l_n,
   reduzindo-se ao caso anterior;

   (b) ou há um número infinito de rectas l_n que se intersectam,
   definindo um número infinito de rotações $R_{(a,\alpha)}$

$$R_{l_n} R_{l_m} = R_{(a,\alpha)}$$

   onde $l_n \cap l_m = \{a\}$ e $\alpha = 2\measuredangle(l_n, l_m)$.



A composta de duas rotações $R_{(a,\alpha)} \circ R_{(b,\beta)}$ é uma rotação de ângulo $\alpha+\beta$, excepto se $\alpha+\beta \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, caso em que $R_{(a,\alpha)} \circ R_{(b,\beta)} = T_c$, para algum vector c. Logo ou temos um número infinito de rotações ou um número infinito de translações T_c limitadas (porque $l_n \cap K \neq \varnothing \ \forall n$), o que já vimos que é absurdo.

Consideremos então que temos um número infinito de rotações $R_{(a_n,\alpha_n)}$. Neste caso, não pode haver um número finito de ângulos α_n porque partimos do princípio que não havia um número infinito de paralelas. Assim, temos um número infinito de ângulos α_n, e então existe uma subsucessão convergente $\alpha_{k_n} \longrightarrow \alpha$, logo de Cauchy e, de forma análoga ao 1^o caso, podemos obter uma rotação de ângulo arbitrariamente pequeno. Pode haver um número finito ou infinito de centros de rotação a_n, mas para que $R_{(a_n,\alpha_n)}(K) \cap K \neq \varnothing \ \forall n$, os centros $\{a_n\}$ têm de ser limitados. Se não o fosse, ao considerar rotações sucessivas de K em torno de uma sucessão de centros de rotação não limitados, mesmo com ângulos de rotação arbitrariamente pequenos, haveria sempre um pequeno deslocamento de

K tal que a certa altura se perderia a intersecção. Sendo $\{a_n\}$ uma sucessão de pontos limitada, existe uma subsucessão convergente $a_{k_n} \longrightarrow a$, logo de Cauchy, conduzindo a que a identidade não seja isolada para a topologia c.a. e portanto a acção não seria discreta, contrariando o pressuposto.

4. Há um número infinito de rotações $R_{(a_n,\alpha_n)}$.

   Este caso reduz-se ao caso 3.(b). ■

2.3.2 Grupos de isometrias de $\mathbb{R}^n$

A prova, no caso de acções de um grupo de isometrias em $\mathbb{R}^n$ ou numa variedade completa riemanniana, envolve a noção de conjunto equicontínuo e o teorema de Ascoli-Arzela, que apenas enunciaremos, e cuja prova pode ser consultada em [Mun]. A definição formal do conceito de variedade completa riemanniana será dada mais à frente neste trabalho, no capítulo 3.1 sobre variedades.

Sejam X um espaço topológico, Y um espaço métrico. Um conjunto de funções contínuas $B \subset C(X,Y)$ diz-se **equicontínuo** num ponto $x_0 \in X$ se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, U \text{ vizinhança de } x_0 \text{ tal que } \forall x \in U \text{ e } \forall f \in B \text{ se tem } d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Esta definição amplia a definição usual de continuidade ao considerar que a mesma vizinhança U serve para todas as funções $f \in B$.

Por exemplo, um conjunto constituído por isometrias é equicontínuo em qualquer ponto x_0, pois, dado $\epsilon > 0$, basta escolher uma vizinhança U de x_0 com raio $\delta < \epsilon$ para que $\forall x \in U$ e $\forall f$ isometria se tenha

$$d(f(x), f(x_0)) = d(x, x_0) = \delta < \epsilon.$$

Teorema 1 (Ascoli-Arzela) *Sejam X um espaço topológico e Y um espaço métrico. Seja $B \subset C(X,Y)$. Se*

i) B é equicontínuo $\forall x \in X$ e

ii) $\forall x \in X \quad \overline{\{f(x) : f \in B\}}$ é um compacto em Y

então $\overline{B}$ é um compacto em $C(X,Y)$ para a topologia compacta-aberta.

Uma isometria $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ fica determinada pela imagem de $n+1$ pontos linearmente independentes. Em particular, para qualquer bola fechada $\overline{B(a,r)} \subset \mathbb{R}^n$, se considerarmos $I(\overline{B(a,r)}, \mathbb{R}^n)$ os mergulhos isométricos de $\overline{B(a,r)}$ em $\mathbb{R}^n$, temos que a aplicação

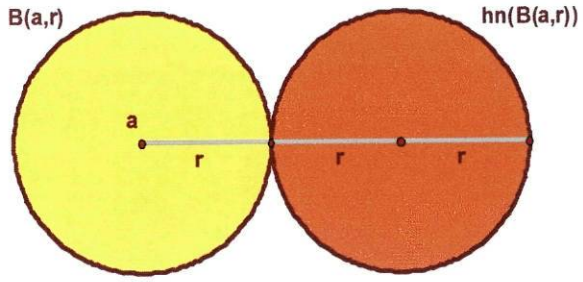
$$\begin{array}{rccc} F: & I(\overline{B(a,r)}, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \\ & f & \longmapsto & \overline{f} \end{array}$$

é um homeomorfismo, onde $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ tem como métrica a métrica da convergência uniforme em qualquer bola que se escolha.

Consideremos um grupo H de isometrias de $\mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que se a acção de H em $\mathbb{R}^n$ não é propriamente descontínua, então também não é discreta.

Ora, se a acção não é propriamente descontínua, então $\exists\ K$ compacto tal que $\exists\ h_n \in H$, $n = 1, 2, ...$ tal que $h_n(K) \cap K \neq \varnothing$. Sejam $H' = \{h_n : n = 1, 2, ...\}$ e $\overline{B(a,r)}$ uma bola fechada que contenha K (existe porque K é compacto). Então

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h_n(\overline{B(a,r)}) \cap \overline{B(a,r)} \neq \varnothing \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad h_n(\overline{B(a,r)}) \subset \overline{B(a,3r)}$$



Sabemos que

- H' é equicontínuo $\forall x \in \mathbb{R}^n$ porque H' é constituído por isometrias
- $\forall x \in \overline{B(a,r)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \overline{\{h_n(x) : h_n \in H'\}}$ é um compacto de $\mathbb{R}^n$

logo, pelo teorema de Ascoli-Arzela, $\overline{H'}$ é compacto em $I(\overline{B(a,r)}, \mathbb{R}^n)$.

Então existe uma subsucessão convergente $h_{k_n} \longrightarrow h$ (ou $\overline{h}$), pelo que h_{k_n} é de Cauchy, isto é,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\ N(\epsilon) : n, m \geq N(\epsilon) \implies d(h_{k_n}, h_{k_m}) < \epsilon.$$

Isso significa que, se tomarmos a isometria $h_{k_n}^{-1} h_{k_m} \in H$ (porque $H \leq Isom(\mathbb{R}^n)$), temos

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\ N(\epsilon) : n, m \geq N(\epsilon) \implies d(id, h_{k_n}^{-1} h_{k_m}) < \epsilon.$$

Assim, a isometria $h_{k_n}^{-1}h_{k_m}$ está tão próxima da identidade quanto queiramos, o que significa que a identidade não é isolada para a topologia c.a., pois qualquer sua vizinhança

$$V(K,U) = \{f \in \text{Homeo}(\mathbb{R}^n) : f(K) \subset U\}$$

contém isometrias não triviais de $\mathbb{R}^n$, nomeadamente a isometria $h_{k_n}^{-1}h_{k_m}$, e portanto a acção não é discreta. ■

Note-se que, no caso mais geral de acções de um grupo de isometrias numa variedade riemanniana completa, a prova é semelhante à elaborada para $\mathbb{R}^n$. A ideia da prova basea-se no facto de uma isometria de uma variedade completa riemanniana conexa ficar determinada pela sua restrição a qualquer aberto $U \subset X$ e, em particular, também ficar determinada pela sua restrição a uma bola fechada $\overline{B(a,r)}$ que contenha esse aberto. Isto não é trivial e a sua demonstração envolve a noção de função de revelação (*developing map*).

O mesmo método mostra que no caso de acções por isometrias num espaço métrico compacto também coincidem os dois conceitos. Para o demonstrar, seja X um tal espaço e consideremos $B \leq Isom(X)$ com a métrica

$$d(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}.$$

Suponhamos, por redução ao absurdo, que a acção é discreta mas não é propriamente descontínua.

Como B é equicontínuo e $\forall x \in X \quad \overline{Bx} = \overline{\{f(x) : f \in B\}}$ é um compacto, então, pelo teorema de Ascoli-Arzela, $\overline{B}$ é um compacto.

Se a acção de B em X não é propriamente descontínua, então existem $f_n \in B$, $n = 1,2,...$ tal que $f_n(K) \cap K \neq \varnothing$ para algum compacto K de X. Logo $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in B \subset \overline{B}$, e portanto existe uma sucessão convergente $f_{k_n} \longrightarrow g \in Isom(X)$, onde $g \in \overline{B}$ mas não necessariamente a B.

Sabemos ainda que

$$\forall h \in Isom(X,X) \qquad \begin{array}{rccc} F_h: & Isom(X) & \longrightarrow & Isom(X) \\ & f & \longmapsto & F_h(f) = hf \end{array} \quad \text{é uma isometria}$$

$$\begin{aligned} \text{porque } d(hf,hg) &= \sup\{d(h(f(x)),h(g(x))) : x \in X\} \\ &= \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\} \\ &= d(f,g). \end{aligned}$$

Como f_{k_n} é uma sucessão convergente, então f_{k_n}é de Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) : n, m \geq N(\epsilon) \implies d(f_{k_n}, f_{k_m}) < \epsilon$$

logo, como B é subgrupo, podemos considerar $f_{k_n}^{-1} f_{k_m} \in B$ e, aplicando $F_h f_{k_n}^{-1}$, temos

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) : n, m \geq N(\epsilon) \implies d(id, f_{k_n}^{-1} f_{k_m}) < \epsilon$$

o que significa que B contém isometrias tão próximas da identidade quanto queiramos, logo B não é discreto, o que é absurdo. ■

2.4 Grupos cristalográficos

Nesta secção começamos por definir convenientemente as noções de espaço quociente e região fundamental associadas a uma acção de grupo, antes de apresentar o conceito de grupo cristalográfico, ilustrando com exemplos clássicos como o plano projectivo e o toro.

Recordemos que uma acção de G em X define uma relação de equivalência em X, em que as classes de equivalência são as órbitas de G. O espaço das órbitas com a topologia quociente diz-se o **espaço quociente** de X pela acção de G e denota-se X/G. Usualmente, indicamos por $\pi : X \longrightarrow X/G$ a **projecção canónica** que envia cada ponto $x \in X$ na sua órbita. Considerar a topologia quociente em X/G significa que um conjunto $A \subset X/G$ é, por definição, aberto sse a sua imagem inversa $\pi^{-1}(A)$ é um aberto de X. Isto implica que a projecção canónica é uma aplicação contínua; a topologia quociente é a mais fina com esta propriedade.

Uma **região fundamental** da acção de G em X é um subconjunto fechado $R \subset X$ tal que

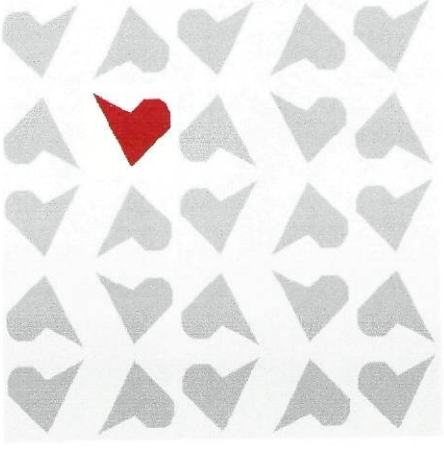
(i) $\bigcup_{g \in G} g(R) = X$ e

(ii) $\mathring{R} \cap g\left(\mathring{R}\right) = \varnothing \quad \forall g \in G$ não trivial , onde $\mathring{R}$ representa o interior de R.

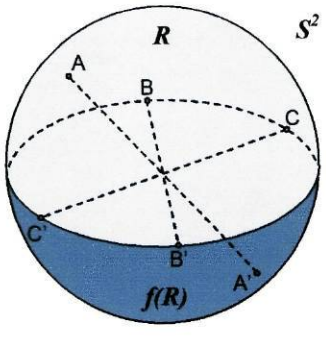
Uma região fundamental contém pelo menos um representante da órbita de cada ponto de X e no interior da região fundamental existe no máximo um elemento de cada órbita. A região fundamental de G em X pode, assim, ser vista como uma espécie de representante do espaço quociente X/G, desde que tidos em conta os possíveis elementos repetidos no bordo.

Uma **simetria** é uma isometria (ou outra operação mais abstracta) que deixa um objecto matemático (uma figura plana, um objecto tridimensional, etc) invariante. O grupo de todas as operações que deixam um objecto invariante designa-se o **grupo de simetria** desse objecto.

Na figura seguinte vemos, realçada a cor, uma região fundamental do espaço quociente $\mathbb{R}^2/G$, onde G é o grupo gerado pela reflexão num eixo e pelas rotações de ângulo π em torno de dois pontos pertencentes a uma recta paralela a esse eixo. A estrutura do grupo G é sugerida pelo motivo a vermelho na região fundamental e pelas imagens desse motivo no plano através dos elementos de G. Neste caso, a região fundamental é um quadrado, cujos lados superior e inferior são eixos de reflexão e cujos pontos médios dos seus lados esquerdo e direito são os dois centros de rotação referidos. O padrão ilustrado na imagem mantém-se invariante por qualquer uma das isometrias de G, logo diz-se que G é o grupo de simetria deste padrão.



Um outro exemplo é dado pela acção do grupo gerado pela aplicação antípoda f em S^2, $G = \{id, f\}$. O espaço quociente S^2/G é o plano projectivo real de dimensão 2, que designamos por $\mathbb{P}^2$. Podemos tomar a semiesfera superior como região fundamental R, pois $R \cup f(R) = S^2$e $\mathring{R} \cap f\left(\mathring{R}\right) = \varnothing$. Apenas no bordo há elementos que se sobrepõem.



Iremos voltar a este exemplo mais vezes ao longo deste texto. Prossigamos, agora, para

a definição de grupo cristalográfico. Embora a definição de grupo cristalográfico que aqui estudaremos seja puramente matemática, o nome *grupo cristalográfico* advém do estudo dos grupos de simetrias da estrutura dos cristais que se podem encontrar na Natureza.

Um **grupo cristalográfico** G é um subgrupo do grupo das isometrias de X tal que:

- a acção $G \times X \to X$ é propriamente descontínua
- e X/G é compacto.

Aqui, X pode ser o espaço euclidiano E^n, a esfera de dimensão n, S^n, ou o espaço hiperbólico H^n, embora tradicionalmente seja considerado o plano ou o espaço euclidiano. Daremos exemplos de grupos cristalográficos a actuar nestes três espaços.

A definição usualmente dada na cristalografia diz que um grupo cristalográfico é um grupo de isometrias de E^n cujo subgrupo das translações é um **reticulado**, em que um reticulado é um grupo abeliano

$$\Lambda = \mathbb{Z}\overrightarrow{t_1} \oplus \mathbb{Z}\overrightarrow{t_2} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}\overrightarrow{t_n}$$

gerado por n translações $\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2}, ..., \overrightarrow{t_n}$ de E^n linearmente independentes. O primeiro teorema de Bieberbach que enunciámos na página 5 diz-nos que isto equivale a ser um grupo discreto e com região fundamental limitada.

Note-se que o grupo abeliano Λ é um subgrupo discreto de $(\mathbb{R}^n, +)$ porque, considerando

$$\rho = \inf_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \|\lambda\|,$$

quaisquer dois pontos distintos do reticulado Λ distam no mínimo ρ logo, dado um ponto do reticulado, consigo encontrar uma bola (de raio $\rho/2$, por exemplo) que não contém outros pontos do reticulado.

A sua região fundamental é o paralelogramo de dimensão n

$$\mathcal{P} = \left\{ m_1 \overrightarrow{t_1} + m_2 \overrightarrow{t_2} + ... + m_n \overrightarrow{t_n} : 0 \leq m_1 \leq 1, ..., 0 \leq m_n \leq 1 \right\}$$

que é um compacto de $\mathbb{R}^n$; como a projecção canónica que envia $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^n/\Lambda$ é contínua e sobrejectiva ($\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{P} + \lambda) = \mathbb{R}^n$, por $\mathcal{P}$ ser região fundamental), então o espaço quociente $\mathbb{R}^n/\Lambda$ é compacto.

Por isso, um reticulado Λ é um subgrupo discreto com região fundamental limitada. Em particular, os reticulados são grupos cristalográficos.

Mais geralmente, qualquer grupo de isometrias de E^n cujo subgrupo das translações é um reticulado também é um grupo discreto com região fundamental limitada, devido ao

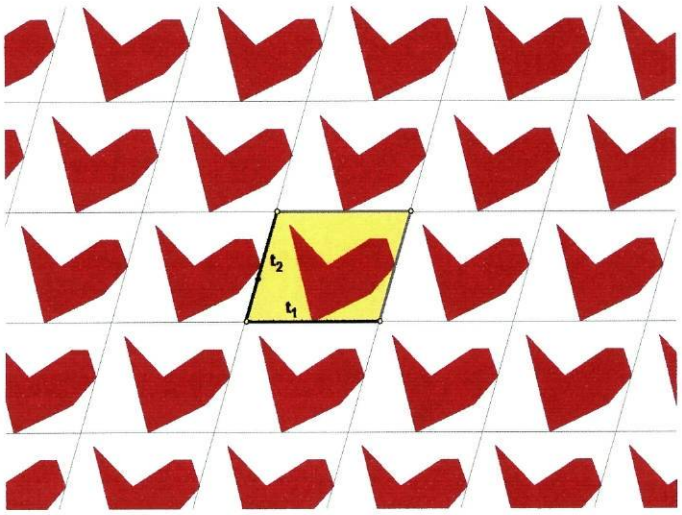
primeiro teorema de Bieberbach que enunciamos na página 5. Pelo que já vimos nas duas secções anteriores, se a acção de G em X for propriamente descontínua, então a órbita $Gx = \{gx : g \in G\}$ de cada ponto $x \in X$ pela acção $G \times X \to X$ é discreta e, sendo G um grupo de isometrias, o inverso também é verdade (ver pág. 22). Logo a definição que adoptámos coincide com a definição usual de grupo cristalográfico.

O espaço quociente $\mathbb{R}^n/\Lambda$ chama-se o **toro real n-dimensional**.

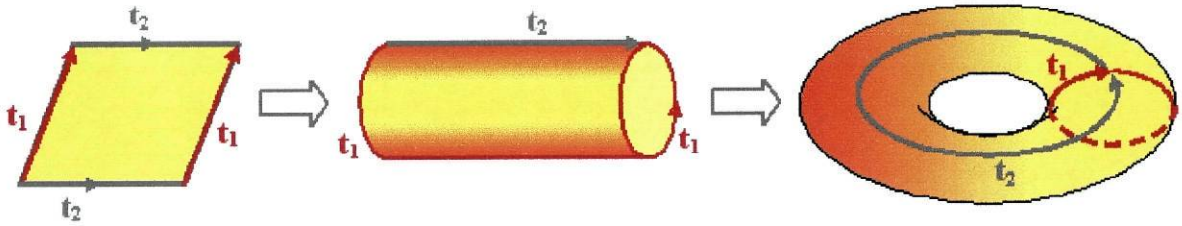
Em dimensão 2, um reticulado é um grupo abeliano

$$G = \left\{ n\ \overrightarrow{t_1} + m\ \overrightarrow{t_2} : n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

onde $\overrightarrow{t_1}$ e $\overrightarrow{t_2}$ são translações em direcções diferentes. Podemos ver a sua região fundamental representada a amarelo na figura seguinte, bem como o padrão gerado por estas duas translações.



Para todo o compacto $K \subset E^2$, o conjunto $\{g \in G : gK \cap K \neq \varnothing\}$ é finito, logo a acção $G \times E^2 \longrightarrow E^2$ é propriamente descontínua. A acção também é livre, pois o único elemento de G que fixa um ponto do plano é a identidade. O quociente desta acção, E^2/G, é um toro: identificando os pontos equivalentes por esta acção obtemos uma superfície em forma de *donut*, como se pode ver pelo esquema seguinte:

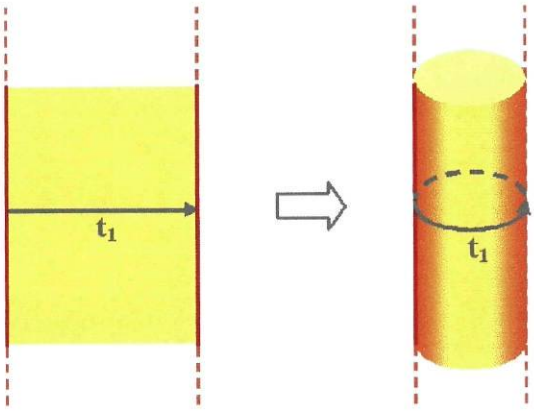


O grupo G considerado é, portanto, um grupo cristalográfico, pois a acção é propriamente descontínua e o toro é uma superfície compacta. A região fundamental é o paralelogramo a amarelo com os lados identificados.

Analogamente, a acção $G \times E^2 \longrightarrow E^2$, onde

$$G = \left\{ n \overrightarrow{t_1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

e onde $\overrightarrow{t_1}$ é uma translação, é uma acção propriamente descontínua e livre. No entanto, G não é um grupo cristalográfico porque, embora a acção $G \times E^2 \to E^2$ seja propriamente descontínua, o quociente E^2/G é um cilindro, que não é compacto, uma vez que é homeomorfo a $E^2 \backslash \{0\}$.

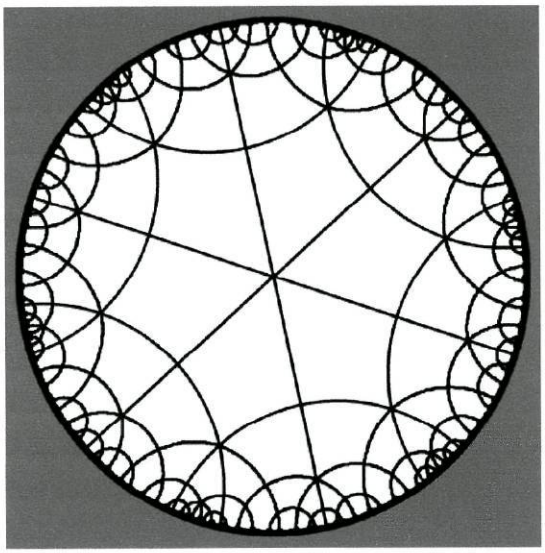


Repare-se que neste caso a região fundamental não é limitada: é uma tira entre duas rectas paralelas.

