Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

A Geometria Dinâmica no âmbito do ensino /aprendizagem:

um protótipo para o estudo do Círculo no 9º ano do Ensino Básico

José Manuel Gomes Esteves da Silva

2002

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

José Manuel Gomes Esteves da Silva

A Geometria Dinâmica no âmbito do ensino /aprendizagem:

um protótipo para o estudo do Círculo no 9º ano do Ensino Básico

Dissertação apresentada para obtenção do Grau de Mestre em Educação Multimédia, sob a orientação do Professor Doutor Duarte Costa Pereira e da Professora Doutora Maria Augusta Faria Ferreira Neves.

Porto

2002

RESUMO

Com este trabalho pretende-se contribuir, de algum modo, para a utilização dos programas de geometria dinâmica e dos meios informáticos no processo de ensino/aprendizagem da Geometria.

Para isso, construiu-se um protótipo, com o programa "The Geometer's Sketchpad", para o estudo do círculo no 9º ano do Ensino Básico. Este protótipo serviu de base para a planificação das aulas sobre o estudo do círculo, da circunferência e das suas propriedades. Procurou-se, desta forma, estudar as potencialidades da utilização de programas de geometria dinâmica na motivação e compreensão dos conteúdos leccionados.

Optou-se por uma abordagem de natureza qualitativa porque esta metodologia tem por objectivo principal a compreensão global dos fenómenos.

A recolha de dados foi feita através da observação directa da forma como os alunos interagiam com o protótipo e de um inquérito dividido em duas partes. A primeira parte do inquérito foi feito antes da utilização do protótipo, com vista a analisar as opiniões dos alunos acerca da Matemática, da Geometria e dos computadores. A segunda parte do inquérito foi feito depois do estudo do círculo e serviu para recolher opiniões sobre o protótipo e se este, de alguma forma, tinha alterado algumas ideias anteriormente manifestadas.

A análise dos dados permitiu tirar as seguintes conclusões:

- os alunos gostaram de utilizar o protótipo;

- o protótipo contribuiu para uma melhor compreensão dos conteúdos;

- os alunos demonstraram maior autonomia na sua aprendizagem;

- a utilização do computador contribuiu positivamente para o processo de ensino/aprendizagem da Geometria.

À Teresa

Ao João e ao Rui

Aos meus alunos do 9º C

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer muito particularmente aos Senhores Professor Doutor Duarte Costa Pereira e Professora Doutora Maria Augusta Faria Ferreira Neves pelas palavras de incentivo, as orientações prestimosas e o acompanhamento atencioso que me dispensaram, esclarecendo, sugerindo e aconselhando os caminhos a seguir e os métodos de intervenção a utilizar.

Uma palavra de agradecimento aos colegas do Departamento de Matemática da Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos de Baguim pela amizade e palavras de constante incentivo que me mantiveram motivado para a realização deste trabalho.

Agradeço também aos alunos da turma C do 9º ano pelo empenhamento e entusiasmo que manifestaram durante o ano lectivo.

E por fim um agradecimento do fundo do coração à Teresa, ao João e ao Rui, pela paciência e compreensão que manifestaram durante os longos momentos de ausência que serão compensarei após a conclusão deste trabalho.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO 1

1. Nota justificativa 1
2. Problemas no ensino da Geometria 3
3. Parâmetros e objectivos do trabalho 6

CAPÍTULO 2 - APONTAMENTOS HISTÓRICOS 7

1. A Geometria 7
2. O Círculo 12
3. "Elementos" 19

CAPÍTULO 3 - O ENSINO DA MATEMÁTICA, O ENSINO DA GEOMETRIA E OS COMPUTADORES 22

1. A importância da Matemática 22
2. O ensino da Matemática 26
3. O ensino da Geometria 28
4. A aprendizagem matemática numa perspectiva construtivista 37
5. Ambientes informáticos e construtivismo 40
6. Computadores no ensino da Matemática 43
7. A Geometria e os meios informáticos 50
8. A revisão curricular e a noção de competência 60

CAPÍTULO 4 - FERRAMENTAS INFORMÁTICAS 63

1. Introdução 63
2. Programas de Geometria Dinâmica 65
3. O HTML 67
4. O JavaScript 74
5. A linguagem Java 78

6. O JavaSketchpad 79
7. O Flash 82
8. O Dreamweaver 83
9. Actividades dinâmicas na Internet 85

CAPÍTULO 5 - O TRABALHO E A METODOLOGIA 88

1. Enquadramento e justificação do estudo 88
2. Procedimentos 90
3. Caracterização do grupo de trabalho 92
4. Recolha de dados 96
5. Descrição do protótipo 97
6. Planificação das aulas 101
7. Limitações condicionantes 108

CAPÍTULO 6 - OS RESULTADOS – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE 109

1. Introdução 109
2. Análise do inquérito 110

CAPÍTULO 7 - CONCLUSÃO 120

BIBLIOGRAFIA 122

ANEXOS 127

LISTA DE ESQUEMAS

Esquema 1 31

Esquema 2 38

Esquema 3 45

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 13

Figura 2 13

Figura 3 13

Figura 4 14

Figura 5 15

Figura 6 17

Figura 7 17

Figura 8 19

Figura 9 20

Figura 10 20

Figura 11 20

Figura 12 85

Figura 13 86

Figura 14 87

Figura 15 97

Figura 16 97

Figura 17 98

Figura 18 98

Figura 19 98

Figura 20 99

Figura 21 99

Figura 22 99

Figura 23 100

Figura 24 100

Figura 25 100

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 92

Gráfico 2 92

Gráfico 3 93

Gráfico 4 93

Gráfico 5 93

Gráfico 6 94

Gráfico 7 94

Gráfico 8 94

Gráfico 9 95

Gráfico 10 95

Gráfico 11 95

Gráfico 12 110

Gráfico 13 110

Gráfico 14 111

Gráfico 15 112

Gráfico 16 112

Gráfico 17 113

Gráfico 18 113

Gráfico 19 114

Gráfico 20 114

Gráfico 21 115

Gráfico 22 116

Gráfico 23 116

Gráfico 24 117

Gráfico 25 117

Gráfico 26 117

Gráfico 27 118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 16

Tabela 2 64

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1. Nota justificativa

Nos últimos anos aconteceram muitas mudanças que vieram afectar a educação em geral, e particularmente o processo de ensino/aprendizagem da Matemática, nomeadamente no campo da Geometria.

De entre essas mudanças são de destacar:

- O aumento da escolaridade obrigatória até aos 15 anos ou até ao 9º ano;

- A centralização das políticas educativas nas competências a desenvolver pelos alunos;

- As novas abordagens pedagógicas para que todos os alunos tenham sucesso educativo;

- O rápido desenvolvimento das tecnologias da informação e comunicação (TIC).

Devido à importância da Matemática na formação dos nossos jovens, estas mudanças tiveram forte influência na forma como os professores passaram a encarar a sua relação com os alunos. Devido à sua especificidade, o desenvolvimento tecnológico afectou particularmente o ensino da Matemática para que se pudesse dar uma melhor resposta às necessidades dos nossos jovens e da sociedade em geral.

Investigações recentes revelaram que as TIC são capazes de envolver os alunos em actividades extremamente significativas, e contribuíram para o desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à Matemática.

No campo da Geometria, as TIC introduziram a possibilidade de se efectuarem construções e gráficos usando o computador, dando, desta forma, um contributo positivo para o aumento da importância da investigação em Geometria nas mais diversos áreas do saber.

Muita da informação que hoje recebemos é transmitida visualmente, por meio de imagens ou gráficos. As grandes inovações científicas passam pelo desenvolvimento de máquinas robotizadas em que a geometria computacional é fundamental para a construção de sistemas fiáveis.

No que diz respeito ao ensino da Matemática e da Geometria os computadores são fundamentais, pois tornam os conceitos mais facilmente apreendidos e motivam os alunos para a aprendizagem dos conteúdos.

A resolução de problemas é uma estratégia fundamental no ensino da Matemática. Os computadores são óptimos auxiliares no desenvolvimento desta estratégia pois, através de programas apropriados, permitem que os alunos procedam a pequenas investigações para resolverem determinados problemas, que com outros meios seria muito difícil de concretizar.

Com o aumento do número de jovens a frequentarem o ensino básico, houve necessidade de introduzir novas abordagens pedagógicas para que o ensino tivesse significado e correspondesse às aspirações dos alunos. A concepção construtivista da educação permite compreender melhor o universo escolar e a forma como se deve efectuar todo o processo de ensino/aprendizagem.

O protótipo que se propõe desenvolver refere-se aos conteúdos de Geometria do 9º ano de escolaridade, mais especificamente ao estudo do círculo. Pretende, de alguma forma, contribuir para o desenvolvimento de algumas das competências estabelecidas nos documentos orientadores da revisão curricular.

Este é um protótipo informático, desenvolvido utilizando um programa de geometria dinâmica o "The Geometer's Sketchpad". Este protótipo pode ser manipulado de forma a que o aluno possa tirar as suas conclusões.

Pretende-se verificar se este protótipo é bem aceite pelos alunos e se poderá contribuir para a aquisição das competências pretendidas.

Pretende-se, ainda, associar as tecnologias de informação e comunicação a uma pedagogia centrada no interesse do aluno e na procura do conhecimento. É intenção verificar qual a opinião do aluno acerca da utilização do computador em vez dos instrumentos tradicionais da geometria.

Com este protótipo intentamos, de algum modo, uma evolução no ensino no sentido de tornar a Geometria mais apelativa e com mais significado. Desta forma, é intenção contribuir para que os alunos tenham uma atitude mais positiva e que os seus conhecimentos e competências se reforcem e melhorem.

Este trabalho vai permitir ganhar experiência e reflectir sobre a necessidade da utilização das TIC no ensino da Matemática na educação básica. Enquadra-se também na crescente utilização dos programas de geometria dinâmica no ensino em todo o mundo. Estes programas podem ser utilizados desde o ensino básico, para a introdução de conceitos fundamentais, até ao ensino universitário, como ferramentas de investigação.

2. Problemas no ensino da Geometria

O ensino da matemática na educação básica, e consequentemente da geometria, reflectiu o facto de esta ter perdido importância na investigação. Como consequência a geometria foi considerada uma parte não fundamental do currículo. Alguns professores deixavam os conteúdos de geometria para o fim do ano lectivo não havendo, por vezes, tempo para tratar convenientemente as matéria a leccionar. A introdução da Matemática Moderna, em que se privilegiava a teoria dos conjuntos e a álgebra, contribuiu também para que a Geometria passasse para segundo plano.

Nos últimos anos, devido à evolução tecnológica, a geometria tem conquistado um lugar de relevo no ensino. "Invertendo a tendência de perda de importância, aparente desde os anos sessenta, a geometria tem beneficiado de uma maior atenção. As capacidades gráficas que actualmente os micro-computadores apresentam fazem deles instrumentos de trabalho apropriados para este tema, através da criação de micromundos específicos." (Ponte et al., 1991)

Conceitos erróneas prejudicaram a Geometria. Existe uma ideia generalizada que matemática são números e fórmulas. Whitely (1999) refere que a própria literatura sobre psicologia educacional identifica os números e as suas técnicas de manipulação com matemática. A Teoria das Inteligências Múltiplas de Howard Gardner (Stockstill, 2001) distingue inteligência lógico-matemática (números e contas, reconhecimento de padrões e relações, capacidade de resolver diferentes tipos de problemas através do raciocínio lógico (Carvalho, 2001)) da inteligência visuo-espacial (percepção visual do ambiente, capacidade de criar e manipular imagens mentais e orientação corporal no espaço (Carvalho, 2001)) separando desta forma a matemática dos seus aspectos visuais. No livro "Multiple Intelligences in the Classroom", de Thomas Armstrong, referido por Whitely (1999), as profissões de matemático e de cientista são associadas à inteligência lógico-matemática e a inteligência visuo-espacial está associada à profissão de artista ou de arquitecto. Esta teoria é importante mas apresenta a Geometria como marginal à Matemática e à Ciência em geral.

No campo da Geometria, existe alguma confusão entre as figuras e os objectos geométricos teóricos. A geometria é uma ferramenta para explicar, produzir ou prever o comportamento de objectos geométricos.

O ensino deveria ter como objectivo que os alunos relacionassem os fenómenos visuais com factos geométricos, reconhecessem visualmente propriedades geométricas, interpretassem desenhos geométricos e os construíssem. Desta forma os alunos ficariam

capacitados para usar representações visuais de objectos geométricos como forma de os ajudar a raciocinar teoricamente e organizar a informação que pode ser extraída da representação visual.

Em relação ao ensino superior brasileiro, Gravina (1996) constatou que os alunos que ingressavam no curso de Matemática da UFRGS não tinham atingido os níveis mentais de dedução e de rigor necessários para compreenderem os conteúdos leccionados na disciplina de Geometria Plana e Espacial. Os alunos dominavam com dificuldade o raciocínio dedutivo e a capacidade de efectuar generalizações. Apresentavam, também, pouca compreensão dos objectos geométrico, confundindo algumas das vezes propriedades dos desenho com propriedades do objecto.

Segundo Gravina (1996) os problemas verificados são devidos aos programas e às práticas de ensino das escolas brasileiras, como por exemplo:

- Tratamento estereotipado dado aos objectos geométricos;

- Apresentação de demonstrações com argumentos ordenados e acabados;

- Apresentação de definições, nem sempre claras, acompanhadas com desenhos muito particulares (desenhos tipo).

Este facto leva os alunos a não reconhecerem os objectos quando estes são apresentados noutra posição confundindo as características de determinado desenho com as propriedades do objecto.

Os problemas verificados nas escolas brasileiras existem também nas escolas portuguesas.

As estratégias de investigação não são muito aplicadas no processo de ensino/aprendizagem tendo o aluno poucas oportunidades de descobrir por si as regularidades e propriedades dos objectos. Estas actividades são fundamentais para o domínio de conceitos geométricos tendo por isso o aluno grande dificuldade na transição do experimental para o abstracto.

Para se perceber melhor as dificuldades inerentes à aprendizagem da geometria Fischbein (1993) propôs uma teoria onde o objecto geométrico é estudado como tendo duas componentes, uma conceptual e outra simbólica. A componente conceptual define, através da linguagem escrita ou falada, as propriedades que caracterizam uma determinada classe de objectos. A componente simbólica diz respeito à imagem mental que se associa ao conceito e, no caso da geometria, essa imagem pode ser manipulada através de transformações geométrica, mas mantendo invariável certas relações. A relação entre estas duas componentes determina a noção correcta acerca de determinado objecto.

O desenho de um determinado objecto geométrico é fundamental para a formação da imagem mental, não tendo o aluno, por vezes, a noção de que aquele é uma representação física do objecto conceptual.

Fischbein (1993) refere a propósito da confusão entre o desenho e o conceito: "A dificuldade em manipular objectos geométricos, a saber , a tendência em negligenciar o aspecto conceptual pela pressão de restrições do desenho, é um dos maiores obstáculos para a aprendizagem da Geometria. Frequentemente condições de desenho escapam do controle conceptual, e impõem, a linha de pensamento, interpretações que do ponto de vista de desenho são consistentes, mas que não são condições conceptuais."

A utilização de imagens animadas é um meio importante para superar alguma confusão entre um desenho específico e o conceito, ou entre uma característica particular e uma propriedade de um objecto geométrico. Particularidades do desenho estático podem ser alteradas sendo assim realçado as invariantes, ou seja, as propriedades geométricas do objecto a estudar. A abstracção da invariância é um aspecto importante da investigação matemática mas, para a reconhecer, deve-se ter a possibilidade de efectuar variações no objecto em estudo.

Os recursos informáticos, nomeadamente programas de geometria dinâmica, são uma ferramenta fundamental para a produção de animações.

3. Parâmetros e objectivos do trabalho

Este trabalho tem por objectivo estudar o impacto que a informática e, principalmente, o protótipo de geometria tiveram nos alunos do 9º ano do ensino básico na disciplina de Matemática. Este protótipo foi desenvolvido no "The Geometer's Sketchpad", um programa de geometria dinâmica.

O protótipo desenvolvido é bastante pertinente visto que o Currículo Nacional do Ensino Básico aponta como competência a ser desenvolvida pelos alunos, ao longo dos três ciclos, a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas recorrendo a software geométrico. O computador deve ser um recurso que os alunos devem ter oportunidade de utilizar, nomeadamente trabalhando com programas de geometria dinâmica.

O estudo realizado constitui uma experiência estimulante, não só pela utilização e concepção de um protótipo, que nos parece ter diversas componente originais, mas principalmente pela forma como este pode ser utilizado pelos alunos no desenvolvimento de competências em Geometria. O aluno pode por si, de uma forma autónoma, adquirir conhecimentos e competências importantes para a sua compreensão do mundo.

Pretende-se, também, com este trabalho verificar da importância atribuída pelos alunos à Matemática e à Geometria e da forma como eles a consideram integrada no mundo.

A utilização das tecnologias de informação e da comunicação é uma referência constante ao longo de todo o trabalho. A sua importância no ensino e no dia a dia é um factor que importa estudar.

A realização do protótipo constituiu um desafio criativo, que pode ser utilizado por todos já que se encontra disponível na Internet. A sua utilização vai no sentido da introdução da informática no ensino básico, que é uma componente essencial no desenvolvimento integral dos jovens.

Os meios computacionais devem cada vez mais estar integrados no processo de ensino/aprendizagem, porque toda a nossa sociedade está organizada em torno de processos informáticos de comunicação e informação. Além deste factor essencial, é de referir que os computadores são extremamente motivadores para os alunos.

CAPÍTULO 2

APONTAMENTOS HISTÓRICOS

1. A Geometria

"Pitágoras foi um geómetra grego que viveu há 2500 anos. Ele imaginou como haveria de ensinar geometria a um aluno relutante. Depois de encontrar esse aluno, Pitágoras acordou que lhe pagaria uma moeda por cada teorema que aprendesse. Como o aluno era muito pobre este trabalhou com afinco. Depois de algum tempo, a aluno estava mais interessado na geometria do que no dinheiro que ganhava. De facto, estava tão envolvido nos estudo que implorava a Pitágoras para lhe ensinar mais e oferecia-lhe uma moeda por cada novo teorema que lhe ensinasse...

O que terá fascinado o aluno? Talvez fosse a lógica da geometria; porque a geometria foi o primeiro sistema de ideias desenvolvido em que a partir de um conjunto de afirmações simples se inferiam resultados ricos e atractivos. Um sistema com estas características é chamado de dedutivo." (Jacobs, 1987)

A geometria é importante pois permite-nos interpretar e reflectir sobre o nosso mundo. Serve de ferramenta para o estudo de outros áreas da matemática e de outras ciências. Mas um dos aspectos mais importantes é o raciocínio espacial, que foi referido por matemáticos famosos, como Hadamard e Einstein, como sendo fundamental para o pensamento criativo em níveis mais elevadas da matemática. O National Council of Supervisors of Mathematics identificou a geometria como uma das doze componentes essenciais da matemática para o século vinte e um. A compreensão de outras áreas da matemática é alcançada a partir de experiências geométricas.

O que é então a Geometria? Qual o entendimento que se tem de Geometria?

"A medida, antiga e moderna, da terra, arável ou para construção, a dos cultivadores ou dos pedreiros? As figuras arcaicas da aritmética pitagórica? As da Escola de Quios? As formas ou as ideias platónicas? Os livros dos Elementos de Euclides? O que nos resta de Arquimedes ou de Apolónio? A representação cartesiana? Os traçados descritos do século passado? As reconstruções não euclideanas? A analysis situs de Leibniz, a topologia de Euler, Riemann e Poincaré? As demonstrações formais de Hilbert? A geometria algébrica contemporânea? Os planos dos programadores de movimentos robóticos...? O universal, visto de longe, transforma-se, de perto, numa selva de ciências tão deferentes que superabunda o número das histórias a relatar, todas divergentes e enraizadas nos passados

esquecidos." (Serres, 1997)

Desde os primórdios da humanidade que o homem sentiu necessidade de representar a realidade através de figuras estilizadas. Na pré-história estas figuras eram compostas por desenhos geométricos simples, com padrões pouco complexos e utilizados para adornar utensílios pessoais. Nas construções primitivas são já visíveis a existência de formas geométricas regulares.

Com a complexificação das relações humanas e evolução da humanidade foram surgindo civilizações importantes na actual China, Grécia, Egipto ou México. Por essa altura a geometria dava resposta a necessidades mais utilitárias como o cálculo de comprimentos, áreas ou volumes. Servia também de suporte a outras áreas científicas como a astronomia, a arquitectura e a geografia.

Das civilizações da antiguidade a grega foi a que mais influenciou o desenvolvimento da geometria tendo esta assumido um carácter mais abstracto e racional. A primeira referência à geometria data do século 5° a. C. nos escritos de Herodoto em que ele refere que a geometria era usada no Egipto antigo para fazer a distribuição das terras depois das cheias do Nilo. Geometria significa assim medida de terras.

O ponto mais alto desta evolução deu-se com a publicação, por volta do ano 300 a. C., da obra de Euclides "Elementos". Trabalhos subsequentes de outros matemáticos, como Arquimedes e Ptolomeu, vieram confirmaram o interesse pelos aspectos mais conceptuais da geometria. O tratado de Euclides tornou-se um modelo de racionalização para todos os campos do saber. Esta perfeição de trabalho foi de alguma forma responsável pela ligeira evolução do conhecimento em geometria.

O trabalho desenvolvido por Apolónio (200 anos a. C.) sobre as cónicas foi muito importante para a evolução da geometria. Começou por ser um estudo puramente teórico mas veio a ser fundamental no século XVII para os trabalhos de Kepler e Newton sobre as órbitas dos planetas. As propriedades das parábolas são aplicadas na construção das antenas parabólicas. Rodas elípticas são utilizadas para os robots efectuarem determinados movimentos. A hipérbole é utilizada em sistemas de navegação.

Somente no século quinze surgiram contributos importantes no campo da geometria. São de destacar os trabalho sobre perspectiva de Piero della Francesca (geometria projectiva). No século dezassete foram importantes os estudos de Descartes que associavam a geometria à álgebra (geometria analítica) e no século dezoito Monge apresenta um método de representação de objectos em três dimensões (geometria descritiva). Estas três áreas eram consideradas de alguma forma estranhas à geometria

euclidiana pelo que não lhe provocaram qualquer modificação conceptual.

Foi Descartes quem descreveu as secções cónicas através de equações algébricas do segundo grau com duas incógnitas. A introdução de um sistema de coordenadas permitiu esta algebrização. Estes estudos são descritos no seu livro "La Geometrie" publicado em 1637. Descartes pretendeu criar uma rotura com os trabalhos de Euclides porque entendia faltava generalização aos seus argumentos. Contrariamente Fermat, que efectuou estudos semelhantes, entendia a geometria analítica como um prolongamento das ideias de Euclides e de Apolónio.

O estudo das formas geométricas através de equações algébricas está integrada actualmente numa área mais genérica chamada geometria algébrica. Os métodos desta área são aplicados na construção de códigos secretos e códigos para a correcção de erros na transmissão electrónica de dados.

No século dezanove a descoberta de geometrias não euclidianas (Bolyai, Gauss, Lobachevsky) permitiu um avanço conceptual no campo da geometria tendo a geometria euclidiana perdido o seu papel central na matemática e no conhecimento científico em geral. Estes matemáticos construíram geometrias que satisfaziam todos os postulados de Euclides excepto o postulados das paralelas: "Num plano, dada uma recta e um ponto exterior à recta, existe uma só recta que passa nesse ponto e é paralela a recta dada."

As geometrias não euclidianas permitiram novos estudos cujos principais obras são a "Erlangen Program" de Felix Klein (1872) e a "Grundlagen der Geometrie" de David Hilbert. O aspecto principal destas obras é a existência de um elevado grau de abstracção, tendo desta forma a geometria se afastado da realidade perceptível.

"O elemento fundamental do pensamento de Klein consiste na apresentação da geometria como um par constituído por um conjunto de elementos, o espaço S, e por um grupo de transformações G de S; as propriedades geométricas dos subconjuntos de S são as propriedades invariantes relativamente ao grupo de transformações considerado. Esta simples ideia conduz-nos naturalmente à existência de diversos tipos de geometrias e estabelece uma hierarquia entre eles. (Enciclopédia Einaudi, 1998)

As geometrias não euclidianas permitiram desenvolver uma forte relação entre a matemática e a física que culminou com a formulação da teoria da relatividade por Albert Einstein. Para o desenvolvimento desta teoria contribuíram Riemann e Minkowski com a geometria diferencial. A partir destes trabalhos os estudos de geometria centraram-se sobretudo nos aspectos algébricos, tendo desde então a álgebra condicionado fortemente a evolução da geometria.

No início do século vinte novos instrumentos algébricos foram criados para o estudo dos objectos geométricos, como a teoria dos vectores no espaço.

Durante o século XX a Geometria foi perdendo importância no campo da investigação matemática um pouco por todo o mundo. Este declínio começou com uma palestra proferida por David Hilbert no início do século XX em que apresentava vinte e três problemas que deveriam configurar a Matemática para esse século. Somente três desses problemas se referiam à geometria discreta. Em 1976, no Simpósio de Matemáticas Puras na Northern Illinois University, foram apresentados vinte e oito conjuntos de problemas mas nenhum deles se referia a essa área da geometria.

A geometria euclideana, a utilização de coordenadas e a representação algébrica modelavam apenas uma parte dos objectos existentes na natureza. Os objectos como a costa de Portugal, as folhas dos fetos ou uma cadeia de montanhas dificilmente eram descritos geometricamente. Eram demasiados irregulares para serem modelados pelas ferramentas geométricas e algébricas usuais. A descoberta dos fractais em 1975 por Benoit Mandelbrot, o desenvolvimento dos computadores e dos gráficos com computadores permitem modelar geometricamente objectos muito irregulares. A noção de conjuntos auto-semelhantes permite a construção de muitos desses modelos. Isto é, seja qual for a maneira como se olha para um conjunto, em qualquer ampliação, o que se observa parece vir do conjunto inicial antes da ampliação.

"Tal é o paradoxo da irregularidade. Algumas figuras são, simultaneamente, tão irregulares que desafiam uma descrição precisa e tão regulares que se lhes chama auto-semelhantes. Na realidade, o problema está em que elas são de facto demasiado irregulares para serem descritas de forma precisa com as ferramentas geométricas tradicionais. É na área da geometria fractal que a linguagem e notação da álgebra e das funções é mais poderosa. O processo para descrever e criar objectos auto-semelhantes faz-se matematicamente através da iteração de funções, o qual se pode considerar, numa forma simplificada, como uma repetição da composição de uma função consigo própria. A geometria e a álgebra encontram-se de novo mas num contexto muito diferente do previsto por Descartes." (National Council of Teachers of Mathematics, 1991)

Nos últimos anos a Geometria tem ganho uma significativa importância devido, principalmente, à evolução dos meios informáticos. Numerosas aplicações têm uma forte componente geométrica. As aplicações de desenho assistido por computador (CAD) e de modelação geométrica são exemplos relevantes. Estas aplicações são muito usadas na industria automóvel, aérea ou naval, na arquitectura e na confecção de componentes para

os mais diversos ramos da industria. O desenho do mais recente modelo do avião Boeing foi totalmente concebido no computador. O conhecimento aprofundado da geometria é fundamental para a elaboração e compreensão dos programas referidos. As solicitações do mundo actual estão constantemente a levantar novos problemas nestas áreas tendo a geometria uma palavra importante a dizer.

A robótica é uma área em que a geometria é essencial para resolver muitos dos problemas colocadas para a construção de máquinas fiáveis. São de realçar os modelos geométricos da realidade fundamentais para que os robots possam interagir com o meio. Velhas técnicas geométricas são novamente estudadas e reavaliadas às luzes da geometria computacional que é uma área em franca ascensão.

A geometria tomográfica, aplicada principalmente no campo da medicina, é utilizada para a representação a três dimensões do corpo humano e onde se tem investido muito ultimamente.

A animação computadorizada tem sido um campo fértil para a aplicação da geometria. Alguns filmes já utilizam personagens virtuais que quase se confundem com actores humanos.

Na área empresarial a programação linear é aplicada para ajudar a tomar decisões e para a optimização de funções com fortes constrangimentos. O processo conceptual da programação linear tem como base conceitos geométricos.

Com a evolução da ciência novos problemas vão surgindo em que as bases geométrica são fundamentais para a sua resolução: química computacional e o formato das moléculas; modelação de proteínas; Sistema de Informação Geográfica (GIS).

A Geometria é fundamental para a compreensão do nosso mundo e pode ajudar a resolver novos problemas que a técnica e o avanço do conhecimento vão colocando.

2. O Círculo

Os círculos são fundamentais nas ciências e nas tecnologias. Existem muitos objectos naturais e mecanismos tecnológicos que são constituídos por componentes circulares que por sua vez efectuam movimentos circulares. A circunferência e o círculo têm grande importância na concepção estética de diversos objectos podendo-se ver em janelas de catedrais ou em logotipos de empresas. Em matemática, o círculo é fulcral na geometria mas também é muito importante na álgebra (equações quadráticas) e no cálculo (minimização de distâncias, parametrização de curvas, rotações).

"O conceito de círculo é ubíquo. Pode ser descrito matematicamente, representado fisicamente e aplicado na tecnologia. Conduzem-se carros com pneus redondos, operam-se máquinas de lavar roupa que têm tambor e desenroscam-se as tampas das garrafas de ketchup. O círculo é uma forma elegante e abstracta que foi transformada pelo homem numa forma tangível e prática para nos facilitar a vida." (Zebrowski, 1999)

O círculo é algo que fisicamente não existe. A roda de um carro é ligeiramente achatada. A Lua é constituída por montanhas visíveis com uns simples binóculos. Mesmo um círculo desenhado com um compasso apresenta pequenas imperfeições devidas à espessura do lápis. "O verdadeiro círculo é uma invenção da imaginação humana." (Zebrowski, 1999) Mas para todos os aspectos práticos o círculo físico é considerado um verdadeiro círculo, senão nada poderia ser construído.

Um dos primeiros grandes estudos que se efectuaram sobre o círculo foi para descobrir o valor da razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro, o número pi (π). Através de um processo experimental os babilónios, por volta do ano 2000 a. C. chegaram ao valor de 3 1/8. Arquimedes de Siracusa, no ano de 250 a. C., estimou para pi o valor de $3{,}1408<\pi<3{,}1429$. Os modernos computadores calcularam o valor de π com mais de 50 milhões de casas decimais.

Os cilindros de madeira tiveram grande importância para as antigas civilizações como a egípcia ou a azteca. Com esses cilindros, o transporte de pedras muito pesadas era facilitado. Um objecto colocado sobre um conjunto de cilindros de madeira desloca-se 2 vezes o deslocamento de um cilindro. Além da vantagem do deslocamento, tem que se considerar que a força para deslocar o objecto é muito menor do que se ele estivesse assente no chão. Com esta técnica foi possível deslocar grandes blocos de granito para a construção das pirâmides e outros monumentos da antiguidade.

Um grande bloco de granito pode ser transformado num cilindro aplicando

segmentos de círculos como demonstrado na figura 1. Esta técnica era conhecida dos antigos egípcios.

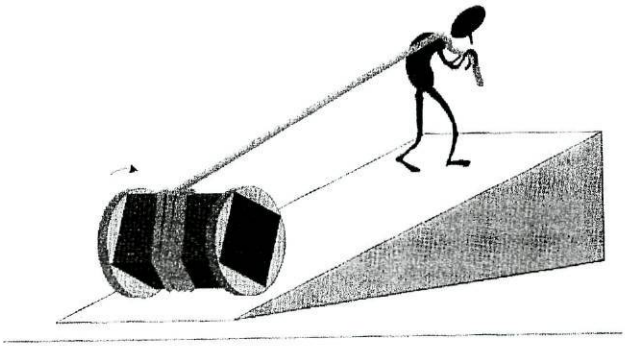


Figura 1

Um outro instrumento com a forma circular, utilizado para içar objectos pesados, é a roldana. A utilização de duas roldanas diminui o esforço para cerca de metade. Se se utilizar um conjunto de quatro roldanas pode-se diminuir a força aplicada em cerca de quatro vezes (Figura 2).

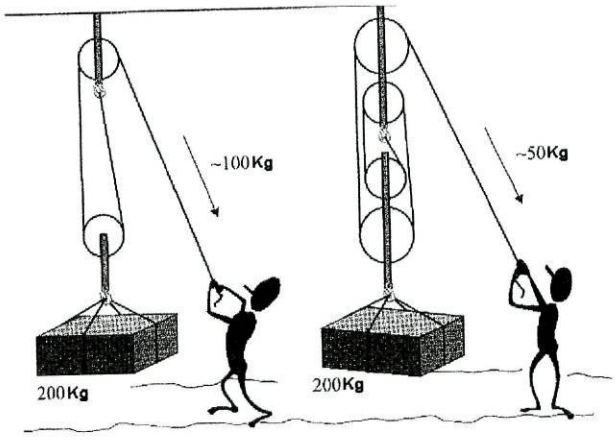


Figura 2

Os círculos existentes no céu não são facilmente perceptíveis. Pela fotografia seguinte (Figura 3) pode-se verificar que as estrelas se movem de uma forma quase circular em torno da Estrela Polar.

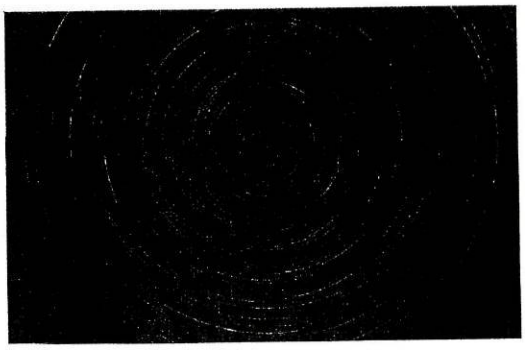


Figura 3

A medida de 360° para o círculo vem dos tempos da antiga Mesopotâmia, cerca de 6000 anos. É uma das medidas com maior longevidade. É difícil dizer ao certo porque foi escolhida esta medida mas pode-se fazer algumas conjecturas.

O número 360 é divisível por quatro e por seis. Ao dividir por quatro obtém-se um ângulo recto, muito importante na arquitectura. Uma circunferência é facilmente dividida em seis partes conhecendo o comprimento do raio (Figura 4).

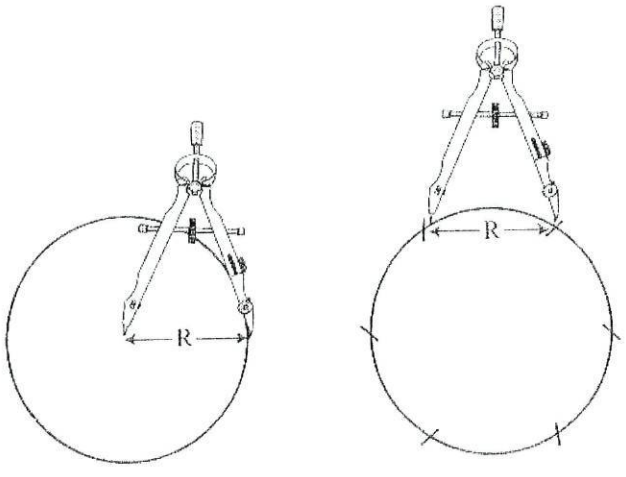


Figura 4

O número 360 é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10. Este número é muito próximo do número de dias do ano. Ainda, 360 = 12 x 30, em que 30 é um número próximo do ciclo lunar (29,5306 dia solares).

Por volta do ano 200 a. C., o cientista grego Eratóstenes, determinou com grande precisão, baseado nas propriedades do círculo, o perímetro da Terra. Nos seus estudos considerou que a Terra estava envolvida por três círculos, o Equador, o Trópico de Câncer (23,46° N) e o Trópico de Capricórnio (23,46° S). O Equador é formado pelo conjunto de pontos por onde passa o Sol nas datas dos equinócios. O Trópico de Câncer é formado pelo conjunto de pontos por onde passa o Sol no solestício de verão. O Trópico de Capricórnio é formado pelo conjunto de pontos por onde passa o Sol no solestício de inverno. A latitude de qualquer lugar é igual ao ângulo de elevação da Estrela Polar em relação ao horizonte. Se se estiver no Polo Norte vê-se a Estrela Polar por cima da nossa cabeça. No hemisfério sul é um pouco mais difícil de determinar a latitude porque não existe nenhuma estrela alinhada com o eixo da Terra. Mas mesmo assim, pode-se determinar a latitude aproximada considerando como referência o centro da constelação Cruzeiro do Sul. Este método de localização foi utilizado pelos navegadores ao longo dos tempos.

Existem dois outros círculos terrestres importantes, o Círculo Polar Árctico (66,54°

N) e o Círculo Polar Antárctico (66,54° S). A diferença entre o Círculo Polar Árctico e o Trópico de Capricórnio é de 90°, assim como a diferença entre o Círculo Polar Antárctico e o Trópico de Câncer. Estes círculos correspondem aos pontos em que o Sol deixa de se ver sobre o horizonte em cada um dos solestícios (Figura 5).

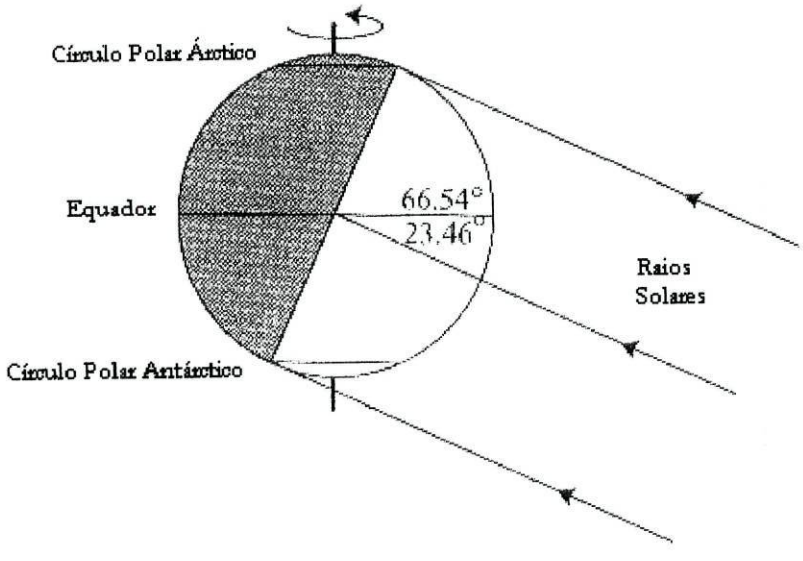


Figura 5

Os cientistas da antiguidade, como Eudoxus e Cláudio Ptolomeu, acreditavam que a Terra era o centro do universo e que os restantes astros giravam à sua volta num movimento circular. No século XVI, Copernico apresenta a teoria heliocêntrica em que considera o Sol o centro do sistema solar.

No início do século XVII, Kepler estabelece as bases da moderna astronomia através da formulação de três leis fundamentais para a compreensão do movimento dos planetas:

- Os planetas giram ao redor do Sol em órbitas elípticas, nas quais o Sol ocupa um do focos da elipse.

- As áreas percorridas pelo raio vector que une o centro do planeta ao centro do Sol são iguais em períodos iguais. Em consequência, quanto mais perto o planeta está do Sol, mais rapidamente ele se move.

- A relação entre o semieixo maior, d, de um planeta em relação ao Sol, elevada ao cubo e dividida pelo quadrado de seu período orbital, t, é uma constante, ou seja, d^3/t^2 é igual para todos os planetas.

O nosso conceito de tempo está intimamente ligado com o círculo e os movimentos cíclicos. O movimento das rodas dentadas, o funcionamento dos relógios, o movimento dos pêndulos, a vibração de um cristal de quartzo e a radiação electromagnética

nos relógios atómicos devem a sua descrição matemática à geometria do círculo.

Durante muitos anos, definiu-se a unidade de tempo segundo como 1/86.400 do dia solar médio. Actualmente considera-se como a duração de 9192631770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133.

O movimento oscilatório é fundamental para compreender muitos fenómenos da natureza. Os relógios mecânicos ou electrónicos são compostos por três elementos fundamentais: a fonte de energia; o sistema oscilatório; o escape. O escape é a peça reguladora do movimento do relógio.

Os primeiros estudos sobre o movimento oscilatório do pêndulo realizaram-se no século XVI por Galileu. Galileu verificou que o período de oscilação de um pêndulo não é significativamente afectado pela amplitude de oscilação. O período é modificado se for alterado o comprimento do pêndulo. Galileu tentou construir um relógio de pêndulo mas morreu entretanto.

O primeiro relógio de pêndulo foi construído por Chistiaan Huygens em meados do século XVII. Huygens verificou que o período de um pêndulo é independente da amplitude só no caso de pequenas amplitudes.

Depois de Newton, em fins do século XVII, ter formulado as leis da mecânica foi possível analisar os sistemas oscilatórios matematicamente. Os sistemas oscilatórios cujo período é independentes da amplitude de oscilação diz-se que têm um movimento harmónico simples (Tabela 1). A variação do movimento ao longo do tempo é descrito por uma função co-seno simples. A análise matemática destes movimentos diz-nos que a constante π é sempre um factor no período de oscilação. Esta constatação sugere que a geometria circular está relacionada com os fenómenos oscilatórios.

Sistema oscilatório	Período
Pêndulo simples	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
Corpo suspenso numa mola	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
Mola de torção	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$
Circuito eléctrico	$T = 2\pi\sqrt{LC}$

Tabela 1

As oscilações harmónicas simples podem ser vistas como uma projecção do movimento circular uniforme sobre uma linha recta.

Muitas movimentos oscilatórios do mundo físico não são descritos de uma forma simples como a enunciada, como por exemplo o pistão de um motor. No início do século XIX, o matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier descobriu que todos os movimentos periódicos podem ser descritos por funções seno e co-seno. Matematicamente, uma série de Fourier é constituída por um conjunto infinito de termos. Na prática, os cientistas e engenheiros ignoram as componentes harmónicas de maior ordem cujas amplitudes são muito pequenas para serem medidas (Figura 6).

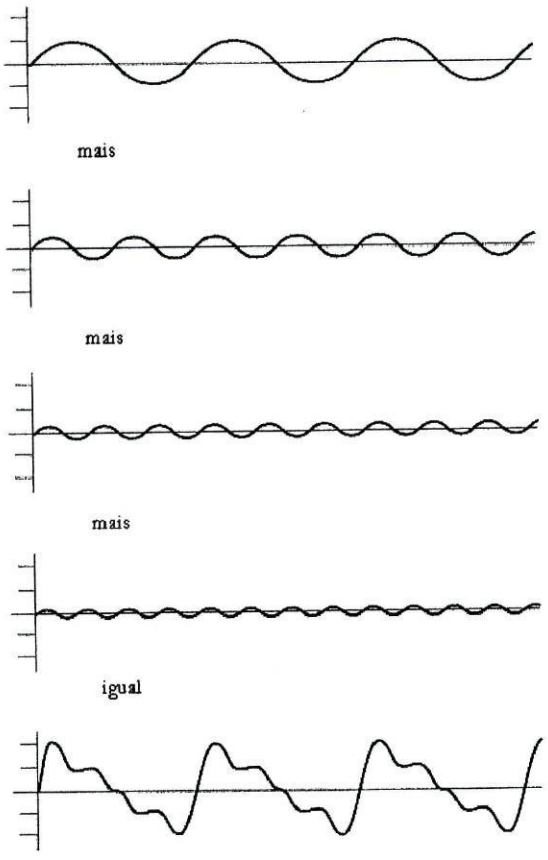


Figura 6

Uma série de Fourier pode ser interpretada geometricamente como a projecção de um sistema de movimentos circulares sobrepostos (Figura 7).

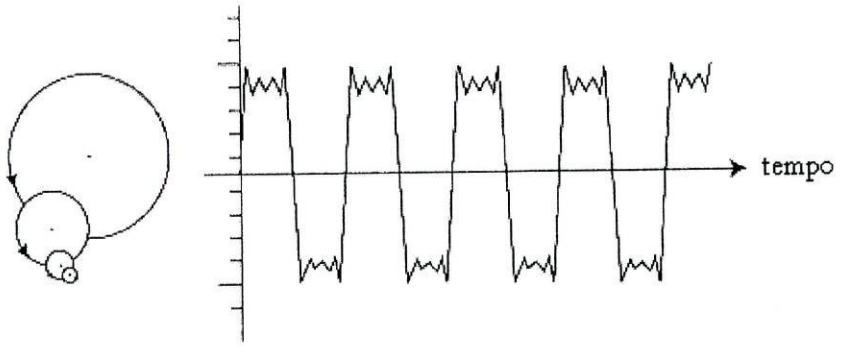


Figura 7

Chama-se movimento ondulatório, àquele em que as partes do meio no qual se propaga uma onda ou sinal em média não se desloca, isto é, não há transporte de matéria de um ponto a outro do espaço, apenas transporte de energia ou informação. Por exemplo, se se atirar uma pedra sobre a superfície de um lago de águas tranquilas, o impacto da pedra provocará a formação de uma série de círculos concêntricos que se propagam a partir do ponto de impacto. Esses círculos concêntricos são formados por deslocamentos de partes da superfície da água e são perpendiculares à direcção de propagação. No entanto, o meio como um todo, no caso a massa de água, em média não se desloca e é a perturbação que viaja através do meio. Outro exemplo é a propagação de sinais sonoros (variações de pressão) num meio material, por exemplo, o ar. Nesse caso, os deslocamentos do meio são movimentos de vai-e-vem, paralelos à direcção de propagação da perturbação, mas em média, como no exemplo anterior, o meio não se desloca. Os terramotos geram ondas de som de grande amplitude com consequências devastadoras.

A propagação da luz é um fenómeno físico de natureza ondulatória. Uma grande parte do nosso conhecimento da universo depende deste fenómeno. A luz visível constitui uma parte muito pequena do espectro possível das ondas electromagnéticas. Neste tipo de ondas considera-se os raios ultravioletas, os raios X, os raios gama, as radiações infravermelhas, as microondas e as ondas rádio.

No campo da arquitectura o círculo teve um papel muito importante. Os arcos circulares foram pela primeira vez utilizados pelos antigos romanos. Os arcos fazem com que as construções sejam muito estáveis e resistentes sendo a razão pela qual chegaram aos nossos dias muitas construções da antiguidade.

No século XIII o arco romano evoluiu para o arco gótico constituído, aproximadamente, por sectores de uma elipse. Este tipo de arcos permitiu a construção de edifícios mais altos e mais espaçosos como as catedrais góticas.

3. "Elementos"

Euclides (300?a.C.) foi um matemático grego, considerado o mais importante da antiguidade greco-romana. A sua obra principal, "Elementos" (Peyrard, 1993), é um extenso tratado de matemática em 13 volumes, sobre assuntos como geometria plana, proporções, propriedades dos números e geometria espacial. Nesta obra estão reunidos e sistematizados trabalhos de matemáticos como Eudóxio e Theaeteto. Os fragmentos mais antigos desta obra foram descobertos no Egipto e datam do ano 225.

Muito pouco se sabe acerca de Euclides, Katz (1993) refere um comentário de Proclus (410 – 485) contido no primeiro livro dos "Elementos":

"Pouco tempo depois destes homens (Hermotimus de Colophon e Philippus de Mende, pupilos de Platão) veio Euclides, que trouxe os "Elementos", sistematizando muitos dos teoremas de Eudóxio, aperfeiçoando muitos outros de Theaeteto, e colocando na forma de irrefutáveis demonstrações proposições que tinham sido apresentadas de uma maneira débil pelos seus predecessores."

Parte dos "Elementos" foram publicados em português em 1855, na Universidade de Coimbra, a partir da edição latina de Frederico Commandino, e estão disponíveis na Internet, no endereço http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html.

"Os Elementos formam um dos mais belos e influentes trabalhos de ciências na história da humanidade. A sua beleza reside no desenvolvimento lógico da geometria e de outros ramos da matemática. Influenciou todos os ramos das ciências mas principalmente a matemática e as ciências exactas." (Joyce, 1998)

Joyce (1998) criou uma edição electrónica dos "Elementos" que está disponível na Internet. Para a elaboração deste trabalho foi necessário escrever um applet em geometria o Geometry Applet.

Euclides consagra uma parte importante do seu trabalho ao estudo do círculo e da circunferência. No primeiro livro destacam-se as seguintes definições referentes ao círculo:

- 15. Círculo é uma figura plana, fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que todos as linhas rectas, que de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si (Figura)8 ;

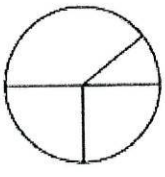


Figura 8

- 16. O referido ponto chama-se centro do círculo;

- 17. Diâmetro do círculo é uma linha recta, que passa pelo centro, e que termina por ambas as partes na circunferência;

- 18. Semicírculo é uma figura, compreendida entre o diâmetro e a parte da circunferência cortada pelo diâmetro. O centro do semicírculo é o mesmo do círculo;

- 19. Segmento de circulo é uma figura, compreendida entre uma linha recta e uma porção da circunferência.

Ainda no primeiro livro são de referir o terceiro postulado referente à construção de um círculo e as três primeiras proposições com construções geométricas em que se utiliza a circunferência:

- Postulado 3. Pode-se com qualquer centro e comprimento descrever um círculo;

- Proposição 1. Sobre uma linha recta determinada descrever um triângulo equilátero (Figura 9);

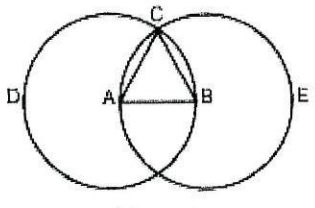


Figura 9

- Proposição 2. De um ponto dado tirar uma linha recta igual a outra recta dada (Figura 10);

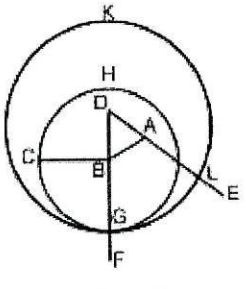


Figura 10

- Proposição 3. Dadas duas linhas rectas desiguais, tirar da linha maior uma parte igual à linha menor (Figura 11).