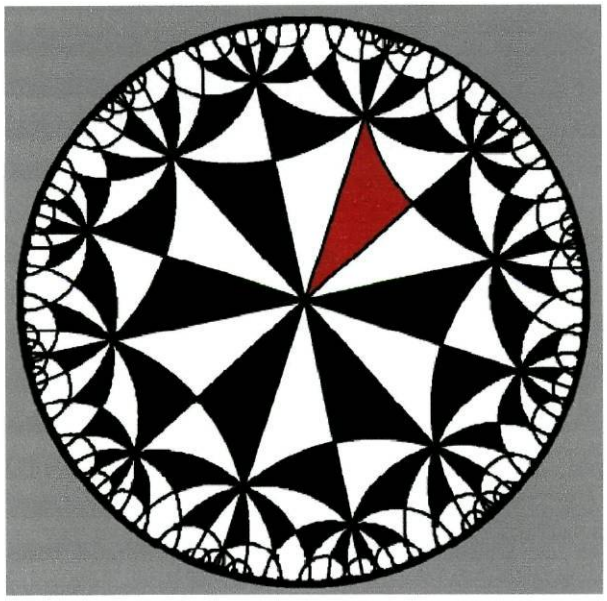
Vejamos também exemplos de grupos cristalográficos na esfera e no plano hiperbólico.

O grupo gerado pela aplicação antípoda f em S^2, $G = \{id, f\}$, que vimos na página 25, é também um grupo cristalográfico pois o espaço quociente S^2/G é o plano projectivo $\mathbb{P}^2$, que é compacto, e a acção é propriamente descontínua porque G é um grupo finito.

O plano hiperbólico H^2 tem dois modelos equivalentes: o semiplano de Poincaré, que falaremos com mais pormenor na página 36, e o disco de Poincaré. No modelo do disco de Poincaré, as *rectas* são os arcos de circunferência ortogonais ao bordo do disco o que em inclui, em particular, os diâmetros do disco.



As *reflexões nessas rectas* (reflexões euclidianas nos diâmetros do disco e inversões nas circunferências ortogonais ao bordo) são isometrias de H^2. Consideremos o grupo de isometrias constituído pelas reflexões nos lados do triângulo hiperbólico representado a vermelho na imagem. Elas geram um grupo cristalográfico em H^2 em que a região fundamental é limitada (é precisamente esse triângulo a vermelho) e a acção é propriamente descontínua.



Este exemplo foi encontrado pelo ilustrador M.C. Escher num livro do Professor H. S. M. Coxeter e serviu de inspiração para Escher construir em 1960 a sua série de xilogravuras *Limite circular*. Aqui a região fundamental é um triângulo, contendo metade do anjo e metade do demónio, e a repetição desse motivo no plano hiperbólico é feita através de reflexões num dos lados do triângulo e rotações de ordem 4 em torno do vértice que une os

outros dois lados desse triângulo hiperbólico.



Limite circular IV, M.C.Escher, 1960

Terminamos esta secção realçando uma particularidade da equivalência entre dois grupos cristalográficos. Tal como referimos na página 5, Bieberbach mostrou que dois grupos cristalográficos são isomorfos como grupos abstractos se e só se são afim-equivalentes entre si. Designamos dois grupos cristalográficos G e H por **afim-equivalentes** quando existe uma aplicação afim φ e um isomorfismo λ entre eles que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda, \varphi) \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

Isto significa que dois grupos cristalográficos são equivalentes se são conjugados no grupo das transformações afins de X. Como as aplicações afins enviam reticulados em reticulados, a equivalência significa que estamos a comparar os grupos cristalográficos a menos do seu subgrupo de translações, isto é, do seu reticulado.

3 Das variedades aos orbifolds

Este capítulo tem como objectivo definir o conceito de orbifold. Para tal, faremos primeiro várias considerações acerca das variedades, interessando-nos particularmente os casos de variedades que sejam quocientes do plano euclidano por um grupo de isometrias. Reconheceremos aqui a acção dos grupos cristalográficos que vimos na secção anterior e alargaremos o conceito de variedade ao fazer uma incursão pelos revestimentos. Utilizaremos os revestimentos na sua definição mais alargada, que permite a inclusão de pontos de ramificação, chegando assim aos orbifolds.

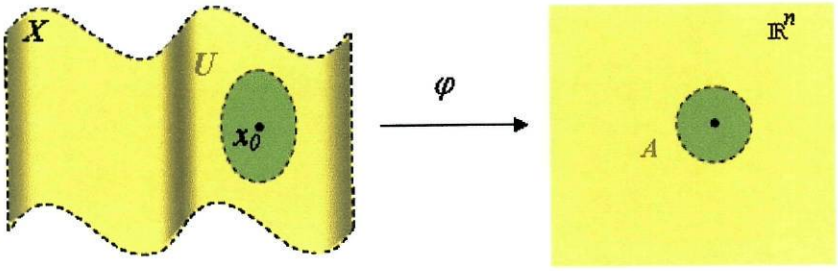
Apresentados que estejam os orbifolds, mostraremos como se relacionam eles com os grupos cristalográficos e ainda veremos várias propriedades relacionadas com a métrica, a orientação e a característica de Euler que nos serão úteis no próximo capítulo.

3.1 Variedades

Comecemos por introduzir algumas noções topológicas necessárias à construção da definição de variedade.

Um espaço topológico X é **Hausdorff** se dados dois pontos diferentes $x, y \in X$ existem abertos $U, V \subset X$, com $x \in U$ e $y \in V$, tais que $U \cap V = \varnothing$. Diz-se, ainda, que um espaço topológico é **2-numerável** se existir alguma base numerável da topologia.

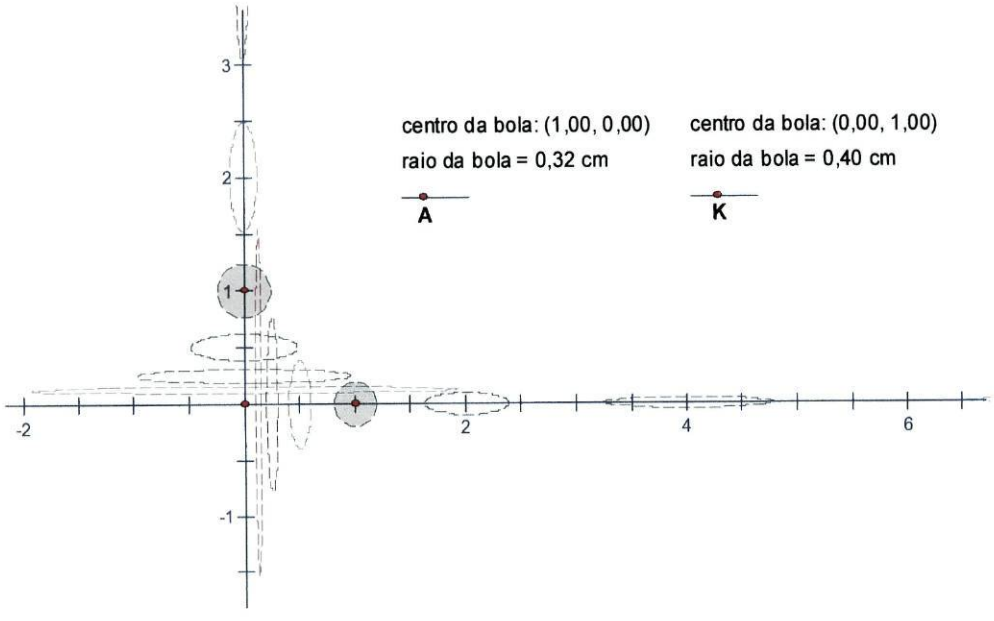
Uma **variedade topológica** de dimensão n é um espaço topológico tal que dado $x_0 \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x_0 que é homeomorfa a um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ por um homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow A$. Diz-se que (U, φ, A) é um **mapa topológico** (ou **carta topológica**) de dimensão n em x_0 e designa-se por **atlas topológico** a família $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i, A_i)_{i \in I}$ tal que $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.



A escolha de um atlas em particular não é relevante para definir a estrutura topológica da variedade.

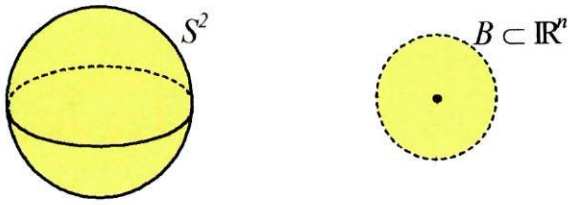
A definição usual de variedade, como espaço topológico localmente Euclidiano, não

garante certas condições topológicas gerais úteis, como ser um espaço topológico Hausdorff, 2-numerável, metrizável, etc. Voltando ao exemplo referido na página 11, o espaço quociente de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ pela acção do grupo G gerado pela aplicação $(x,y) \longmapsto (2x, y/2)$ é uma variedade que não é Hausdorff, pois qualquer vizinhança do ponto $(1,0)$ intersecta uma vizinhança qualquer do ponto $(0,1)$. No sketch interactivo *Quociente não Hausdorff.gsp* contido no CD em anexo, podemos verificar que qualquer vizinhança de um ponto do eixo xx é enviada pelos elementos de G em vizinhanças que se acumulam no eixo dos yy e vice versa.



Neste texto interessa-nos considerar estas propriedades muito prestáveis, por isso convencionaremos que, daqui em diante, variedades são espaços topológicos Hausdorff e 2-numeráveis. A vantagem de considerar as variedades como espaços 2-numeráveis está em que, desta forma, uma mesma estrutura na variedade pode ser descrita por um atlas finito onde o domínio de cada carta pode ter uma quantidade numerável de componentes conexas.

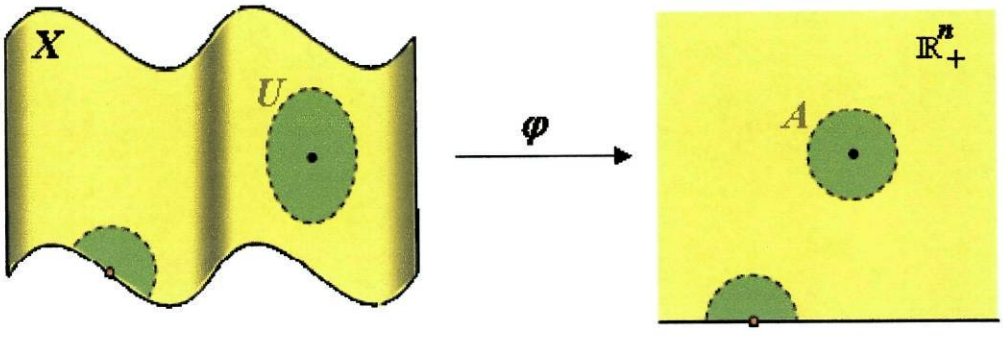
Como espaço topológico, uma variedade pode ser compacta ou não compacta, sendo compacta se qualquer sua cobertura aberta admitir uma subcobertura finita. A esfera é uma variedade topológica de dimensão 2 compacta, enquanto que um disco aberto é uma variedade não compacta.



Usualmente, designamos as variedades topológicas de dimensão 1 por **curvas** e as de dimensão 2 por **superfícies sem bordo**. Uma superfície é uma espécie de folha de papel curvo sem auto-intersecções devido à injectividade das cartas.

De forma semelhante, podemos definir **superfície com bordo** como sendo um espaço topológico X em que todo o ponto $x_0 \in X$ tem uma vizinhança U que é homeomorfa a uma vizinhança A de um ponto de $\mathbb{R}^2_+$, seja ele no interior de $\mathbb{R}^2_+$ ou na fronteira. Os pontos de X que não têm nenhuma vizinhança homeomorfa a uma vizinhança de um ponto interior de $\mathbb{R}^2_+$ formam o **bordo da superfície**, representado por ∂X.

Generalizando esta definição a uma dimensão n qualquer, obteríamos aquilo a que se pode chamar uma **variedade com bordo** de dimensão n .



Uma variedade com bordo não é, em geral, uma variedade; o recíproco, sim, é válido. Note-se que se X for uma variedade topológica de dimensão n então também é uma variedade com bordo de dimensão n, pois cada ponto de X tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$, que por sua vez é homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n_+$. Assim, uma variedade topológica é uma variedade com bordo, mas em que o bordo $\partial X = \varnothing$.

As superfícies com bordo podem ser compactas, como, por exemplo, um disco fechado, ou não compactas, como, por exemplo, o próprio espaço $\mathbb{R}^2_+$.



Designamos, ainda, por **variedade diferenciável** uma variedade munida de um atlas diferenciável:

Diz-se que um atlas $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i, A_i)_{i \in I}$ é um **atlas diferenciável** em X se, para todo $i, j \in I$ com $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, a aplicação entre abertos de $\mathbb{R}^n$, designada **mudança de coordenadas**,

$$\begin{aligned} \varphi_i(U_i \cap U_j) &\longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ x &\longmapsto \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo (bijectivo, de classe C^∞ e com inversa de classe C^∞).

Para que atlas equivalentes definam a mesma variedade, escolhemos a compatibilidade entre atlas para relação de equivalência, considerando que dois atlas são compatíveis se a sua união também for um atlas, ou seja, se nas sobreposições de abertos dos dois atlas as mudanças de coordenadas são difeomorfismos.

No caso das superfícies, ser diferenciável significa que na tal folha de papel curvo não há arestas, e também não há vértices nem rasgões por ser uma variedade.

Para cada ponto P numa variedade diferenciável M de dimensão k podemos definir o **espaço tangente** a M em P como o espaço $T_P M$ de dimensão k definido da seguinte forma:

Se $\varphi : A \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow U \subset M$ é a carta (parametrização local) de classe C^∞ em P, que define um sistema de coordenadas locais $u_1, ..., u_k$, o espaço tangente $T_P M$ é o espaço gerado pelos vectores coordenados $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right|_u, ..., \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\right|_u$ associados à carta φ.

O espaço tangente $T_P M$ coincide com o subespaço constituído pelos vectores velocidade $V_P = \alpha'(0)$ em P das curvas $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$ de classe C^∞ tais que $\alpha(0) = P \in M$.

Uma **métrica riemanniana** numa variedade M é uma aplicação g que associa a cada ponto $P \in M$ um produto interno g_P em $T_P M$ e que é diferenciável. Uma vez escolhida uma parametrização local $\varphi : A \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow U \subset M$ em torno de P fica definida uma base $\left\{ \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right|_u, ..., \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\right|_u \right\}$ para $T_P M$ e o produto interno g_P fica completamente determinado pelas funções de classe C^∞

$$g_{ij} : A \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde

$$g_{ij}\left(u_1,...,u_k\right) := g_p\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right|_u, \left.\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\right|_u\right)$$

A expressão local da métrica riemanniana g nas coordenadas locais $u_1,...,u_k$ associadas à parametrização φ é dada por

$$ds^2 = g = \sum_{i,j} g_{ij}\left(u_1,...,u_k\right)\ du_i\ du_j$$

Uma variedade diferenciável com uma métrica riemanniana diz-se uma **variedade riemanniana**.

A métrica riemanniana associada ao produto interno usual em $\mathbb{R}^2$ é dada pela expressão

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Na esfera S^2 utilizaremos a métrica induzida pelo seu mergulho em $\mathbb{R}^3$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Esta métrica pode ter expressões diferentes conforme a parametrização escolhida. Se considerarmos, por exemplo, a parametrização da esfera em coordenadas geográficas

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S^2 \\ & (\theta,\varphi) & \longmapsto & (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta) \end{array}$$

a expressão local da métrica riemanniana induzida em S^2 pelo produto interno usual em $\mathbb{R}^3$ é

$$ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\ d\varphi^2$$

O **comprimento de uma curva** $\alpha : [a,b] \longrightarrow M$ de classe C^1 numa variedade M munida de uma métrica g é

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}\left(\alpha'(t), \alpha'(t)\right)}\ dt$$

Designamos por **geodésicas** as curvas com menor comprimento que unem dois pontos da superfície. No plano euclidiano as geodésicas são os segmentos de recta, como sabemos, mas noutras variedades riemannianas as geodésicas podem ser outro tipo de curvas. Com a métrica induzida de $\mathbb{R}^3$, as geodésicas da esfera são os arcos de círculo máximo e por isso

não existem geodésicas paralelas, como acontece no plano. Outra diferença relativamente às geodésicas do plano euclidiano é que por dois pontos distintos de S^2 nem sempre passa uma única geodésica: no caso de pontos diametralmente opostos, há uma infinidade de geodésicas que os ligam.

O grupo das isometrias de S^2 é $\mathcal{O}(3)$, o grupo das matrizes 3×3 ortogonais, pois é o grupo das isometrias de $\mathbb{R}^3$ que fixam a origem.

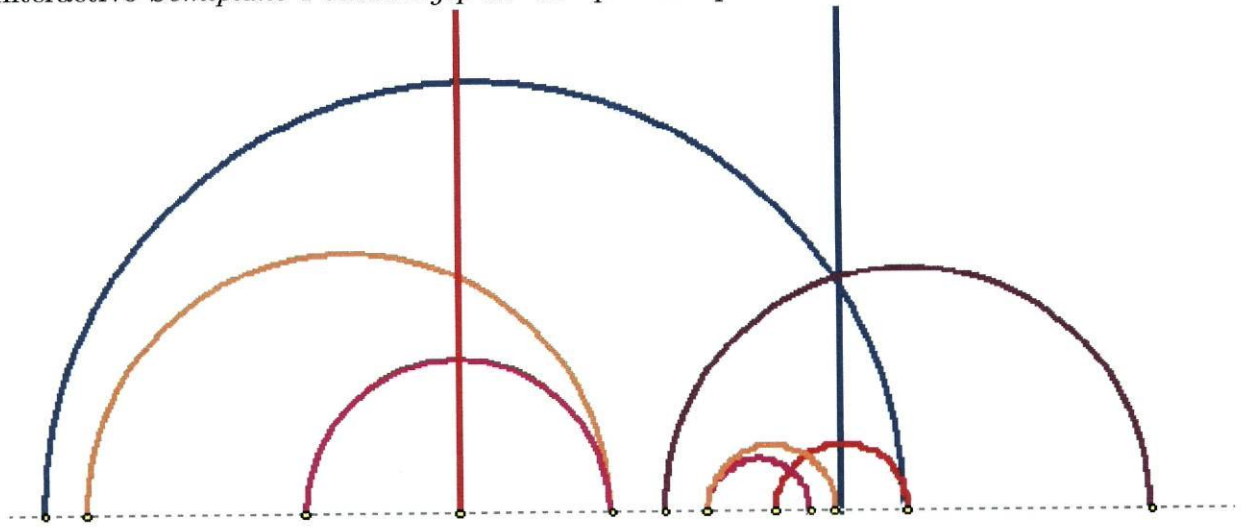
Já referimos, a propósito dos grupos cristalográficos, o plano hiperbólico H^2. Um dos modelos do plano hiperbólico é o semiplano de Poincaré

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

munido da métrica riemanniana hiperbólica cuja expressão local é dada por

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

Com esta métrica, quanto mais longe do eixo dos xx estiverem dois pontos, mais pequena será a distância entre eles. As geodésicas de H^2 são as as rectas verticais e os arcos de círculo generalizados (circunferências com centro no eixo dos xx). As isometrias de H^2 são geradas pelas reflexões de H^2 constituidas por reflexões segundo rectas verticais e inversões nos arcos de círculo generalizados. Podemos observar algumas destas reflexões em geodésicas no sketch interactivo *Semiplano Poincaré.gsp* do CD que acompanha esta tese.

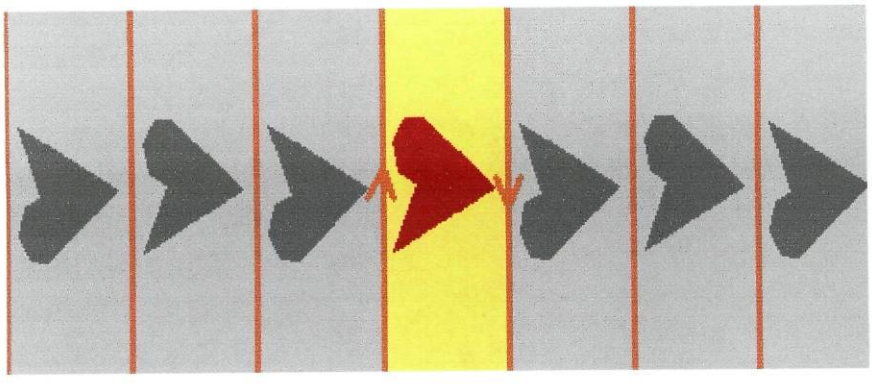


Diz-se que o plano hiperbólico tem uma geometria não euclidiana porque, em consequência desta métrica hiperbólica que acabamos de definir, por um ponto exterior a uma geodésica l de H^2 passam infinitas geodésicas que não intersectam l. Um outro modelo para

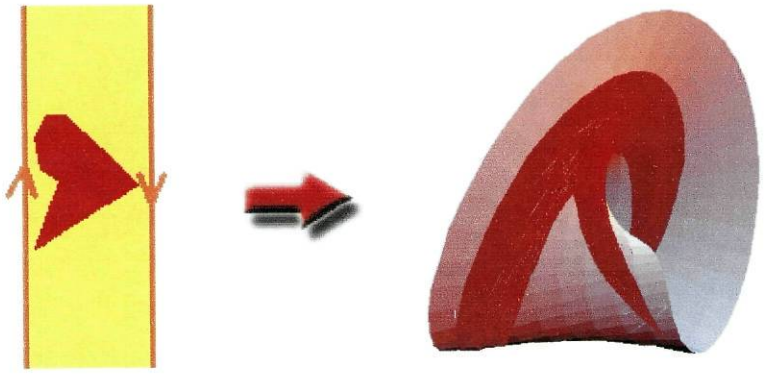
o plano hiperbólico é dado pelo disco de Poincaré, como vimos na página 28, e que podemos explorar no ficheiro *Disco Poincaré.gsp*.

As superfícies compactas sem bordo dividem-se em superfícies orientáveis e superfícies não orientáveis. Uma superfície é **não orientável** se contém uma tira de Möbius. Isto equivale a conter um caminho fechado que inverte a orientação, ou seja, tal que, definindo uma orientação no ponto inicial desse caminho, a orientação não se mantém a mesma após percorrida uma volta. Portanto, superfícies orientáveis serão aquelas em que qualquer caminho fechado preserva a orientação. Se a superfície for uma variedade diferenciável, a orientação será preservada se e só se o determinante da matriz Jacobiana da aplicação de mudança de coordenadas for sempre positivo, dizendo-se nesse caso que as parametrizações são compatíveis. Uma superfície diferenciável é orientável se se puder cobrir toda a superfície com imagens de parametrizações compatíveis.