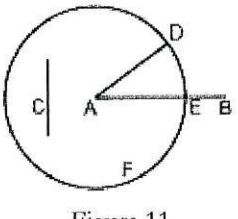


Figura 11

O terceiro livro dos "Elementos" de Euclides é dedicado ao estudo do círculo. Este livro é composto por onze definições e trinta e sete proposições. São de destacar as seguintes proposições que são estudadas no 9º ano do ensino básico:

- 3. Numa circunferência, uma recta perpendicular ao meio de uma corda contém o centro da circunferência;

- 19. Numa circunferência, uma recta tangente à circunferência é perpendicular à recta que contém o centro e o ponto de tangência;

- 20. A amplitude do ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente;

- 21. Os ângulos inscritos que contêm o mesmo arco são geometricamente iguais;

- 22. A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180°;

- 26. Em círculos iguais, a ângulos iguais correspondem arcos iguais, quer aqueles sejam ângulos inscritos ou ângulos ao centro;

- 27. Em círculos iguais, ângulos iguais que correspondam a arcos iguais são iguais entre si, quer aqueles sejam ângulos ao centro ou ângulos inscritos;

- 28. Em círculos iguais, a cordas iguais correspondem arcos iguais, o maior arco é igual ao maior arco e o mais pequeno é igual ao mais pequeno;

- 29. Em círculos iguais, a arcos iguais correspondem cordas iguais;

- 31. O ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo recto. O ângulo inscrito num arco maior é menor que um ângulo recto. O ângulo inscrito num arco menor é maior que um ângulo recto.

O quarto livro dos "Elementos" é dedicado à construção de figuras geométricas inscritas e circunscritas numa circunferência.

CAPÍTULO 3

O ENSINO DA MATEMÁTICA, O ENSINO DA GEOMETRIA E OS COMPUTADORES

1. A importância da Matemática

"Todos sabemos que quem queira seguir engenharia ou física deve ser bom em matemática. E são cada vez mais aqueles que descobrem que para trabalhar em certas áreas da economia ou da biologia devem pôr a matemática em dia. A matemática imiscuiu-se na sociologia, na psicologia, na medicina e na linguística. Sob o nome de cliometria, tem estado, para horror da velha guarda, a imiscuir-se na história. Por que sucede isto? Donde vem a força da matemática? O que a faz funcionar?

Umas resposta muito popular é a de que Deus é matemático?" (Davis, P. J. e Hersh, P, 1995)

Existem muitos argumentos para justificar a necessidade de ensinar Matemática. A matemática ajuda-nos a resolver muitos problemas práticos da vida e de diversas áreas do conhecimento. A matemática é uma resposta às necessidades individuais e sociais porque nos ajuda a compreender o mundo em que vivemos. A matemática está cada vez mais presente na nossa sociedade. Modelos matemáticos são usados em diversos campos do saber e da vida. A informação numérica é usada cada vez mais a propósito dos mais diversos assuntos.

Todas as pessoas têm o direito de aprender Matemática porque esta constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar. A matemática tem métodos próprios de estudar, de pesquisar, de organizar a informação, de resolver problemas e de tomar decisões que contribuem de uma forma decisiva para a formação de cidadãos livres, responsáveis, intervenientes e criativos.

No currículo nacional do ensino básico está definido que todas as crianças e jovens devem ter possibilidade de:

- Contactar, a um nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais da matemática e apreciar o seu valor e a sua natureza;

- Desenvolver a capacidade de usar a matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar, assim como a autoconfiança necessária para fazê-lo.

A competência em matemática está relacionada, de uma forma integrada, com um

conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos. Esta competência inclui, de acordo com o currículo nacional:

- A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;

- O gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior;

- A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;

- A compreensão das noções de conjectura, teorema e demonstração, assim como das consequências do uso de diferentes definições;

- A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;

- A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;

- A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos;

- A tendência para usar a matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos..

O desenvolvimento destas competência só será possível se os alunos viverem experiências de aprendizagem significativas. Os conhecimentos matemáticos devem ser, de uma forma adequada, relacionados com conhecimentos de outras áreas do saber através do desenvolvimento de projectos transdisciplinares e de actividades interdisciplinares variadas.

A ênfase no ensino da matemática deve ser feita na resolução de problemas, no desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de comunicação. Isto porque muito dos cálculos são efectuados pelos computadores ou pelas máquinas de calcular.

"Exemplos de tarefas realizadas com frequência incluem calcular uma despesa que implica o pagamento de um imposto, examinar diferentes alternativas para contrair um empréstimo, estimar um valor aproximado, compreender um anúncio ou uma notícia que se baseia em tabelas e gráficos. Na realização destas tarefas, aquilo que é determinante não

é a proficiência de cálculo mas sim um conjunto de competências como perceber qual é a operação adequada, estimar a razoabilidade do resultado, localizar os dados relevantes numa tabela, interpretar um gráfico ou decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema. Nalgumas situações, é importante saber avaliar criticamente a validade de um argumento, por exemplo analisando se uma generalização está apenas baseada em casos particulares ou se uma amostra é representativa de uma determinada população. Noutras situações, são ainda relevantes capacidades ligadas à visualização e à orientação espacial, como sucede quando se pretende interpretar uma imagem ou uma construção ou produzir uma explicação relativa a uma figura ou a um trajecto." (Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I., 1999).

A matemática encara de uma forma muito particular as demonstrações e as generalizações. Como relaciona o trabalho experimental com o raciocínio indutivo e dedutivo contribui de uma forma muito importante para desenvolver a forma de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar. Desta maneira, a matemática desenvolve formas de pensar distintas da utilizada em outras áreas do saber.

"Quanto a mim, devo confessar que sou completamente incapaz de adicionar sem me enganar... A minha memória não é má, mas seria insuficiente para fazer de mim um bom jogador de xadrez. Ela não me falha num raciocínio matemático por ser conduzida pela marcha geral do raciocínio. Numa demonstração matemática a ordem pela qual os elementos são colocados é muito mais importante que os próprios elementos. Se tenho a sensação, a intuição, por assim dizer, desta ordem, de forma a que possa perceber com uma "olhadela" o conjunto do raciocínio, já não tenho que recear esquecer nenhum dos seus elementos." (Poincaré, 1908)

A Matemática é considerada uma das disciplinas mais importantes do sistema educativo. É frequente haver nos meios de comunicação social referências às competências matemáticas dos alunos.

Podemos sintetizar a importância da Matemáticas através dos seguintes pontos:

"- A Matemática é usualmente tomada, a nível internacional, como um indicador de eficiência da escola e do ensino formal;

- A matemática tem como primeiro objectivo desenvolver a capacidade de resolver problemas e de raciocinar logicamente, capacidades essas que são transferidas para a vida do dia-a-dia e para o trabalho;

- A Matemática é um património cultural com relevância para a produção e evolução científica;

- A Matemática está intrinsecamente ligada à evolução tecnológica, absolutamente indispensável para o desenvolvimento social;

- A Matemática está ligada a actividades profissionais com grande prestígio e bons rendimentos materiais;

- A Matemática é a ciência dos padrões e da generalização, característica esta que lhe dá uma beleza única e específica;

- A Matemática utilidade prática para o Homem comum, quando interpretada como a disciplina dos números;

- A Matemática é indispensável à aprendizagem de outras disciplinas, como a Física, a Química, a Economia, etc." (Neves, M. A. F., Guerreiro, L. E Neves, A., 2002)

A importância da Matemática é tão grande que "hoje é quase condição necessária que qualquer teoria científica possa ser expressa em linguagem matemática, e tornou-se quase acto de fé acreditar que, se os conceitos matemáticos existentes se revelarem inadequados à descrição de alguns fenómenos observados, é possível inventar outros mais apropriados." (Davis, P. J. e Hersh, R., 1997)

2. O ensino da Matemática

O movimento da Matemática Moderna, surgido em finais dos anos 50, defendia que as estruturas matemáticas integradas nos currículos representavam os processos mentais e matemáticos e que as mudanças curriculares eram um meio fundamental para a renovação do ensino da matemática.

Em diversos países do mundo foram feitas grandes alterações curriculares que, respeitando as linhas gerais do movimento, tinham aspectos muito dispares. A reforma francesa era baseada em princípios estruturalistas rígidos. Os projectos das escolas ingleses integravam a matemática no meio circundante. Algumas escolas americanas desenvolviam um currículo em espiral.

Em Portugal coexistiam dois tipos de ensino. O ensino liceal, influenciado por Sebastião e Silva, equilibrava o formalismo com o recurso a métodos heurísticos. O ensino técnico era caracterizado por ser mais formalista. Com a unificação do ensino, nos anos 70, prevaleceu um ensino em que se privilegia o formalismo e o rigor da linguagem.

Durante os anos setenta surgiram várias vozes críticas em relação a esta reforma que valorizava os conteúdos em detrimento dos métodos. O segundo congresso da International Commission on Mathematics Instruction foi um momento chave para a mudança de atitudes no ensino da matemática. Começou a relacionar-se a matemática com a vida real, a dar ênfase à resolução de problemas e a utilizar as calculadoras. As situações de sala de aula e os processos mentais dos alunos foram temas centrais em processos de investigação. Compreendeu-se que os aspectos culturais e sociais eram importantes para a aprendizagem da matemática. Recentemente os computadores e as calculadoras gráficas têm desempenhado um papel fundamental na alteração dos métodos de ensino e na compreensão da natureza da matemática.

O insucesso na matemática tem implicado a mudança nos objectivos, nos conteúdos e nos métodos de ensino. "Ainda hoje se acredita que a Matemática é a ciência do rigor, e toda a ênfase do processo de ensino é colocado nas questões de linguagem. É acentuada a Matemática que se deve ensinar e não a Matemática que se deve aprender. Demasiadas vezes são utilizados métodos expositivos, acreditando-se na eficácia da transmissão do saber, em vez de se compreender que o conhecimento matemático não se transmite, mas ele é essencialmente construído pelos alunos."(Matos e Serrazina, 1996)

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) tem desenvolvido um trabalho notável no âmbito do ensino da Matemática apresentando diversos estudos que

ajudam o professor a desenvolver um trabalho positivo junto dos alunos. Para que o trabalho desenvolvido nas escolas leve o aluno a adquirir as competências necessárias em matemática é importante "caminhar em direcção:

- a salas de aula que sejam comunidades matemáticas – longe de uma aula que seja apenas uma colecção de indivíduos;

- à verificação da correcção dos resultados através da lógica e da evidência matemática – longe do professor como única fonte de autoridade para confirmar as respostas correctas;

- ao raciocínio matemático – longe de simples memorizações técnicas;

- à formulação de conjecturas, à invenção, e à resolução de problemas – longe da ênfase na procura mecanicista de respostas;

- às conexões da matemática, das suas ideias e das suas aplicações – longe do tratamento da matemática como um corpo de conceitos e procedimentos isolados." (NCTM, 1994)

3. O ensino da Geometria

O ensino da geometria é importante deste o nível inicial. As crianças devem ser encorajadas a estudar figuras geométricas simples e explorar as suas propriedades. O ensino deve ser informal e exploratório. A sistematização e conceptualização deve ficar para os níveis mais avançados do ensino.

Nalguns países as construções com régua e compasso estão a ser gradualmente retiradas dos programas de ensino. Mas mesmo que se queira fazer estas construções utilizando programas informáticos é importante saber as suas bases.

Os aspectos mais teóricos e abstractos da geometria não devem ser formalizados de uma forma teórica mas devem ser apreendidos gradualmente através de experiências. As demonstrações também são importantes quando respondem a problemas sentidos ou relevam factos interessantes.

"A Geometria como corpo de conhecimentos é a ciência que tem por objecto analisar, organizar e sistematizar os conhecimentos espaciais. Num sentido amplo pode-se considerar a Geometria como a Matemática do espaço. O interesse em estudar o espaço não é próprio somente da educação integral de cada indivíduo, mas também é essencial em diferentes disciplinas e profissões técnicas e artísticas." (Alsina, 1997)

Investigações recentes apontam para que a inteligência humana seja uma mistura de diversas competências, sendo algumas desenvolvidas através da visão e da percepção da tridimensionalidade do mundo (Stockstill, 2001).

Whiteley (1999) cita alguns estudos que apresentam certas evidências em como os esquemas e o raciocínio geométrico têm um papel fundamental no ensino e no desenvolvimento da criatividade em diversas áreas profissionais nomeadamente na matemática. Estes estudos abordam temas como o "raciocínio esquemático", "pensando com esquemas" e "raciocínio espacial". O estudo da geometria proporciona também o desenvolvimento do pensamento divergente e pode desenvolver as competências do raciocínio lógico.

A utilização de esquemas (diagramas) no ensino foi um tema estudado por Koedinger (Crow e Zand, 2000) e considera que interagindo com representações esquemáticas pode aumentar nos estudantes a percepção das relações. Este autor considera que existem dois tipos de esquemas:

- Esquemas estruturais – referem-se ao arranjo espacial dos dados;
- Esquemas emergentes – referem-se ao potencial para reconhecer relações.

Muitas das competências que os alunos devem adquirir consegue-se através da resolução de problemas. "A Geometria é uma fonte por excelência de problemas não rotineiros que podem propiciar o desenvolvimento, entre outras, das capacidades de visualização espacial, de raciocínio e de argumentação, identificadas como fundamentais para os cidadãos na época actual e no futuro." (Junqueira, M. e Valente, S.,1998).

Para que os alunos fiquem com uma noção abrangente da geometria e a forma como ela nos pode ajudar a resolver problemas do quotidiano as noções geométricas devem ser abordadas a partir de múltiplas perspectivas. "Nos últimos anos tem vindo a reconhecer-se que o ensino da Matemática tem ignorado uma das características mais dominantes desta ciência: o facto de existirem em geral múltiplas perspectivas possíveis na construção dos conceitos e na exploração e resolução de situações problemáticas." (Veloso, 2000)

Muitos dos objectos manufacturados são constituídos por elementos com formas lineares ou circulares baseados na geometria de Euclides. Nas fábricas fazem-se cópias congruentes de peças de máquinas. Nos escritórios e nas lojas fazem-se modelos e projectos com base nesta geometria. Constróem-se cruzamentos de estradas perpendiculares umas às outras, para que os condutores possam ver igualmente bem nos dois sentidos. Localiza-se o centro de um tecto para pendurar um candeeiro desenhando as diagonais do modelo rectangular do tecto.

Com a evolução da civilização as noções euclidianas tornaram-se insuficientes para explicar o mundo. Descartes, no século XVII, introduziu o conceito de coordenadas para representar pontos e as expressões algébricas para representar figuras geométricas. A publicação do livro "La Géométrie" marca o início da integração da Álgebra e da Geometria dando origem à Geometria Analítica.

Actualmente a interacção entre a geometria e a álgebra é muito grande. A matemática utiliza a linguagem da geometria para descrever conceitos em espaços abstractos, como os hiperplanos e as esferas a n-dimensões. Nas fábricas e nos laboratórios o desenho assistido por computador utiliza coordenadas e representações algébricas para descrever formas geométricas que não são lineares ou circulares. Por exemplo a secção de corte de um guarda-lamas de um automóvel pode ser descrita por uma função de duas variáveis. Com esta função os técnicos podem modificá-lo e efectuar diversas experiências. É possível identificar posições através de números e modificar essas posições através de fórmulas.

Por vezes é preferível utilizar a geometria sintética, noutras situações a geometria

analítica descreve melhor a situação. As duas perspectivas são complementares. "O aluno precisa de reconhecer e compreender as duas para desenvolver o seu poder e a sua capacidade de resolução de problemas." (NCTM, 1991)

O desenvolvimento da tecnologia computacional acrescentou uma nova abordagem da geometria, a abordagem por vectores.

Hoje em dia as perspectivas enunciadas não são suficientes para abranger a utilização da geometria. A noção de transformação geométrica vem complementar o estudo da geometria. As transformações geométricas são as isometrias (simetria axial, rotação, translação, simetria deslizante) e as semelhanças. O domínio e o conjunto de chegada destas transformações é o conjunto dos pontos do plano.

Os motivos pelos quais se utilizam transformações na definição de figuras congruentes ou semelhantes são os seguintes:

- Como o domínio é o conjunto de pontos não existe restrição sobre a natureza desse conjunto;

- Como as transformações em causa são funções, o estudo da geometria liga-se mais intimamente ao estudo de outros ramos da matemática nos quais as funções desempenham um papel mais central e mais explícito;

- Como as transformações podem ser consideradas modelos das manipulações físicas ou mentais que se efectuam sobre as formas para determinar se as figuras são congruentes ou semelhantes, as noções matemáticas ligam-se mais de perto à experiência de quem aprende;

- Podem representar-se sinteticamente as próprias transformações utilizando coordenadas ou matrizes.

"A possibilidade de métodos de transformação aumenta o leque de problemas acessíveis ao aprendiz em resolução de problemas. Tal como sucedia com as abordagens por coordenadas e sintética, é mais fácil representar e analisar algumas situações utilizando transformações do que com outras ferramentas." (NCTM, 1991)

As "Normas para o Currículo e a Avaliação" (NCTM, 1991) recomendam que as noções geométricas sejam abordadas a partir de perspectivas diversificadas: sintética, de coordenadas, de transformações e vectorial.

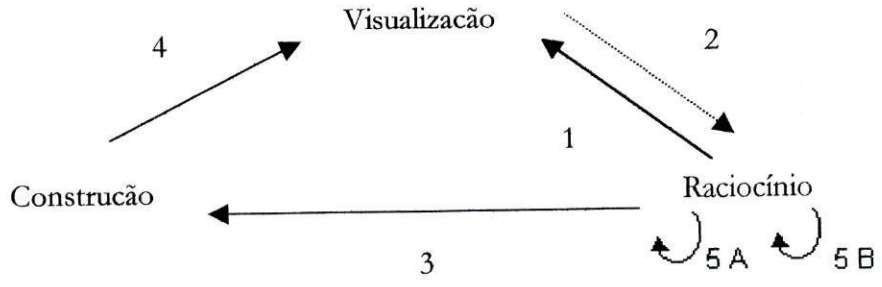
Devido a uma certa complexidade cognitiva na actividade geométrica, o ensino e a aprendizagem da geometria nem sempre são fáceis. Duval (1998) refere que a geometria envolve três tipos de processos cognitivos:

- Visualização - representação espacial para a ilustração de um determinada

conceito;

- Construção - utilização de instrumentos para a construção de modelos;
- Raciocínio - utilização do discurso para descrever ou argumentar.

O esquema 1 representa a relação entre estes três processos.



A – discurso natural para nomear, descrever ou argumentar
B – proposições com um estatuto teórico de definição, teorema para uma organização dedutiva do discurso

Esquema 1

Cada seta indica como cada processo apoio o outro. A seta 2 está a tracejado porque nem sempre a visualização ajuda o raciocínio. A seta 5B representa que o raciocínio B pode desenvolver-se de uma forma independente. A sequência 2-5B-3 representa o caminho para chegar à construção de uma figura. A sequência 4-2-5A ou 5B representa o caminho para descrever uma construção.

Com este esquema compreende-se que os alunos têm alguma dificuldade para interiorizar a importância da relação entre os três processos. Como as demonstrações são tradicionalmente difíceis é preferível começar pelas construções e pela visualização.

Os trabalhos de Duval (1998) permitiram concluir que:

- Os três processos devem ser desenvolvidos separadamente;
- O currículo deve permitir o desenvolvimento de diversos processos de construção e de visualização porque existem diversas maneiras de ver uma figura, assim como há várias formas de raciocínio;
- A coordenação entre os três processos só acontece depois do trabalho de diferenciação.

A geometria que consta dos currículos do ensino básico é o estudo dos objectos espaciais, das suas relações e transformações e da axiomática que os representa. Clements e Battista (1992) consideram que o raciocínio espacial consiste num conjunto de processos cognitivos pelos quais as representações mentais dos objectos, as suas relações e transformações são construídas e manipuladas. Desta forma a geometria e o raciocínio

espacial então intimamente relacionados.

Usiskin (citado por Clements e Battista, 1992) considera quatro dimensões na geometria, em que as três primeiras necessitam da utilização do raciocínio espacial:

- Visualização, desenho e construção de figuras;

- Estudo dos aspectos espaciais do mundo físico;

- Veículo para a representação de conceitos e relação matemáticos não visuais;

- Representação de um sistema matemático formal.

Os alunos têm grande dificuldade em aprender geometria despendendo os professores pouco tempo na sua leccionação.

A maior parte das propriedades geométricas podem ser redescobertas através do método heurístico sistematizado por Schumann (1991) que, partindo das construções geométricas, desafia o aluno a perceber porque é que elas funcionam.

1. Descoberta indutiva de propriedades através de construções geométricas

- Resolução de um problema de construção. O resultado é uma configuração geométrica.

- Análise do resultado da construção (em particular, através da inclusão e destaque de elementos essenciais, obtidos através de medições e de cálculos baseados em medições). O resultado é uma primeira conjectura.

- Realização de novas construções que tenham em consideração casos diversificados e verificação da conjectura nessas construções. O resultado é a confirmação da conjectura com a formulação de um primeiro teorema ou rejeição da conjuntura.

2. Descoberta e apresentação da prova

- Necessidade da prova: motivação.

- Análise do problema: estabelecimento das hipóteses e da tese.

- Aplicação de métodos heurísticos para descobrir provas (avançar da hipótese para a tese, trabalhar em sentido contrário, raciocinar por analogia com outras provas, etc.).

- Documentação da prova tendo em vista a sua compreensão.

3. Tratamento do teorema e da prova

- Discussão e explicação da metodologia para descobrir teoremas e provas.

- Aplicação de métodos heurísticos (especialização, generalização, comparação, inversão) para produzir novas afirmações.

Os ambientes geométricos dinâmicos permitem a redescoberta de propriedades geométrica de uma forma mais fácil recorrendo quer à indução quer à dedução.

Para compreender a evolução da aprendizagem da geometria Clements e Battista

(1992) referem que, de acordo com a teoria de Pierre e Dina van Hiele, os estudantes progridem através de níveis de conhecimento. Esta teoria tem por base os seguintes pressupostos:

- O ensino é um processo descontínuo;

- Os níveis de conhecimento são sequenciais e hierárquicos;

- Os conceitos implicitamente percebidos num nível tornam-se explicitamente percebidos no nível seguinte;

- Cada nível tem a sua linguagem, isto é, o seu conjunto de símbolos e relações entre eles.

Inicialmente foram propostos cinco níveis. Estudos posteriores tornaram evidente que era necessário introduzir um nível zero (Pré-identificação). As crianças neste nível reconhecem a forma mas só apreendem uma característica, não são capazes de identificar formas comuns. Conseguem distinguir entre um circulo e um quadrado mas não distinguem um quadrado de um triângulo.

Os níveis de conhecimentos propostos são os seguintes:

1. Visual - Os estudantes identificam e operam sobre formas geométricas de acordo com a sua aparência. Os estudantes não reconhecem as propriedades das figuras. O raciocínio é dominado pela percepção.

2. Descritivo/Analítico - Os estudantes reconhecem e identificam as forma geométricas pelas suas propriedades. As propriedades são apreendidas experimentalmente através de observações, de medições, de desenhos e de modelações. Apercebem-se que um determinado conjunto de propriedades determinam uma dada classe de figuras.

3. Abstracto/Relacional - Os estudantes conseguem formar definições abstractas, distinguem entre condições necessárias e suficientes e algumas vezes utilizam argumentos lógicos no domínio da geometria. Conseguem classificar figuras hierarquicamente e dar justificações informais para justificar o sua classificação. Conseguem também descobrir propriedades de classes de figuras de uma forma dedutiva informal.

4. Dedução formal - Os alunos conseguem demonstrar teoremas com base num sistema axiomático. Reconhecem a diferença entre definições, axiomas e teoremas utilizando-os no raciocínio lógico e formal. Conseguem construir demonstrações originais.

5. Rigor/Metamatemática - Os estudantes raciocinam formalmente sobre sistemas matemáticos. Conseguem estudar geometria sem utilizar modelos e manipular formalmente axiomas, definições e teoremas.

Uma característica importante no modelo de van Hiele é que a transição entre

níveis depende pouco do desenvolvimento biológico mas, principalmente, do processo de ensino/aprendizagem. Assim, o professor tem um papel importante na evolução do conhecimento dos alunos.

Com base na teoria exposta, Clements e Battista (1992) propõem cinco fases de aprendizagem em que são indicados os objectivos de ensino e a forma de actuação do professor:

1. Informação - Os estudantes tomam conhecimentos dos objectos de estudo. O professor discute os materiais, coloca-os à disposição dos alunos e fornece a informação necessária.

2. Orientação - Os estudantes tomam conhecimento das ideias que conceberam os objectos geométricos. O objectivo é que os alunos explorem activamente os objectos para descobrirem relações importantes. O professor deve orientar os alunos na procura de conceitos específicos.

3. Explicitação - Os alunos apercebem-se das relações e começam a construir o seu conhecimento de uma forma intuitiva. As conceptualizações geométricas são descritas numa linguagem própria dos alunos. O professor deve ajudar os alunos a explicitarem as suas ideias e introduzir terminologia matemática importante.

4. Livre orientação - As crianças resolvem problemas cujas soluções requeiram a síntese e a utilização de conceitos previamente adquiridos. Aprendem a orientar-se num conjunto de relações e utilizam-nas para resolver os problemas. O professor deve seleccionar problemas e material apropriado, dar instruções que permitam caminhos distintos e encorajar os alunos a reflectirem sobre o problema. Deve também fornecer diversas técnica de resolver problemas.

5. Integração - Os alunos elaboram um resumo de tudo o que aprenderam sobre o objecto de estudo aplicando linguagem matemática apropriada. O professor deve encorajar os alunos a reflectirem e a consolidarem o seu conhecimento geométrico.

Na reestruturação do ensino básico em curso no nosso país há uma transferência da ênfase nos objectivos para as competências que os alunos devem desenvolver. Desta forma pretende-se que o ensino se aproxima mais das características de cada aluno.