Se considerarmos o grupo G de isometrias de E^2 gerado por uma reflexão deslizante, tal como sugere a simetria do motivo da imagem seguinte, onde as rectas a cor de laranja são identificadas segundo a orientação das setas,

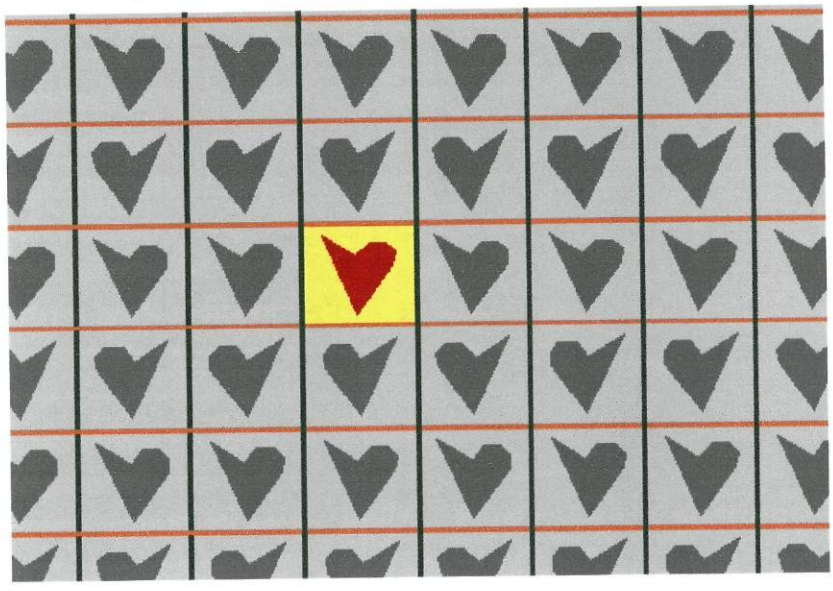


o quociente E^2/G da acção $G \times E^2 \to E^2$ é uma tira de Möbius aberta, que é uma superfície sem bordo não compacta e não orientável.

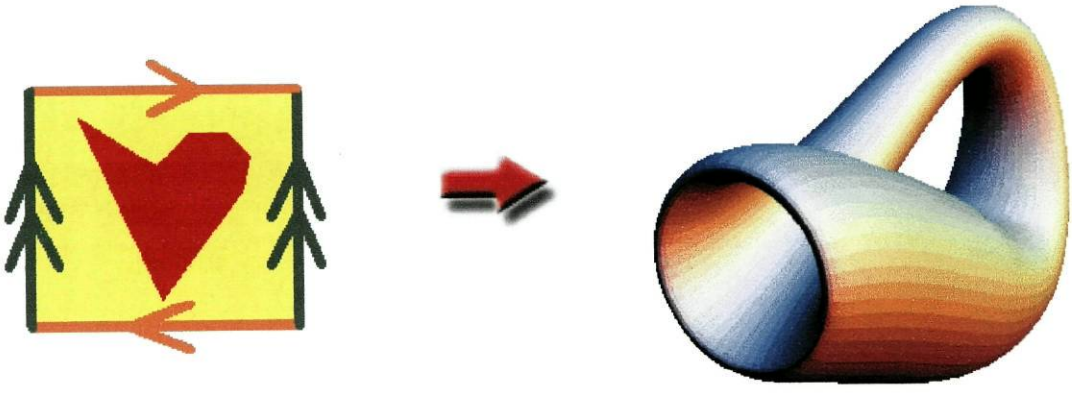


Embora na figura da direita só se veja uma parte, aqui estamos a falar da da tira de Möbius sem o bordo prolongando-se infinitamente.

Se considerarmos o grupo G de isometrias de E^2 gerado por uma reflexão deslizante e uma translação numa direcção diferente, tal como é sugerido no padrão seguinte,



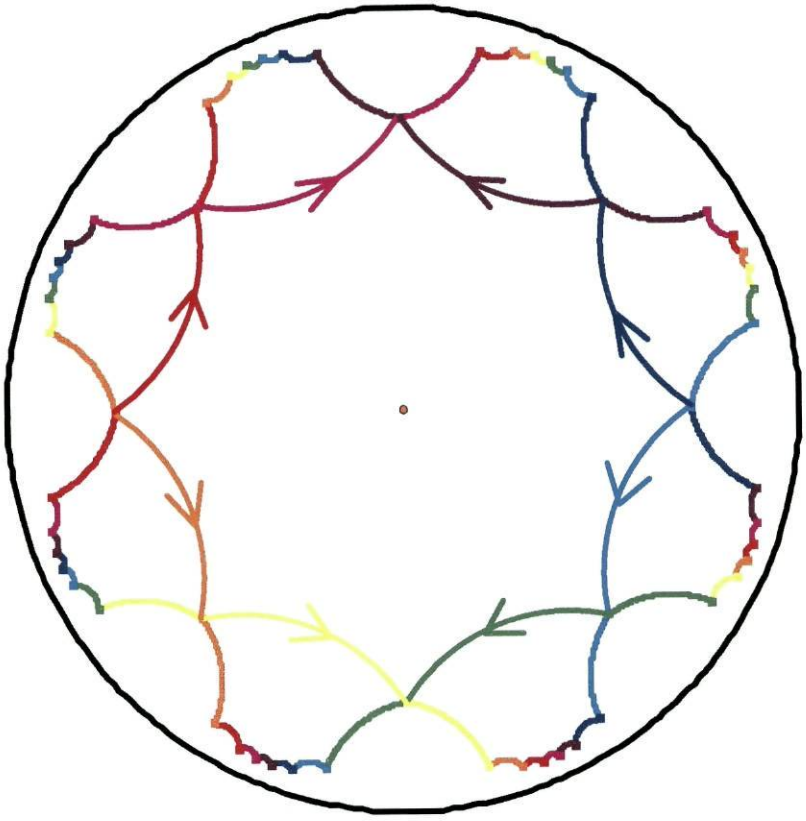
o quociente E^2/G desta acção $G \times E^2 \to E^2$ é uma garrafa de Klein, que é uma superfície compacta e não orientável, visto que a garrafa de Klein é uma tira de Möbius com o bordo identificado da seguinte forma:



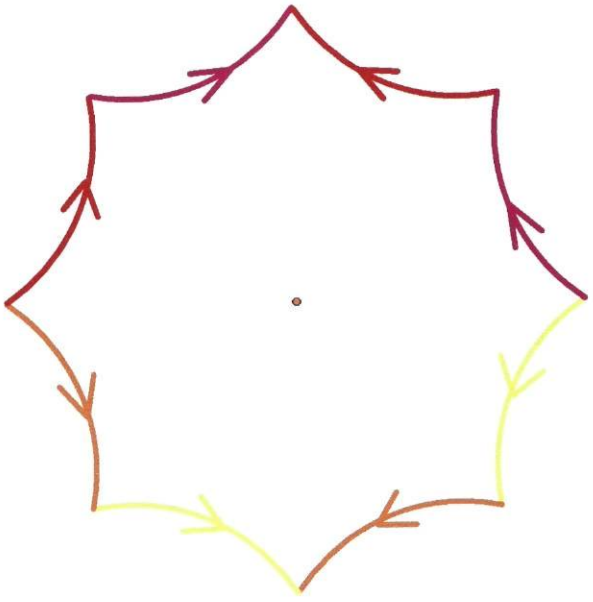
Referimos há pouco que uma superfície não poderia ter auto-intersecções. Isto pode parecer contraditório com o chamado *nexus* que se vê na figura anterior. Esta aparente auto-intersecção não é intrínseca da superfície, apenas é causada pela tentativa de a representar no espaço tridimensional. Cada pequena vizinhança de um ponto da garrafa de Klein é localmente euclidiano e não há auto-intersecções. O que a imagem ilustra é uma imersão da garrafa de Klein em $\mathbb{R}^3$. Não seria possível representar um mergulho da garrafa de Klein em $\mathbb{R}^3$, pois um mergulho tem de ser injectivo e é impossível transformar a garrafa de Klein para 3 dimensões sem auto-intersecções, isso apenas seria possível em $\mathbb{R}^4$.

Consideremos agora um padrão no plano hiperbólico baseado numa região fundamental octogonal, em que as isometrias do plano hiperbólico que estão a actuar aqui são as inver-

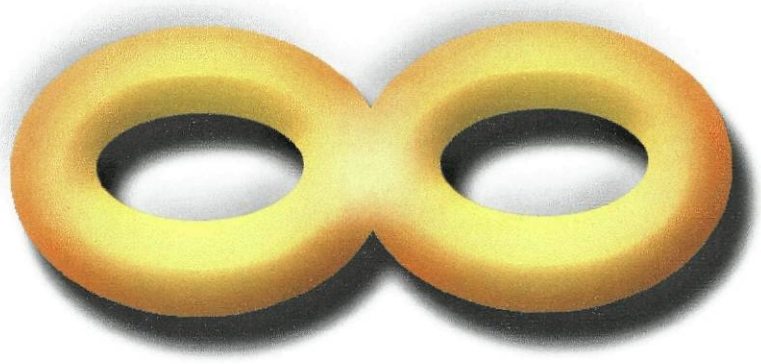
sões nos arcos que constituem o octógono. Na figura seguinte, escolhendo como uma região fundamental o octógono central onde cada lado tem uma das cores do arco-íris, vemos as reflexões consecutivas desse octógono em cada um dos seus lados.



Se identificarmos os lados deste polígono da seguinte forma,



o quociente do plano hiperbólico pela acção deste grupo de isometrias hiperbólicas dá origem à superfície designada por duplo toro.



Vimos o toro, a garrafa de Klein, o cilindro e a tira de Möbius infinita como quocientes do plano euclidiano por um grupo de isometrias. Isto significa que é possível definir localmente uma métrica riemanniana que vem da euclidiana por transporte. Por isso são habitualmente designadas por *superfícies euclidianas*. Sabe-se, pelo Teorema de Hopf-Riemann [Sti], que são as únicas superfícies euclidianas completas e conexas.

Analogamente, as superfícies que são quocientes do plano hiperbólico por um grupo de isometrias hiperbólicas (como no exemplo anterior) têm uma estrutura hiperbólica. Todos estes exemplos são um caso especial de quocientes de um espaço X por acções de grupo em que $p : X \longrightarrow X/_{\sim}$ é uma aplicação especial dita um revestimento, que veremos de seguida.

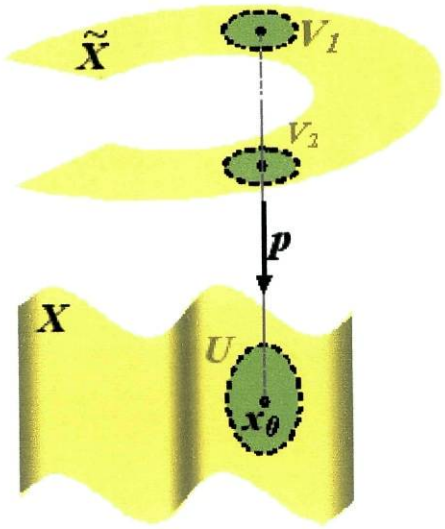
3.2 Revestimentos

Agora que já conhecemos bem as variedades, vamos introduzir o conceito mais geral de revestimento. Dizemos que uma aplicação entre espaços topológicos $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é um **revestimento** se $\forall x_0 \in X \quad \exists$ vizinhança U de x_0 tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J(x_0)} V_j$ onde:

- V_j é um aberto não vazio de $\tilde{X} \quad \forall j \in J(x_0)$
- $p_{|_{V_j}} : V_j \longrightarrow U$ é homeomorfismo
- $V_j \cap V_k = \varnothing$ se $j \neq k$

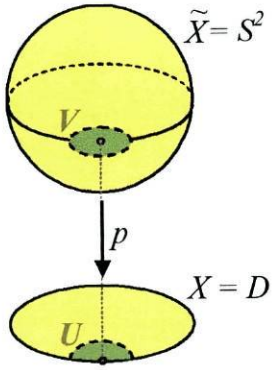
Diz-se que $\tilde{X}$ é um **espaço de revestimento** de X, X diz-se a **base do revestimento** e, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ diz-se a **fibra de** x. Se X for conexo por arcos, então $\#p^{-1}(x)$ é independente da escolha de $x \in X$ e diz-se o **grau do revestimento** ou

o **número de folhas do revestimento**. Diz-se ainda que uma aplicação g no espaço de revestimento **respeita as fibras** se dado $x \in X$ qualquer ponto da fibra de x é enviado por g noutro ponto da fibra de x. Por vezes, por abuso de linguagem, diz-se que $\tilde{X}$ é um revestimento de X, ou que $\tilde{X}$ reveste X, querendo dizer que existe um revestimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$.



Como exemplos de revestimentos temos a já referida aplicação antípoda entre a esfera S^2 e o plano projectivo $\mathbb{P}^2$, que é um revestimento de duas folhas, e os exemplos de variedades dados na última secção, como o Toro, a garrafa de Klein, o cilindro e a tira de Möbius infinita.

Em contrapartida, a aplicação p que faz a projecção vertical de S^2 no disco unitário fechado, retirando a coordenada z, não é um revestimento, porque para um ponto do bordo do disco todas as vizinhanças U são tais que $p^{-1}(U)$ é um aberto V de $\tilde{X}$, mas $p : V \longrightarrow U$ não é injectiva e não é possível escrever V como união de abertos V_j disjuntos de modo a que $p_{|_{V_j}}$ seja injectiva. Não é, portanto, possível satisfazer as condições necessárias para p ser revestimento.



Da definição de revestimento podemos inferir que um revestimento é um homeomorfismo local, isto é, qualquer ponto do espaço de revestimento tem uma vizinhança aberta V tal que $p_{|V} : V \longrightarrow p(V)$ é um homeomorfismo, logo um revestimento é uma aplicação contínua.

Um revestimento é uma aplicação discreta, isto é, a fibra $p^{-1}(x)$ de qualquer ponto x de X é um subconjunto discreto de $\tilde{X}$. Isto é fácil de mostrar: dados $x \in X$, $y_1 \in p^{-1}(x)$, seja V_1 um dos abertos disjuntos de $\tilde{X}$ que surgem da definição de revestimento tal que $y_1 \in V_1$. Considerando $y_2 \in p^{-1}(x)$, suponhamos por redução ao absurdo que $y_2 \in V_1$; então $p(y_1) = p(y_2) = x$ e, como p é um revestimento, $p_{|_{V_1}}$ é um homeomorfismo, o que é absurdo.

Se a acção de um grupo G numa variedade conexa (Hausdorff) X for uma acção livre e errante, então o espaço quociente X/G é uma variedade (possivelmente não Hausdorff, como no exemplo visto na pág. 32) e a aplicação quociente é um revestimento. Isto generaliza os comentários finais aos exemplos da última secção.

Para mostrarmos este resultado, dado $x \in X$, consideremos uma vizinhança U de x que intersecta um número finito de imagens suas. Como X é Hausdorff e a acção é livre, podemos escolher uma vizinhança de x mais pequena, V, cujas imagens gV são todas disjuntas. Então cada um dos conjuntos disjuntos gV é enviado homeomorficamente na sua projecção $p(gV) = A$ no espaço quociente e tal que $p^{-1}(A) = \bigcup_{g \in G} gV$.

Dado um ponto x_0 num espaço topológico X, o conjunto das classes de homotopia de lacetes com origem em x_0 constitui um grupo $\pi_1(X, x_0)$ designado o **grupo fundamental** de X com base no ponto x_0. O elemento neutro deste grupo é a classe de homotopia do caminho constante igual a x_0. Se X for conexo por arcos, o grupo fundamental de X, como grupo abstracto, é independente da escolha do ponto base x_0 e podemos escrever simplesmente $\pi_1(X)$. Um espaço topológico X diz-se **simplesmente conexo** se para qualquer $x_0 \in X$ se tem $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ (grupo trivial).

Um revestimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ diz-se um **revestimento universal** se $\tilde{X}$ for conexo por arcos e simplesmente conexo. Esta designação vem do facto de um espaço de revestimento $\tilde{X}$ conexo por arcos e simplesmente conexo revestir qualquer outro espaço de revestimento Y do espaço X.

A aplicação

$$\begin{array}{rccc} p_0 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ & t & \longmapsto & e^{2\pi i t} \end{array}$$

é um revestimento universal de S^1; as aplicações

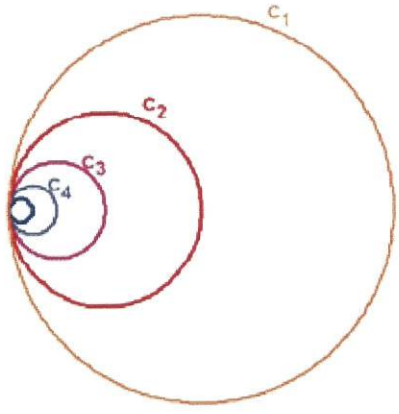
$$\begin{array}{rccc} p_n: & S^1 \subset \mathbb{C} & \longrightarrow & S^1 \subset \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

são também revestimentos de S^1 mas não universais, porque S^1 não é simplesmente conexo. Pode-se também mostrar que qualquer revestimento $p : \tilde{X} \longrightarrow S^1$, com $\tilde{X}$ conexo, é isomorfo a um destes revestimentos e portanto $\mathbb{R}$ reveste qualquer espaço de revestimento de S^1.

Um espaço topológico X chama-se **localmente simplesmente conexo** se qualquer ponto $x \in X$ tem uma vizinhança V simplesmente conexa. Mais geralmente, X diz-se **semilocalmente simplesmente conexo** se qualquer ponto $x \in X$ tem uma vizinhança V tal que qualquer caminho em V é homotopicamente nulo em X. É claro que se X é localmente simplesmente conexo então também é semilocalmente simplesmente conexo.

Numa variedade topológica, ou num poliedro, qualquer ponto tem uma vizinhança simplesmente conexa, logo estes dois espaços são localmente simplesmente conexos. Como exemplo de um espaço que não é semilocalmente simplesmente conexo, consideremos o *brinco de Borrow*, constituído pela união das circunferências no plano de centro $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ e raio $\frac{1}{n}$:

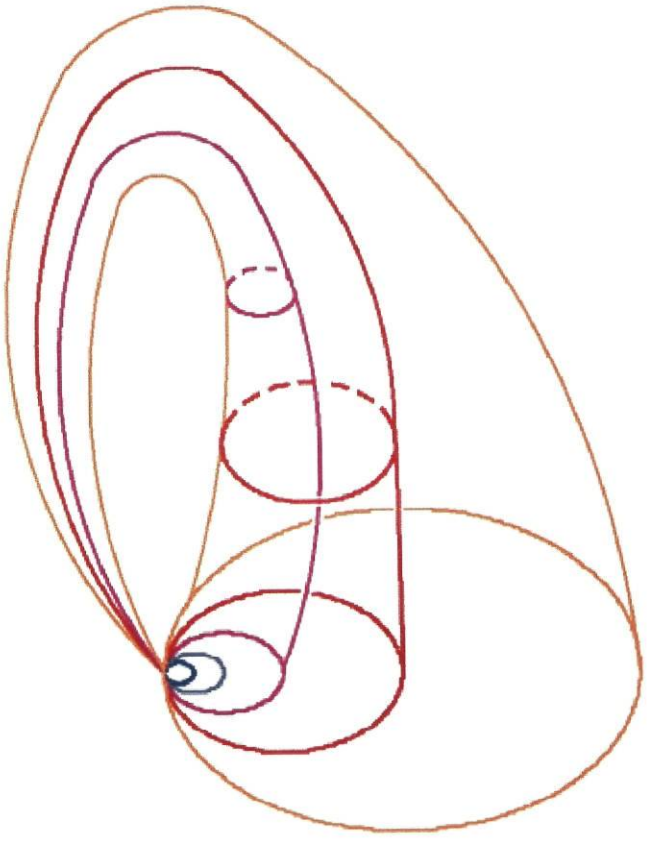
$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad \text{onde} \quad C_n = C\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right); \frac{1}{n}\right)$$



Este espaço é conexo por arcos e localmente conexo por arcos, mas não é semilocalmente simplesmente conexo, pois dada qualquer vizinhança U do ponto $(0,0)$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq p \quad C_n \subset U$ é um caminho não homotopicamente nulo em X. Logo X também não é localmente simplesmente conexo.

Se tomarmos o brinco de Borrow como a base de um cone em que o vértice seja a origem $(0,0)$, obtemos um espaço Y que já é semilocalmente simplesmente conexo, mas no qual existe um ponto (a origem) que não tem nenhuma vizinhança simplesmente conexa, e portanto

não é localmente simplesmente conexo.



Um resultado interessante que pode ser consultado com mais detalhe em [Lag], é o seguinte, que dá condições para a existência de revestimentos universais:

Se X é um espaço topológico conexo por arcos e semilocalmente simplesmente conexo, então X tem um revestimento universal.

Assim, toda a variedade topológica que seja conexa por arcos tem um revestimento universal, porque sendo variedade é semilocalmente simplesmente conexa.

Dizemos que dois revestimentos de X

$$p : Y \longrightarrow X \quad \text{e} \quad q : Z \longrightarrow X$$

são **isomorfos** se existir um morfismo de p em q que é um homeomorfismo; note-se que um **morfismo** é uma aplicação contínua $\varphi : Y \longrightarrow Z$ tal que $q \circ \varphi = p$:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ Y & \longrightarrow & Z \\ p \searrow & & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

Um **automorfismo** de um revestimento $p : Y \longrightarrow X$ é um morfismo φ de p em p que é um homeomorfismo:

$$\begin{array}{cc} \varphi & \curvearrowright \\ & Y \\ p & \downarrow \\ & X \end{array}$$

Note-se ainda que o conjunto dos automorfismos de um revestimento é um subgrupo de Homeo(Y) que actua de forma propriamente descontínua em Y. O teorema seguinte estabelece uma relação entre o grupo dos automorfismos de um revestimento e o grupo fundamental e a sua prova pode ser consultada em [Lag].

Teorema 2 *Seja $\tilde{X}$ um espaço topológico conexo por arcos e simplesmente conexo, onde actua um grupo G propriamente descontínuo formado pelos automorfismos do revestimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$, onde $X = \tilde{X}/G$.*

Então $h : \pi_1(X) \longrightarrow Aut(p)$ é isomorfismo de grupos e portanto

$$G = Aut(p) \simeq \pi_1(X)$$

Vimos que qualquer variedade M de dimensão n conexa por arcos tem um revestimento universal $\tilde{M}$. Portanto, podemos ver M como o quociente de $\tilde{M}$ pela acção do seu grupo fundamental, que age livre e propriamente descontinuamente.

Por vezes surgem funções que parecem um revestimento, mas não o são em determinados pontos. Uma interessante generalização da noção de revestimento é o conceito de revestimento ramificado. Um **revestimento ramificado** é uma aplicação entre espaços $\tilde{X}$ e X que é um revestimento excepto num número finito de conjuntos de X. Enquanto que num revestimento verdadeiro o número de elementos na fibra de qualquer ponto é igual para todos os pontos (grau do revestimento), num revestimento ramificado o número de elementos na fibra dos tais pontos especiais é diferente do número de elementos na fibra dos restantes pontos. A estes pontos especiais damos o nome de **pontos de ramificação**.