O currículo nacional do ensino básico define no domínio da geometria, das grandezas e da medida, as competências matemáticas que todos devem desenvolver (Abrantes, 2001). Estas competências incluem os seguintes aspectos para todos os ciclos de ensino:

- A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar

propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;

- A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e em outras áreas da matemática;

- A compreensão dos conceitos de comprimento e perímetro, área, volume e amplitude, assim como e a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas;

- A aptidão para efectuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;

- A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;

- A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;

- A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação.

No que respeita ao 1° ciclo de ensino são de considerar os seguintes aspectos:

- O reconhecimento de formas geométricas simples, bem como a aptidão para descrever figuras geométricas e para completar e inventar padrões;

- A aptidão para realizar construções geométricas simples, assim como para identificar propriedades de figuras geométricas;

- A compreensão do processo de medição e a aptidão para fazer medições e estimativas em situações diversas do quotidiano utilizando instrumentos apropriados.

No 2° ciclo de ensino é importante ter em atenção o seguinte:

- A predisposição para identificar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente em triângulos, em quadriláteros e em sólidos geométricos, bem como para justificar e comunicar os raciocínios efectuados;

- A aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente ângulos e triângulos, e para descrever figuras geométricas;

- A aptidão para resolver e formular problemas que envolvam relações entre os conceitos de perímetro e de área, em diversos contextos;

- A aptidão para calcular áreas de rectângulos, triângulos e círculos, assim como volumes de paralelepípedos, recorrendo ou não a fórmulas, em contexto de resolução de problemas.

Quanto ao 3° ciclo são de considerar os pontos seguintes:

- A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;

- A aptidão para realizar construções geométricas, nomeadamente quadriláteros, outros polígonos e lugares geométricos;

- A compreensão do conceito de forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes;

- A aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, igualdade e semelhança de triângulos, assim como para justificar os processos utilizados;

- O reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de áreas e volumes de sólidos e de objectos do mundo real, em situações diversificadas;

- A predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e com a técnica;

- A tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais.

4. A aprendizagem matemática numa perspectiva construtivista

No contexto da Matemática é importante o "fazer matemática" no sentido de construir um conhecimento. Esta construção parte da experimentação, da interpretação, da visualização, da indução, da formulação de uma conjectura, da abstracção e da demonstração. Está-se então na presença de um aluno activo agente da construção do seu conhecimento.

Como área do conhecimento a Matemática apresenta duas características distintas:

- É uma ferramenta importante para a compreensão de problemas nas mais diversas áreas do conhecimento;

- É um conjunto de conceitos e teoremas que vão definir umas estrutura própria, constituindo investigação no plano puramente matemático.

"Para os matemáticos, um perene problema é explicar ao grande público que a importância da Matemática vai além de sua aplicabilidade. É como explicar a alguém que nunca ouviu música a beleza de uma melodia...Que se aprenda a Matemática que resolve problemas práticos da vida, mas que não se pense que esta é a sua qualidade essencial. Existe uma grande tradição cultural a ser preservada e enriquecida, em cada geração." Chandler & Edwards (citado por Gravina, 1998)

No processo de ensino/aprendizagem aqueles dois aspectos complementares da matemática devem ser bem explicitados constituindo um desafio constante para o professor. Para melhor compreender a forma como o pensamento matemático é construído é importante ter em atenção a teoria do desenvolvimento cognitivo proposta por Jean Piaget.

Para uma melhor compreensão do processo evolutivo das estruturas cognitivas Piaget destaca três estados essenciais (Tall citado por Crowe e Zand, 2000):

- Estado pré-operatório em que as crianças se apoiam em acções sensório-motoras sobre objectos materiais e através de exercícios de repetição espontânea para chegar ao domínio e generalização da acção;

- Estado operatório concreto que é caracterizado pelo aparecimento das operações (acções em pensamento) mas em que as crianças ainda dependem dos objectos concretos para que as acções se constituam em conceitos;

- Estado das operações abstractas em que a criança já não precisa de acções ou objectos concretos para elaborar conceitos.

Esta estruturação em estados evolutivos evidencia que o processo de aprendizagem se baseia na acção do indivíduo.

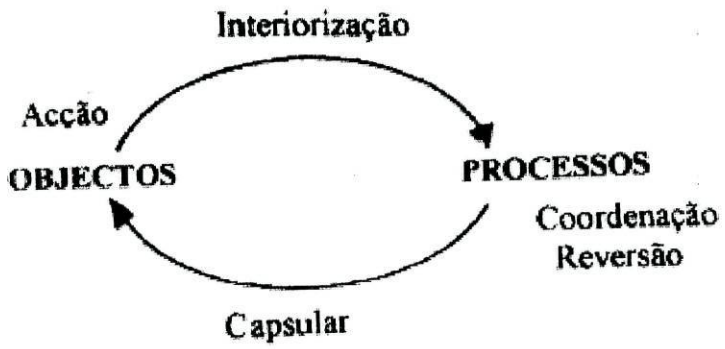
Em relação à educação matemática Piaget (1973) afirma:

"O papel inicial das acções e das experiências lógico matemáticas concretas é precisamente de preparação necessária para se chegar ao desenvolvimento do espírito dedutivo, e isto por duas razões. A primeira é que as operações mentais ou intelectuais que intervêm nestas deduções posteriores derivam justamente das acções: acções interiorizadas, e quando esta interiorização, junto com as coordenações que supõem, são suficientes, as experiências lógico matemáticas enquanto acções materiais resultam já inúteis e a dedução interior bastar-se-á a si mesmo. A segunda razão é que a coordenação de acções e as experiências lógico matemáticas dão lugar, ao interiorizar-se, a um tipo particular de abstracção que corresponde precisamente à abstracção lógica e matemática".

As teorias construtivistas da educação tiveram as suas raízes nos trabalhos de Piaget. Robert e Schwarzenberger (citados por Crowe e Zand, 2000) observaram que era razoável supor que os mecanismos que comandavam a aprendizagem dos indivíduos eram semelhantes àqueles que se aplicavam às jovens crianças. Os mesmos autores referiram que a acção individual era importante, especialmente na procura activa da solução de um problema.

Dubinsky (citado por Crowe e Zand, 2000), um dos principais seguidores da teoria de Piaget aplicada no contexto da Matemática, salienta que o processo de abstracção reflexiva é de central importância para a compreensão dos conceitos matemáticos. Este autor apresentou conjuntamente com McDonald a teoria APOS (Domingos, 2001). Esta teoria surgiu no sentido de compreender o mecanismo da abstracção reflexiva introduzido por Piaget.

Dubinsky define a abstracção reflexiva como a construção de objectos mentais e de acções mentais sobre estes objectos. O seu pensamento pode ser sintetizado pelo esquema 2. (Domingos, 2001)



Esquema 2

As acções são transformações mentais ou físicas de objectos para obter outros objectos. Quando o indivíduo reflecte sobre uma acção deve começar a estabelecer um controle consciente sobre ela. Podemos então dizer que a acção foi interiorizada e passou a ser um processo.

Um processo é a transformação de um objecto (ou objectos) cuja característica importante é o controle da transformação pelo indivíduo, no sentido em que ele é capaz de descrever, ou reflectir sobre todos os passos da transformação sem ter que os realizar. Uma vez construído um processo, o indivíduo pode transformá-lo de várias formas. Ele pode ser revertido (reversed) ou pode ser coordenado com outros processos. Com a reflexão do indivíduo sobre o acto de transformar processos, estes começam a tornar-se objectos.

Um objecto é construído através do capsular (encapsulation) de um processo. Esta capsulação é alcançada quando o indivíduo está atento à totalidade do processo, percebe que transformações podem agir sobre ele e é capaz de construir tais transformações. Os objectos podem ser descapsulados para obter os processos dos quais eles provêm, e é importante em matemática que os indivíduos sejam capazes de fazer este movimento nos dois sentidos entre a concepção do objecto e o processo de uma dada ideia matemática.

Um esquema é uma colecção coerente de acções, processos, objectos e outros esquemas que estão de alguma forma ligados e permitem suportar a resolução de um dado problema. Tal como nos processos um indivíduo pode reflectir sobre um esquema e transformá-lo podendo mesmo acontecer que o esquema se transforme num novo objecto. Assim, podemos considerar pelo menos duas formas de construir objectos: a partir dos processos e a partir dos esquemas. No desenvolvimento da teoria considera-se que os objectos podem ser transformados por acções de nível superior, levando a novos processos, objectos e esquemas. Assim, a expansão dos esquemas pode ser representada por uma espiral de acções, processos e objectos.

5. Ambientes informáticos e construtivismo

Dörfler (citado por Crowe e Zand, 2000) vê o computador como um exemplo moderno de uma tecnologia cognitiva. Crowe e Zand (2000) consideram como contexto cognitivo não só o computador mas também os recursos que podem ser obtidos através da sua utilização. O computador como uma ferramenta de investigação está perfeitamente enquadrado numa abordagem construtivista.

É assim importante o desenvolvimento de aplicações informáticas que tenham presentes os princípios construtivistas segundo os quais o conhecimento é construído a partir de percepções e acções do sujeito, mediadas por estruturas mentais já construídas ou que se vão construindo ao longo do processo.

No âmbito da Matemática, inicialmente, as acções sobre objectos concretos generalizam-se em esquemas e, num estado mais avançado, são as acções sobre objectos abstractos que se generalizam em conceitos e teoremas. É a este raciocínio formal que Ogborn (citado por Gravina, 1998) refere como "um caso especial e bastante extraordinário de raciocínio concreto. Matemáticos e lógicos estão tão acostumados com seus sistemas de símbolos, que os tratam como objectos concretos."

"No processo de ensino e aprendizagem, a transição na natureza dos objectos sobre os quais os alunos aplicam as acções é uma questão central. O mundo físico é rico em objectos concretos para o início da aprendizagem em Matemática, no geral de carácter espontâneo. Mas se o objectivo é a construção de conceitos mais complexos e abstractos, estes não têm suporte materializado, entrando em jogo a 'concretização mental', que nem sempre é simples, mesmo para o matemático profissional. Este tipo de aprendizagem nem sempre tem carácter espontâneo e exige muitas vezes a construção de conceitos que são até mesmo, num primeiro momento, pouco intuitivos, portanto dependendo de muita acção mental por parte do aluno." (Gravina, 1998)

Os ambientes informáticos são ferramentas com grande potencial para enfrentar as dificuldades inerentes ao processo de ensino/aprendizagem. É possível "mudar os limites entre o concreto e o formal" (Papert, citado por Gravina, 1998). Com o computador pode-se "criar um novo tipo de objecto, os objectos 'concreto-abstractos'. Concretos porque existem no ecrã do computador e podem ser manipulados; abstractos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais." (Hebenstreint, citado por Gravina, 1998)

Tradicionalmente o conhecimento é apresentado de uma forma estática, seja através de um livro ou numa aula clássica. Esta característica estática muitas vezes "dificulta a

construção do significado, e o significante passa a ser um conjunto de símbolos e palavras ou desenhos a ser memorizado." (Gravina, 1998) Desta forma não surpreende que os alunos tenham dificuldade em transferir os conceitos aprendidos para novas situações diferentes daquelas que são apresentadas no manual escolar ou pelo professor.

O meio pelo qual são apresentados os conceitos afecta a forma como eles são apreendidos. As tecnologias informáticas permitem apresentar os conceitos de uma forma dinâmica que vai influenciar os processos cognitivos, nomeadamente as representações mentais. Um objecto matemático pode ser manipulado tornando-o dinâmico. Este dinamismo vai permitir ao aluno o reconhecimento da abstracção da invariância, um aspecto muito importante no pensamento matemático. Por exemplo, depois da apresentação do conceito de ângulo inscrito numa circunferência o aluno pode manipular o ângulo e verificar que a sua amplitude é metade da amplitude do arco que ele contém. "Por inerência, os meios dinâmicos tornam as variações fáceis de realizar" (Kaput, 1992)

Por interactividade entende-se a dinâmica existente entre as acções do aluno e as reacções do ambiente informático, oferecendo suporte às concretizações mentais do aluno. Estas reacções não podem ficar limitadas a informar se está certo ou errado. "A reacção do ambiente, correspondente à acção do aluno, funciona como 'sensor' no ajuste entre o conceito matemático e a sua concretização mental." (Gravina, 1998)

Kaput (1992) quando se refere a meio interactivo considera a interacção envolvendo um contributo físico do sistema de notação e o meio no qual ele se concretiza.

Criar e explorar o modelo de um fenómeno é uma experiência muito importante no processo de ensino/aprendizagem. Segundo Ogborn (citado por Gravina, 1998) "quando se constróem modelos começa-se a pensar matematicamente. A análise de um modelo matemático, pode levar à compreensão de conceitos profundos, como por exemplo a noção fundamental de taxa de variação... A criação de modelos é o início do pensamento puramente teórico sobre o funcionamento das coisas."

A modelagem permite ao aluno construir modelos a partir de expressões quantitativas, como funções. A máquina oferece uma resposta visual a uma determinada expressão levando o aluno a compreender as relações enter as variáveis.

A simulação permite que o aluno explore qualitativamente as relações matemáticas que são visualizadas.

As modelagens e as simulações utilizam a matemática como ferramenta para a resolução de problemas de outras áreas do saber.

Nos programas informáticos, com preocupações pedagógicas para o ensino da

Matemática, pode-se identificar dois modos de utilização que se enquadram numa perspectiva construtivista: actividades de expressão; actividades de exploração.

Nas actividades de expressão o aluno cria modelos para expressar as suas ideias. Com este modelo o aluno pode reflectir e experimentar alterando ou ajustando as suas concepções. Desta forma os ambientes informáticos são usados para materializar as ideias ou acções do sujeito.

Nas actividades de exploração é apresentado um modelo para que o aluno o explore, perceba e analise. Trata-se de um desafio intelectual importante para que o aluno construa relações e conceitos.

6. Computadores no ensino da Matemática

O Projecto Minerva teve uma importância relevante na introdução do computador nas práticas docentes, no funcionamento e dinamização das escolas. Este projecto permitiu desenvolver actividades com computadores em que estes serviam para:

- apoiar a aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos;
- executar algoritmos e processos rotineiros;
- arquivar, analisar e apresentar informação;
- realizar explorações e investigações.

Ponte (1995) refere que as tecnologias de informação e comunicação (TIC) introduziram novas ideias no ensino-aprendizagem da Matemática:

"- uma relativização da importância das competências de cálculo mental e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas agora muito mais rápida e eficientemente;

- um reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem dos mais variados problemas;

- uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas;

- um crescendo de interesse pela realização de projectos e actividades de modelação, investigação e exploração pelos alunos, como parte fundamental da sua experiência matemática;

- uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em actividade matemática intensa e significativa, favorecendo o desenvolvimento de atitudes positivas em relação a esta disciplina e uma visão muito mais completa da sua verdadeira natureza."

As actividades com o computador podem desenvolver uma relação mais próxima e colaborante entre o professor e o aluno. Os computadores vieram trazer ao docente uma maior necessidade de formação contínua para que estes acompanhem a transformação dos conceitos pedagógicos baseados no evolução tecnológica.

As TIC permitem que se desenvolvam actividades mais experimentais no ensino da matemática.

Apesar das vantagens da utilização dos computadores, Ponte (1995) refere que a possibilidade de estes permitirem fazer um grande número de experiências pode impedir que o pensamento mais adequado ocorra. Isto é, que não se faça uma reflexão crítica sobre

as actividades. Desta possibilidade resulta que o professor deve continuar a ter um papel fundamental na orientação dos trabalhos.

O mesmo autor refere que a relação Matemática-professor-aluno deve sofrer algumas alterações:

"- na aprendizagem se contacte com uma matemática mais viva, muito mais próxima do espírito investigativo que caracteriza a actividade dos matemáticos;

- o aluno passe a desempenhar um papel mais activo e autónomo, definindo e aprofundando os seus domínios de interesse, e usando com desembaraço uma variedade de ferramentas para o seu estudo;

- o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem."

A resolução de problemas é fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático. Brousseau (citado por Laborde, 1998) considera o processo de elaboração da solução de um problema como a interacção entre a pessoa e um meio que lhe permite executar um determinado número de acções para resolver o problema e oferece feedback a essas acções. Desta forma, os computadores, munidos de programas convenientes, podem ser um meio importante usado na resolução de problemas por permitir a interacção referida por Brousseau.

A resolução de problemas é uma técnica importante para a construção do conhecimento em matemática. O aluno interage com o problema realizando diversas acções e desenvolvendo certas capacidades. "Quando os problemas se desenrolam num contexto familiar aos alunos, gera-se um entusiasmo na aprendizagem e na aplicação da matemática. Permitir-lhes que formulem problemas, surgidos naturalmente a partir das experiências do seu dia-a-dia, proporciona-lhes uma oportunidade para aplicar a matemática, verificando então a sua utilidade e aplicabilidade." (Geddes, 2001)

O valor educativo de um problema está para além de encontrar a sua solução. Os alunos "começam a fazer matemática quando tentam responder, a propósito de um problema e da sua resolução, a um conjunto de questões: será esta a única estratégia, ou a melhor? Trata-se de um problema isolado, ou a estratégia que descobri pode aplicar-se a outros casos? De que modos posso alargar o enunciado e reformular o problema? Os objectos concretos que entram no enunciado são essenciais, ou o problema poder-se-ía enunciar de forma mais abstracta?" (Associação de Professores de Matemática, 1995)

Os computadores podem ser usados para a resolução de problemas. Os programas

gráficos permitem a representação de objectos matemáticos, a sua manipulação e o seu estudo sobre diversos pontos de vista. Uma característica importante destes programas é a possibilidade de o utilizador obter uma resposta por parte da máquina. A resolução de problemas utilizando o computador requer da parte do professor uma nova forma de planificar as suas actividades, acontecendo algumas vezes certas resistência.

A resolução de problemas em ambiente informático mostra que a representação gráfica ajuda na procura da solução:

- A representação gráfica é interpretada geometricamente e levanta novas questões que podem ser resolvidas geometricamente;

- A análise geométrica levanta novas questões que podem ser empiricamente exploradas levando a que se efectuem experiências com o software.

A resposta a um problema colocado a um aluno deve ser expressa em termos dos aspectos teóricos subjacentes ao problema. Os instrumentos informáticos são considerados meios auxiliares que podem ajudar a resolver o problema mas não podem eles mesmos servir como resposta para o problema formulado.

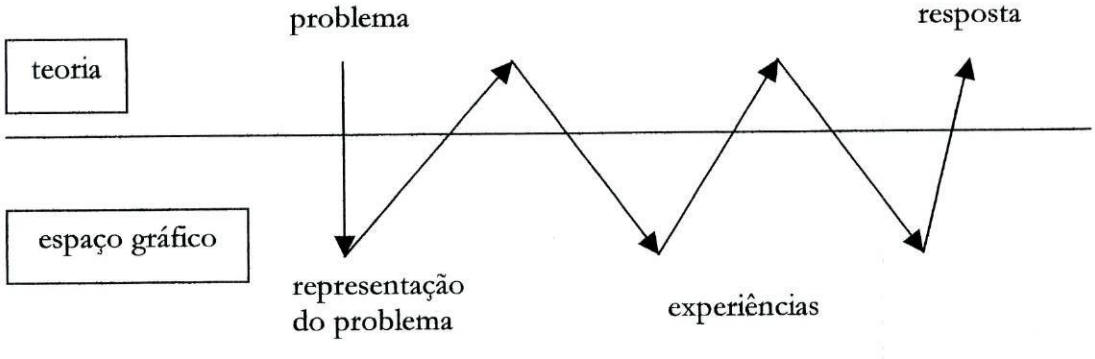
Consoante o problema, Laborde (1997) considera que este pode ser abordado de duas maneiras distintas:

- alternando entre uma representação gráfica e os conceitos teóricos;

- recorrendo às evidências perceptivas retiradas do espaço gráfico.

Para descobrir a solução e um problema por vezes recorre-se às evidências mostradas pela representação no espaço gráfico. A dificuldade, para os alunos, está em relacionar aquilo que é mostrado no computador com as justificações teóricas.

O esquema 3 representa a construção da solução de um problema de geometria através da alternância entre a teoria e a representação no espaço gráfico.



Esquema 3

Nesta forma de resolução de problemas os alunos trabalham em três níveis:

- o nível do espaço gráfico em que se apercebem da existências de invariantes (a localização de um objecto em relação a outro, as formas, a coincidências de objectos, a estimação de comprimentos, ...);

- o nível teórico em que os alunos recorrem às definições ou aos teoremas que aprenderam;

- o nível em que relacionam os aspectos teóricos e os aspectos gráficos (interpretação geométrica de um invariante, previsão de comportamentos gráficos como resultado de conhecimentos teóricos, experimentação gráfica para confirmar aspectos teóricos).

Um outro aspecto importante no ensino da matemática são as demonstrações que, por vezes, são conceitos difíceis de compreender por parte dos estudantes. Embora muitas actividades no computador não possam ser consideradas demonstrações, podem contudo contribuir para desenvolver o raciocínio dedutivo. (Hoyles e Jones, 1998)

"Os computadores são, ao mesmo tempo, a criatura e o criador de matemática. São, como afirma Seymour Papert, seres que falam matemática. Recentemente J. David Bolter no seu estimulante livro "Turing's Man" apelida os computadores de encarnação da matemática. Os computadores formam e aumentam o poder da matemática, enquanto a matemática forma e aumenta o poder dos computadores. Cada um força o outro a aumentar e mudar, criando, na linguagem de Thomas Kuhn, um novo paradigma da matemática." (Steen, 1995)

Dreyfus (1994) apresenta uma visão do computador como um instrumento cognitivo capaz de reorganizar o conhecimento disponível para o aluno. Esta capacidade advém da relação entre a representação numérica e a representação gráfica da Matemática. Por sua vez Dörfler (citado por Crowe e Zand, 2000) refere que os computadores podem transformar as situações algébrico-simbólicas em situações geométrico-espaciais. Desta forma a visualização torna-se parte integral dos conceitos matemáticos, que não podendo substituir a sua definição formal pode complementá-los.

No âmbito das tecnologias de informação e a sua aplicação à Matemática são de destacar os trabalhos de Kaput (Kaput, 1992). Este autor refere que as imagens no computador não representam necessariamente rigorosos conceitos matemáticos. Contudo, estas imagens podem constituir um meio importante para o entendimento de assuntos matemáticos que, sem a sua utilização, muitos alunos teriam dificuldade em os entender.

As Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar caracterizam "a

matemática como uma actividade e como um processo, e não apenas como um corpo de conhecimentos para ser dominado." (NCTM, 1991) São referidas questões importantes como fazer matemática, reconhecer conexões e valorizar a iniciativa. Diversas normas são estabelecidas no sentido de "assegurar o desenvolvimento de um amplo poder matemático; que cultive nos alunos a capacidade de explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, formular e resolver problemas e comunicar matematicamente; e que promova o desenvolvimento da autoconfiança." (NCTM, 1991)

A consecução dos objectivos enunciados requer novos ambientes de ensino-aprendizagem. As normas apelam para que se dê atenção:

- ao envolvimento activo dos alunos na construção e na aplicação dos conhecimentos matemáticos;

- à resolução de problemas simultaneamente como meio e como objectivo de ensino;

- a técnicas eficazes na colocação de perguntas que promovam a interacção dos alunos;

- à utilização de uma variedade de estilos de trabalho (pequenos grupos, exploração individual, aprendizagem entre alunos, discussões colectivas, trabalhos de projecto);

- à utilização de calculadoras e de computadores como instrumentos para aprender e fazer matemática.

Os programas que permitem o traçado e as medições nos computadores propiciam a criação de ambientes de aprendizagem que promovem o processo activo de formular e explorar conjecturas.

"Um dos aspectos mais críticos, no que se refere ao uso de computadores em educação matemática, se relaciona com os padrões de organização da aula.

Laboratórios de Matemática são necessários, na maior parte das vezes, para a introdução de um número grande de alunos a um programa. O acesso livre aos computadores, numa sala de informática ou num centro de recursos, é indispensável se se considerarem uma ferramenta de trabalho normal. Um computador na sala de aula pode ser útil na demonstração de uma ideia ou método particular ou para testar rapidamente uma conjectura. Pode ser possível combinar vários tipos de organização: a) laboratório de computadores, b) sala de aula, sem nenhum ou com um ou dois computadores e c) espaços abertos tal como um centro de recursos informático.

Em todos os estudos efectuados, vê-se o computador trazer uma contribuição positiva ao processo de ensino/aprendizagem. O professor adquire novas funções e

modifica a sua relação com os alunos. Estes, por seu lado, tendem a ficar muito envolvidos, a desenvolver novas capacidades e atitudes, a comprometer-se em trabalho de cooperação e reflectir mais." (Ponte et al., 1991)

"As sugestões mais salientes sugeridas pela tecnologia para mudar os objectivos nos conteúdos/processos centram-se na diminuição de atenção a dar aos aspectos do trabalho em Matemática que são rapidamente feitos pelas máquinas e no aumento da ênfase dada ao pensamento conceptual e ao planeamento requerido em qualquer ambiente." (Fey, 1988)

No campo dos conteúdos/processos Fey (1988) refere ainda que a aplicação das tecnologias permite "ampliar e estender o currículo actual às ideias matemáticas e a aplicações de complexidade maior do que as acessíveis à maioria dos alunos pelos métodos tradicionais."