Por exemplo, dado $n > 0$, a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

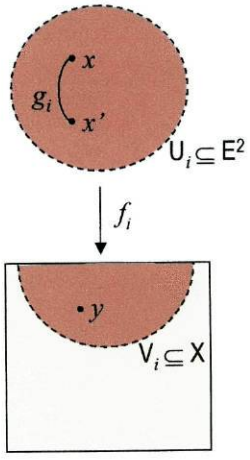
é um exemplo de um revestimento ramificado com ponto de ramificação em $z = 0$, uma vez que este ponto fica fixo por f, enquanto todos os outros pontos do plano têm n pontos complexos na sua fibra.

3.3 Orbifolds

Nas secções anteriores vimos exemplos de acções de grupos cristalográficos no plano que dão origem a variedades e a revestimentos como o Toro, a garrafa de Klein ou a tira de Möbius infinita. Vamos agora considerar outros grupos cristalográficos a actuar no plano euclidiano, na esfera ou no plano hiperbólico em que a aplicação quociente já não é um revestimento, mas sim uma outra coisa que mais se assemelha a um revestimento ramificado. Isto conduz-nos à definição de orbifold, que é uma generalização do conceito de variedade devido à introdução destes pontos singulares. Um orbifold é revestido (no sentido lato) universalmente por uma variedade riemanniana através de um grupo que age propriamente descontinuamente nessa variedade. Por isso, o orbifold pode ser interpretado como uma espécie de caleidoscópio em que se pode "ver"o seu revestimento universal e um grupo cristalográfico.

Designemos por $\tilde{X}$ a superfície riemanniana que constituirá a base do orbifold. Um **orbifold de dimensão** 2 ou **caleidoscópio** é um espaço topológico compacto X, com um atlas de mapas $f_i : U_i \to V_i$, onde

- $U_1, U_2, ...$ são abertos de $\tilde{X}$,
- $V_1, V_2, ...$ formam uma cobertura aberta de X,
- as funções f_i determinam as relações de equivalência que definem V_i como o quociente de U_i por um grupo finito G_i de isometrias em $\tilde{X}$,
- e as mudanças de mapas são isometrias em $\tilde{X}$.



Isto significa que dois pontos $x, x' \in U_i$ são enviados por f_i no mesmo ponto $y \in X$ se e só se existir uma isometria $g_i \in G_i$ tal que $x' = g_i x$; para além disso, o grupo das isometrias g_i de U_i que respeitam as fibras de f_i é finito. A região fundamental de G_i está contida

em U_i e a restrição de f_i ao interior dessa região fundamental é um homeomorfismo e induz um homeomorfismo entre o espaço quociente U_i/G_i e V_i, por isso dizemos que $V_i \simeq U_i/G_i$. Desta forma, estas funções f_i são revestimentos ramificados e designaremo-las por **funções de dobragem**.

Dois orbifolds euclidianos de dimensão 2 são **iguais** se existir entre eles um homeomorfismo que determina em cada mapa uma isometria.

Se, na definição de orbifold, o espaço $\tilde{X}$ for o plano euclidiano E^2, a esfera S^2, ou o plano hiperbólico H^2, o orbifold diz-se, respectivamente, um **orbifold euclidiano**, um **orbifold esférico** ou um **orbifold hiperbólico**.

Alguns dos exemplos que vimos anteriormente para as variedades euclidianas e para os revestimentos podem ser agora também vistos como orbifolds. O toro é um orbifold euclidiano, tal como a garrafa de Klein, e o duplo toro é um orbifold hiperbólico. Para exemplo de um orbifold esférico, consideremos a acção na esfera S^2 do subgrupo de $SO(3)$ constituído pelas rotações de ângulo $\frac{2\pi}{4}$ em torno do eixo dos zz. Esta acção fixa os pontos dados pelas coordenadas $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$ (pólo Norte e pólo Sul) e, por tal, a aplicação quociente não é um revestimento no sentido estrito, mas sim um revestimento ramificado que origina o orbifold $S44$, o fuso com dois picos de ordem 4.



Embora estejamos a apresentar exemplos dos três tipos de orbifolds neste trabalho, iremos focar essencialmente os orbifolds euclidianos.

Interessa-nos que **atlas equivalentes** definam o mesmo orbifold. Para tal, consideraremos que dois atlas definem o mesmo orbifold se a sua união for também um atlas compatível, isto é, sempre que $f_i(x_i) = f_j(x_j)$ então:

- $\exists\ U_i'$ e U_j' vizinhanças abertas de x_i e x_j em U_i e U_j
- $\exists\ g_{ij} : U_i' \to U_j'$ isometria tal que
- $\forall\ x \in U_i' \quad f_j(g_{ij}(x)) = f_i(x)$

Neste trabalho iremos dissertar essencialmente sobre os orbifolds bidimensionais que acabámos de definir, por isso deixaremos aqui apenas uma ideia das diferenças na definição análoga de **orbifold de dimensão** n:

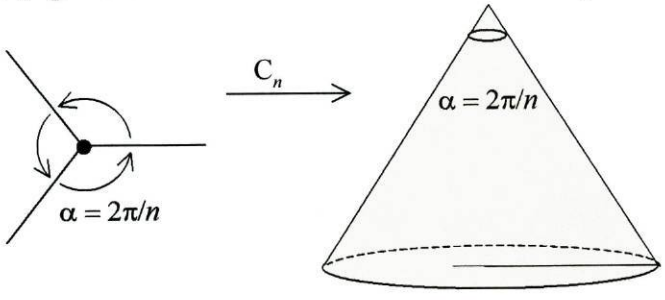
- $\tilde{X}$ é uma variedade riemanniana de dimensão n
- o grupo G_i é um grupo finito de difeomorfismos g_i de U_i que respeitam as fibras de f_i e que preservam a métrica riemanniana em $\tilde{X}$
- as mudanças de coordenadas são difeomorfismos que preservam a métrica riemanniana

Sabe-se, pelo Teorema de Leonardo [Ree], que todo o subgrupo finito de Isom(E^2) é um grupo cíclico ou um grupo diedral, por isso num orbifold de dimensão 2 só há dois tipos de mapas possíveis:

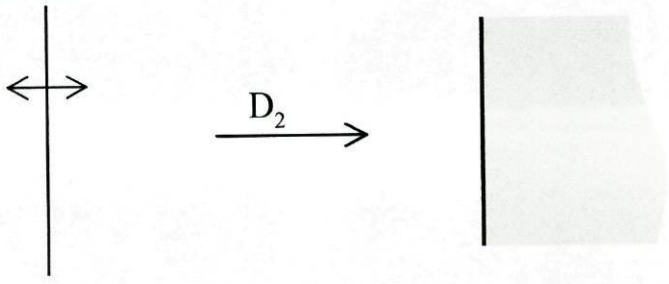
- quocientes de E^2 pela acção de um grupo cíclico, C_n, quando temos n simetrias de rotação e nenhuma simetria de reflexão.
- quocientes de E^2 pela acção de um grupo diedral D_n, quando temos n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão.

Estes mapas vão, por vezes, determinar nos orbifolds alguns pontos singulares, que fazem a diferença entre um orbifold e uma simples variedade. Exploraremos de seguida a forma como surgem e como designaremos estes vários tipos de pontos.

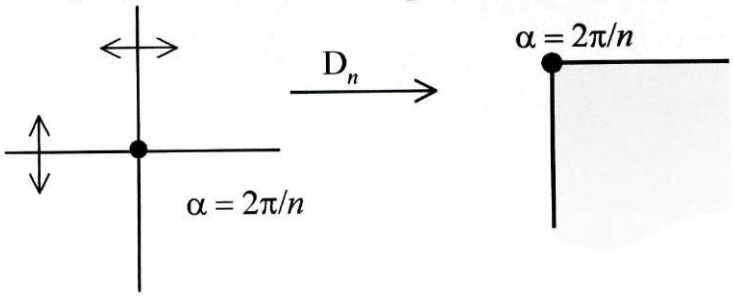
Um **pico** ou ponto cónico de ângulo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ é um ponto do orbifold quociente de E^2 pela acção do grupo cíclico C_n que é o centro de uma simetria de rotação.



Um **espelho** é uma recta do orbifold quociente de E^2 pela acção do grupo diedral D_2 que é o eixo de uma simetria de reflexão.



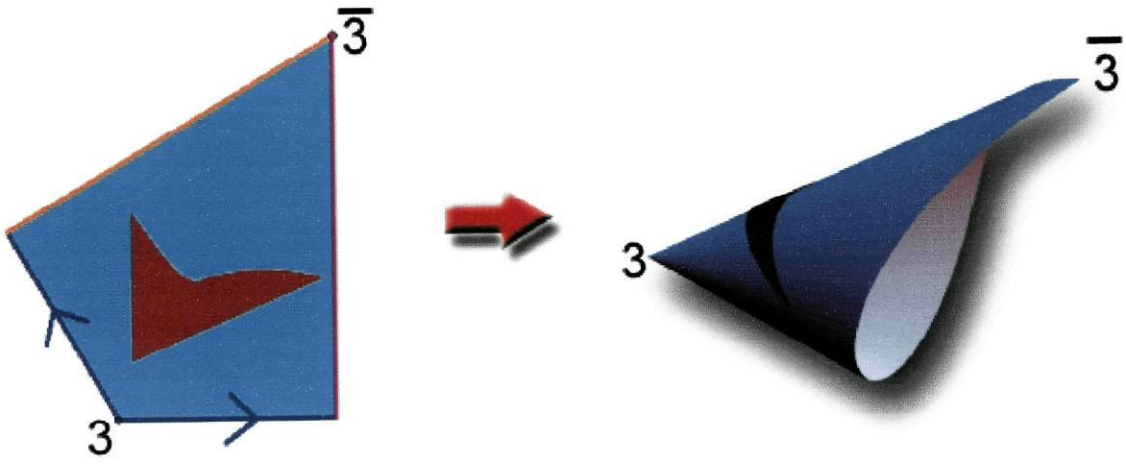
Uma **esquina** de ângulo $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ é um ponto do orbifold quociente de E^2 pela acção do grupo diedral D_n que é o ponto de intersecção de $\frac{n}{2}$ espelhos, para $n > 2$ e n par.



Dado um orbifold genérico Q, denotamos o seu **espaço subjacente** por $|Q|$, em que o espaço subjacente é a variedade com bordo (eventualmente vazio) sem picos nem esquinas, que vai surgir no principio da notação desse orbifold.

A notação que escolhemos para designar os orbifolds é a seguida por Montesinos: contém em primeiro lugar o símbolo da variedade que está subjacente no orbifold se descontarmos as singularidades; esta poderá ser o disco D, a esfera S, o toro T, a garrafa de Klein K, etc. Depois acrescentamos as ordens dos grupos de isotropia dos pontos cónicos e, por fim, metade das ordens dos grupos de isotropia dos pontos esquina marcados com um hífen em cima do número. Da classificação que faremos na próxima secção, resulta que esta notação é precisa e vantajosamente descritiva de todos os orbifolds existentes.

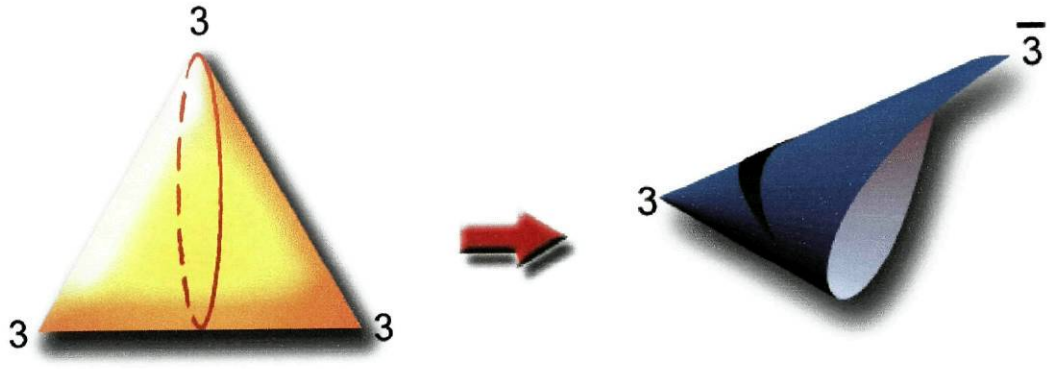
Por exemplo, o orbifold que resulta do quociente do grupo de isometrias do plano constituido pelas rotações de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ em torno de um vértice de um losango e pelas reflexões nos dois lados opostos a esse vértice que fazem um ângulo de $\frac{2\pi}{6}$ é um orbifold em que a variedade subjacente é um disco (D), acrescentado de um pico de ordem 3 porque o seu grupo de isotropia é C_3 e uma esquina (o vértice que fica na intersecção desses dois espelhos) com grupo de isotropia D_6 logo de ordem 3. Este orbifold fica assim com a notação $D3\overline{3}$.



Se um orbifold Q tem esquinas ou espelhos, então possui um revestimento duplo só com picos: vamos explicar este facto.

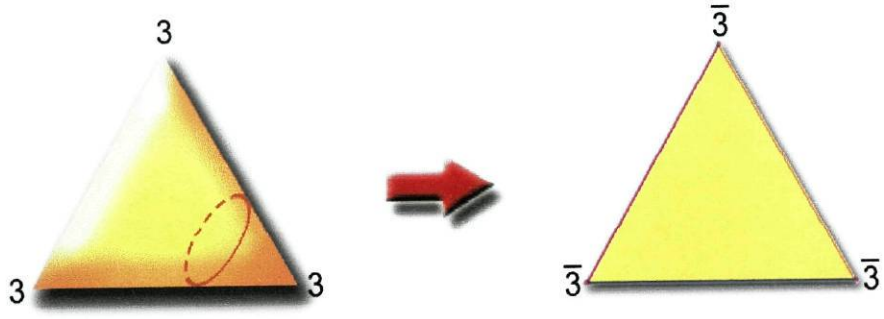
Comecemos por considerar um orbifold só com picos: nele actua um grupo cristalográfico cíclico. Se acrescentarmos uma reflexão aos geradores desse grupo cristalográfico, vamos obter um grupo diedral em que o orbifold correspondente tem espelhos e eventualmente esquinas. Se o eixo dessa reflexão escolhida passar por um pico de ordem n, esse pico vai-se transformar numa esquina de ordem $2n$. Existe, por isso, um revestimento duplo entre o orbifold só com picos inicial e o orbifold com esquinas, em que o conjunto de ramificação são os pontos pertencentes a esse eixo de reflexão.

Por exemplo, se no orbifold $S333$ (almofada com três picos) considerarmos a reflexão pelo eixo representado a vermelho na imagem, vamos obter um outro orbifold, $D3\overline{3}$, em que dois dos picos foram identificados num só e o terceiro pico de ordem 3, que se situava no eixo de reflexão escolhido, foi transformado numa esquina de ordem 6. Isto significa que $D3\overline{3}$ tem como revestimento duplo só com picos o orbifold $S333$.



Se considerarmos reflexões nos eixos que ligam os três picos de $S333$, o orbifold obtido já é outro: $D\overline{333}$. O revestimento duplo existente entre $S333$ e $D\overline{333}$ tem como conjunto de ramificação os três espelhos criados durante esta passagem. Estamos como que a achatar a

almofada e obter um disco em que os picos de ordem 3 se transformam em esquinas com o dobro da ordem.



Estes revestimentos podem também ser vistos no outro sentido, em que se colam duas cópias do orbifold identificando os seus espelhos correspondentes, de modo a desfazer os espelhos e as esquinas, obtendo um orbifold só com picos.

Vimos que a ordem de uma esquina tem de ser par; consideremos que uma das esquinas tem ordem $2n$; o seu grupo de isotropia D_{2n} é gerado por uma reflexão ρ de ordem 2 e uma rotação σ de ordem n. Tomando duas cópias do orbifold e identificando os espelhos (que estão no bordo do orbifold) correspondentes, estamos a retirar a componente ρ, obtendo um outro orbifold sem espelhos (e por conseguinte sem esquinas), só com picos. Entre este novo orbifold só com picos e o orbifold com esquinas que tinhamos inicialmente existe um revestimento duplo, no sentido amplo do termo, pois tem como conjuntos de ramificação os espelhos que foram identificados nesta mutação.

No primeiro exemplo, colam-se duas cópias de $D3\overline{3}$ pelo seu espelho: tudo é duplicado excepto os pontos que pertencem ao espelho; o pico que já existia é também duplicado. As duas cópias da esquina de ordem 6 são identificadas, mas não os pontos à sua volta, forçando a esquina a transformar-se num pico de ordem 3.

No segundo exemplo, as duas cópias de $D\overline{333}$ são coladas segundo todos os seus espelhos, mas não nos restantes pontos, originando a almofada e obrigando a que todas as esquinas passem a ser picos de ordem duplicada.

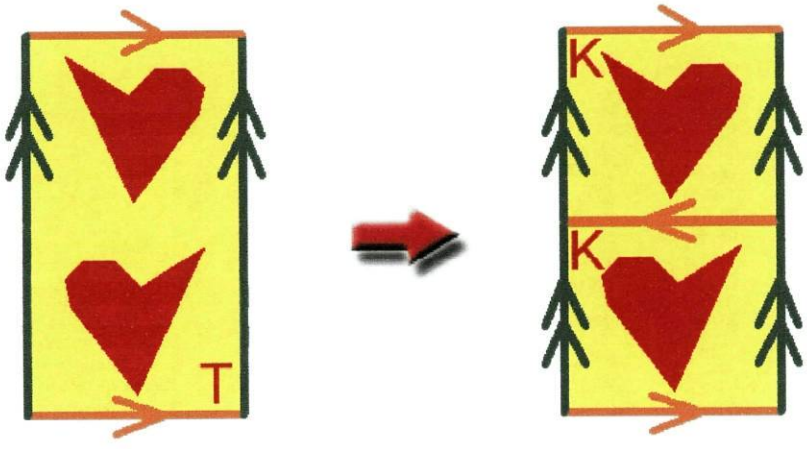
Apresentamos na tabela seguinte os orbifolds sem esquinas nem espelhos que estão relacionados através de revestimentos duplos ramificados com os restantes orbifolds euclidianos bidimensionais[2].

[2]Para uma classificação dos possíveis orbifolds euclidianos bidimensionais, veja-se a tabela da página 66 no fim do capítulo seguinte.

Orbifolds só com eventuais picos	Orbifolds com espelhos e eventuais esquinas
T	A
K	M
$P22$	
$S2222$	$D\overline{2222}, D2\overline{22}, D22$
$S333$	$D\overline{333}, D3\overline{3}$
$S442$	$D\overline{442}, D4\overline{2}$
$S632$	$D\overline{632}$

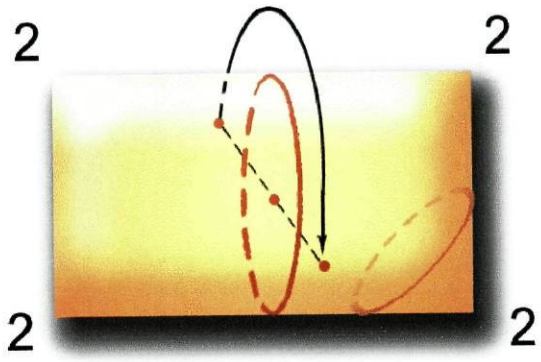
Diremos que um orbifold é **orientável** se todas as mudanças de cartas preservam a orientação. Mas, mesmo que o espaço subjacente a um orbifold seja uma variedade orientável, o orbifold pode não o ser. Por exemplo, o orbifold $D\overline{333}$ não é orientável, ainda que o seu espaço subjacente seja o disco D que é uma variedade (com bordo) orientável. Os orbifolds não-orientáveis vão ser aqueles com bordo espelhado ou aqueles cuja variedade de dimensão 2 subjacente é não orientável, como a garrafa de Klein ou o plano projectivo.

A garrafa de Klein, embora não orientável, tem um revestimento duplo orientável — o toro. Aliás, como se pode ver na imagem seguinte, a garrafa de Klein é o quociente do toro por uma involução (aplicação que elevada ao quadrado é a identidade) que troca a orientação.

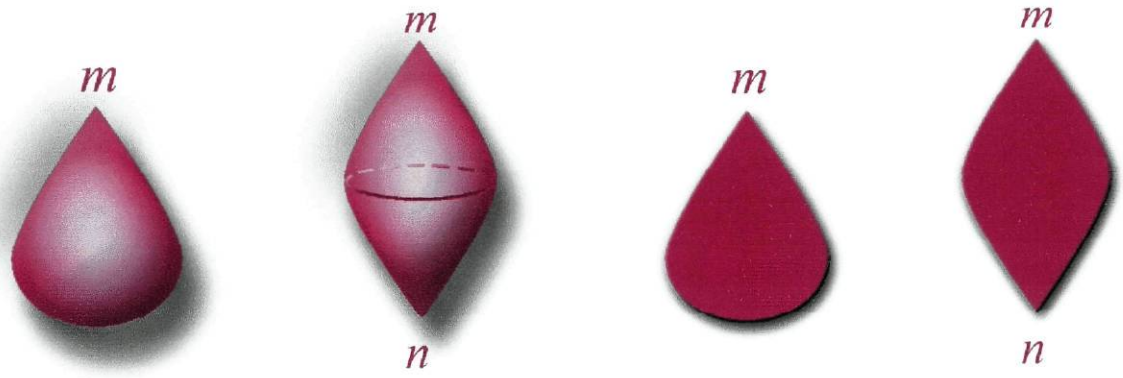


Na verdade, todos os orbifolds não orientáveis são o quociente de um dos orbifolds orientáveis por uma involução que troca a orientação. Essa involução é o revestimento duplo referido para todos os orbifolds euclidianos com bordo espelhado indicados na tabela anterior, à excepção da tira de Möbius, do plano projectivo e, como vimos, da garrafa de Klein. A tira de Möbius é obtida do toro através de uma involução que consiste numa reflexão na

diagonal e o plano projectivo com dois picos P22 é obtido do orbifold orientável S2222 pela aplicação antípoda.



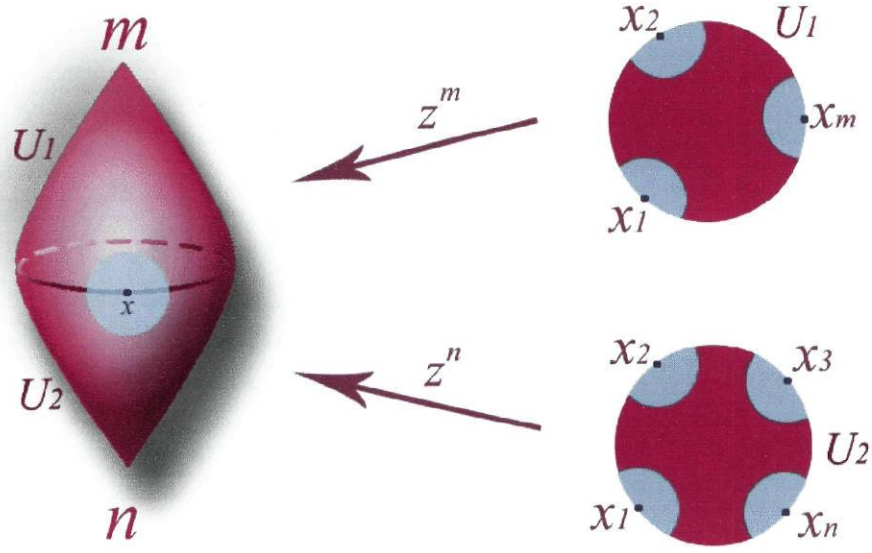
Tal como em [Sco], designaremos por **bons orbifolds** aqueles que podem ser cobertos por uma variedade, no sentido de serem o quociente de uma variedade por um grupo propriamente descontínuo; os **maus orbifolds** são aqueles que não podem ser cobertos por variedades, em que não há forma de desdobrar o orbifold para obter uma variedade. Todos os bons orbifolds podem ser munidos de atlas euclidianos, esféricos ou hiperbólicos.



Gota Sm onde $m \neq 1$ Fuso Smn onde $m \neq n$ Dm onde $m \neq 1$ Dmn onde $m \neq n$

Qualquer um dos orbifolds que se vê na figura anterior é um mau orbifold e todos os maus orbifolds de dimensão 2 são de um destes tipos. Por exemplo, o orbifold Smn com $m \neq n$, é mau, pois se considerarmos uma sua cobertura formada por dois discos U_1 e U_2 tais que o primeiro disco contém o pico de ordem m e o segundo contém o pico de ordem n, dado um

ponto x na fronteira comum desses discos, qualquer vizinhança de x tem m cópias em $\widetilde{U_1}$ e n cópias em $\widetilde{U_2}$, o que é impossível visto que esses discos têm o bordo em comum e para que o espaço de revestimento do orbifold fosse uma variedade, as cartas teriam de ser compatíveis nessa região em comum. O raciocínio para os outros maus orbifolds é semelhante.



Agora reforçaremos a forte relação que existe entre os orbifolds euclidianos e os grupos cristalográficos. É evidente que o quociente de E^2 pela acção de um grupo cristalográfico G euclidiano dá origem a um orbifold euclidiano:

$$\forall \text{ grupo cristalográfico } G \quad \exists \text{ orbifold euclidiano } Q \quad \text{tal que} \quad E^2/G \cong Q$$

Na verdade, podemos usar um só mapa para o construir:

$$\left| \begin{array}{ll} U_i = E^2 & \\ G_i = G & f_i : E^2 \longrightarrow E^2/G \\ V_i = E^2/G & \end{array} \right.$$

Já vimos exemplos no capítulo sobre grupos cristalográficos que agora podemos identificar com os orbifolds que estamos a estudar. Mas o mais interessante é que qualquer bom orbifold euclidiano Q tem associado um grupo cristalográfico G tal que $E^2/G = Q$:

$$\forall \text{ orbifold euclidiano } Q \quad \exists \text{ grupo cristalográfico } G \quad \text{tal que} \quad Q \cong E^2/G$$

Podemos usar um só mapa com $U_i = E^2$ e tendo em conta que o orbifold Q desdobra-se

(no caso dos espelhos e esquinas) e desenrola-se (no caso dos picos) sobre o plano usando os elementos que constituem o grupo G:

- Os espelhos reflectem o padrão base do orbifold.
- As esquinas reflectem o padrão base do orbifold em dois (ou mais) espelhos, produzindo um desenho em torno da esquina com grupo local diédrico.
- Os picos rodam o padrão base do orbifold produzindo um desenho local cíclico.

O grupo G é deslindado invertendo as funções de dobragem f_i. Para ilustração deste procedimento, vejam-se as animações no CD em anexo em que os vários orbifolds euclidianos revelam o grupo cristalográfico que lhes está associado.

Recordemos o teorema 2 que apresentámos na página 45 e que relaciona os automorfismos de um revestimento com o seu grupo fundamental. Se quisermos generalizá-lo para orbifolds, temos de observar que segundo a definição de orbifold, os automorfismos dos revestimentos ramificados que produzem orbifolds são isometrias. E pelo que acabamos de ver, estes automorfismos são as isometrias que constituem o grupo cristalográfico que está associado ao orbifold.

Assim, definimos o **grupo fundamental de um orbifold** Q como o grupo cristalográfico tal que $Q = E^2/G$. Este grupo $\pi_1(Q)$ não coincide, em geral, com o grupo fundamental da variedade subjacente $\pi_1(|Q|)$.

Pelo estudo que acabámos de fazer, vamos poder classificar os orbifolds euclidianos de dimensão 2 em classes de equivalência afim, relacionando-os através dos seus grupos cristalográficos.

Dizemos que dois orbifolds euclidianos de dimensão 2 são **afim-equivalentes** se existe entre eles um homeomorfismo que determina em cada mapa uma **aplicação afim**. Como cada orbifold tem associado um grupo cristalográfico, dois orbifolds euclidianos de dimensão 2 serão afim-equivalentes se e só se os seus grupos fundamentais cristalográficos também forem afim-equivalentes.

De facto, todos os bons orbifolds bidimensionais são isomorfos ao quociente de S^2, E^2 ou H^2 por um grupo propriamente descontínuo de isometrias. Tal como referimos na página 40, em todos os bons orbifolds de dimensão 2 podemos definir localmente uma métrica que vem por transporte da métrica euclidiana, esférica ou hiperbólica, consoante o orbifold seja euclidiano, esférico ou hiperbólico. Como num orbifold as mudanças de cartas são isometrias, esta métrica transportada é compatível entre atlas e fica bem definida. Se o orbifold é euclidiano, então esse grupo é um grupo cristalográfico euclidiano.

3.4 Característica de Euler

A **característica de Euler** de uma superfície X é conhecida como

$$\mathcal{X}(X) = \#V - \#A + \#F$$

onde $\#V$ é o número de vértices de uma triangulação T da superfície X, $\#A$ o número de arestas da triangulação e $\#F$ é o número de faces. A característica de Euler é independente da triangulação escolhida. Mais geralmente, dada uma decomposição celular da superfície onde cada célula e_i tem dimensão i, para algum $i \geq 0$, a característica de Euler pode ser calculada através da soma

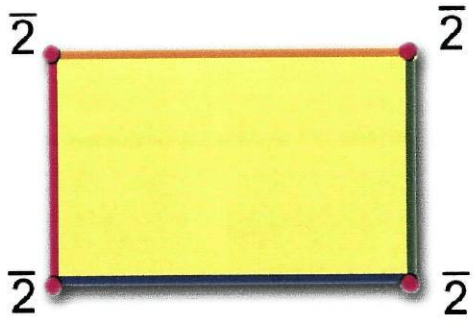
$$\mathcal{X}(X) = \sum_{e_i} (-1)^i$$

para todas as células e_i da decomposição celular de X.

No caso das superfícies, o número g tal que $2 - 2g = \mathcal{X}(X)$ diz-se o **género** da superfície X.

Iremos adaptar esta definição de modo a podermos utilizar a característica de Euler nos orbifolds.

Consideraremos que cada vértice (picos e esquinas) e cada aresta (espelhos) têm peso $\frac{1}{k}$, onde k é a ordem da simetria que os preserva. Por exemplo, calculemos a característica de Euler para o orbifold tipo mesa de bilhar $D\overline{2222}$.



Este orbifold é um rectângulo com 4 vértices, 4 arestas e 1 face. A característica de Euler do rectângulo é

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(R) &= \#V - \#A + \#F \\ &= 4 - 4 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

No entanto, no orbifold, cada aresta do rectângulo é preservada por duas reflexões distintas (a reflexão segundo a própria aresta e a reflexão segundo a aresta paralela) e cada

vértice é preservado por 4 reflexões distintas. Deste modo, a característica do orbifold será

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(D\overline{2222}) &= \#V - \#A + \#F \\ &= 4 \times \tfrac{1}{4} - 4 \times \tfrac{1}{2} + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

A característica de Euler do orbifold é diferente da característica de Euler do rectângulo subjacente.

Para a definirmos mais formalmente, façamos uma decomposição celular do orbifold Q, onde todos os pontos do interior de cada célula têm o mesmo grupo de isotropia (conjunto dos elementos de G que fixam a célula e_i), isto é,

$$\forall x \in e_i \quad \mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}(e_i)$$

Assim, podemos definir a **característica de Euler de um orbifold** Q sendo:

$$\mathcal{X}(Q) = \sum_{e_i} \frac{(-1)^i}{\#\,\mathrm{Stab}(e_i)}$$

onde e_i varia entre as células de uma decomposição celular de Q, i é a dimensão da célula e_i e $\#\,\mathrm{Stab}(e_i)$ é o número de elementos do grupo de isotropia da célula.

Os possíveis subgrupos de isotropia, no caso de orbifolds de dimensão 2, são, como já referimos, os subgrupos finitos de $O(2)$, isto é, grupos cíclicos C_n que são subgrupos de $SO(2)$, e grupos diedrais D_{2n} que contêm um subgrupo C_n que preserva a orientação. O espaço métrico $|Q|$ subjacente a um orbifold de dimensão 2 é uma variedade de dimensão 2 compacta, com fronteira espelhada (grupo de isotropia D_2), contendo um número finito de pontos esquina (grupo de isotropia D_{2n}) cujo interior contém um número finito de picos (grupo de isotropia C_n).

Em particular, se Q não tiver esquinas nem espelhos, a característica de Euler é:

$$\mathcal{X}(|Q|) + \sum_{\text{picos do tipo } C_n} (-1 + \frac{1}{n})$$

Vejamos o exemplo do orbifold euclidiano $S2222$, que podemos representar como um tetraedro isósceles com os picos nos quatro vértices (ver último capítulo). Este orbifold não tem esquinas nem espelhos, por isso a sua característica de Euler $\mathcal{X}(Q)$ terá por base a esfera ($\mathcal{X}(S^2) = 2$), a qual será modificada, para cada pico, retirando um vértice (subtraindo 1 à

característica) e colocando um pico de isotropia C_2 (somando $\frac{1}{2}$ à característica)

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(S2222) &= \mathcal{X}(S^2) + 4 \times \left(-1 + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2 - 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Nos dois exemplos acima descritos ($D\overline{2222}$ e $S2222$), a característica de Euler não deu zero por acaso. No próximo capítulo vamos mostrar que a característica de Euler de um orbifold euclidiano é sempre zero. As características de Euler positivas serão providenciadas pelos orbifolds esféricos e as características de Euler negativas terão origem em orbifolds hiperbólicos. Um padrão simétrico na esfera S^2 com ordem de simetria k dá origem a um orbifold quociente com característica de Euler $\frac{2}{k} > 0$, uma vez que a característica de Euler da esfera é 2.

4 Orbifolds euclidianos bidimensionais

Neste capítulo faremos uma classificação dos orbifolds euclidianos bidimensionais, agrupando-os segundo as suas classes de equivalência afim, constituindo uma alternativa à prova clássica da existência de 17 grupos cristalográficos bidimensionais. Começaremos por definir curvatura num orbifold para podermos depois adaptar o teorema de Gauss-Bonnet a estes objectos matemáticos. Utilizaremos o facto de a característica de Euler de um orbifold euclidiano ser nula para demonstrar através de um raciocínio combinatório que apenas podem existir 17 orbifolds euclidianos bidimensionais.

4.1 Teorema de Gauss-Bonnet

O clássico teorema de Gauss Bonnet para superfícies diz o seguinte:

Teorema 3 (Teorema de Gauss-Bonnet) *Se F é uma superfície compacta sem bordo, com métrica riemanniana e kdA é a forma da curvatura (para $x \in F$, $k(x)$ é a curvatura de Gauss, dA é o elemento infinitesimal de área), então*

$$\int_F kdA = 2\pi\mathcal{X}(F)$$

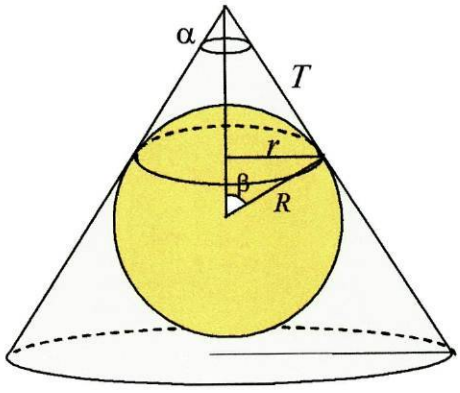
Da forma como adaptámos a definição de característica de Euler de uma superfície a um orbifold, vamos poder utilizar este teorema também para orbifolds:

Teorema 4 (Teorema de Gauss-Bonnet generalizado) *Dado um orbifold Q de dimensão 2, em que kdA é a forma da curvatura da variedade subjacente, tem-se*

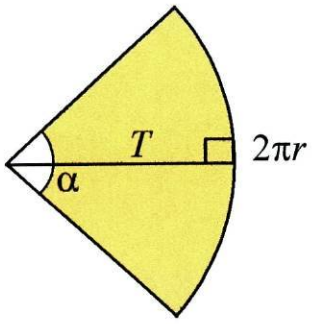
$$\int_Q kdA = 2\pi\mathcal{X}(Q)$$

Antes de demostrarmos este teorema, precisamos de esclarecer o que entendemos como curvatura de um orbifold. Por exemplo, no caso dos orbifolds euclidianos sem esquinas nem espelhos, a forma como a métrica é transportada implica que a curvatura será nula excepto nos picos que concentram a curvatura:

A curvatura de uma esfera de raio R é constante e é igual a $\frac{1}{R^2}$. Inscrevemos uma esfera de raio R num pico de ângulo α, como na imagem, determinando na esfera uma circunferência de raio r



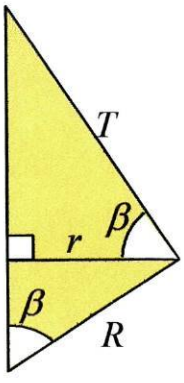
Desenrolando o cone obtido com base nessa circunferência de raio r (que tinha perímetro $2\pi r$) e cuja geratriz tem comprimento T, obtemos um pedaço de uma circunferência com perímetro total $2\pi T$.



Se $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, então esse perímetro total da circunferência é igual a n vezes o arco correspondente a este pedaço de ângulo α

$$2\pi T = n\ 2\pi r \iff T = \frac{2\pi r}{\alpha}$$

Por outro lado, se a geratriz do cone faz um ângulo β com o raio da circunferência da base,



tem-se $\cos\beta = \frac{r}{T}$ e portanto $\cos\beta = \frac{\alpha}{2\pi}$. Assim, podemos calcular a área da calote superior da esfera:

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta} R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\alpha = 2\pi R^2 (1 - \cos\beta) = R^2 (2\pi - \alpha)$$

e fazer o cálculo da curvatura total da calote

$$\int k\ dA = k \int dA = \frac{1}{R^2} \cdot R^2\,(2\pi - \alpha) = 2\pi - \alpha$$

obtendo que a curvatura total da calote da esfera de raio R inscrita no pico de ângulo α é $2\pi - \alpha$ e é independente do raio da esfera. Aproximando R a zero, a curvatura da calote será no limite a curvatura do pico, e por isso concluimos que o pico de ângulo α contribui com $2\pi - \alpha$ para a curvatura.

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de Gauss-Bonnet generalizado:

Prova. Consideremos um primeiro caso de um orbifold Q com (eventuais) picos de ângulos $\alpha_i = \frac{2\pi}{n_i}$, mas sem esquinas nem espelhos. A curvatura do orbifold será a soma da curvatura da sua variedade riemanniana subjacente $|Q|$ (sem picos) com a curvatura concentrada em cada pico, que é $2\pi - \alpha_i$, como vimos. De modo que temos

$$\int_{|Q|} k\ dA + \sum_{\text{picos } \alpha_i} (2\pi - \alpha_i) = 2\pi\ \mathcal{X}\,(|Q|)$$

e como $\alpha_i = \frac{2\pi}{n_i}$

$$\iff \int_{|Q|} k\ dA + 2\pi \sum_{\text{picos } \alpha_i} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2\pi\ \mathcal{X}\,(|Q|)$$

e passando a soma das curvaturas dos picos para o 2^o membro

$$\iff \int_{|Q|} k\ dA = 2\pi \left(\mathcal{X}\,(|Q|) + \sum_{\text{picos } \alpha_i} \left(-1 + \frac{1}{n_i}\right)\right)$$

obtemos por fim

$$\iff \int_{|Q|} k\ dA = 2\pi\ \mathcal{X}\,(Q)$$

pois vimos na página 57 que a característica de Euler de um orbifold só com picos é

$$\mathcal{X}(|Q|) + \sum_{\text{picos do tipo } C_n} (-1 + \frac{1}{n}).$$

No caso de Q ter esquinas ou espelhos, já vimos na página 50 que possui um revestimento duplo só com picos, reduzindo-se o problema ao caso anterior. ■

Este teorema será útil para demonstrarmos a última afirmação do capítulo anterior:

Corolário 5 *Se Q é um orbifold euclidiano, então $\mathcal{X}(Q) = 0$; se Q é um orbifold esférico, então $\mathcal{X}(Q) > 0$; se Q é um orbifold hiperbólico, então $\mathcal{X}(Q) < 0$.*

Note-se que se Q é um orbifold euclidiano, esférico ou hiperbólico, a variedade subjacente $|Q|$ acolhe a métrica de E^2, S^2 ou H^2, respectivamente, sendo a sua curvatura k igual a zero, 1, ou -1, respectivamente. Pelo teorema anterior, a característica $\mathcal{X}(Q)$ será igual a zero, positiva ou negativa, respectivamente.

Em alternativa ao uso do teorema de Gauss Bonnet generalizado, poderíamos chegar à conclusão que a característica de Euler de um orbifold euclidiano é nula, demonstrando que:

1. Todo o orbifold euclidiano Q é finitamente revestido por um toro .

2. Como $\mathcal{X}(toro) = 0$, então $\mathcal{X}(Q) = 0$.

O ponto 1 é equivalente ao teorema de Bieberbach. Um orbifold euclidiano Q admite $\mathbb{R}^2$ como um seu revestimento universal e já vimos na página 55 que $\pi_1(Q) \cong G$ onde G é o grupo dos automorfismos do revestimento. Se considerarmos um seu subgrupo $H \leqslant G$ constituído por n translações linearmente independentes, então $\mathbb{R}^2/H = T^2$ e o teorema de Bieberbach diz-nos que o quociente tem índice finito $\forall n$, por isso qualquer orbifold euclidano tem um revestimento finito vindo do toro.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^2 \\ & \swarrow & \\ T^2 = \mathbb{R}^2/H & & \downarrow \\ & \searrow & \\ \text{índice} & \text{finito} & Q \end{array}$$

Em geral, a característica de Euler não se mantém através dos revestimentos finitos, mas devido à forma como foi definida para os pontos singulares, dividindo pela ordem do seu estabilizador, ao desdobrarmos o orbifold pelos espelhos ou desenrolarmos pelos picos a característica de Euler não será alterada.

4.2 O teorema dos 17 orbifolds euclidianos

O seguinte teorema classifica os orbifolds euclidianos de dimensão 2 em classes de equivalência afim. A sua prova utilizará as considerações já efectuadas acerca da característica de Euler de um orbifold e acerca da possibilidade de encontrar um revestimento duplo sem espelhos para qualquer orbifold.

Teorema 6 *Só há 17 orbifolds euclidianos de dimensão 2, a menos de equivalência afim.*

Prova. Vimos na secção anterior que um orbifold euclidiano Q tem característica nula $\mathcal{X}(Q) = 0$. Logo para provar o teorema resta listar todas as possibilidades de caleidoscópios euclidianos com característica de Euler nula.

Se Q é um orbifold euclidiano então o espaço subjacente $|Q|$ é uma superfície com f espelhos no bordo, com a picos de ordens $p_1, p_2, ..., p_a$ e b esquinas de ordens $2e_1, 2e_2, ..., 2e_b$.

Caso A: Suponhamos que Q não tem espelhos, e portanto não tem esquinas.

- **Caso 1:** $|Q|$ é orientável, de género g .

  Neste caso, é válido o seguinte cálculo da característica de Euler do orbifold:

$$\mathcal{X}(Q) = \mathcal{X}(|Q|) + \sum_{\text{picos tipo } C_n} \left(-1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\iff 0 = 2 - 2g + \sum_{i=1}^{a} \left(-1 + \frac{1}{p_i}\right)$$

  Para $g > 1$ a equação não tem solução.

  Se $g = 1$, então $a = 0$ e portanto Q é um toro T.

  Se $g = 0$, então $|Q|$ é uma esfera e a equação fica

$$0 = 2 - a + \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{p_i} \Leftrightarrow a - 2 = \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{p_i}$$

  logo $a > 2$ sobrando as seguintes possibilidades:

  - Se $a = 3$ então podemos ter $Q = S333$ ou $S244$ ou $S236$
  - Se $a = 4$, então $Q = S2222$

- **Caso 2:** Se $|Q|$ é não orientável, de género k, então $\mathcal{X}(Q) = 2 - k$ logo a fórmula fica:

$$0 = 2 - k + \sum_{i=1}^{a} \left(-1 + \frac{1}{p_i}\right)$$

  - Para $k > 2$ a equação não tem solução.
  - Se $k = 2$, então $a = 0$ e portanto Q é a garrafa de Klein K.
  - Se $k = 1$, então a equação fica

$$0 = 1 - a + \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{p_i} \Leftrightarrow a - 1 = \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{p_i}$$

logo $a > 1$ e portanto

* Se $a = 2$ então temos dois picos de ordem 2 logo Q é o plano projectivo com dois picos $P22$.

Caso B: Suponhamos que Q tem espelhos. Da mesma forma que procedemos na página 50, duplicamos $|Q|$ ao longo do bordo para tirar todos os espelhos do bordo, obtendo uma superfície $|Q|^*$.

- **Caso 1:** $|Q|$ é orientável, de género g .

  Ao duplicar $|Q|$ ao longo do bordo, obtemos uma superfície orientável de género $2g + f - 1$, com $2a$ picos de ordens p_1, p_1, p_2, p_2, ..., p_a,p_a e ainda b picos de ordens e_1, e_2, ..., e_b (porque, quando desfazemos os espelhos, os picos existentes duplicam e as esquinas transformam-se em picos com metade da ordem). Por isso, é válido o seguinte cálculo da característica de Euler do orbifold:

$$\mathcal{X}(Q) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{X}\left(|Q|^*\right) + 2\sum_{i=1}^{a}\left(-1+\frac{1}{p_i}\right) + \sum_{j=1}^{b}\left(-1+\frac{1}{e_j}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{X}(Q) = \frac{1}{2}\left(2 - 2(2g+f-1) + 2\sum_{i=1}^{a}\left(-1+\frac{1}{p_i}\right) + \sum_{j=1}^{b}\left(-1+\frac{1}{e_j}\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{X}(Q) = 1 - (2g+f-1) + \sum_{i=1}^{a}\left(-1+\frac{1}{p_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{b}\left(-1+\frac{1}{e_j}\right)$$

$$\Longleftrightarrow 0 = 2 - 2g - f + \sum_{i=1}^{a}\left(-1+\frac{1}{p_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{b}\left(-1+\frac{1}{e_j}\right)$$

  Para $g > 1$ a equação não tem solução.