"Muitos educadores matemáticos têm considerado que os novos instrumentos para processar informação operam uma mudança notável nos modelos de ensino/aprendizagem tradicionais nas aulas de Matemática. O professor, nesta perspectiva, muda o seu papel de expositor e fiscalizador de exercícios para o organizador de tarefas, conselheiro, recurso de informações, gestor, explicador e colega mais velho, enquanto que os alunos se envolvem em actividades exploratórias de aprendizagem consideravelmente mais auto-dirigidas." Fey (1988)

A Associação de Professores de Matemática produziu, em 1998, um documento em que recomenda que a "prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente, materiais manipuláveis, calculadora e computadores." (Associação de Professores de Matemática, 1998)

As tecnologias, calculadoras e computadores, são ferramentas fundamentais para ensinar, aprender e fazer matemática. "Fornecem imagens visuais de ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados e calculam com eficácia e com exactidão. Ajudam os alunos na investigação em diferentes áreas da matemática, como a geometria, a estatística, a álgebra, as medidas e os números. Quando as tecnologias estão presentes os estudantes podem centrar a sua atenção na tomada de decisões, na reflexão, no raciocínio e na resolução de problemas." (NCTM, 2000)

Aprender matemática requer um esforço e um grande envolvimento da parte do aluno. Para aprender conceitos abstractos o aluno tem que trabalhar sobre determinados objectos e relações que por sua vez são representados de alguma maneira. As ferramentas informáticas contribuem para o processo de aprendizagem não só para poupar tempo nos

cálculos ou para fazer gráficos mais facilmente mas principalmente como "reorganizadores: a matemática torna-se diferente para o aluno; as novas ferramentas modificam o conhecimento; as representações são relacionadas; podem ser feitas abordagens esquemáticas e qualitativas." (Dreyfus, 1994)

Pea em 1987 (citado por Crowe e Zand, 2000) tinha identificado uma dicotomia interessante semelhante à de Dreyfus (1994). Como amplificador o computador melhora a qualidade e velocidade das actividades, como organizador o computador pode modificar a natureza dessas actividades.

Na sua utilização, os professores não podem limitar o computador ao papel de amplificador, pois isso seria negar uma das ferramentas mais importantes no campo da educação. O computador deve ter como papel principal o de organizador de situações de ensino.

Dörfler (citado por Crowe e Zand, 2000) argumenta que o computador pode ajudar não só na criação e representação de modelos mentais, mas também na sua manipulação. No papel de organizador o computador é uma parte permanente do sistema cognitivo.

O computador pode ser muito importante para o desenvolvimento de actividades pedagógicas em três campos fundamentais: matemática; aplicações; didáctica.

No campo da matemática o computador pode ajudar a compreender ideias fundamentais através da simulação de transformações matemáticas. No campo das aplicações considera-se o computador como um instrumento facilitador da construções de figuras complexas através de procedimentos matemáticos básicos. No campo didáctico as simulações no computador auxiliam a descobrir relações matemáticas e propriedades.

7. A Geometria e os meios informáticos

A Geometria é considerada um corpo de conhecimentos teóricos (Laborde, 1997). Distingue-se os objectos e as relações geométricas, que são de natureza teórica, das suas representações em diversos suportes (desenhos sobre papel ou no monitor de um computador). Estas representações permitem ver as relações espaciais entre objectos geométricos (a realidade espacial gráfica). Existe assim uma relação entre os conhecimentos teóricos e a percepção da realidade espacial gráfica, que muitas vezes só é possível pela utilização de instrumentos de construção. Considera-se então que em geometria existem dois modos de conhecimento, um teórico e outro espacial gráfico (de ordem prática ou de apreensão perceptiva) .

Os meios informáticos são instrumentos importantes para mais facilmente se estabelecer a relação entre os aspectos teóricos e as questões práticas. Estes meios permitem aos alunos efectuar experiências e apresentar conjecturas, dando a máquina, muitas das vezes, uma resposta adequada. Esta resposta possibilita o refinamento ou a correcção da ideia inicial e assim passar para a fase da abstracção e da demonstração matemática.

O ensino da matemática tem sofrido grandes alterações com a evolução dos computadores, e com o desenvolvimento de programas informáticos. Mas talvez seja a geometria a área onde estas mudanças mais se fizeram sentir. Os alunos podem fazer diversas explorações que com os instrumentos tradicionais seriam muito difíceis ou impossíveis.

Apesar de se poder estudar muitos aspectos da geometria usando o computador é importante os alunos terem modelos reais de objectos geométricos para lhes tocarem e sentirem as suas formas.

Nos últimos anos surgiram novos recursos para o ensino da geometria, como os programas de geometria dinâmica, que têm despertado grande interesse nos alunos e professores. Estes programas têm sido também utilizados por investigadores na área da geometria. São programas muito precisos, que através de transformações dinâmicas permitem gerar exemplos e contra-exemplos fundamentais para a compreensão de determinadas demonstrações. "Dinâmico é o oposto de estático. Dinâmico está conotado com acção e energia. A geometria dinâmica é cheia de acção e energia." (King e Schattschneider, 1997)

"Os estudantes que utilizam programas de geometria dinâmica exibem diversas formas de comportamento que reflectem diferentes níveis de conhecimento acerca da

forma de pensar as animações." (Whiteley, 2000)

Whiteley (1999) refere algumas alterações introduzidas pela possibilidade de se criar animações nos programas de geometria dinâmica:

- A precisão e a confiança aumentam, principalmente para os principiantes;

- Podem ser apresentados muitos exemplos num curto espaço de tempo;

- Os alunos apercebem-se da invariância de certas propriedades quando se muda de exemplo (conceito fundamental em geometria);

- Os alunos podem passar para um nível superior de análise e de síntese;

- Partilha de experiências e convenções comuns entre a comunidade escolar e a sociedade em geral;

- Melhoria da comunicação entre os utilizadores.

A utilização destas novas ferramentas vai alterar a forma de fazer e ver a geometria. Possuí-se assim instrumentos que permitem que a geometria seja experimental, podendo gerar imagens, números e tabelas.

Na resolução de problemas utilizando meios informáticos, nomeadamente programas de geometria dinâmica, podem ser utilizadas algumas das seguintes estratégias:

- Estratégias visuais;

- Utilização de primitivas geométricas aleatoriamente sem intenção definida;

- Estratégias geométricas com objectivos concretos.

O mais difícil na resolução de problemas geométricos é encontrar aquilo que é invariante. Alguns invariantes são mais facilmente encontrados, dependendo da idade e dos conhecimentos dos alunos, bem como do próprio invariante.

Não pode ser descurado o facto de os alunos tentarem usar todos os elementos dos menus dos programas para resolver um problema. Os problemas devem ser planificados de forma que a solução seja difícil de encontrar por uma combinação aleatória de comandos.

O uso do computador pode afectar o ensino da geometria em dois aspectos fundamentais e de certo modo complementares. O uso de programas informáticos vai levar a um repensar do papel de certas actividades como conjecturar, argumentar e demonstrar. O conhecimento dos aspectos gráfico e computacional é necessário para se poder utilizar software gráfico.

Actualmente o desenvolvimento da geometria dinâmica está intimamente ligado com a utilização dos computadores. De facto, as origens da geometria dinâmica remontam ao século XVIII em que matemáticos como Clairault utilizavam a deslocação de elementos de uma figura para ilustrar fenómenos geométricos e para demonstrar teoremas.

"No MIT, em 1963, a tese de doutoramento de Ivan Sutherland, chamada Sketchpad (bloco de desenho), fez explodir no mundo a ideia do grafismo em computador interactivo. O Sketchpad era um sistema de desenho linear em tempo real que permitia que o utilizador interagisse directamente com o ecrã do computador por intermédio de uma «caneta óptica». A proeza foi de tal maneira grande e ampla que alguns de nós precisaram de uma década para compreender e apreciar a totalidade das suas contribuições. O Sketchpad introduziu muitos conceitos novos: grafismo dinâmico, simulação visual, definição limitada, seguimento de percurso por caneta e um sistema de coordenadas virtualmente infinito; e isto para nos referirmos a apenas alguns deles. O Sketchpad foi o big bang da computação gráfica." (Negroponte, 1996)

As características principais dos ambientes de geometria dinâmica referidas por Kuntz (1998) são:

- Uma base matemática consistente da geometria que vai apresentar;

- Uma interface agradável em que as ferramentas essenciais estão facilmente acessíveis;

- Um sistema que permite controlar o comportamento dos objectos construídos.

Ao longo dos últimos anos, diversos trabalhos demonstraram a importância do envolvimento directo do aluno na utilização de software de manipulação e construção de objectos geométricos. Estes trabalhos evidenciam o papel fundamental do envolvimento do aluno na superação das dificuldades de representar objectos difíceis de desenhar, podendo assim analisar os problemas propostos de uma maneira dinâmica e activa. O software é utilizado em ambiente de aula e também em actividades de auto-aprendizagem fora da escola. O software de geometria dinâmica pode ser adaptado a crianças com dificuldades escolares, permitindo um ensino personalizado. Às crianças com problemas de saúde, e que não podem deslocar-se à escola, o ensino à distância é um meio que lhes permite aprender (Projet TéléCabri, 2000).

Os programas de geometria dinâmica são igualmente utilizados noutros domínios do conhecimento, que têm como suporte a geometria, como é o caso da óptica, da electrónica, da mecânica e da astronomia.

A interacção com os programas de geometria dinâmica ajuda os alunos a terem uma visão menos restrita das figuras geométricas. As figuras podem ser alteradas mantendo as suas características essenciais.

Investigações levadas a cabo por Ben-Chaim em 1988 (citado por Clements e Battista, 1992) permitiram concluir que as pessoas têm dificuldade em fazer representações

bidimensionais de objectos tridimensionais. A manipulação das figuras no computador facilita a percepção da tridimensionalidade.

A utilização de programas de construção permite que os alunos façam mais facilmente conjecturas e, seguidamente, as possam testar. Os alunos podem desenhar uma forma geométrica, como um triângulo ou um quadrado, e efectuar medidas ou transformações. O programa memoriza a sequência das transformações e permite aplicá-las sobre outra figura. Desta forma os alunos podem tirar conclusões importantes sobre o estudo das figuras em causa.

Yerushalmy, Chazan e Gordon efectuaram um estudo em 1987 (citado por Clements e Battista, 1992) sobre a utilização do programa Geometric Supposer. Os alunos que utilizaram este programa tiveram os mesmos resultados, ou melhores resultados nos exames, do que os alunos que não utilizaram o programa. Verificaram também que a aprendizagem dos alunos ultrapassou a média dos conteúdos leccionados: reinventaram definições; fizeram conjecturas; colocaram e resolveram problemas difíceis. Fazer conjecturas não foi uma tarefa fácil mas no fim do ano lectivo os alunos já faziam conjecturas em diversos projectos e sentiam necessidade em justificar as suas generalizações.

No estudo referido os investigadores e os professores verificaram que, com a utilização do computador, os alunos não conseguem esconder aquilo que não compreendem. As dificuldades e as concepções erradas, muitas vezes escondidas no ensino tradicional, emergem no ensino assistido por computador. Esta característica é importante, pois permite que os alunos possam progredir nos seus conhecimentos em matemática.

Nos ambientes informáticos, em que se pretende que o aluno explore um determinado programa ou aplicativo, a aprendizagem cooperativa emerge espontaneamente, sendo de encorajar a utilização de um computador por dois alunos.

Os programas de geometria dinâmica permitem a manipulação de figuras de uma maneira que os alunos as visualizam como representativas de uma determinada classe de objectos geométricos. Isto permite que os estudantes reflictam nas propriedades da classe e pensem de uma forma mais genérica e abstracta. Estes ambientes propiciam que alunos e professores reconceptualizem a noção de aprendizagem e de ensino da geometria, assim como o entendimento que têm da geometria. São também importantes para promover a autonomia dos alunos em relação ao pensamento matemático.

Os estudos efectuados indiciam que as actividades no computador mediadas pelo professor são um factor importante para a criação de um ambiente de ensino eficaz.

Os programas mais conhecidos na área da geometria dinâmica são o The Geometer's Sketchpad (The Geometer's Sketchpad Resource Center, 2001), o Cabri-Géomètre (Cabri-Géomètre, 2001) e o Cinderella (The Interactive Geometry Software Cinderella, 2001). Os dois primeiros também podem ser instalados nas máquinas de calcular. Devido à sua ampla divulgação existem em todo o mundo clubes de utilizadores destes programas.

O Sketchpad é um software de construção em geometria, desenvolvido por Nicholas Jackiw e Scott Steketee e comercializado por Key Curriculum Press.

O Cabri Geometry é uma criação de J. M. Laborde e F. Bellemain, do Institut d'Informatique et Mathématiques Apliquées de Grenoble (IMAG)- Université Joseph Fourier, Grenoble, França.

O Cinderella foi desenvolvido por Jürgen Richter Gebert e Ulrich H. Kortenkamp. Além das construções existentes no Sketchpad permite construções em geometria esférica e hiperbólica. Tem como principal vantagem estar vocacionado para a publicação de construções interactivas na Internet. (Gebert e Kortenkamp, 1999)

Os programas de geometria dinâmica referidos oferecem uma régua e um compasso electrónicos, sendo a interface de menus de construção em linguagem clássica da geometria. Os desenhos de objectos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem, e mantêm a estabilidade durante o movimento.

Os programas apresentam uma interface dinâmica e interactiva (desenhos em movimento que podem ser automatizados através do recurso de botões) e permitem múltiplas representações. Possibilitam a captura de procedimentos permitindo criar macros.

A principal propriedade destes programas é que, através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe um desenho, este transforma-se mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação inicial. Assim, para um dado objecto tem-se associada um conjunto de desenhos em movimento, e as características invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas do objecto.

Este recurso é muito importante para a construção do conhecimento. Se, sob a acção do movimento, o desenho não corresponde àquilo que se pretende duas situações podem ter acontecido: o objecto foi mal construído, isto é, as propriedades que caracterizam o objecto não foram bem utilizadas; a nossa imagem visual do objecto é que não é adequada (isto é, a construção foi feita correctamente, mas a nossa visualização é que está mal). Em qualquer um dos casos, o recurso à animação leva ao ajuste entre a componente conceptual e a componente simbólica do objecto.

A configuração clássica de um objecto passa a ter múltiplas representações e, por

isso, passa a ser identificado em diversas situações em que se encontre representado. Os desenhos em movimento criam naturalmente um ambiente de investigação, os invariantes destacam-se e isto leva os alunos a questionarem-se. "Enquanto o software de geometria dinâmica não consegue produzir demonstrações, a evidência experimental produz uma forte convicção que pode motivar o desejo pela demonstração." (King e Schattschneider, 1996)

São de realçar as seguintes possibilidades didácticas:

- Modelagem - Os alunos constróem os desenhos de objectos ou configurações, quando o objectivo é o domínio de determinados conceitos através da construção;

- Simulação - Os alunos recebem desenhos prontos, projectados pelo professor, sendo o objectivo a descoberta de invariantes através da experimentação sobre desenhos em movimento. São feitas conjecturas, são estabelecidas propriedades, e dependendo do nível de escolaridade, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente.

A utilização de um meio informático, como o Sketchpad, é mais vantajosa que a utilização de papel e lápis porque se pode, muito facilmente, efectuar um grande número de experiências e muito diversificadas: deslocar um elemento; medir; verificar relações geométricas.

Clements e Battista (1992) referem que estudos realizados nos anos oitenta permitiram concluir que a utilização dos computadores no ensino da geometria contribui para um melhor desempenho dos alunos nesta área.

Como as crianças fazem as suas representações iniciais do espaço através de acções concretas, a utilização de software apropriado para o ensino da geometria pode favorece a aquisição de conceitos básicos essenciais para o estudo da geometria.

A representação gráfica e todas as questões levantadas devem ter uma ligação aos aspectos teóricos da geometria.

"O que está a mudar é que o computador é agora um componente importante no processo de ensino/aprendizagem da geometria, não só atraindo as pessoas através de gráficos fascinantes, mas também permitindo explorações de outro modo muito complexas ou mesmo impossíveis de materializar." (Graf e Hodgson, 1998)

Numa primeira abordagem aos programas de geometria dinâmica pode parecer que são simples editores gráficos permitindo aos utilizadores desenharem figuras geométricas. Mas as figuras depois de desenhadas podem ser continuamente redesenhadas, as relações geométricas mantêm-se inalteradas assim como as suas propriedades. Estes programas são

um bom modelo dos aspectos teóricos da geometria euclidiana.

O comportamento deste software baseia-se em dois aspectos do conhecimento geométrico:

- As figuras podem ser desenhadas baseadas em elementos geométricos simples que têm em consideração objectos geométricos relevantes e as suas relações (Pode-se desenhar a mediatriz de um segmento de recta seleccionando o segmento de recta);

- Oferece uma resposta que permite distinguir figuras desenhadas empiricamente daquelas que são desenhadas utilizando propriedades geométricas (Se um paralelogramo estiver desenhado, aparentemente com os lados paralelos, a sua forma pode ser modificada se se arrastar um dos vértices).

O processo de desenhar figuras, que representem objectos geométricos, requer que se comunique ao computador uma sequência de construção de elementos geométricos simples indicados nos menus do programa.

Os programas de geometria dinâmica permitem uma nova abordagem no que respeita às tarefas básicas da geometria:

- Efectuar um desenho a partir de uma descrição verbal de uma figura geométrica;

- Descrever ou explicar verbalmente (geometricamente) um determinado desenho geométrico;

- Reproduzir um desenho, ou transformá-lo, aplicando conhecimentos da geometria.

Efectuar um desenho, que mantenha as suas propriedade quando é arrastado, requer o uso das propriedades geométricas para a sua construção.

Desenhos dinâmicos têm um impacto visual maior que um desenho estático. Uma determinada propriedade (invariante) pode ser mais facilmente perceptível quando o desenho é dinâmico.

Os ambientes dinâmicos permitem que os alunos tentem reproduzir (interpretar) um determinado desenho a que se pode chamar caixa negra. Esta actividade requer algumas operações:

- Exploração da figura e do seu comportamento quando é arrastada, analisando as propriedades geométricas que se mantêm constantes;

- Verificação se as propriedades da figura reproduzida são as pretendidas, usando os menus do programa.

Estas operações são baseadas na interacção entre a visualização e a conceptualização. Estas tarefas contribuem para que o aluno apreenda a relação entre as

propriedades visuais e espaciais e o conhecimento geométrico.

Apesar da existência de bons programas para o ensino da geometria estes ainda não são muito utilizados. Verifica-se que a maior parte das escolas do ensino básico ainda não dispõe de uma sala de informática, que permita que uma turma trabalhe no computador. O ensino da geometria, utilizando o computador, coloca novos desafios aos professores para os quais alguns ainda não estão habilitados: mudança de hábitos adquiridos; competência em informática; competência em didáctica da informática.

A utilização dos computadores modifica o ensino da geometria, não só porque proporciona a construção de gráficos maravilhosos, mas porque permite explorações que de outra forma seriam difíceis de conseguir.

"Tal como a maior parte dos instrumentos em ciências e na vida intelectual, as animações criam novas respostas, novos métodos de pensar e suscitam novas questões. Mudamos aquilo que vemos e trabalhamos para ajudar os outros a verem tanto ou mais do que nós." (Whiteley, 2000)

As investigações realizados por Battista e Clements (Battista e Clements, 1995) evidenciam que os trabalhos realizados por alunos que utilizam ambientes geométricos computacionais têm uma qualidade superior à usual. Os alunos reinventam definições, colocam e resolvem problemas e formulam conjecturas ultrapassando os conteúdos habituais da Geometria.

Em relação à geometria da tartaruga Papert (1970) adiantou um tese fundamental em que a "Matemática susceptível de ser tratada por computador tem grandes vantagens em relação aos tópicos "clássicos"".

Geometria dinâmica e manipulação directa são ideias que estão associadas aos ambientes informáticos, propostos aos utilizadores, para a aquisição de determinados conhecimentos no campo da geometria. O utilizador é, de certo modo, colocado num micromundo em que os conhecimentos de geometria são fundamentais. Através da manipulação directa, o aluno pode elaborar as suas próprias construções apelando aos seus conhecimentos geométricos. Pode assim interagir directamente sobre as representações dos objectos geométricos teóricos.

As novas formas de interacção no ensino/aprendizagem podem ser conseguidas através do trabalho em determinados micromundos. Nestes ambientes os objectos, as relações e as operações matemáticas são representadas electronicamente de uma forma que permitem ser manipulados. Esta manipulação permite aos alunos observar propriedades e princípios matemáticos.

O termo micromundo foi pela primeira vez usado por Papert para descrever "um ambiente de ensino interactivo baseado no computador onde os pré requisitos são construídos no sistema e onde os alunos podem ser activos construtores da sua aprendizagem." (Papert citado por Tall, 1994)

Os micromundos da geometria que são mais utilizados no ensino são o Sketchpad e o Cabri. Estes programas ajudam os alunos a estabelecer e a testar conjecturas acerca das propriedades das figuras geométricas. Permitem também a construção, a transformação e a manipulação exploratória das figuras geométricas estudadas no ensino básico. Diversas actividades demonstrativas das suas capacidades são referidas no livro "Geometria com Cabri-Géomètre" (Associação de Professores de Matemática, 1999)

A ideia principal dos programas referidos é a de que o utilizador deve ser capaz de alterar as características de qualquer elemento de uma figura e de ver a nova figura desenhada imediatamente. Isto encoraja o aluno a descobrir as propriedades dessa figura.

Schwartz (citado por Fey 1988) sugere que a principal ideia que está subjacente a estes programas é a de que os alunos podem fazer a sua própria matemática e que os computadores os podem ajudar. Estes podem mudar a forma como a Matemática é ensinada e aprendida em todos os níveis.

Fey (1988) diz que estes instrumentos e o ambiente de trabalho que estabelecem têm dois objectivos principais:

- Restabelecer o acto de conjecturar e descobrir;

- Facilitar o raciocínio indutivo ao fazer testes múltiplos de conjecturas fáceis de executar.

Yerushalmy e Houde (citados por Fey, 1988) concluíram acerca da utilização do Supposer (micromundo geométrico) que:

"A pedagogia que utilizámos assemelha-se extraordinariamente à do ensino das ciências, onde a incidência principal é no processo científico de recolher dados, conjecturar e encontrar contra-exemplos ou generalizações. Os alunos ocuparam a maior parte do tempo das aulas a discutir e a fazer geometria em vez de escutarem um professor a falar dela."

A utilização de micromundos tem sido defendida por vários autores. "A proliferação de micromundos e a possibilidade de poderem ser modificados, de forma a servir o processo de construção de conhecimento dos alunos, atrai muitos professores criativos." (Ponte et al., 1991)

Um micromundo é uma criação de um mundo de realidade artificial que apresenta um modelo informático de uma teoria (Laborde, 1997). Este mundo é composto por

objectos que podem ser manipulados e que, por sua vez, permite criar novos objectos que satisfazem as condições teóricas que estiveram na base da criação deste mundo. Estes micromundos permitem criar representações espaciais gráficas de objectos geométricos com a ajuda de comandos que se exprimem através de primitivas geométricas. No micromundo criado pelo Sketchpad tem-se como exemplo as seguintes primitivas: point on object (ponto pertencente a um objecto), perperdicular line (recta perpendicular), circle by center and radius (circunferência com um raio e um centro definidos).

Os desenhos no monitor do computador podem ser modificados "arrastando" com o rato um dos seus elementos. O desenho deforma-se mas mantém as propriedades geométricas que estiveram presentes na sua construção (as invariantes). Os micromundos informáticos oferecem uma realidade material que representa a teoria, mas uma realidade livre de todas as interferências da "verdadeira" realidade (Minsky-Papert, citado por Laborde, 1997). O aluno ao interagir com esta realidade dos micromundos vai reconstruir uma teoria como modelo dos comportamentos que observa e das interacções que o programa lhe fornece.

Laborde (1997) refere que estudos recentes mostraram que o aluno não aprendia convenientemente quando interagia sozinho com os micromundos. As intervenções do professor e a criação de um ambiente didáctico eram fundamentais para uma aprendizagem mais favorável.

"A aprendizagem e a compreensão da geometria pelos alunos num ambiente tecnologicamente influenciado coloca muitas expectativas e exigências aos professores, que têm que desenvolver um leque grande de competências em matemática, em informática e em didáctica." (Graf e Hodgson, 1998)

Estudos efectuados sublinham que os programa de criação de micromundos de Geometria constituem uma ferramenta poderosa na superação das dificuldades inerentes à aprendizagem da geometria. Nestes ambientes os conceitos geométricos são adquiridos através de um equilíbrio entre as componentes conceptual e simbólica. "A habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve. O controlo sobre configurações geométricas leva à descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto às atitudes dos alunos frente ao processo de aprender estes experimentam, criam estratégias, fazem conjecturas, argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir da manipulação concreta do "desenho em movimento", passam para a manipulação abstracta atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático." (Gravina, 1996)

8. A revisão curricular e a noção de competência

A revisão curricular aponta para a existência de um currículo nacional que seja uma referência para a definição de aprendizagens fundamentais nas diferentes áreas do saber. Este currículo deve permitir ao professor adequar o seu trabalho às características de cada grupo de alunos e, se possível, a cada aluno.

Um conceito importante a reter em toda a revisão curricular é o de competência.