  Se $g = 1$, então $f = a = b = 0$ e portanto Q é o toro T, como já tinhamos visto.

  Se $g = 0$, então $f \leq 2$ e temos as seguintes possibilidades:

  - **Caso 1.1:** Se $f = 2$, então $a = b = 0$, logo Q é um anel A.
  - **Caso 1.2:** Se $f = 1$, então $|Q|$ é um disco D com as possibilidades:
    * **Caso 1.2.1:** Se $f = 1$ e $a = 0$ então:
      Se $b = 4$, então $Q = D\overline{2222}$
      Se $b = 3$, então $Q = D\overline{333}$ ou $D\overline{244}$ ou $D\overline{236}$
      Se $a = 2$ e $b = 0$ então $Q = D22$

* **Caso 1.2.2:** Se $f = 1$ e $a \neq 0$ então:
  Se $a = 1$ e $b = 2$ então $Q = D2\overline{22}$
  Se $a = 1$ e $b = 1$ então $Q = D3\overline{3}$ ou $D4\overline{2}$

- **Caso 2:** Se $|Q|$ é não orientável, de género k, é válida a fórmula:

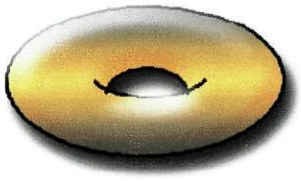
$$0 = 2 - k - f + \sum_{i=1}^{a}\left(-1 + \frac{1}{p_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{b}\left(-1 + \frac{1}{e_j}\right)$$

  - Para $k > 2$ a equação não tem solução.
  - Se $k = 2$, então $f = a = b = 0$ e portanto Q é a garrafa de Klein K, como já tinhamos visto.
  - Se $k = 1$, então $f = 1$ logo $a = b = 0$ e portanto Q é a tira de Möbius M.

Concluímos assim que só há 17 orbifolds euclidianos de dimensão 2, a menos de equivalência afim. ■

Como vimos, há uma bijecção entre cada classe de equivalência afim de orbifolds e cada classe de equivalência afim de grupos cristalográficos, de modo que este teorema permite-nos concluir que só há 17 grupos cristalográficos euclidianos de dimensão 2, a menos de equivalência afim. É desta forma que este teorema constitui uma demonstração alternativa da existência de apenas 17 grupos cristalográficos euclidianos de dimensão 2.

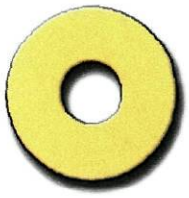
A revelação do grupo cristalográfico que produz cada orbifold será descrita no capítulo seguinte, recorrendo à criação de animações com o software *Mathematica*. Para já, ficamos com uma tabela resumo das 17 classes de equivalência de orbifolds euclidianos bidimensionais:



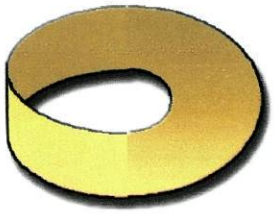
T



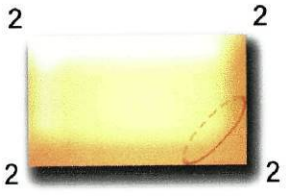
K



A



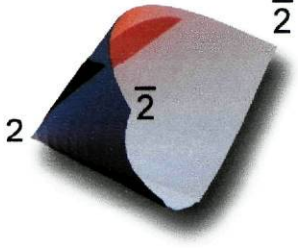
M



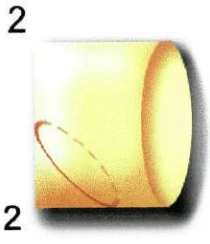
$S2222$



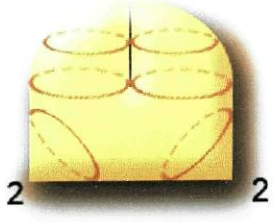
$D\overline{2222}$



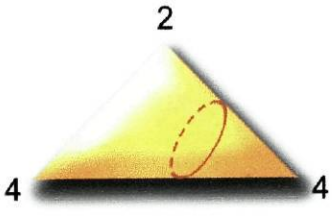
$D2\overline{22}$



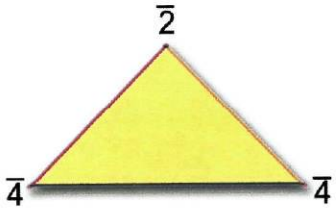
$D22$



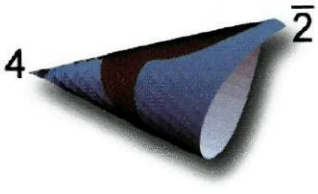
$P22$



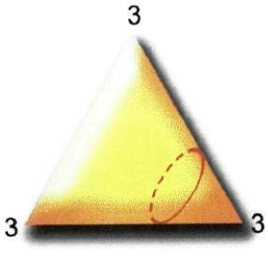
$S442$



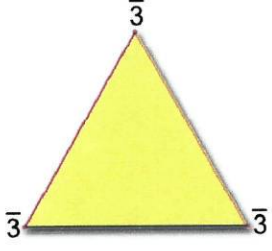
$D\overline{442}$



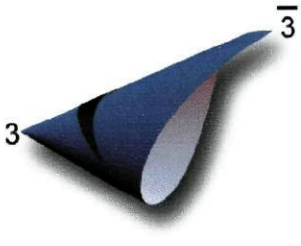
$D4\overline{2}$



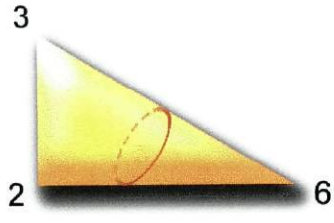
$S333$



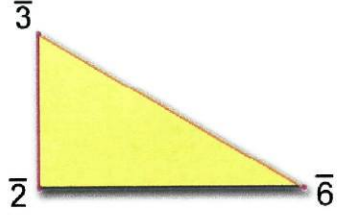
$D\overline{333}$



$D3\overline{3}$



$S632$



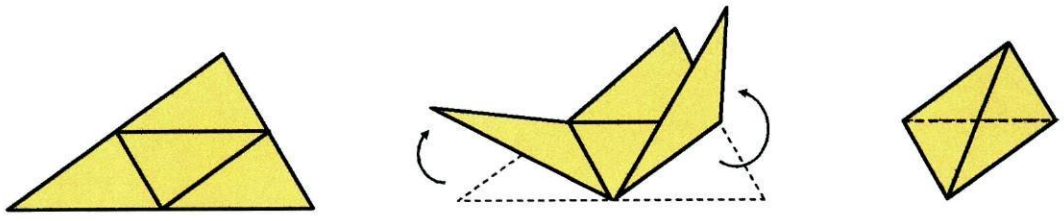
$D\overline{632}$

5 Modelos de orbifolds no *Mathematica*

Neste capítulo iremos descrever os modelos desenvolvidos para os orbifolds euclidianos, construídos com o auxílio do programa *Mathematica*. Estes modelos são apresentados em animações, incluídas no CD em anexo, que permitem ao utilizador observar o comportamento dos objectos de forma a reconhecer neles várias propriedades matemáticas.

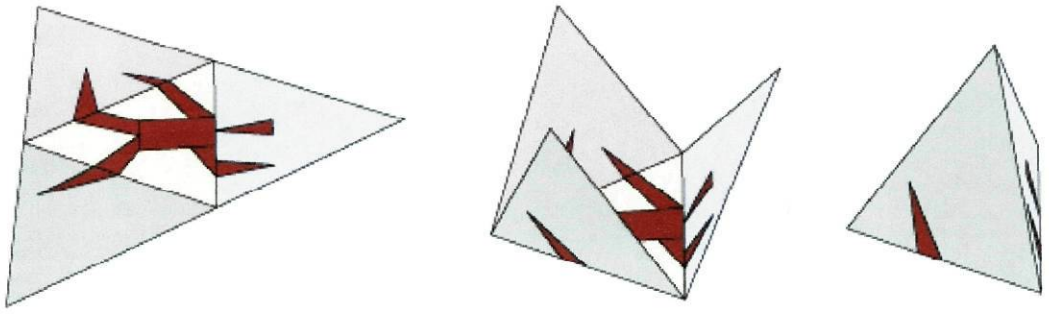
O primeiro modelo construído foi a almofada com 4 picos de ordem 2: o orbifold **S2222**. A forma de construção deste modelo foi sugerida no artigo [Mon4].

Uma região fundamental do padrão correspondente a este orbifold pode ser um triângulo acutângulo. Partindo de um tal triângulo, encontramos os pontos médios dos lados, onde estão situados os picos de ângulo π, e unimos os lados que são identificados pelas isometrias do grupo cristalográfico associado a este orbifold, nomeadamente pelas rotações de ângulo π em torno desses picos.

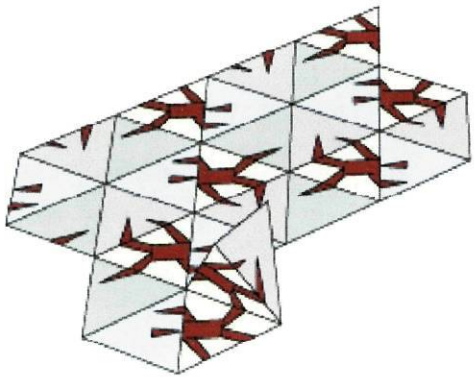


Obtemos um tetraedro isósceles (com arestas opostas de comprimento igual) que tem quatro vértices de ângulo total π. Todos os tetraedros isósceles com ângulos π nas faces podem ser construídos desta forma.

Topologicamente, o tetraedro e a almofada de 4 picos são homeomorfos. Para além disso, esta forma de construção (partindo de um triângulo do plano euclidiano) permite-nos incorporar no tetraedro a métrica euclidiana, obtendo curvatura zero nas quatro faces do tetraedro, e curvatura π nos vértices, que se comportam como os picos de S2222, concentrando a curvatura.

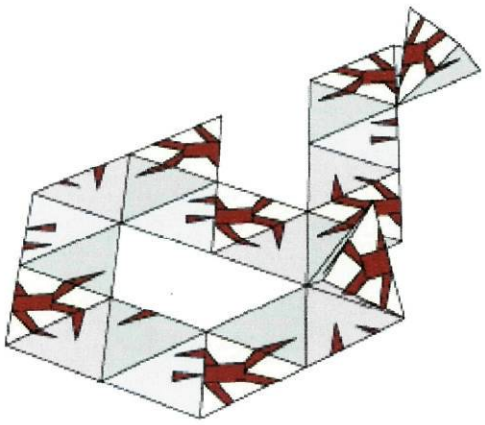


Depois de vermos a forma de construção do orbifold a partir do plano euclidiano, interessa-nos ver o seu comportamento. Imaginemos que este objecto tem a superfície impregnada de tinta fresca: o desenho que temos na face de baixo do tetraedro é carimbado no plano e, à medida que fazemos este orbifold rolar no plano (sem escorregamento), vamos carimbando as várias partes do desenho que estão nas 4 faces do tetraedro.

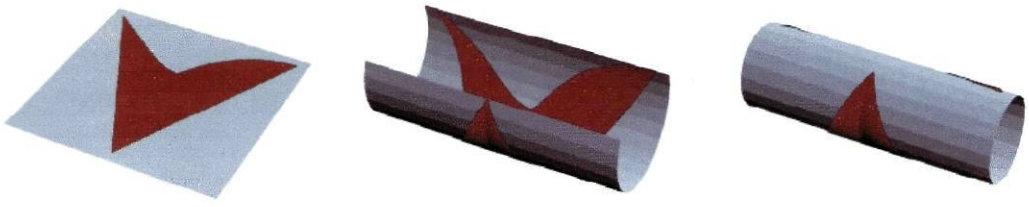


O desenho que é produzido tem um padrão de simetria com rotações de 180° em torno de quatro pontos que correspondem aos vétrices do tetraedro, que aqui representam os picos do orbifold S2222. O padrão de simetria que este orbifold produz no plano é o padrão gerado pelo grupo cristalográfico **p2**.

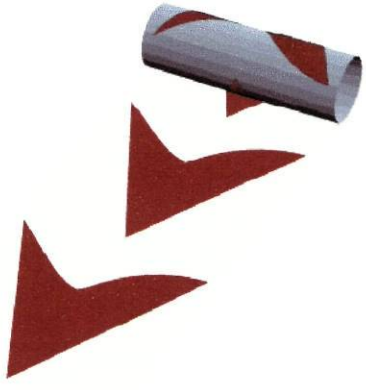
No CD em anexo podemos ver também uma animação com dois modelos deste orbifold a movimentar-se em simultâneo em direcções diferentes, confirmando que o desenho que ambos produzem é coerente e independente do caminho percorrido anteriormente.



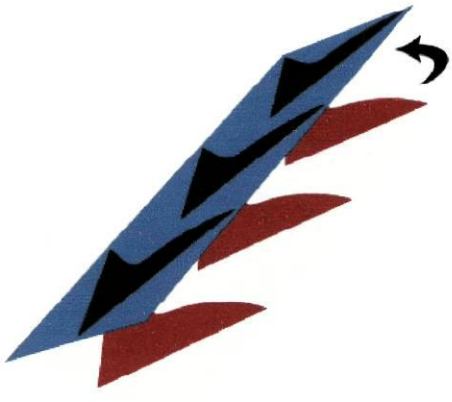
O orbifold **A**, o Anel, é homeomorfo a um cilindro (finito), em que os bordos funcionam como espelhos. O grupo cristalográfico associado ao anel é **pm**, gerado por uma translação e duas reflexões. A sua construção pode ser feita a partir de um rectângulo do plano euclidiano, identificando dois lados opostos e considerando os outros dois lados como eixos de reflexão.



À medida que fazemos o cilindro rebolar no plano, a figura vai sendo carimbada e repetida segundo uma translação numa direcção.

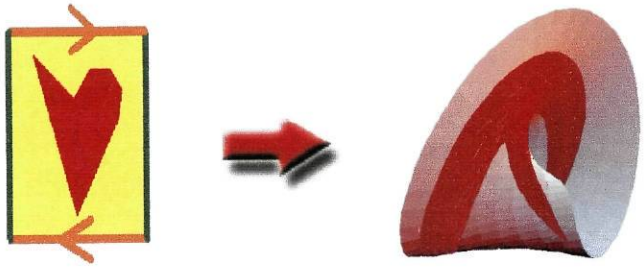


Como os bordos do cilindro são espelhados, podemos representar a componente reflexão do grupo cristalográfico abrindo novamente o cilindro e virando-o, para reflectir o desenho segundo esses eixos.

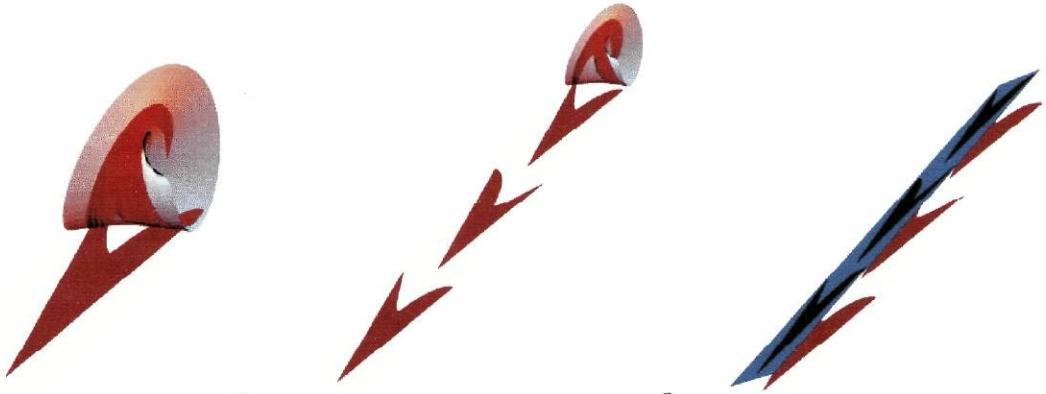


A forma como fizemos a representação desta reflexão num eixo poder-se-ia fazer de outra forma, sem precisar de desfazer o modelo em formato de cilindro. Se este fosse construído num material maleável, conseguir-se-ia virá-lo do avesso e continuar a carimbar a figura rolando, mas, estando agora do avesso, carimbaria a figura já reflectida. Não foi feita a animação do movimento de viragem do avesso para este orbifold, mas o efeito seria semelhante ao que se apresenta mais à frente para os cones $D2\overline{22}$, $D4\overline{2}$ e $D3\overline{3}$.

A tira de Möbius (orbifold **M**) pode ser obtida a partir de um rectângulo do plano identificando dois lados opostos, tal como se vê na figura, e onde os outros dois lados do rectângulo são um espelho (único) que vai constituir o bordo.



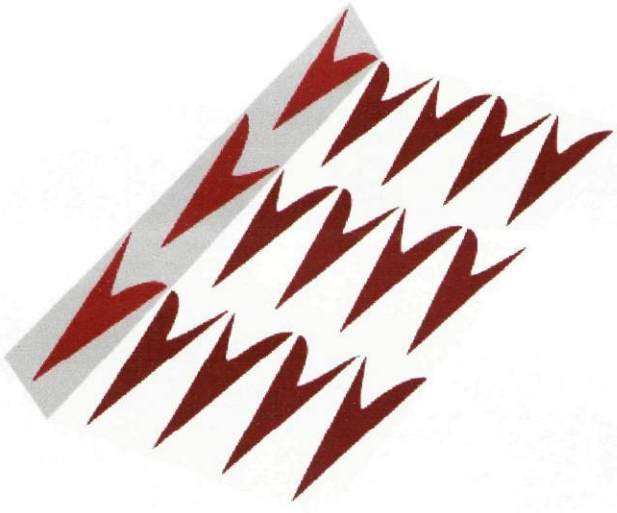
Note-se que a tentativa de representação da tira de Möbius no espaço tridimensional obriga a uma deformação da métrica no objecto tridimensional, contudo na parte que fica em contacto com o plano (em baixo) a métrica continua a ser a euclidiana, carimbando assim a figura sem deformação.



1. 2. 3.

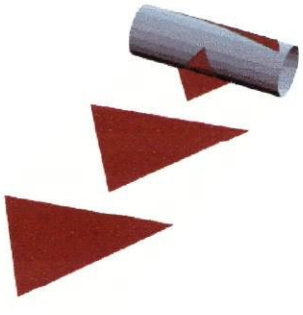
Como orbifold, a tira de Möbius tem o bordo espelhado. Por isso, para além de a fazermos rebolar no plano, carimbando o desenho nela contido, teremos de representar de alguma forma a reflexão no bordo. A forma como o fizemos foi semelhante ao anel, abrindo nova-

mente a tira de Möbius e virando todo o desenho que já tivesse sido carimbado; mas, tal como já referimos para o anel, poder-se-ia fazer também através do movimento da tira de Möbius a virar-se do avesso.

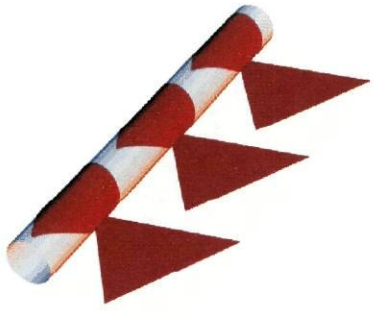


O orbifold **M** dá origem ao grupo cristalográfico **cm** gerado por uma reflexão e uma reflexão deslizante.

Quanto ao **toro**, inicialmente seguimos um método decomposto em duas fases: primeiro idenficando dois lados opostos do rectângulo base, obtemos um cilindro, que rodando pelo plano repete um desenho com padrão de simetria de translação; depois, abrindo o cilindro e identificando os outros dois lados, obtemos outro cilindro que ao rodar pelo plano repete o desenho, translatando-o noutra direcção.

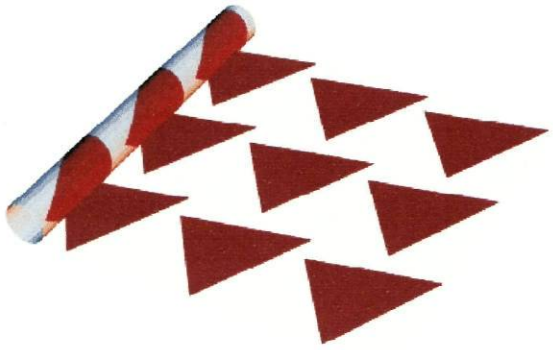


1.

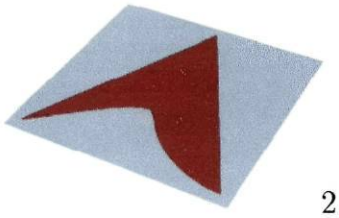


2.

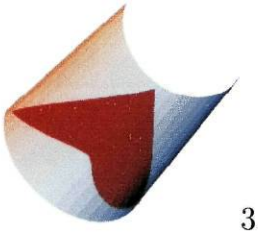
O padrão cristalográfico que o toro desenha no plano é **p1**, gerado por duas translações linearmente independentes.



Mais tarde, surgiu a ideia de representar o toro como um *donut* um pouco achatado, à semelhança de um pneu de automóvel.



1.



2.



3.



4.



5.

Com este modelo, depois de rolar na direcção habitual carimbando metade do padrão numa direcção, pode rodar para o lado, deslocando a parte da superfície já carimbada para o meio do toro e fazendo passar a parte que falta carimbar de novo para o lado de fora.

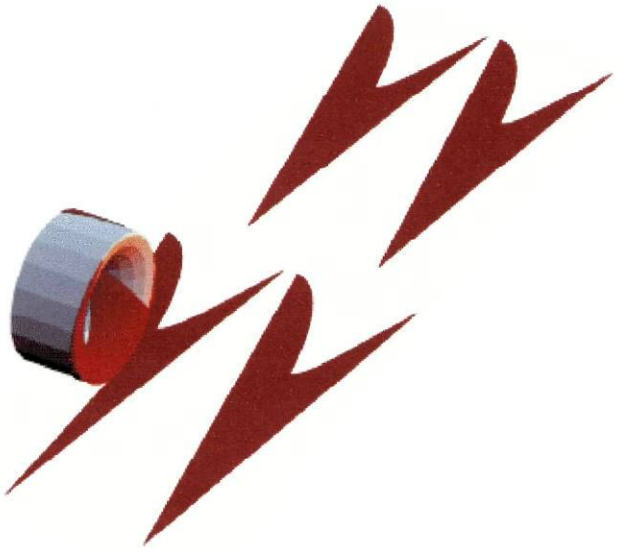


1.



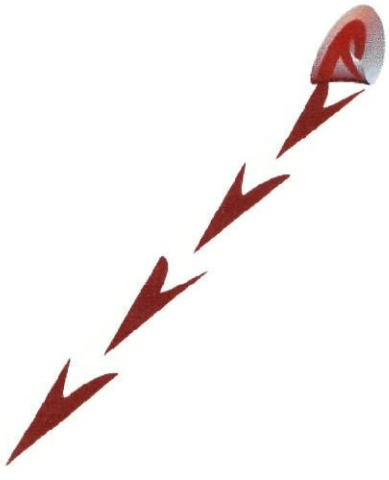
2.

Rolando de novo na primeira direcção, completa o resto do desenho.

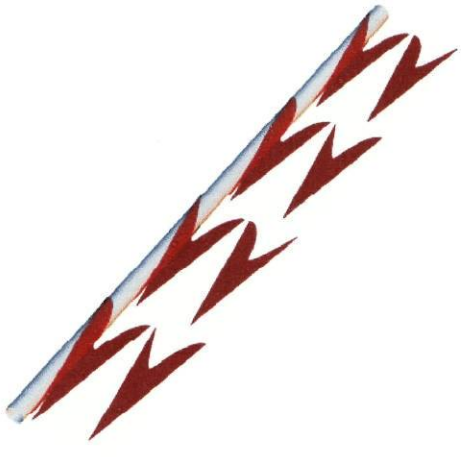


Isto poderia ser feito em borracha, ou noutro material ligeiramente elástico, pois neste caso apenas na parte do "pneu" que está em contacto com o solo se mantém a métrica euclidiana, pois na parte de dentro do modelo a métrica está deformada. Poder-se-ia manter a métrica euclidiana se considerássemos um modelo do toro achatado dos dois lados, por fora e por dentro, com volume zero, como um cilindro com duas faces.

No caso da **garrafa de Klein**, a abordagem utilizada foi semelhante à tira de Möbius, decompondo o modelo a meio da animação e reconstituindo-o como um cilindro para carimbar segundo outra direcção.



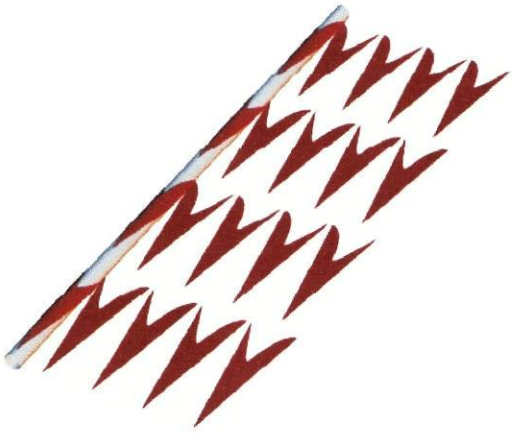
1.



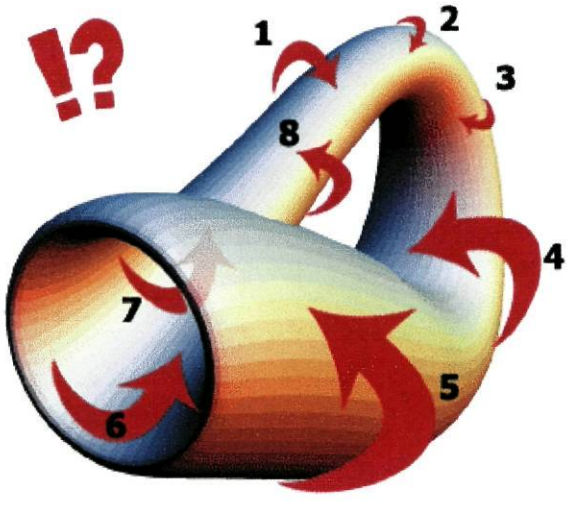
2.

O grupo cristalográfico que está associado a este orbifold, **pg**, é gerado por uma reflexão

deslizante (dada pela tira de Möbius) e uma translação (dada pelo cilindro).



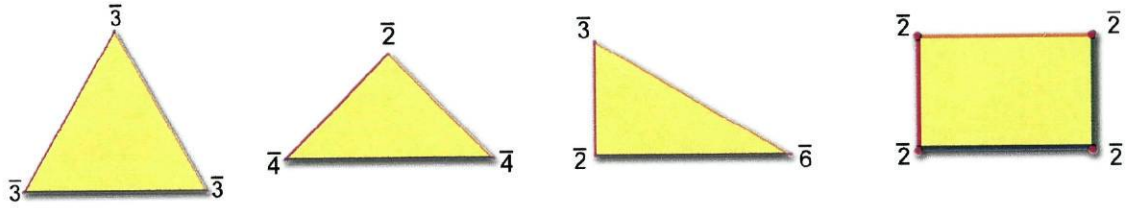
Inicialmente houve uma tentativa de utilizar a representação tradicional da garrafa de Klein em $\mathbb{R}^3$ e fazê-la movimentar no plano, carimbando o desenho que estivesse contido na sua superfície. Mas alguns entraves surgiram, devido às propriedades desta superfície. É possível fazê-la rebolar inteira num dos sentidos, tipo "lagarta", tal como fizemos com o toro e com a tira de Möbius. No entanto, se tentarmos rodá-la de modo a movimentá-la para um lado, entramos numa contradição topológica, como explica a figura seguinte.



Suponhamos que escolhemos rodar a garrafa de Klein no local 1, conforme o sentido da seta; aplicando esta rotação ao resto da superfície, segundo o caminho indicado pela numeração, a orientação volta ao ponto original trocada, obrigando a superfície a rodar simultaneamente em sentidos inversos!

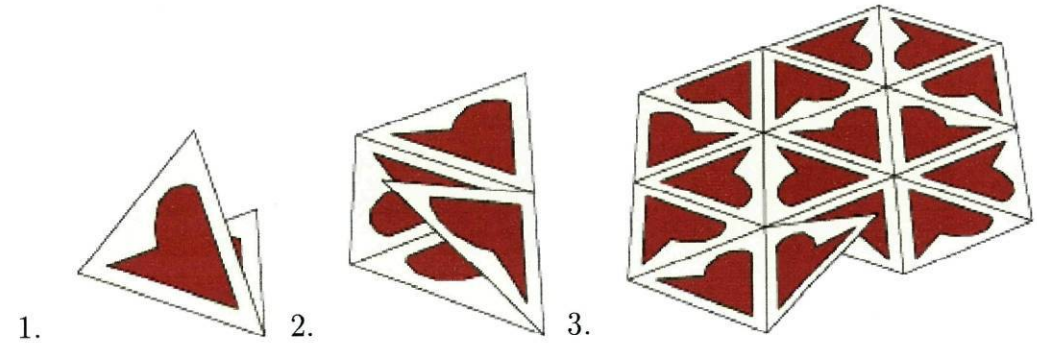
Apenas conseguiríamos fazer este movimento se considerássemos um revestimento duplo da garrafa de Klein e, nesse caso, não seria verdadeiramente uma garrafa de Klein, mas sim um toro.

Para modelar os quatro orbifolds constituídos apenas por um disco com bordo espelhado e esquinas, sem picos, podemos utilizar triângulos com ângulos variados conforme a ordem das esquinas, excepto no caso $D\overline{2222}$ que precisa de um rectângulo. Em todos estes modelos não há deformação da métrica euclidiana.



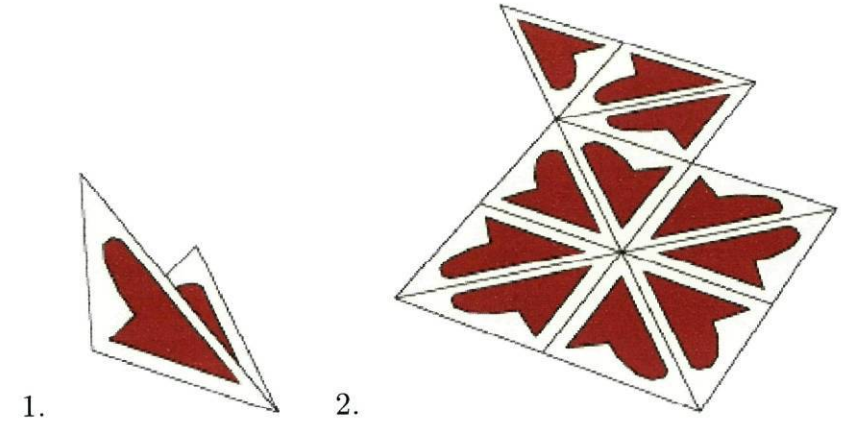
$D\overline{333}$ $D\overline{442}$ $D\overline{632}$ $D\overline{2222}$

O orbifold $\mathbf{D\overline{333}}$ tem três esquinas de ordem 6, logo será representado por um triângulo equilátero, com três ângulos $\frac{\pi}{3}$. O grupo cristalográfico representado por este orbifold é **p3m1**. Rodando o triângulo em torno de cada um dos seus lados, é carimbado no plano um desenho com simetria de reflexão em torno dos eixos correspondentes a esses lados.



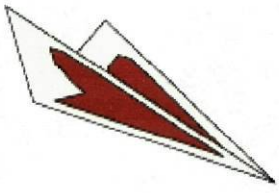
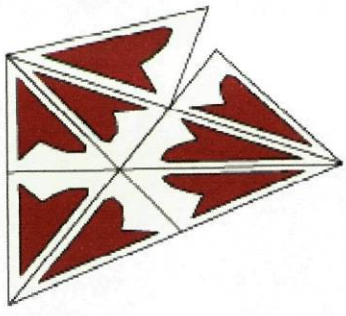
1. 2. 3.

O orbifold $\mathbf{D\overline{442}}$ tem duas esquinas de ordem 8 e uma de ordem 4, logo será representado por um triângulo isósceles, com dois ângulos $\frac{\pi}{4}$ e um ângulo $\frac{\pi}{2}$. O grupo cristalográfico representado por este orbifold é **p4m**.

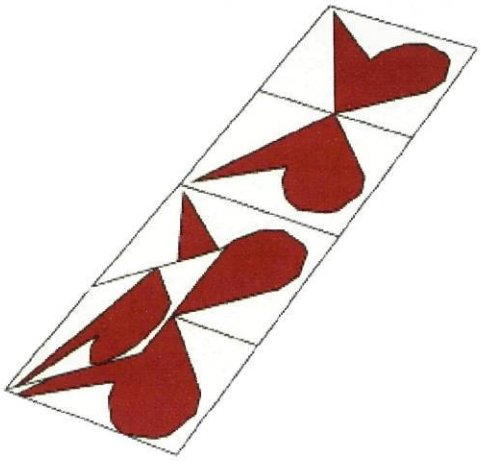


1. 2.

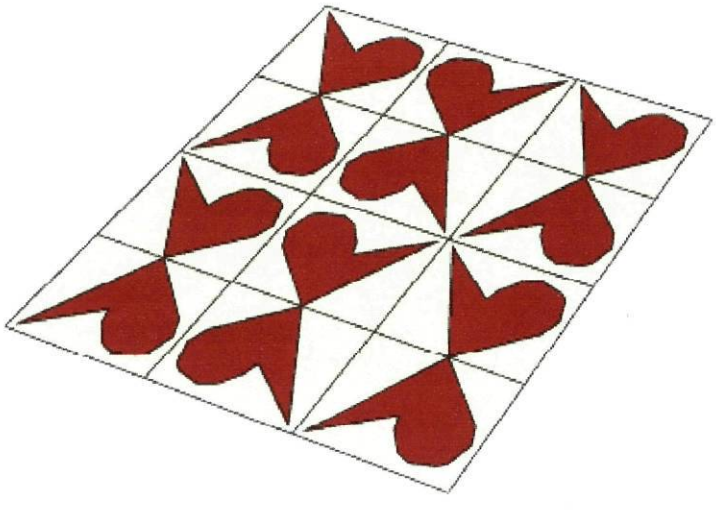
O orbifold $\mathbf{D\overline{632}}$ tem três esquinas de ordens 12, 6 e 4, logo será representado por um triângulo rectângulo, com ângulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$. O grupo cristalográfico representado por este orbifold é **p6m**.

1.  2.  3. 

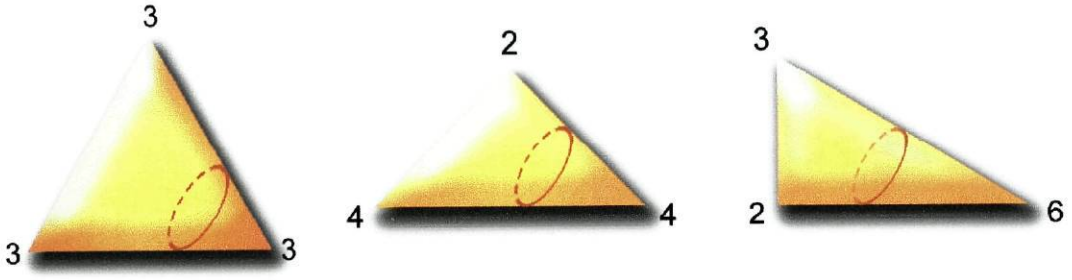
O orbifold $\mathbf{D\overline{2222}}$ tem quatro esquinas de ordem 4, logo será representado por um rectângulo, que se vira nos quatro lados gerando um padrão com reflexões nesses quatro eixos.

1.  2. 

O grupo cristalográfico representado por este orbifold é **pmm**.

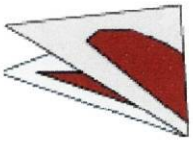


Para os restantes três orbifolds que são almofadas com picos,

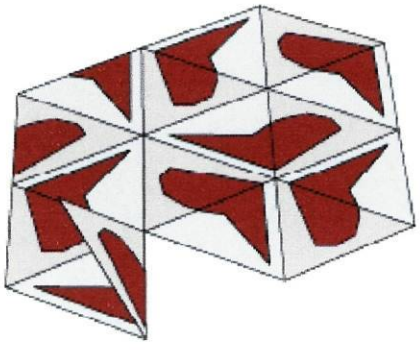


$S333$ $S442$ $S632$

o modelo escolhido foi semelhante: achatámos estas almofadas de modo a obter um triângulo com duas faces. Assim, embora não seja tão evidente para quem vê estes modelos que a variedade subjacente é a esfera S^2, pelo menos não há deformação da métrica.

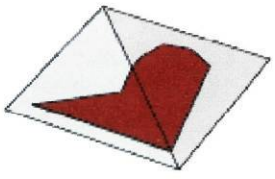
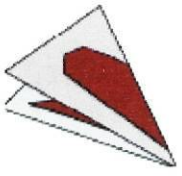
1.  2. 

O orbifold **S333** tem três picos de ordem 3, logo pode ser obtido dobrando a meio uma região fundamental do padrão no plano (o paralelogramo que vemos na figura 1 acima), ficando representado por um triângulo equilátero com ângulos $\frac{\pi}{3}$ e com duas faces, que se movimenta virando em torno dos seus lados, produzindo um desenho com rotações de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ em torno dos vértices desse triângulo, que correspondem aos picos do orbifold.

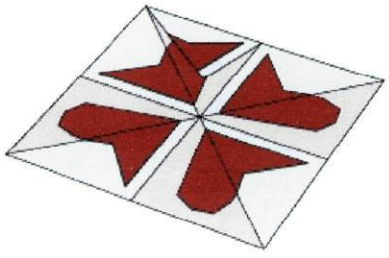
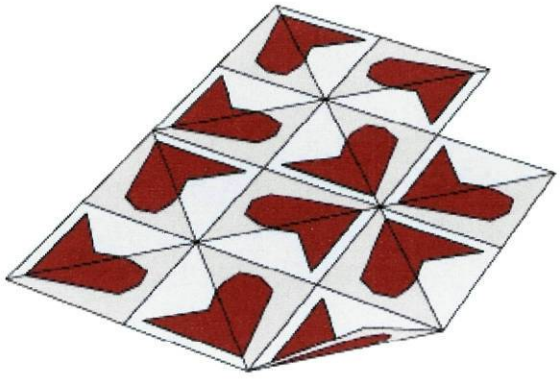
1.  2. 

O grupo cristalográfico representado por este orbifold é **p3**.

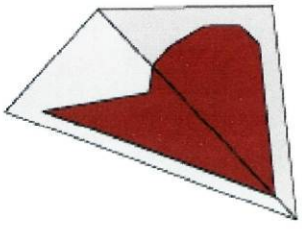
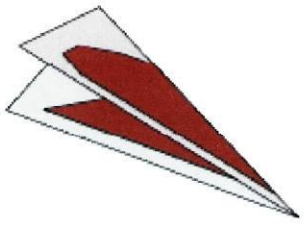
O orbifold **S442** tem dois picos de ordem 4 e um de ordem 2, logo será representado por um triângulo rectângulo isósceles, com dois ângulos $\frac{\pi}{4}$ e um ângulo $\frac{\pi}{2}$ e com duas faces diferentes.

1.  2. 

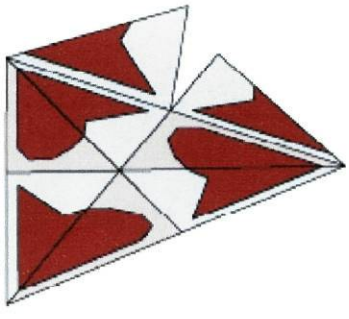
O grupo cristalográfico representado por este orbifold é **p4**.

1.  2. 

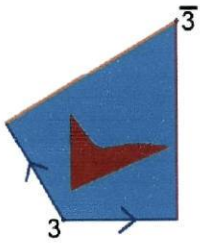
O orbifold **S632** tem picos de ordens 6, 3 e 2, logo será representado por um triângulo rectângulo com ângulos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$ e duas faces.

1.  2. 

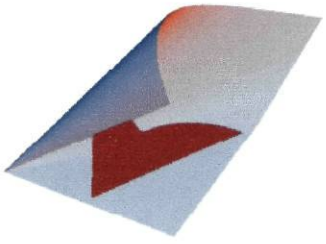
O grupo cristalográfico representado por este orbifold é **p6**.

1.  2. 

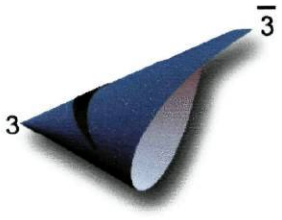
No que diz respeito aos restantes orbifolds, podemos agrupar três deles numa categoria só, pois têm características comuns. D3$\overline{3}$, D4$\overline{2}$ e D2$\overline{2}\overline{2}$ são três orbifolds em que a variedade subjacente é o disco, com bordo espelhado, e ainda com um único pico. Por isso, resolvemos representá-los num modelo com a forma de um cone de gelado, em que o vértice é o pico do orbifold e o bordo do cone é espelhado, contendo uma ou duas esquinas.



1.

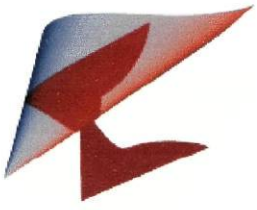


2.



3.

O cone usado para representar o orbifold **D3$\overline{3}$** é obtido enrolando uma região fundamental como indicado na figura acima. Os outros dois cones são obtidos de modo semelhante.

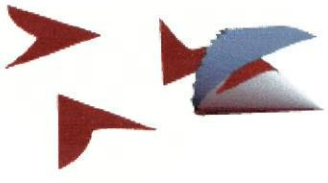


1.

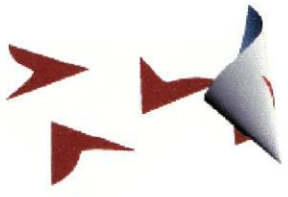


2.

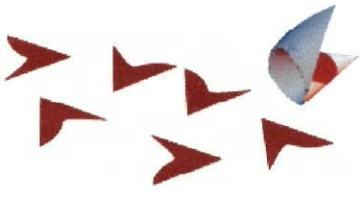
Fazendo o cone rolar no plano, é carimbado um padrão com simetria de rotação em torno do pico. Para visualizar o efeito espelhado do bordo do cone, o que fizemos foi levantar um pouco o cone, virá-lo do avesso, voltar a pousá-lo no plano e continuar a rotação do outro lado.



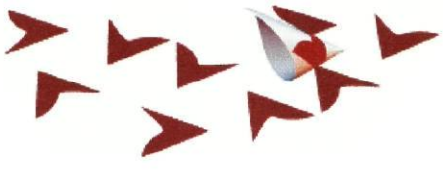
3.



4.

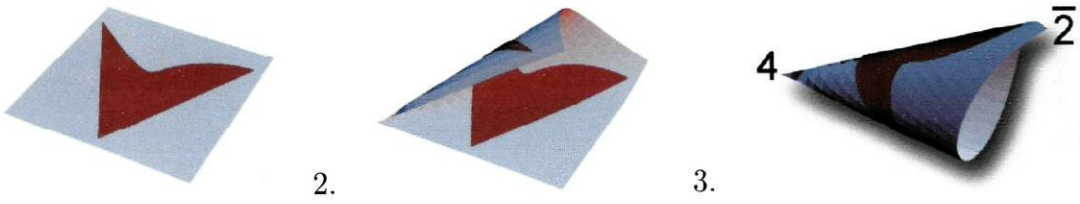


5.



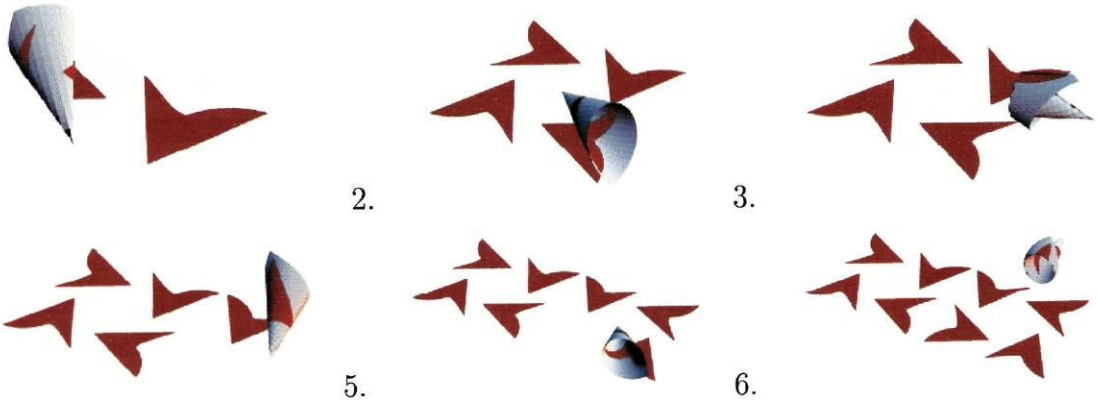
6.

Este padrão corresponde ao grupo cristalográfico **p31m**.



1. 2. 3.

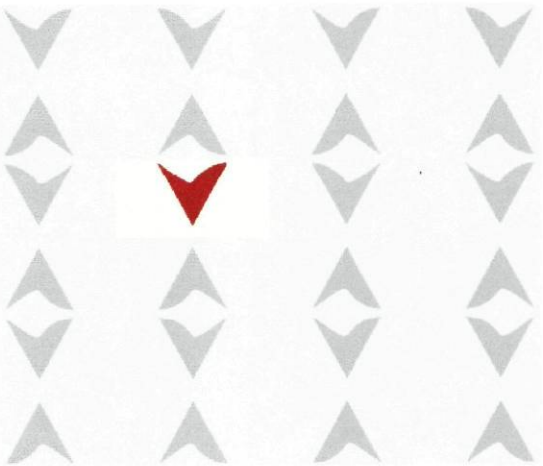
Relativamente ao orbifold **D4$\overline{2}$**, a sua construção e movimento são semelhantes, sendo que neste caso o grupo cristalográfico é **p4g**, com simetria de rotação de ângulo $\frac{\pi}{4}$ em torno do pico e reflexões nos dois espelhos do bordo do cone.