"O termo "competência" pode assumir diferentes significados... Adopta-se aqui uma noção ampla de competência, que integra conhecimentos, capacidades e atitudes e que pode ser entendida como saber em acção ou em uso." (Abrantes, 2001)

É importante que os conhecimentos sejam significativos e, como tal, construídos através de processos de pensamento e de atitudes favoráveis à aprendizagem. Estes conhecimentos são formados por um conjunto de conceitos e processos fundamentais que não se identificam com "o conhecimento memorizado de termos, factos e procedimentos "básicos", desprovido de elementos de compreensão, interpretação e resolução de problemas." (Abrantes, 2001)

Dois níveis de competências devem ser desenvolvidos em todos os alunos, competências gerais e competências específicas.

As competências gerais atravessam todas as áreas do saber e contêm duas linhas de força essenciais, a ideia de aprender a aprender e a noção de aprendizagem significativa. O desenvolvimento destas competências requer a utilização de estratégias que contribuam para que os alunos sejam mais activos e autónomos na sua aprendizagem.

As competências específicas dizem respeito às aprendizagens que são consideradas centrais em cada uma das áreas disciplinares. Referem-se não só aos conteúdos específicos de cada disciplina mas, também, às formas de pensar e de fazer que lhes estão associados.

Para cada competência geral formulada está associada um conjunto de modos de operacionalização transversal.

O protótipo desenvolvido pode, de alguma forma, contribuir para o desenvolvimento de competências. Destacam-se as seguintes competências gerais e a respectiva operacionalização transversal, referidos na obra "Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais" (Abrantes, 2001):

1. Mobilizar saberes culturais, científicos e tecnológicos para compreender a realidade e para abordar situações e problemas do quotidiano;

- Prestar atenção a situações e problemas manifestando envolvimento e curiosidade

- Questionar a realidade observada

- Identificar e articular saberes e conhecimentos para compreender uma situação ou problema

- Pôr em acção procedimentos necessários para a compreensão da realidade e para a resolução de problemas

- Avaliar a adequação dos saberes e procedimentos mobilizados e proceder a ajustamentos necessários

2. Usar adequadamente linguagens das diferentes áreas do saber cultural, científico e tecnológico para se expressar;

- Reconhecer, confrontar e harmonizar diversas linguagens para a comunicação de uma informação, de uma ideia, de uma intenção

- Utilizar formas de comunicação diversificadas, adequando linguagens e técnicas aos contextos e às necessidades

- Comunicar, discutir e defender ideias próprias mobilizando adequadamente diferentes linguagens

- Traduzir ideias e informações expressas numa linguagem para outras linguagens

- Valorizar as diferentes formas de linguagem

3. Pesquisar, seleccionar e organizar informação para a transformar em conhecimento mobilizável;

- Pesquisar, seleccionar, organizar e interpretar informação de forma crítica em função de questões, necessidades ou problemas a resolver e respectivos contextos

- Rentabilizar as tecnologias da informação e comunicação nas tarefas de construção de conhecimento

- Comunicar, utilizando formas diversificadas, o conhecimento resultante da interpretação da informação

- Auto-avaliar as aprendizagens, confrontando o conhecimento produzido com os objectivos visados e com a perspectiva de outros

4. Adoptar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões;

- Identificar situações problemáticas em termos de levantamento de questões

- Seleccionar informação e organizar estratégias criativas face às questões colocadas por um problema

- Debater a pertinência das estratégias adoptadas em função de um problema

- Confrontar diferentes perspectivas face a um problema, de modo a tomar decisões adequadas

- Propor situações de intervenção, individual e, ou colectiva, que constituam tomadas de decisão face a um problema, em contexto.

Na mesma obra as competências específicas da disciplina de Matemática, no domínio da Geometria, que se realçam são:

- A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente, recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;

- A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria e outras áreas da matemática;

- A compreensão de conceitos como os de comprimento, área, volume, amplitude e a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução de problemas;

- A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;

- A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;

- O reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente, na comunicação e a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real.

CAPÍTULO 4

FERRAMENTAS INFORMÁTICAS

1. Introdução

A proliferação dos computadores pessoais nos ano oitenta levou a que se começasse a pensar em trocar experiências e trabalhos através dos computadores. As instituições militares e científicas foram as primeiras a ligar os seus sistemas informáticos através de uma rede. Esta estrutura em rede estava confinada a determinados países, tendo sido progressivamente alargada. Actualmente, todos os continentes estão interligados por uma rede conhecida por Internet.

As ligações na Internet permitem a troca de informação entre instituições científicas ou comerciais e entre indivíduos. Os professores têm utilizado a Internet para trocarem informações acerca das suas matérias e práticas de ensino. Desta forma o seu trabalho pode ser melhorado. Os alunos também a utilizam com muita frequência tornando-se agentes activos da sua aprendizagem.

As informações podem ser veiculadas através do correio electrónico (e-mail), de grupos de discussão (newsgroups), de listas de difusão ou de páginas informativas. Os temas desenvolvidos são variados: actividades lúdicas de aprendizagem; proposta de problemas; resolução de exames; exercícios comentados.

As páginas são feitas numa linguagem de descrição de documentos conhecida por HTML (Hipertext Markup Language) (HTML Goodies, 2002). Esta linguagem é escrita em formato de texto simples que é lido por qualquer sistema operativo. As informações transmitidas pelo HTML são interpretadas por um software específico chamado browser. Este software exibe texto assim como um grande conjunto de elementos multimédia (som, imagem, animação, vídeo, ...).

A linguagem HTML permite que os documentos possam ser explorados de uma forma não linear podendo o utilizador optar pelo conteúdo e sequência que mais lhe interessar. Esta linguagem permite a interligação entre partes de um documento ou entre documentos distintos existentes na Internet. Ao conjunto de todos os documentos existentes na Internet chama-se World Wide Web (Web).

Para responder às necessidades de interactividade dos documentos foi criada a linguagem de programação JavaScript (HTML Goodies, 2002). Esta linguagem pode ser inserida em HTML.

Paralelamente foi desenvolvida a linguagem Java (Sun Microsystem, 2001) que veio permitir que nos documentos escritos em HTML e JavaScript, se possam inserir diversos tipos de aplicações, nomeadamente aquelas que manipulam objectos gráficos.

As principais diferenças entre a linguagem Java e JavaScript podem ser resumidas na tabela 2:

JavaScript	Java
Interpretada pelo cliente (não é compilada).	Compilada no servidor antes de ser executada no cliente.
Baseada a objetos.	Orientada a objetos.
Código integrado com o HTML.	Applets distintos do HTML (acedidos por uma página HTML).

Tabela 2

Devido à dificuldade dos browsers em reconhecer a notação matemática o World Wide Web Consortioum constituiu um grupo de trabalho para desenvolver a Mathematical Markup Language (MathML) (Ausbrooks, 2001). A MathML é uma aplicação do XML para descrevera notação matemática e capturar a sua estrutura e conteúdo. O objectivo do MathML é permitir que a matemática seja apresentada, recebida e processada na World Wide Web, tal como o HTML permite estas funcionalidade para o texto.

2. Programas de Geometria Dinâmica

Nas páginas da Web encontram-se temas muito variados nomeadamente são tratados assuntos relacionados com a geometria. Uma das formas mais apelativas e de compreensão acessível é apresentar a geometria de uma forma dinâmica. A criação de uma página Web utilizando geometria dinâmica levantou algumas problemas aos primeiros criadores.

A primeira solução encontrada foi a descrição de exercícios associados à copia de écran de construções feitas num software como o Skectchpad. Esta forma é pouco lúdica e atractiva não possuindo qualquer interactividade.

Uma outra solução consistia na transferência de um ficheiro de geometria dinâmica do servidor para o utilizador. Neste caso podia-se tirar partido da animação mas esta não estava realmente integrada na página Web, havendo necessidade de alternar entre os dois.

Estas soluções têm ainda como principal inconveniente a necessidade do utilizador possuir o software onde foram criadas as animações.

Os formatos de animação mais comuns, como o QuickTime ou o AVI, podem servir para codificar sequências animadas criadas por um programa próprio de geometria dinâmica. Mas os ficheiros criados podem ser grandes para ligações ainda lentas, havendo também algumas incompatibilidades entre os sistemas.

Uma maneira de ultrapassar este problema surgiu através da criação de GIF's animados. Estes ficheiros são na maior parte dos casos mais pequenos permitindo um melhor visionamento nas páginas Web. Estas animações têm, contudo, um grande inconveniente, não passam de filmes em que o aluno tem uma postura passiva, não existindo intervenção directa.

Existem outros programas que permitem criar animações e integrá-las num cenário interactivo, como o Macromedia Shockwave, mas têm alguns inconvenientes:

- custo elevado do programa Director que produz animações Shochwave;
- muito tempo para a criação de uma animação;
- interactividade muito dirigida, incompatível com a necessária descoberta por auto-aprendizagem.

A solução mais utilizada para a integração de elementos de geometria dinâmica em páginas Web é a linguagem Java. Esta opção teve em consideração os seguintes aspectos:

- suporte multiplataformas da linguagem Java;
- integração da linguagem Java nos browsers mais recentes;

- programação-objecto adaptada à construção de animações geométricas estruturadas.

O Sketchpad e o Cabri têm os seus próprios applets em Java, o JavaSketchpad (Jackiw, 2001) e o CabriJava (Kuntz, 1997). Estes applets sofrem alguma lentidão devido às máquinas virtuais existentes nos bowsers, mas uma nova geração vai utilizar a tecnologia de compilação JIT (Just-In-Time) que vai permitir uma interacção mais rápida.

Nick Jackiw criou o applet JavaSketchpad, cuja primeira versão data de 21 de Janeiro de 1997, para colocar na Web animações de geometria (geometria dinâmica) feitas no Geometer's Sketchpad.

O protótipo desenvolvido apresenta várias animações em que estão envolvidos conteúdos geométricos. Para a sua criação foi usado a linguagem HTML, o applet JavaSketchPad (JSP), JavaScript e animações em Flash. O aplicativo foi criado para a Web mas pode funcionar num computador pessoal sem ligação à Internet, como uma aplicação autónoma.

3. O HTML

3.1. Introdução

Existe diverso software que converte directamente aquilo que se faz para HTML, sem haver necessidade de se conhece todos os códigos desta linguagem. No trabalho elaborado utiliza-se o Macromedia Dreamweaver 3 para criar as páginas para a Web. Este programa é bastante intuitivo tendo muitas potencialidades criativas.

Para que as páginas sejam verdadeiramente dinâmicas e respondam às solicitações do utilizador é necessário conhecer alguns dos rudimentos do HTML.

3.2. Estrutura

Cada documento em HTML é constituído por um conjunto de elementos, que por sua vez podem conter outros elementos, gerando assim uma estrutura. Cada elemento é representado por uma sequência de símbolos que o identificam. A essa sequência de símbolos dá-se o nome de "tag" ou marca. Um elemento pode ter uma marca inicial e uma marca final, identificadas por estarem inseridas entre os caracteres "<" e ">" (para a marca de início) e entre os caracteres "</" e ">" (para a marca de finalização). A cada elemento estão associados um conjunto de atributos inseridos na marca de início. Estes atributos especificam pormenores do comando.

Considera-se um exemplo.

```
<HTML>
<HEAD>
<TITLE>
<Introdução>
</TITLE>
</HEAD>
<BODY BACKGROUND="fundo.gif">
</BODY>
</HTML>
```

As marcas <HTML>...</HTML> identificam o documento escrito em HTML. As mascas <HEAD> e </HEAD>, <BODY> e </BODY>, envolvem as duas secções essenciais de um documento em HTML: o cabeçalho (HEAD) e o corpo (BODY). As marcas <TITLE> e </TITLE> são um elemento do cabeçalho e identificam o título da página que aparece na barra de título da janela do browser.

Entre as marcas de inicializado e finalização <HEAD> e </HEAD> encontram-se, além das marcas que definem o título da página, outros elementos ligados a procedimentos ou funções que poderão ser inicializados durante a leitura da página.

É entre as marcas <BODY> e </BODY> da secção corpo do documento que reside o conteúdo principal da página. BACKGROUND="fundo.gif" define o fundo da página com a imagem fundo.gif.

3.3. Formatação do texto

Existem formas pré-definidas de formatação em HTML designadas por cabeçalhos, estes podem ser apresentados em seis formatos de H1 a H6, variando os tamanhos de letra.

```
<HTML>
<HEAD>
<TITLE>Cabeçalhos</TITLE>
</HEAD>
<BODY>
<CENTER>
<FONT COLOR="green">
<H1>Tipos de Cabeçalhos</H1>
</FONT>
<H1> Cabeçalho do tipo H1</H1>
<H2> Cabeçalho do tipo H2</H2>
<H3> Cabeçalho do tipo H3</H3>
<H4> Cabeçalho do tipo H4</H4>
<H5> Cabeçalho do tipo H5</H5>
<H6> Cabeçalho do tipo H6</H6>
</CENTER>
</BODY>
</HTML>
```

Observe-se que, para além das marcas de cabeçalho, encontram-se no exemplo as marcas <CENTER> e </CENTER>, que centram o texto na linha, e as marcas <FONT> e </FONT>, a que podem ser anexados atributos, sendo que no exemplo o texto tem o atributo COLOR, que muda a cor do texto. Existem outros atributos para o texto. Este pode ser apresentado em Itálico, negrito, caracter de máquina dactilográfica e sublinhado, usando as marcas <I>, <B>, <TT> e <U>, respectivamente.

Para se fazer um parágrafo utiliza-se a marca de parágrafo <P>. A marca de finalização de parágrafo </P> é de utilização facultativa.

3.4. Ligações

Muita da interactividade contida nas páginas da Web depende das hiperligações. Estas servem para criar conexões ou caminhos que ligam documentos. A ligação entre documentos na Web é realizada através do endereço (Uniform Resource Locator - URL). A sintaxe é do tipo:

http://nomedoservidor.xx/caminho/nomedoficheiro

Para se efectuar ligações para pontos específicos de um documento utiliza-se a marca de ancoragem <A>...</A>. Esta marca tem dois atributos: o NAME e o HREF. O atributo NAME="nomedoidentificador " permite identificar um local do documento ao qual se poderá aceder. O atributo HREF="(URLdoficheiro)#nomedoidentificador" serve para estabelecer a ligação ao identificador.

<A NAME="INTRO">INTRODUÇÃO</A> identifica o título introdução com a marca "INTRO".

<A HREF="#INTRO">Voltar á introdução</A> é uma instrução quando o utilizador pressiona com o rato o texto " Voltar á introdução ", o Browser actualiza a tela de forma a exibir a porção do documento que se segue ao identificador "#INTRO" (dentro do mesmo documento). Note-se que "#INTRO" podia ter sido precedido pelo URL de documento. Quando o URL é omitido o browser procura o apontador no mesmo documento.

3.5. Imagens

A imagem tem um papel muito importante na construção de documentos para a Web. Os formatos de imagem usados são os do tipo GIF, JPEG e PGN por serem aqueles que permitem uma maior redução do quantidade de dados a serem tratados.

Para inserir uma imagem, use-se a marca <IMG>, que não exige a marca de finalização </IMG>. A sintaxe é <IMG SRC="URL da Imagem">. O browser exibirá na tela a imagem que se encontra no local indicado.

A marca de inserção de imagem permite ajustar a altura e o comprimento da imagem através dos atributos HEIGHT e WIDTH. Estes atributos permitem determinar um espaço em pixels.

A sintaxe da marca será do tipo <IMG SRC="exemplo.gif" HEIGHT=x WIDTH

=y>, em que x e y são medidos em pixels. É necessário conhecer as dimensões da imagem em pixels para que a escolha de x e y não provoque deformações de escala.

Outro atributo muito importante do elemento imagem, para a edição de páginas em HTML, é o alinhamento (ALIGN=). Os parâmetros deste atributo são TOP e CENTER: <IMG SRC="exemplo.gif" WIDTH=65 HEIGHT=46 ALIGN=CENTER>.

3.6. Tabelas

As tabelas são um elemento importante na construção de um documento HTML. Para construir uma tabela é necessário usar a marca <TABLE>... </TABLE>.

As linhas duma tabela podem ser acrescentadas entre as marcas de início e de fim da tabela, e identificadas pelas marcas de linha <TR> e </TR>. Em cada linha podem ser colocadas células, no número desejado, desde que identificadas pelas marcas <TD> e </TD> ou <TH> e </TH>. A marca <TH> formata o texto nela incluído em negrito e centrado, sendo utilizada em particular para gerar cabeçalhos de colunas ou linhas. A marca <TD> delimita o texto de uma célula sem nenhum formato em especial.

Todas as marcas das tabelas podem conter atributos de:

a) alinhamento horizontal, ALIGN, com os parâmetros de alinhamento à esquerda (LEFT), de alinhamento à direita (RIGHT) e alinhamento centrado (CENTER);

b) alinhamento vertical, VALIGN, com os parâmetros de alinhamento ao topo (TOP), de alinhamento em baixo (BOTTOM) e alinhamento centrado (MIDDLE).

Para criar uma tabela simples com três linhas e três colunas pode-se utilizar o seguinte exemplo:

```
<TABLE BORDER=3>
<TH VALIGN=TOP>1º P</TH>
<TH>2º P</TH>
<TH>3º P</TH>
<TR>
<TH ALIGN=RIGHT>1</TH>
<TD ALIGN =CENTER>2</TD>
<TD>3</TD>
</TR>
<TR>
<TH ALIGN=LEFT>4</TH>
<TD ALIGN=RIGHT>5</TD>
```

<TD ALIGN =CENTER>6</TD>

</TR>

</TABLE>

3.7. Frames

No protótipo são apresentadas três páginas HTML em simultâneo, havendo uma divisão da tela para o efeito. Cada uma dessas divisões da tela do browser é chamada de FRAME (moldura). Os Frames vão assim permitir a utilização simultânea de vários documentos em HTML.

Uma página que contenha Frames funciona como elo de ligação de várias páginas da Web em simultâneo. Tal como o corpo do HTML, os Frames têm a sua própria estrutura. Eles integram o corpo do documento, substituindo as marcas <BODY>...< /BODY> por <FramesET>...</FramesET>. A marca dos Frames apresenta dois atributos, ROWS e COLS, que permitirão dispor as páginas em linhas ou colunas respectivamente, podendo especificar o seu número e a altura de cada uma, quer em pixels quer em percentagem da tela do browser.

Os documentos em HTML, a serem especificados pela sintaxe dos Frames, devem ser feitos com antecedência. Estes ficheiros serão chamados pelo browser através da marca <FRAME>, a qual apresenta vários atributos, tais como SRC, NAME, SCROLLING, NORESIZE, TARGET.

O atributo SRC especifica o documento de HTML chamado para o FRAME. Este atributo é indispensável porque sem ele, o documento aparecerá vazio só com as divisões.

Por exemplo:

<HTML>

<HEAD>

<TITLE> Exemplo de Frames</TITLE>

</HEAD>

<FramesET ROWS="50%,50%">

<FRAME SRC="exemplo1.htm" NAME="Principal" NORESIZE>

<FRAME SRC="exemplo2.htm" SCROLLING="yes" FRAMEBORDER="no">

</FramesET>

</HTML>

Num dos Frames existe uma ligação do tipo:

<A HREF="http://Web.sapo.pt" " TARGET="Principal"> O Sapo<A>.

Invocam-se dois Frames, ambos com a mesma área da tela, 50%,em todo o comprimento da tela do browser.

O atributo NAME é utilizado para identificar cada um dos documentos que integram os Frames de um FramesET. Esta opção é necessária quando se pretende comunicar entre os documentos ou usar o atributo TARGET.

O atributo SCROLLING define se o FRAME terá barra de deslocamento vertical. Por defeito, a opção assumida é Auto. Pode optar-se por:

- Yes, e o documento é exibido com a barra de deslocamento vertical independente do tamanho do documento;

- No, e não se exibe a barra de rolagem, mesmo que o documento seja maior que o tamanho especificado;

- Auto, que só exibe a barra de rolamentos (scroollbars) se o documento for maior que a área especificada. A escrita em HTML poderá ser algo semelhante a:

A opção NORESIZE deverá ser usada se se pretender que o utilizador não possa alterar o tamanho da área especificada do FRAME. Por defeito o utilizador pode mudar a dimensão desta área.

O atributo TARGET definirá qual a área (FRAME) que aparecerá no documento especificado pelo link.

Ao ser seleccionado o link fará aparecer o endereço na área ocupada pelo FRAME com o NAME Principal. Para mostrar o conteúdo do link numa nova tela do browser, bastará colocar na opção TARGET um nome que não exista na descrição do FramesET.

Pode-se querer alterar ligeiramente o aspecto da nossa página Web. Nesse caso, pode-se servir do atributo BORDER, que define qual o bordo que o FRAME terá. Este atributo revela-se útil quando se utilizam os mesmos fundos em todas as áreas do documento. No exemplo anterior, desapareceram as divisões, pois utilizou-se o atributo FRAMEBORDER com o parâmetro "NO".

3.8. Sons

Existem diversas formas de incorporar sons nas páginas da Web.

Se se utilizar a marca <BGSOUND>, o som das páginas só será reconhecido pelo Internet Explorer da Microsoft. Pretendendo activar um arquivo to tipo "som.mid", basta utilizar o texto <BGSOUND SRC="som.mid"> no corpo do texto da página em HTML. Pode-se ainda adicionar à marca o atributo loop="infinite" no caso de se pretender que a música se repita.

Um outro modo de proceder consiste no uso da marca <EMBED>, com a vantagem de ser reconhecido simultaneamente pelo Internet Explorer e pelo Netscape. Basta adicionar no corpo do texto da página em HTML a marca <EMBED SRC="som.mid">.

3.9. Limitações do HTML

Quando se pretende que exista grande interactividade numa página da Web o HTML não é suficiente (controlar opções do utilizador, confirmar dados, informar sobre os efeitos da acção do rato,...).

O HTML tem fraco tempo de resposta em comparação com outros interfaces.

De um modo geral o HTML é pouco interactivo, lento e incapaz de interagir com o utilizador de uma forma expedita.

4. O JavaScript

4.1. Introdução

Para uma aceleração da troca de informação, de tal modo que a rede não seja sobrecarregada, é necessário que existam processos que enviem informação e o máximo de funções que minimizem a necessidade de contacto entre o utilizador e o servidor. Neste sentido surge a linguagem JavaScript. Esta linguagem é utilizada para a construção de página para a Web cujos procedimentos (Scripts) estão inseridos no código HTML.

O JavaScript permite um maior dinamismo introduzindo elementos importantes:

- botões de alerta que podem interagir com o utilizador,
- comandos de abertura de novas janelas,
- programação para proporcionar a um texto de HTML maior interactividade...

As acções geradas pelo JavaScript desenrolam-se no computador do utilizador evitando o acesso constante ao servidor.

4.2. Inserir JavaScript em HTML

Pode-se introduzir procedimentos numa página escrita em HTML desde que estejam escritos entre as marcas <script Language="JavaScript">, ou apenas <script>,e </script>.

O script seguinte insere uma calculadora de operações elementar numa página HTML.

```
<HTML>
<HEAD>
<TITLE>
Calculadora de operações elementares
</TITLE>
<SCRIPT language=Javascript>
var iteracoes=0;
function calc()
{
iteracoes= iteracoes +1
document.entrada.calculos.value=eval(document.entrada.matarea.value);
if( document.entrada.calculos.value=="")
{
```

```
alert("têm de escrever os cálculos a efectuar");
}
document.entrada.calculos.defaultValue = document.entrada.calculos.value;
document.entrada.numero.value = iteracoes;
}
function restaurar()
{
document.entrada.calculos.value = document.entrada.calculos.defaultValue;
alert("por favor não altere o resultado da janela");
}
</SCRIPT>
</HEAD>
<BODY bgColor=white text=black>
<BASEFONT size=4>
Calculadora de operações elementares.
<BR>
Insira uma expressão e carregue no botão para calcular.
<BR>
<FORM NAME=entrada>
<INPUT name=matarea onclick="document.entrada.matarea.value='0'; "
size=30>
<INPUT onclick=calc() type=button value=Calcular>
Resultado:
<INPUT name=calculos OnChange=restaurar()>
<BR>
</FORM>
</BASEFONT>
</BODY>
</HTML>
```

O tipo de escrita não difere muito da escrita em HTML. Constam os comandos de título, de cabeçalho, de corpo e de script. Entre as marcas <script>... </script> encontram-se: a definição das funções calc() e restaurar(); à inclusão dum "formulário" interactivo (form) entre as marcas <Form>... </ Form > e a definição de variáveis.

4.3. Variáveis, operadores e estruturas de controle.

Em toda a linguagem, as variáveis integram os elementos de trabalho. Uma das características das variáveis no JavaScript é o facto de não existir maneira de especificar que determinada variável representa um inteiro, uma sequência de caracteres ou até um número real. O seu tipo é especificado pelo valor inicial que lhe é atribuído. As variáveis podem ser declaradas na mesma linha e separadas por vírgulas, sendo a sintaxe da declaração do tipo "var nomedavariável = valorinicial".

A variável "iteracoes" do exemplo é assumida como um inteiro, em virtude do contexto em que é inicializada e utilizada pela primeira vez.

O JavaScript permite utilizar os operadores computacionais, lógicos e de atribuição habituais nas linguagens de programação. Para além dos operadores, o JavaScript possibilita a utilização de testes condicionais e ciclos.

A sintaxe das condições é do tipo:

If (condição)

{ conjunto de instruções}

else { conjunto de instruções}

ou então,

While (condição)

{ conjunto de instruções}

A sintaxe dum ciclo é do tipo:

for (valor inicial ; condição de paragem ; valor a incrementar)

{ conjunto de instruções}

4.4. Funções

Uma função não é mais do que um conjunto de instruções com um nome obedecendo à sintaxe

funtion nomedafunção(p1,p2,...,pn)

{ conjunto de instruções }

que está contido no documento entre as marcas <SCRIPT> ... </SCRIPT>. No exemplo apresentado existem duas funções: restaurar() e calc().

4.5. Objectos

Em JavaScript o documento principal é ele próprio um objecto designado por "document". O objecto "document" integra por sua vez outros objectos tais como

"forms", botões, etc. Deste modo os objectos em JavaScript integram propriedades ou métodos, que podem ser definidos, observados e alterados, com as quais se pode interagir.

4.6. Manipulação de eventos

O JavaScript implementa acções ou eventos manipuláveis através de extensões do código de HTML. As marcas de HTML podem criar objectos (botões, áreas de texto, etc.) aos quais o JavaScript adiciona novos atributos (como por exemplo: onClick, onChange, onMouseOver, entre outros) que permitem a interacção com utilizador.

4.7. Forms

A interacção é conseguida pelo uso de "Forms", cujas capacidades são alargadas com os eventos do JavaScript. As "Forms" em HTML permitem, essencialmente, ler e enviar texto. No entanto, estas acções podem ser mais complexas.

Uma "Forms" é um objecto que, ao mesmo tempo que apresenta informações, recolhe informação proveniente do utilizador. É delimitada pelas marcas <FORM> e </FORM> e pode conter uma ou mais caixas de texto ou botões.

5. A linguagem Java

Java é uma linguagem de programação de alto nível que tem como principal característica a sua independência face às propriedades concretas do hardware e do software. O compilador da linguagem cria um código para um processador abstracto. É neste processador abstracto, vulgarmente designado por "Máquina Virtual de Java", que os programas são executados. Este "máquina" transforma o código de compilação do programa em Java em instruções nativas para o processador do computador. Os programas em Java podem ser executados num PC, MAC ou UNIX.

Os programas mais conhecidos escritos em Java são os applets. Estes pequenos programas não possuem a autonomia de uma aplicação, uma vez que são criados especificamente para serem executados num browser da Web.

Os applets de Java, inseridos em páginas de HTML, permitem criar praticamente todas as funcionalidades interactivas próprias de um programa completo, limitando-se, por razões de segurança, o acesso destes ao sistema de ficheiros dos discos do computador do utilizador.

A utilização de um applet em páginas da Web obedece a regras que dependem da estrutura própria de cada applet. É relativamente simples chamar um applet em HTML. Para carregar o applet designado por Exemplo.class, basta utilizar, geralmente, as marcas de iniciação <APPLET CODE=" GSP.class" WIDTH=200 HEIGHT=200 ALIGN=left> e finalização </APPLET >. O parâmetro CODE indica o nome do applet a utilizar e os parâmetros WIDTH e HEIGHT dimensionam a área da tela do browser destinada à apresentação do conteúdo do applet. Entre as marcas de inicialização e finalização são colocadas marcas que incluem os parâmetros específicos dos applets. Estes parâmetros variam conforme a sintaxe de cada applet.

6. O JavaSketchpad

6.1. Introdução

JavaSketchpad (JSP) é um applet que nos permite interagir, na Internet, com construções feitas no The Geometer's Sketchpad (GSP). Pode-se utiliza-lo para partilhar ou distribuir trabalhos de geometria (geometria dinâmica) com pessoas que não tenham o GSP.

Existem três níveis de utilização do JSP:

- visualizar animações;
- criar animações usando o GSP;
- programar animações.

Se se pretender, simplesmente, explorar ou interagir com animações publicadas por outras pessoas que usaram o applet JSP, necessita-se de um browser compatível com linguagem Java tais como o Netscape Navigator 3.01 (ou superior) ou o Internet Explorer 3.0 (ou superior).

Para publicar na Internet as animações criadas com o GSP precisa-se:

- de um software de criação de páginas para a Internet;
- do Sketchpad HTML Converter;
- do applet JSP.

O Sketchpad HTML Converter é um programa que converte as animações criadas no GSP em páginas HTML (Hipertext Markup Language) próprias para serem publicadas na Internet.

A pasta dos ficheiros do applet JSP tem que estar na mesma pasta que contém os ficheiros HTML, para que as animações possam ser visíveis. Precisa-se somente de uma cópia do applet para visualizar todas as animações.

As pessoas mais experientes em programação podem criar páginas com elementos de geometria dinâmica que utilizem o applet JSP sem necessitar do GSP. Como a programação é inteiramente feita por elementos de texto as animações podem ser construídas manualmente num editor HTML. Por exemplo, o seguinte texto especifica um triângulo dinâmico com os vértices posicionados inicialmente nas posições de coordenadas (144, 130), (24, 130) e (84, 20):

{1} Point (144,130);

{2} Point (24,130);

{3} Point (84,20);

{4} Segment (3,1) [thick];

{5} Segment (1,2) [thick];

{6} Segment (2,3) [thick];

6.2. Gramática de construção

JSP é constituído por um conjunto de ficheiros Java do tipo *.class, que estão numa pasta chamada JSP num servidor Web. As páginas Web ligam-se a esta pasta para que as animações possam ser visualizadas. Uma página pode conter uma ou mais invocações do applet, que correspondem cada uma a uma determinada animação geométrica.

Apresenta-se aqui um exemplo de uma invocação do applet JSP que cria um triângulo dinâmico.

<APPLET CODE="GSP.class" ARCHIVE="JSPDR3.JAR" CODEBASE="JSP" WIDTH=593 HEIGHT=349 ALIGN=CENTER>

<PARAM NAME=MeasureInDegrees VALUE=1>

<PARAM NAME=DirectedAngles VALUE=0>

<PARAM NAME=Construction VALUE="

{1} Point(159,182)[label('A')];

{2} Point(217,65)[label('B')];

{3} Point(284,179)[label('C')];

{4} Segment(2,1)[black];

{5} Segment(3,2)[black];

{6} Segment(1,3)[black];

">

Desculpe, esta página requer um browser compatível com Java.

</APPLET>

As etiquetas (tags) <APPLET> e <\APPLET> são utilizadas para invocar um applet Java. O HTML normal existente entre estas etiquetas é acessível aos browsers que não suportem Java (Desculpe, esta página requer um browser compatível com Java.) e pode ser alterado.

O parâmetro CODE indica o nome do ficheiro Java *.class que primeiro deve ser carregado e não pode ser alterado.

CODEBASE indica a localização, no servidor, da pasta onde existe o applet

relativamente ao URL da página Web que contém a etiqueta <APPLET>.

ARCHIVE indica o nome do ficheiro do tipo .JAR que contém todos os ficheiros do tipo .class guardados na pasta JSP.

WIDTH, HEIGHT e ALIGN são parâmetros HTML que indicam o tamanho (em pixels) e o alinhamento do applet relativamente ao texto HTML que o envolve.

As etiquetas com a forma <PARAM NAME=(nome da variável) VALUE=(valor da variável)> variam de acordo com o contexto.

O parâmetro MeasureInDegrees indica se a medida das amplitudes dos ângulos é expressa em graus (1) ou em radianos (0).

O parâmetro DirectAngles indica se a medida da amplitude dos ângulos é feita entre –180° e +180° (ou $-\pi$ e $+\pi$ radianos) (1) ou entre 0° e 180° (ou 0 e π radianos) (0).

O parâmetro de construção (construction) especifica a construção completa da animação de geometria dinâmica que o JavaSketchpad vai apresentar. A animação pode ser constituída por um ou mais objectos. A definição de cada objecto tem a seguinte forma:

- (nome do objecto) (argumento) (formato opcional).

Na construção apresentada tem-se:

- Point(159,182)[label('A')]; - correspondente a um ponto (nome do objecto) na posição de coordenadas (159,182) (argumento), identificado pela letra A (formato opcional);

- Segment(2,1)[black]; - correspondente a um segmento de recta (nome do objecto) cujos extremos são os pontos B e A (objectos 2 e 1) (argumento) e de cor preta (formato opcional).

No site da Key Curriculum Press (www.keypress.com) encontra-se uma explicação completa da gramática do JavaSketchpad.

7. O Flash

O Flash é um software de criação de animações dimensionáveis e interactivas para a Web. Os filmes do Flash são gráficos vectoriais interactivos e animados. Pode-se criar controlos de navegação, logotipos animados, animações extensas com som sincronizado e sites da Web completos. O download do filme é feito rapidamente e adapta-se ao tamanho da tela do utilizador.

O filme pode ser criado desenhando com as ferramentas do programa ou importando imagens de outros criadas noutros programas. As imagens são arrumadas no palco e animadas com a "Linha de Tempo". No palco criam-se os quadros individuais do filme. A janela "Linha de Tempo" é o local em que se coordena a cronometragem da animação e monta o trabalho em camadas separadas. Esta janela exibe cada quadro do filme. As camadas actuam como uma pilha de acetatos transparentes.

Os símbolos criados no Flash ou importados são guardados na "Biblioteca". Os símbolos podem consistir de gráficos, botões ou pequenos filmes. Podem ser importados gráficos vectoriais e de bitmap.

O programa dispõe de um grande conjunto de ferramentas de desenho e pintura que permitem criar e modificar ilustrações de um filme. É permitido mover, transformar, empilhar, alinhar e agrupar objectos.

É possível adicionar tipos de letras aos filmes assim como, definir tamanho, fonte, estilo, espaçamento, cor e alinhamento do tipo. Pode-se transformar o tipo como um objecto, girando, redimensionando, inclinando, invertendo e editar os caracteres.

Um filme interactivo envolve o utilizador. Através do teclado, do rato ou ambos o utilizador salta para diferentes partes do filme, move objectos, insere informações em formulários e executa várias operações interactivas.

O filmes tornam-se interactivos pela configuração de acções através da execução de um script. O script pode ser formado por uma única instrução, que informa o filme que pare, ou por um conjunto de instruções que avaliam uma condição antes de executar a acção. Algumas acções requerem conhecimentos de linguagem de programação como o JavaScript.

No site da Macromedia (www.macromedia.com) encontra-se um bom tutorial do Flash.

8. O Dreamweaver

O Dreamweaver é um editor visual profissional que cria e faz a gestão de sites e páginas da Web. Este programa oferece ferramentas avançadas de desenho e layout, bem como facilita a utilização dos recursos do HTML dinâmico, como os comportamentos e camadas animadas, sem gravar uma linha de código. A tecnologia Roundtrip HTML da Macromedia importa documentos HTML sem reformatar o código — e o Dreamweaver pode ser definido para limpar e reformatar o HTML.

O Dreamweaver pode ser totalmente personalizado. Pode-se criar os próprios objectos e comandos, modificar os menus e atalhos de teclado, além de gravar código JavaScript para estender os recursos do Dreamweaver com novos comportamentos e propriedades.

A formatação de texto no Dreamweaver é semelhante à de um processador de texto padrão.

O Dreamweaver, como a maioria dos navegadores, pode exibir imagens nos formatos JPEG, GIF e PNG. Em geral, JPEG é o formato de alto nível para imagens fotográficas ou de tons contínuos, e GIF é preferido para as imagens de tons descontínuos ou aquelas com extensas áreas de cores sólidas. O formato PNG é um substituto livre de patentes ao GIF, que inclui suporte para as imagens que tiverem as cores indexadas, escala de cinza e true-color. Ele também oferece suporte ao canal alfa para transparência. PNG é o formato de arquivo original do Macromedia Fireworks.

As tabelas são uma ferramenta de desenho de Web para organizar os dados e as imagens numa página HTML. As tabelas proporcionam os meios de adicionar uma estrutura horizontal e vertical a uma página.

As tabelas consistem de três componentes básicos:

- linhas (espaçamento horizontal)
- colunas (espaçamento vertical)
- células (o recipiente criado pela intersecção de uma linha e uma coluna)

Utiliza-se as tabelas para organizar os dados tabulares, desenhar colunas numa página ou organizar texto e imagens. Após a criação da tabela, a aparência e a estrutura podem ser facilmente modificadas nas tabelas HTML.

O Dreamweaver permite a utilização de camadas. Uma camada é um recipiente para um conteúdo HTML, normalmente delineado pelo rótulo DIV ou SPAN, que pode ser posicionado em qualquer local da página. As camadas podem conter objectos de texto,

imagens, formulários, plug-ins e até mesmo outras camadas — qualquer elemento que puder ser colocado no corpo de um documento HTML também poderá ser colocado numa camada.

As camadas proporcionam um controle preciso, a nível de pixels, sobre o posicionamento exacto dos elementos. A colocação dos elementos da página em camadas permite determinar quais os objectos aparecem na frente de outros, e quais estão fora de lugar ou ocultos. Pode ser utilizada também uma linha de tempo para mover uma ou diversas camadas simultaneamente sobre uma tela.

Pode-se inserir numa página elementos multimédia: um applet de Java; um filme Shockwave ou Flash; controle ActiveX; objectos de áudio ou vídeo.

No site da Macromedia (www.macromedia.com) encontra-se um bom tutorial do Dreaweaver.

9. Actividades dinâmicas na Internet

"A Sociedade da Informação e da Comunicação é uma das mutações mais significativas que estão sofrendo as sociedades acidentais desde a revolução industrial... O conhecimento das tecnologias da informação e da comunicação é vital tanto para o aluno como para o professor. Mais importante que aprender tecnologia é aprender com a tecnologia, conhecer como utilizar e processar a informação e como trabalhar neste novo contexto que oferece a sociedade da informação." (Chacón et al., 2001)

Um dos paradigmas da sociedade da informação é a Internet. A Internet é um meio privilegiado para a divulgação e troca de experiências no âmbito do ensino. Existem muitos sites com informação importante e recursos diversificados para o ensino e aprendizagem da Matemática.

O uso das tecnologias das informação e comunicação contempla a modelagem e simulação de fenómenos diversos, a comunicação entre pessoas, o acesso a informação em fonte remota, intercâmbio com grupos envolvidos em projectos similares, o contacto com pesquisadores e especialistas em determinados assuntos. Tudo isto pode ser concretizado através da Internet.

A Internet apresenta duas possibilidades distintas para a educação:

- é um repositório de informação disponível para ser consultado;
- possibilita a comunicação entre pessoas incluindo o trabalho colaborativo.

Dos muitos sites existente relacionados com a Matemática destacou-se três dos mais significativos, com mais informação e com mais exemplos de actividades dinâmicas no campo da Geometria ou da Álgebra. Os sites contêm informação variada sobre o ensino, pesquisas recentes na área e projectos em educação.

Figura 12

ExploreMath.com (http://www.exploremath.com) (Figura 12) é uma comunidade on-line dedicada ao estudo e ao ensino da Matemática. Neste site os estudantes e os

professores encontram um vasto conjunto de actividades multimédia. As actividades permitem a experimentação e a exploração de conceitos matemáticos. Os membros desta comunidade podem criar os seus próprios cursos.

As actividades dinâmicas Shockwave criam uma correlação em tempo real entre as equações e os gráficos o que ajuda os alunos a visualizarem e experimentarem conceitos importantes.

Este site é flexível pois permite que o professor faça demonstrações, que se trabalhe em pequeno grupo ou individualmente, em casa ou na sala de aula.

Cada actividade inclui:

- um guia de utilização;
- anotações sobre os elementos das actividades;
- sugestões de exploração
- respostas às perguntas mais frequentes.

As actividades estão divididas nas seguintes categorias: pontos no plano; equações lineares; equações quadráticas; sistemas; inequações; cónicas; logaritmos e exponenciais; trigonometria; números complexos; valor absoluto; probabilidades.

São disponibilizadas diversas aulas para serem trabalhadas pelos professores. Os planos de aulas indicam estratégias para introduzir as actividades multimedia na sala de aula, nos laboratórios ou no ensino à distância.

O principal objectivo deste projecto é proporcionar aos professores e aos estudantes os instrumentos necessários para tirar o maior proveito da Internet no sentido de melhorar o ensino da Matemática.

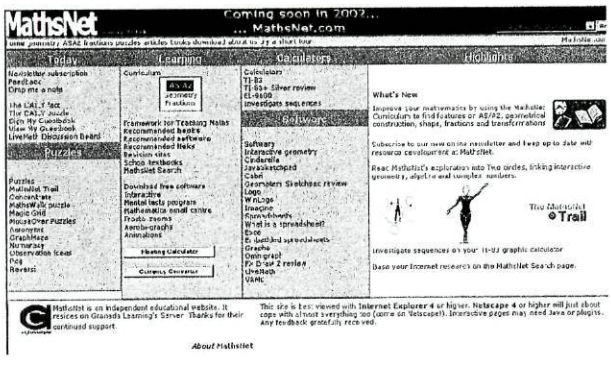


Figura 13

O projecto MathNet (http://www.mathsnet.net/intro.html) (Figura 13) é um site educacional independente, criado em 1996, que providencia recursos matemáticos à comunidade educativa. O seu objectivo é oferecer recursos interactivos úteis para o ensino e aprendizagem. Este é um projecto interactivo em que o utilizador participa activamente.

MathNet foi criado por Bryan Dye, chefe do departamento de Matemática da escola secundária de Hewett, em Norwich, Inglaterra.

Neste site encontram-se muitas páginas interactivas construídas usando o programa Cinderella, o JavaSketchpad ou o CabriJava. Existe ainda muito material para o estudo da Álgebra e da Estatística.

Existem secções sobre puzzles, software e calculadoras gráficas.

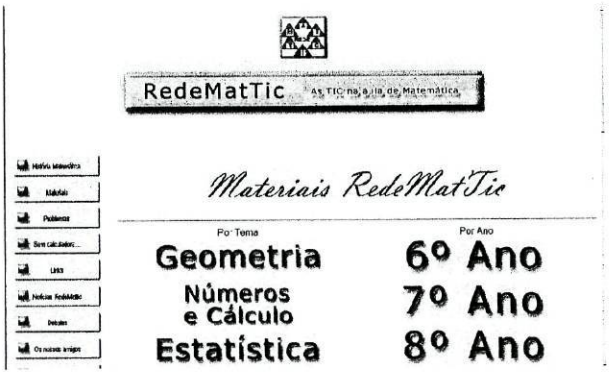


Figura 14

RedeMatTic (http://www.malhatlantica.pt/mat) (Figura 14) é um projecto inter-escolas sobre a utilização das TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) no processo de ensino/aprendizagem da Matemática, que se propõe implementar um plano de acção com duas vertentes interligadas: formação dos professores e experimentação com os alunos.

Um dos principais objectivos deste site é divulgar, a professores e alunos, materiais produzidos neste projecto, para serem utilizados nas aulas de Matemática, com computadores, calculadoras e outros materiais didácticos.

Para cada ano de escolaridade os materiais estão divididos pelo software ou pelo material utilizado. A maioria dos materiais disponíveis para "download" encontram-se no formato PDF. Para além destas páginas de materiais por anos de escolaridade foi criada uma página para apresentação de materiais não específicos, cuja aplicação poderá ser para qualquer ciclo de ensino.

No site encontram-se diversas ligações para páginas de interesse, quer para professores quer para alunos:

- História da Matemática;
- Materiais;
- Problemas;
- Notícias;
- Debates.

CAPÍTULO 5

O TRABALHO E A METODOLOGIA

1. Enquadramento e justificação do estudo

O trabalho efectuado enquadra-se na problemática do impacto educativo das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e justifica-se porque, para os alunos que estão na escola, e para os que estarão no futuro, é uma prioridade responderam adequadamente aos desafios que as TIC colocam.

Considera-se dois objectivos essenciais para o desenvolvimento deste estudo:

- Estudar as potencialidades dos programas de geometria dinâmica no processo de ensino/aprendizagem da Matemática no ensino básico;

- Experimentar e avaliar a utilização dos computadores em ambiente de aula.

Para a concretização dos objectivos enunciadas foi desenvolvido um protótipo informático utilizando o programa "The Geometer's Sketchpad". Este protótipo visa proporcionar uma aprendizagem interactiva, em que o aluno possa descobrir, num ambiente informático, algumas das propriedades do círculo e da circunferência.

Foi necessário verificar quais as dificuldades principais que os alunos tinham, e como reagiam, na utilização do computador para que este se pudesse integrar no seu estudo.

Optou-se por uma abordagem qualitativa neste trabalho porque permitia uma compreensão mais contextualizada dos problemas. "A metodologia qualitativa visa primordialmente a busca da globalidade e da compreensão dos fenómenos. Ou seja, estuda-se a realidade sem a fragmentar e sem a descontextualizar, ao mesmo tempo que se parte não de teorias prévias mas dos próprios dados, para os compreender ou explicar, procurando uma incidência de observações maior nas particularidades do que na obtenção de regras gerais." (Almeida e Freire, 1997)

Bogdan e Biklen (1994) partilham da mesma opinião, ao referirem que "os investigadores qualitativos escolhem para estudo cenários contextualizados, porque sentem que a acção pode ser melhor compreendida, quando é observada no cenário em que se desenrola. Ao fazer a recolha dos dados, é importante anotar a situação envolvente em que são recolhidos. Na verdade, a separação de determinado gesto, acto ou palavra do seu contexto significa, para o investigador, perder uma parte do respectivo significado."

Pretende-se, através deste estudo, verificar se os alunos compreendem melhor os conteúdos leccionados e se os programas de geometria dinâmica os motivam para a aprendizagem da matemática.

A utilização do protótipo deve transmitir aos alunos o gosto pela geometria, e desenvolver neles a capacidade de investigação na procura de explicações para as animações apresentadas. Não é objectivo último a memorização de definições e regras, nem o domínio de técnicas mas a compreensão do porque do que é visualizado.

Não foi utilizado nenhum grupo de controlo por que não era intenção efectuar comparações mas verificar as reacções e estudar as opiniões dos alunos envolvidos no trabalho com o protótipo.

As conclusões do estudo foram tiradas através da análise de um inquérito fornecido aos alunos antes da apresentação do protótipo de geometria, de um outro inquérito entregue no final do estudo e das observações efectuadas durante o decurso do trabalho.

2. Procedimentos

O protótipo foi desenvolvido durante o primeiro ano lectivo do mestrado (2000/2001), com os contributos de todas as disciplinas do currículo.

A planificação das actividades com os alunos foi efectuada durante o mês de Setembro de 2001, aquando da preparação do ano lectivo da Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos de Baguim. Estas actividades foram aprovadas pelo Departamento de Matemática e pelo Conselho Pedagógico.

O trabalho com o protótipo foi efectuado na sala de informática da escola. Cada computador era partilhado por dois alunos para assim existir partilha de opiniões e ajuda mútua.

O inquérito (1ª parte) foi entregue, no dia 20 de Novembro de 2001, a um grupo de seis alunos para verificar se existia alguma dificuldade no seu preenchimento. Pode-se considerar que estes alunos pertenciam a três escalões de aproveitamento em matemática, dois em cada escalão: bom; suficiente; insuficiente.

Depois de explicar o que se pretendia, os alunos iniciaram o preenchimento do inquérito. O inquérito durou cerca de quinze minutos. Durante a sua execução foram colocadas as seguintes dúvidas:

- É para pôr por ordem (questão 2 c) – Ordena as disciplinas pela tua preferência.);

- O que é que se pretende (questão 8 – Quais são os programas em que trabalhas melhor?).

Atendendo às dúvidas surgidas entendeu-se efectuar a seguinte alteração:

- A questão 8 passou a ter a seguinte redacção: Quais são os programas informáticos que conheces melhor? A referência a programas informáticos remete directamente para o trabalho com o computador o que pode levar à dissipação de qualquer dúvida.

Não se introduziu qualquer alteração na questão 2 c) por se entender que a dúvida levantada não era muito relevante e as respostas dadas vieram ao encontro do que era pretendido.

Em relação à questão 6. (Dá sugestões sobre como se deveria ensinar Geometria.) duas das respostas foram as seguintes:

- Não sei;

- Não faço ideia.

Este tipo de resposta pode indiciar que a questão não foi convenientemente compreendida embora ninguém tivesse levantado qualquer dúvida.

A questão 6. foi alterada para: Dá sugestões sobre como os professores deveriam ensinar Geometria. Desta forma talvez seja mais explícito o que se pretende já que se refere que as sugestões são para os professores ensinarem.

A primeira parte do inquérito aos alunos foi entregue, no dia 26 de Novembro de 2001, à turma do 9º C da Escola E. B. 2, 3 de Baguim. A segunda parte do inquérito foi entregue no dia 18 de Fevereiro de 2002.

3. Caracterização do grupo de trabalho

Os alunos que participaram neste trabalho compunham a turma C, do 9º ano do ensino básico, da Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos de Baguim, Concelho de Gondomar.. Esta turma era constituída por 28 alunos, cuja maior parte eram alunos do autor deste trabalho desde o 7º ano da escolaridade. A turma é composta por 16 raparigas e por 12 rapazes. A maioria dos alunos encontra-se na faixa etária normal para o 9º ano da escolaridade (Gráfico 1).