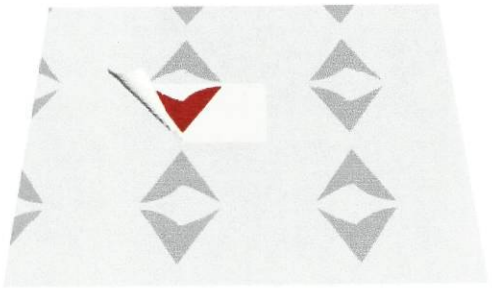
1. 2. 3.

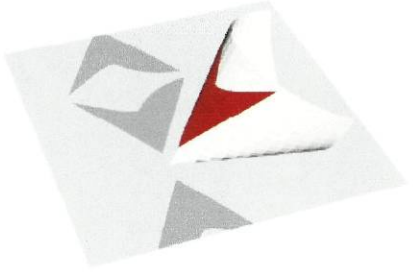
4. 5. 6.

Associado ao orbifold **D2$\overline{2}\overline{2}$**, temos o grupo cristalográfico **cmm**. Tomando um rectângulo como região fundamental, podemos observar simetrias de reflexão em três dos seus lados e rotação de ângulo π em torno do ponto médio do outro lado.

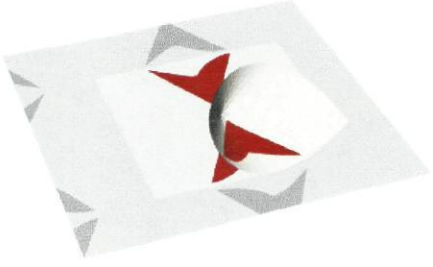


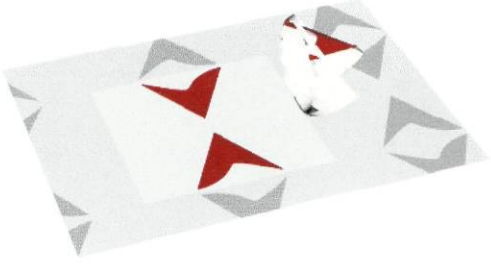
Enrolando esta região de modo a formar o cone, obtemos no bordo deste modelo as duas esquinas de ordem 2 e no vértice o pico de ordem 2.

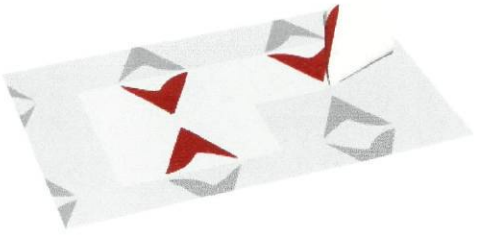
1. 

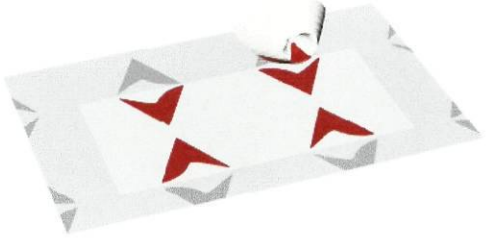
2. 

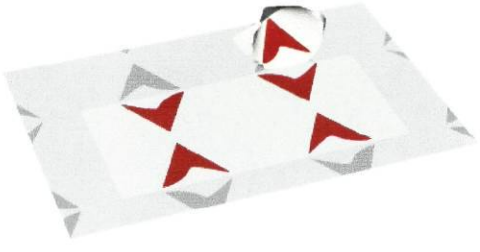
O movimento deste orbifold no plano é análogo ao dos anteriores cones, como podemos ver pelas seguintes imagens retiradas da animação incluida no CD em anexo.

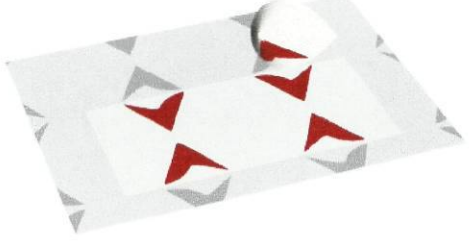
1. 

2. 

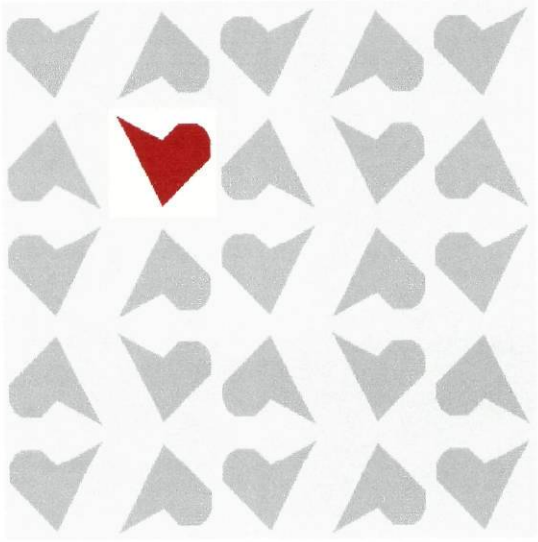
3. 

4. 

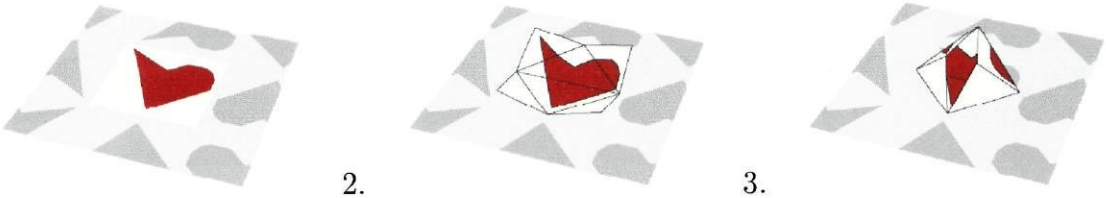
5. 

6. 

O grupo cristalográfico associado ao orbifold **D22** é **pmg**:

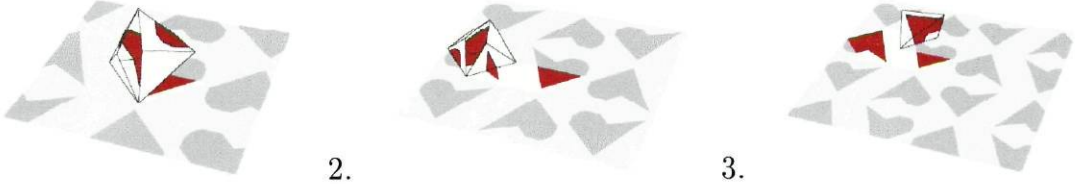


Este orbifold tem características parecidas com os anteriores cones, mas neste caso há dois picos de ângulo π. Portanto é possível, com um material como o papel, por exemplo, construir um modelo deste orbifold mantendo a métrica euclidiana sem deformação, partindo de uma região fundamental do plano rectangular e identificando os lados como vemos na figura seguinte.



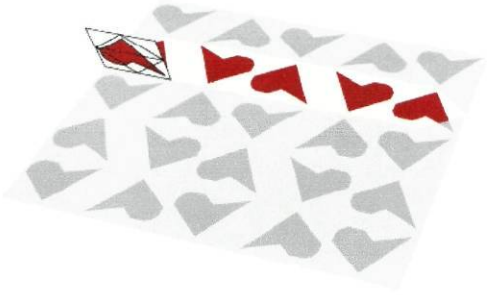
1. 2. 3.

Rodando o orbifold nas arestas adjacentes aos vértices que representam os picos de ordem 2, é carimbado um desenho com simetria de rotação em torno desses picos.

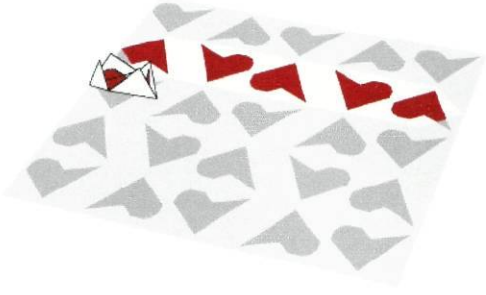


1. 2. 3.

Para representar o facto de o bordo ser espelhado, resolvemos virar este objecto do avesso, abrindo-o e colando-o novamente do outro lado.

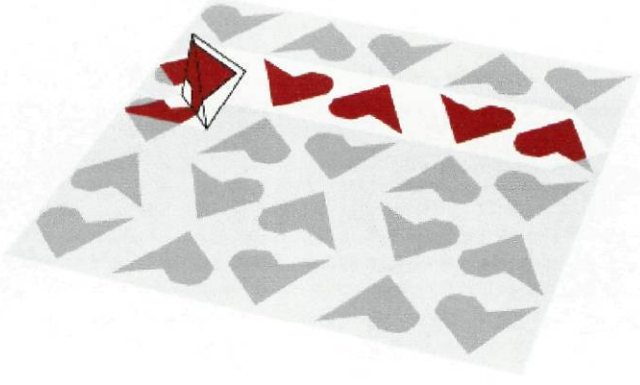


1.

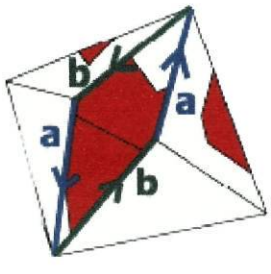


2.

Já do avesso, o desenho produzido é uma reflexão do primeiro desenho marcado no plano, segundo o eixo correspondente ao bordo do orbifold; continuando a rebolar o orbifold, o desenho é carimbado ciclicamente em torno dos vértices.



Um modelo possível para o plano projectivo com 2 picos, **P22**, seria a superfície utilizada para modelar o orbifold D22, mas com o bordo identificado da seguinte forma:



Usando este modelo para ilustrar P22, o primeiro tipo de movimento já visto no cone D22 mantém-se inicialmente, mas, neste caso, em vez de se abrir e virar do avesso, abre-se e fecha-se como uma tira de Möbius, carimbando na outra direcção e produzindo o padrão cristalográfico do grupo **pgg**, que é gerado por rotações de ângulo π em torno de dois pontos e uma reflexão deslizante.

6 Conclusões

Começámos por distinguir e clarificar definições próximas no contexto das acções de grupo, tais como acção discreta, acção com órbitas discretas, acção errante e acção propriamente descontínua e mostrámos que cada uma destas definições é mais forte que a anterior. Demonstrámos ainda que, para acções de um grupo de isometrias em $\mathbb{R}^n$ estas definições tornam-se equivalentes e o mesmo acontece em variedades completas riemannianas. Definimos grupo cristalográfico como um subrupo de $\mathrm{Isom}(X)$ com acção propriamente descontínua e quociente compacto e confrontámos esta definição com a definição usualmente dada em Cristalografia, servindo-nos para isso das considerações feitas antes relativamente a acções de grupos de isomentrias em $\mathbb{R}^n$.

Vimos o toro e o plano projectivo $\mathbb{P}^2$ como o quociente de $\mathbb{R}^2$ e S^2 (respectivamente) por um grupo cristalográfico.

Explicámos sucintamente os modelos de H^2 nomeadamente o semiplano de Poincaré e o disco de Poincaré, bem como a métrica que aqui está definida, e demos exemplos de grupos cristalográficos a actuar neste espaço, um deles originando o toro duplo.

Na secção sobre variedades, apresentámos um exemplo de uma variedade não Hausdorff e vários exemplos de variedades que são o quociente do plano euclidiano por um grupo de isometrias, transportando, assim, a métrica euclidiana para a variedade. Mostrámos que uma acção livre e errante produz uma aplicação quociente que é um revestimento, que dá origem a um espaço quociente que é uma variedade. Relembrámos o teorema que nos diz que o grupo dos automorfismos de um revestimento é propriamente descontínuo e isomorfo ao grupo fundamental da base desse revestimento, para concluirmos que uma variedade pode ser vista como espaço quociente do seu revestimento universal pela acção do seu grupo fundamental propriamente descontínuo.

Através de alguns exemplos distinguimos as definições de espaços simplesmente conexos, localmente simplesmente conexos e semilocalmente simplesmente conexos.

Introduzimos os conjuntos de ramificação para alargar a definição de revestimento e chegar à definição de orbifold. Um orbifold é um espaço semelhante a uma variedade, mas com singularidades, semelhante a um revestimento ramificado, podendo assim munir os orbifolds com uma métrica que vem por transporte da métrica de E^2, S^2 ou H^2. Um orbifold engloba uma variedade riemanniana como seu revestimento universal ramificado e um grupo propriamente descontínuo cristalográfico, à excepção daqueles a que chamámos "maus" orbifolds. Para ficar coerente com o teorema dos automorfismos de revestimentos, definimos o grupo fundamental de um orbifold como o grupo cristalográfico que lhe está associado.

Estudámos os tipos de singularidades que a definição permite (picos, espelhos e esquinas)

e explicámos por que razão um orbifold tem sempre um revestimento duplo só com picos, correspondendo a retirar parte dos geradores do grupo cristalográfico associado ao orbifold.

Vimos que existem orbifolds orientáveis e não orientáveis e que podemos obter os segundos à custa de involuções nos primeiros.

Classificámos os orbifolds através de equivalência afim, tal como os grupos cristalográficos, obtendo assim um isomorfismo entre as classes de equivalência afim de orbifolds e de grupos cristalográficos.

Através da adaptação da característica de Euler aos orbifolds, pudemos mostrar que o teorema de Gauss Bonnet também se mantém válido aplicado a estes objectos matemáticos e utilizámo-lo para, através de argumentos combinatórios, mostrar que só existem 17 classes de equivalência afim de orbifolds euclidanos bidimensionais, e portanto 17 grupos cristalográficos, obtendo assim uma prova alternativa deste resultado clássico da Cristalografia.

Desenvolvemos, com o *Mathematica*, modelos que permitem uma visualização desta ligação entre orbifolds e grupos cristalográficos. Nas animações que apresentamos no CD em anexo, é possível ver como construir, a partir do plano euclidiano, modelos que representem cada orbifold. Estas animações expõem, de uma forma atraente, as propriedades matemáticas que caracterizam cada orbifold. As animações mostram como estes modelos de orbifolds se podem movimentar pelo plano, carimbando um desenho com simetria correspondente ao grupo cristalográfico associado ao orbifold.

Espero que este trabalho contribua para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos aqui envolvidos; gostaria também que os modelos de orbifolds euclidianos gerados por computador que são aqui apresentados, pelo seu carácter visual e intuitivo, pudessem contribuir para a divulgação da Matemática, inclusivé junto de pessoas de outras áreas.

Neste trabalho ficou-se pela classificação dos orbifolds euclidianos bidimensionais e a sua relação com os grupos cristalográficos. Uma perspectiva de trabalho futuro poderia passar por um estudo mais pormenorizado de orbifolds esféricos e de orbifolds hiperbólicos, tentando criar, para estes, modelos semelhantes aos que foram feitos para o caso euclidiano. Uma outra possibilidade seria uma incursão por orbifolds de dimensões superiores.

Referências

[Bur] Heidi Burgiel e John Conway, *An Introduction to Orbifolds*, The Geometry Center, 1996. Disponível em: http://www.math.uiuc.edu/~jms/Teach/math5337/Orbifolds. Acesso em: 16-09-2002.

[GIm] John Conway, Peter Doyle, Jane Gilman e Bill Thurston, *Geometry and the Imagination in Minneapolis*, 1991, Version 0.91 de 12 April 1994. Disponível em: http://www.geom.uiuc.edu/docs/education/institute91/handouts/handouts.html. Acesso em: 12-09-2002.

[Joh] Carroll K. Johnson e Michael Burnett, *Crystallographic Topology 101 - A Tutorial/Virtual Course*. Disponível em: http://www.ornl.gov/ortep/topology.html. Acesso em: 16-09-2002.

[Jon] Tom Wickham Jones, *Mathematica with graphics*, Springer, 1994.

[Joy] David E. Joyce, *History of crystallographic groups and related topics*, 1997. Disponível em: http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/history.html. Acesso em: 14-03-2004.

[Lag] Elon Lages Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, 2ª edição, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

[Mon1] José María Montesinos, *Classical tessellations and three-manifolds*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

[Mon2] José María Montesinos, *Caleidoscopios en la Alhambra*, Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid, Serie de Ciencias Exactas, Tomo XXIII, Madrid, 1987.

[Mon3] José María Montesinos, *Caleidoscopios y grupos cristalográficos en la Alhambra*, Epsilon - La Alhambra, 1987.

[Mon4] José María Montesinos, *La cristalografía geométrica*, Horizontes Culturales - Las fronteras de la ciência, Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid, ESPASA, Madrid, 1999.

[Mun] James Munkres, *Topology: A first course*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[Ree] Elmer G. Rees, *Notes on Geometry*, 2ª edição corrigida, Universitext, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

[Rup] Bernhard Rupp, *Crystallography 101 — An Introductory Course.* 1999. Disponível em: http://www-structure.llnl.gov/Xray/101index.html. Acesso em: 24-03-2004.

[Sat] Ichirô Satake, *On a generalization of the notion of manifold*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 42, pp. 359-363, 1956.

[Sco] Peter Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bulletin London Mathematical Society, 15, pp. 401-187, 1983.

[Sti] John Stillwell, *Geometry of Surfaces*, Universitext, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

[Thu] William Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, volume 1, Edited by Silvio Levy, Princeton Mathematical Series, 35, Princeton University Press, Priceton, New Jersey, 1997.

[Klu] E. B. Vinberg, Crystallographic group. In *Encyclopedia of Mathematics, Vol. 2 (C)*, pp. 473-475, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1988.

Índice

2-numerável, 31, 32

acção, 7, 9
    discreta, 10, 17
    efectiva, 7
    errante, 11, 16
    livre, 10
    por homeomorfismos, 7
    propriamente descontínua, 15, 26
    propriamente descontínua, 17
afim-equivalência
    grupos cristalográficos, 30
    orbifolds, 55
almofada, 51, 53
antípoda, 25, 28, 53
aplicação afim, 30
aplicação discreta, 42
atlas
    diferenciável, 34
    topológico, 31
equivalentes, 47

Bieberbach, 4

caleidoscópio, 46
caminho
    homotopicamente nulo, 43
característica de Euler, 56
carta topológica, 31
cilindro, 28
comprimento, 35
curva, 33

equicontínuo, 21
Escher, 29
esfera, 26
espaço euclidiano, 26
espaço hiperbólico, 26
espaço quociente, 24
espelho, 49
esquina, 49
estabilizador, 10, 16
Euler
    característica de Euler, 56

fibra, 40
folhas, *ver* revestimento
função de dobragem, 47, 55
fuso, 47, 53

geodésica, 35
gota, 53
grupo
    finito, 28
    grupo das translações, 5
grupo cristalográfico, 26, 54, 55, 65
    afim-equivalente, 30, 55
grupo das translações, 26
grupo de isotropia, *ver* estabilizador
grupo espacial, 3
grupo fundamental, 42, 55
grupo pontual, 3

H^2, 28, 36
Hausdorff, 31, 32
H^n, 26
homeomorfismo
    $Homeo(X)$, 8
homotetia, 8

involução, 52
isometria, 26, 46, 47

da esfera, 36
do espaço euclidiano, 22
do plano euclidiano, 17, 26
do plano hiperbólico, 29, 36

Klein
garrafa de Klein, 38, 52

localmente compacto, 15

mapa topológico, 31
métrica riemanniana, 34
Möbius
tira de Möbius, 52
tira de Möbius infinita, 37
morfismo, 44
mudança de coordenadas, 34

orbifold, 46
afim-equivalentes, 55
automorfismos, 55
bom, 53
característica de Euler, 57
curvatura, 59, 62
dimensão n, 48
esférico, 47
euclidiano, 47
grupo fundamental, 55
hiperbólico, 47
mau, 53
métrica, 55
notação, 49
orientável, 52
revestimento duplo, 50
singularidades, 48
variedade subjacente, 49
órbita, 9
discreta, 11, 12, 16
orientável, 37

$\mathbb{P}^2$, 25, 28, 41
pico, 48
plano hiperbólico, 36, 38
plano projectivo, 25, 28, 53
projecção
canónica, 24
vertical, 41

região fundamental, 24, 26
reticulado, 26
revestimento, 40
automorfismo de revestimento, 45
automorfismos de revestimento, 55
grau, 41
número de folhas, 41
ramificado, 45, 47
revestimento universal, 42, 44

S^2, 25, 35, 41, 47
simetria, 24
grupo de simetria, 24
simplesmente conexo, 42
localmente simplesmente conexo, 43
semilocalmente simplesmente conexo, 43
S^n, 26
Stab(x), *ver* estabilizador
superfície
superfície euclidiana, 40
superfície
curvatura, 59
género, 56
superfície com bordo, 33
superfície sem bordo, 33

teorema
Ascoli-Arzela, 21
topologia
compacto-aberto, 10, 21

convergência uniforme, 11
convergência uniforme em compactos, 10
quociente, 24
toro, 27
duplo, 40, 47

variedade, 31, 32, 44
compacta, 32
diferenciável, 34
espaço tangente, 34
riemanniana, 35
variedade com bordo, 33

A Anexos

Apresentamos aqui um índice dos ficheiros contidos no CD em anexo.

- **Webpage**

  Conjunto de páginas Web que incorporam as animações dos modelos dos orbifolds criados no Mathematica

  - Para navegar nestas páginas comece pelo ficheiro **index.html** ou utilize o atalho **Orbifolds Webpage** existente na raíz do CD.

- **Orbifolds**

  Imagens fixas dos 17 orbifolds utilizadas na tabela da página 66 e imagens animadas dos modelos dos orbifolds utilizados nas páginas Web e descritos no capítulo 5

- **Sketches**

  Sketches interactivos construidos no Sketchpad para melhor compreensão de alguns exemplos que surgem ao longo deste trabalho

  - Acção não errante.gsp
  - Errante.gsp
  - Órbitas Discretas.gsp
  - Quociente não Hausdorff.gsp
  - Disco Poincaré.gsp
  - Pavimentação octogonal.gsp
  - Semiplano Poincaré.gsp

- **Tese**

  Apresentação realizada em PowerPoint numa fase inicial da tese e texto final da dissertação em formato .pdf

  - orbifolds.ppt
  - tese.pdf

5317TM


GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS E ORBIFOLDS
EUCLIDIANOS BIDIMENSIONAIS
TESE MESTRADO MATEMÁTICA FUND. APLIC.
ISABEL CRISTINA DA SILVA LOPES
FCUP - 2004


80 MIN 52X
GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS E ORBIFOLDS
EUCLIDIANOS BIDIMENSIONAIS
ISABEL CRISTINA LOPES
2004
4 009993 194013
Recordable
Made in Europe - A1