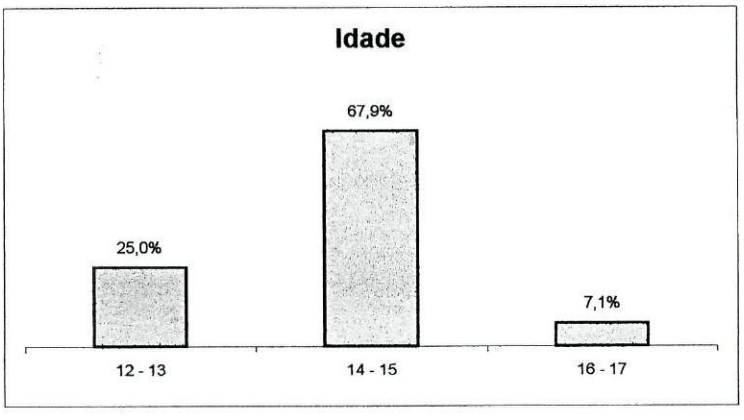


Gráfico 1

Os alunos provêm na sua maioria da classe média e média baixa (Gráfico 2 e 3)

Os pais têm um maior peso no rendimento do agregado familiar do que as mães, já que uma grande parte são domésticas.

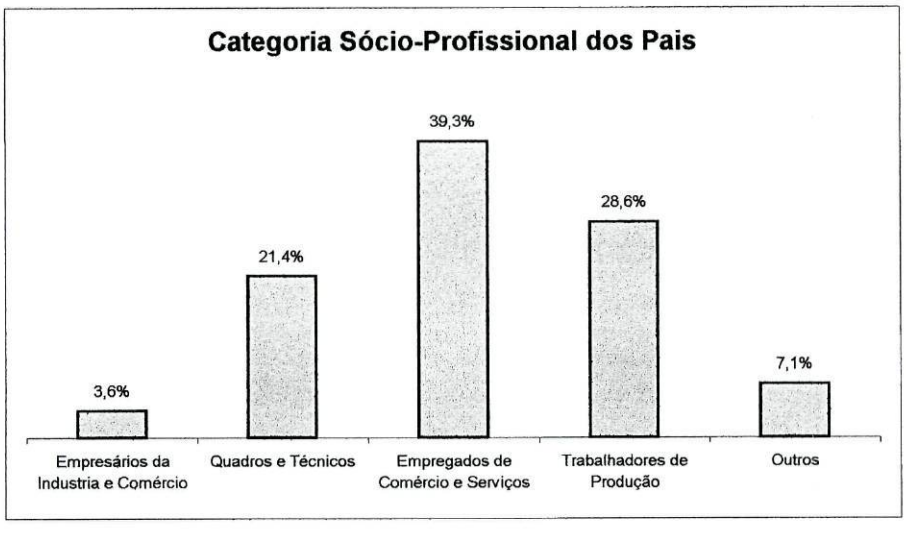


Gráfico 2

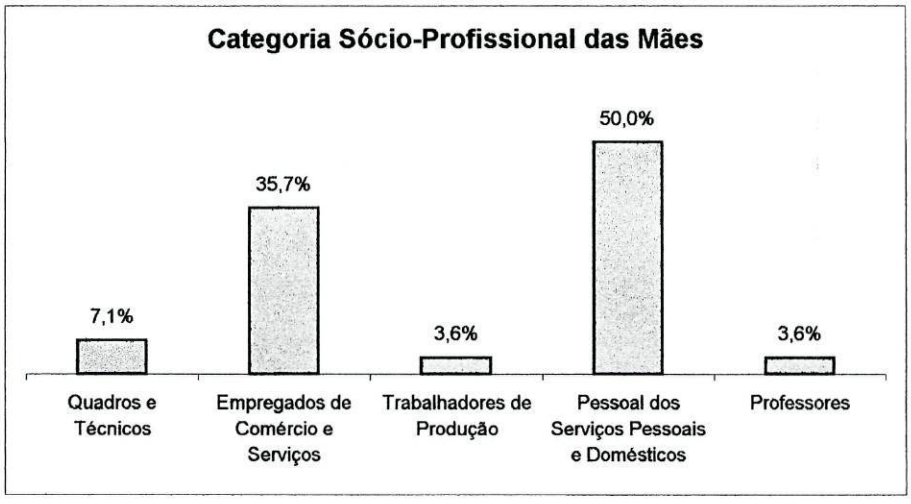


Gráfico 3

A maior parte dos pais e das mães conclui somente o 4º ano de escolaridade (Gráfico 4 e 5).

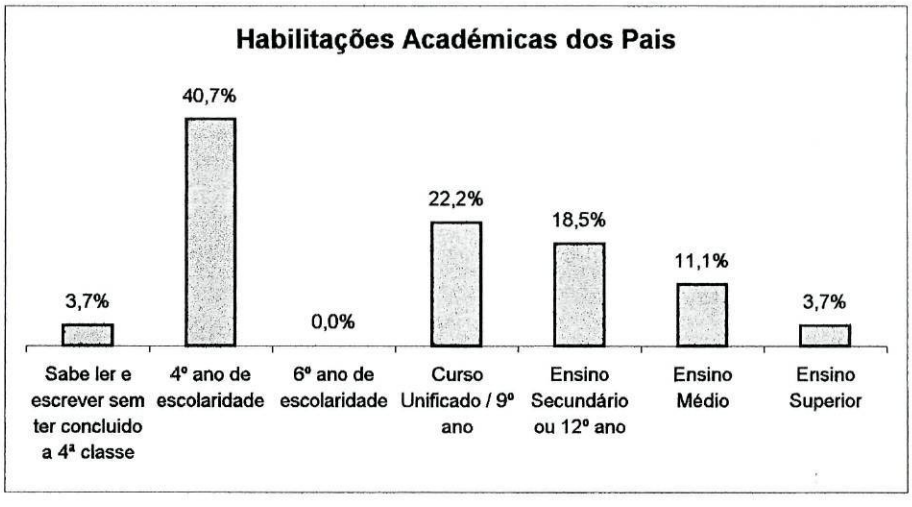


Gráfico 4

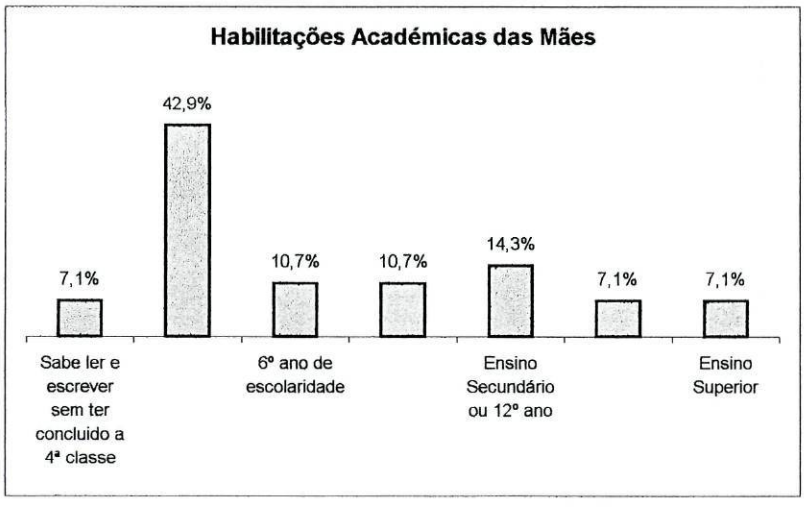


Gráfico 5

A maior parte dos alunos estuda sozinho (Gráfico 6).

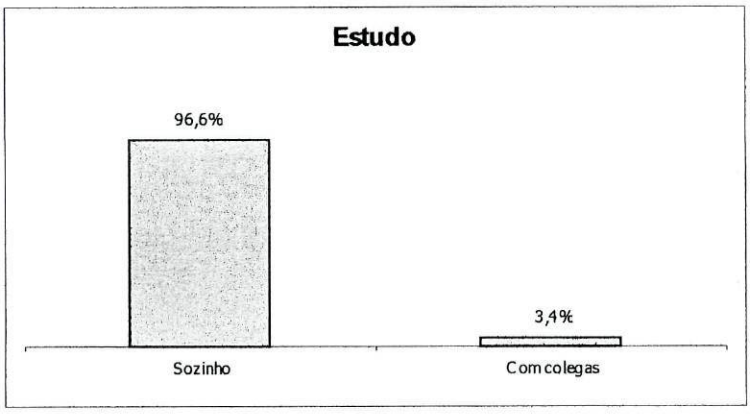


Gráfico 6

É de salientar que quase todos gostam da escola (Gráfico 7).

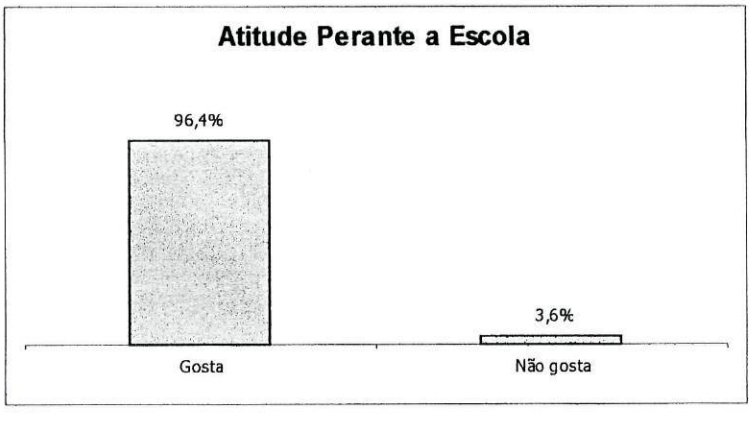


Gráfico 7

Verifica-se que 78% dos alunos nunca ficaram retidos (Gráfico 8).

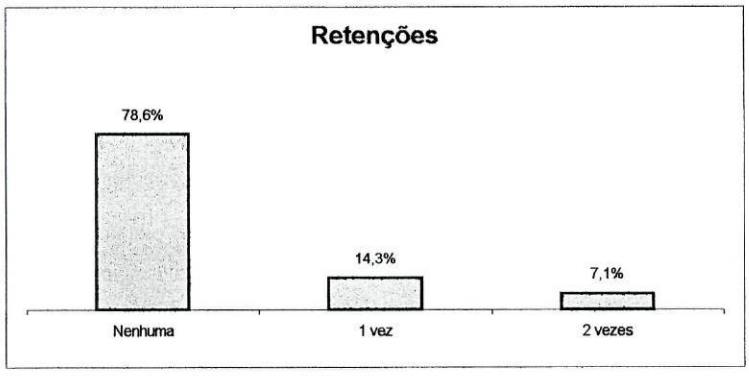


Gráfico 8

As expectativas dos alunos, em termos do seu futuro escolar são elevadas, tendo 75% intenções de chegar ao ensino superior (Gráfico 9).

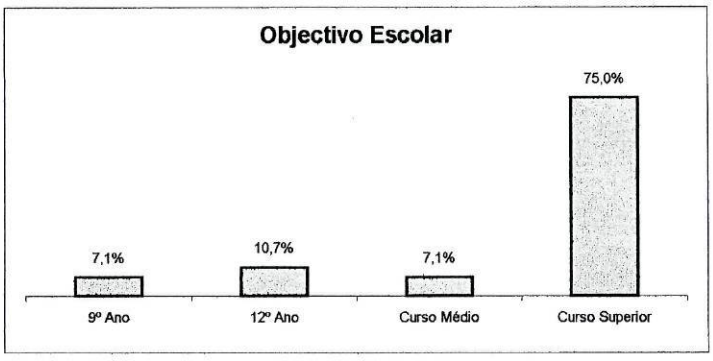


Gráfico 9

Nas aulas, os alunos preferem os trabalhos em grupo e trabalhar com o computador (Gráfico 10).

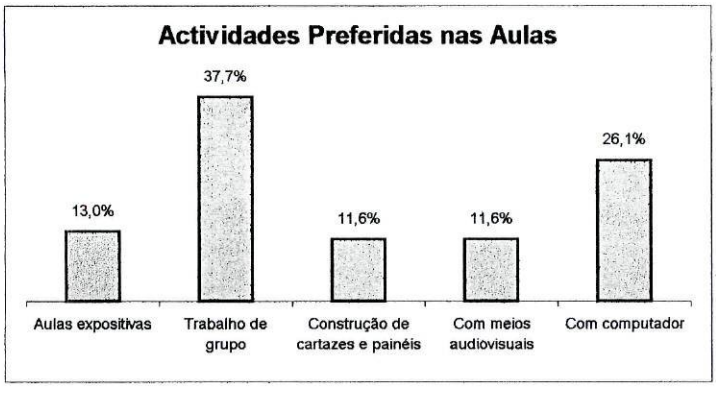


Gráfico 10

Quanto ao seu futuro profissional as expectativas também são elevadas, tendo cerca de 57% como objectivo de emprego ser quadro de uma empresa ou ser técnico superior (Gráfico 11).

Gráfico 11

Na generalidade, são alunos simpáticos e trabalhadores mas, devido ao grande conhecimento que têm entre eles, por vezes distraem-se e falam sobre assuntos estranhos à aula.

4. Recolha de dados

"Os dados e a sua recolha assumem grande importância na investigação qualitativa" (Yin, 1989). A recolha dos dados foi feita directa e pessoalmente no cenário em que os alunos diariamente trabalham, isto é, na sala de aula ou na sala de informática.

Foram sendo anotados pormenores de reacção e comportamentos que, no decorrer das aulas, se afiguravam de interesse para o estudo em causa. Estas reacções eram muito importantes porque permitiam perceber a evolução da aquisição dos conhecimentos pelos alunos e a forma como estes se adaptavam ao protótipo apresentado.

Como instrumento recolha de dados aplicou-se um questionário antes do estudo da unidade de Geometria e um outro questionário depois do estudo da referida unidade didáctica. Estes questionário continham questões cuja resposta seria apresentada numa escala de atitudes de Likert e questões de resposta aberta.

A escala de atitudes é constituída por 5 pontos, com codificação das respostas de 1, 2, 3, 4 e 5.

O primeiro questionário é constituído por três partes. A primeira parte diz respeito à opinião do aluno acerca da Matemática. A segunda parte permite verificar a opinião do aluno acerca da Geometria. Na terceira parte o aluno dá a sua opinião acerca da utilização do computador.

O segundo questionário é constituído por quatro partes. Uma primeira questão acerca da sua opinião sobre a Matemática. Um segundo grupo de questões sobre a importância do computador. Um outro grupo de questões sobre Geometria. No quarto grupo de questões pretende-se saber a opinião do aluno sobre o protótipo utilizado. Algumas questões do segundo questionário foram apresentadas no primeiro questionário, para assim se poder verificar se houve alguma mudança de atitudes.

5. Descrição do protótipo

O protótipo desenvolvido pretende ser um apoio aos alunos do 9º ano do ensino básico no estudo do círculo. Este trabalho está publicado na Internet, no endereço http://br.geocities.com/josesteves2001, para uso individual na escola ou em casa. As actividades propostas também estão direccionada para o trabalho em grupo.

A interacção é uma constante no trabalho, pretendendo-se que o aluno descubra as invariâncias contidas em cada animação.

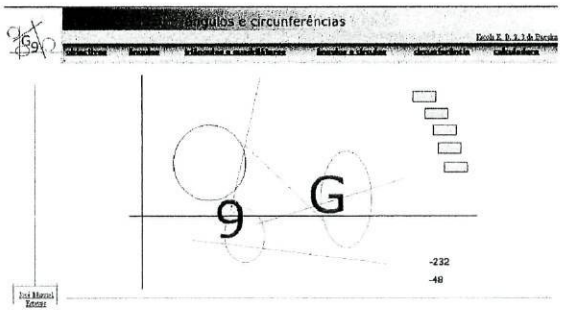


Figura 15

Na página de entrada (Figura 15), o protótipo tem uma barra com seis hiperligações:

- objectivos (Figura 16);

- Rever alguns conceitos sobre ângulos.

- Rever alguns conceitos sobre triângulos e quadriláteros.

- Relacionar as amplitudes de um ângulo ao centro e de um ângulo inscrito que contenham o mesmo arco.

- Reconhecer que a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

- Relacionar arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas.

- Reconhecer que numa circunferência, uma recta perpendicular ao meio de uma corda contém o centro da circunferência.

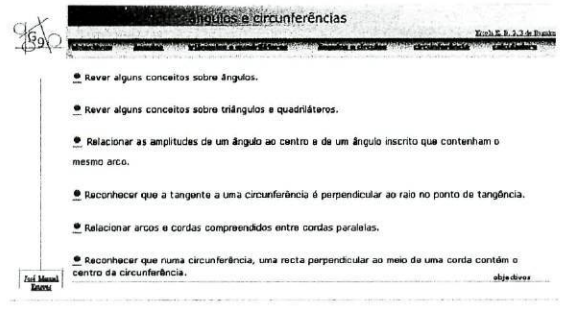


Figura 16

- ângulos (Figura 17);
  - ângulo giro (Figura 18)
  - ângulos complementares
  - ângulos suplementares
  - ângulos verticalmente opostos
  - ângulos de lados paralelos

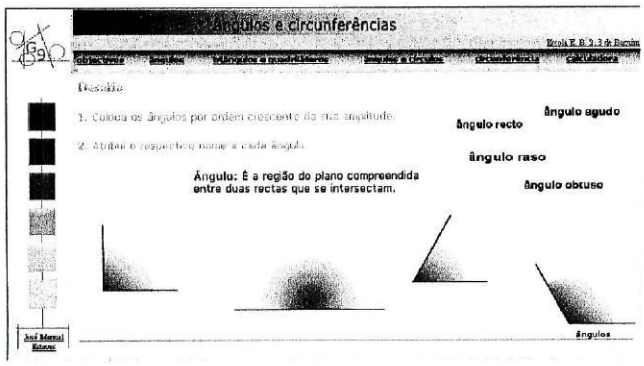


Figura 17

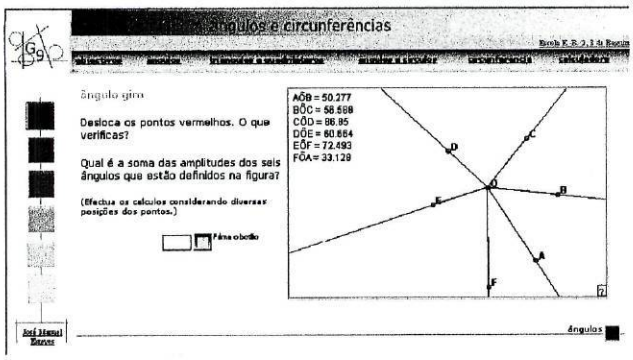


Figura 18

- triângulos e quadriláteros (Figura 19);
  - ângulos internos de um triângulo (Figura 20)
  - lados e ângulos de um triângulo
  - ângulos internos de um quadrilátero

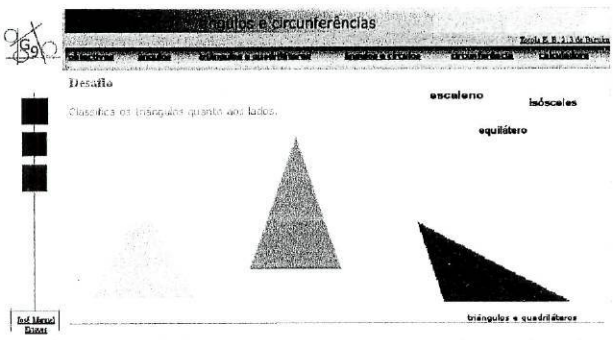


Figura 19

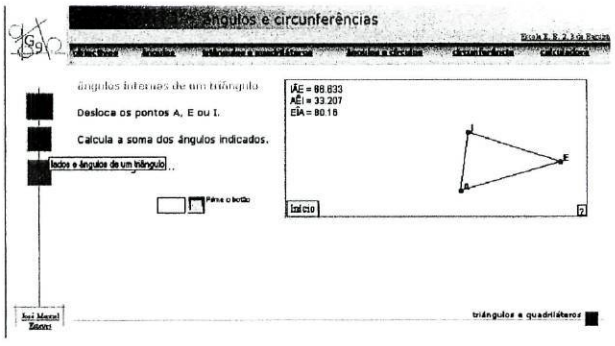


Figura 20

- ângulos e círculos (Figura 21);
  - ângulo ao centro (Figura 22)
  - ângulo inscrito
  - propriedades dos ângulos inscritos

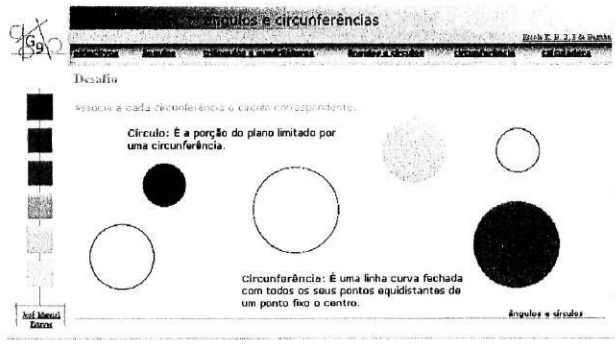


Figura 21

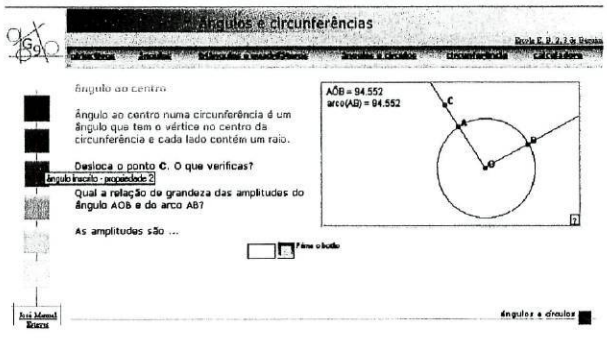


Figura 22

- circunferência (Figura 23);
  - tangente a uma circunferência (Figura 24)
  - perpendicular ao meio de uma corda
  - arcos e cordas definidos por rectas paralelas

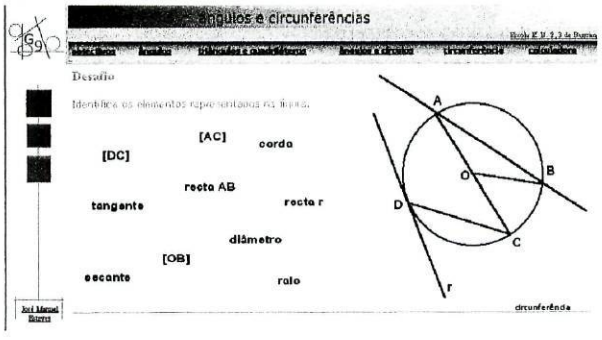


Figura 23

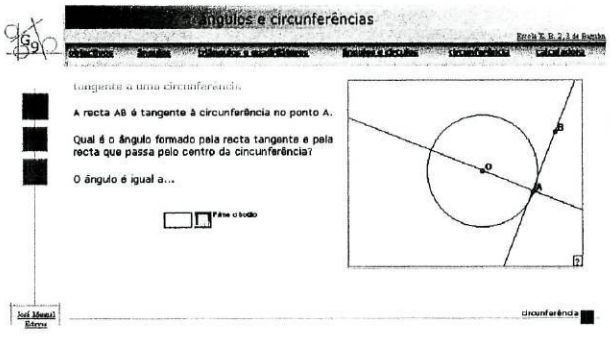


Figura 24

- calculadora (Figura 25).

Figura 25

Para a construção deste protótipo foram utilizadas as seguintes ferramentas informáticas:

- o programa de geometria dinâmica "The Geometer's Sketchpad";
- a linguagem JavaSketchpad;
- a linguagem HTML
- a linguagem JavaScript;
- o programa de construção de páginas HTML Dreamweaver;
- o programa de criação de animações Flash.

6. Planificação das aulas

6.1. Introdução

O protótipo foi utilizado em ambiente de aula, na sala de informática, em Janeiro de 2002. Cada aula tinha a duração de 90 minutos.

Procurou-se, que durante a utilização do protótipo, os alunos fossem autónomos, recorrendo ao professor o menor número de vezes possível. As dúvidas e as questões deveriam ser colocadas ao colega e, se possível, encontrar a resposta no próprio aplicativo. Esta estratégia visava o desenvolvimento da autoconfiança e do espírito de equipa.

6.2. Competências gerais

No domínio da geometria, as competências gerais que todos devem desenvolver e que podem ser potenciadas por este protótipo são as seguintes:

- Mobilizar saberes culturais, científicos e tecnológicos para compreender a realidade e para abordar situações e problemas do quotidiano;

- Usar adequadamente a linguagem Matemática para se expressar;

- Pesquisar, seleccionar e organizar informação para a transformar em conhecimento mobilizável;

- Adoptar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões;

- Realizar actividades de forma autónoma, responsável e criativa;

- Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e rigor lógico;

- Descobrir relações entre conceitos de Matemática;

- Formular generalizações a partir de experiências;

- Aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;

- Aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;

- Sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação.

6.3 Método geral de trabalho

Na sala normal de aulas ou na sala de informática os alunos estão dispostos em grupos de dois.

6.4. Materiais necessários

Os materiais necessários para o desenvolvimento das aulas são os seguintes:

- Protótipo sobre geometria instalado no computador;
- Fichas de trabalho;
- Livro de Matemática do 9º ano de Maria Augusta Ferreira Neves (Neves, 2000);
- O programa "The Geometer Sketchpad".

6.5. Avaliação

A avaliação de cada aula é feita pelo professor através da análise da compreensão dos conteúdos utilizando as seguintes estratégias:

- Debate de ideias;
- Resolução da ficha de trabalho;
- Resolução dos exercícios propostos.

6.6. 1ª Aula

6.6.1. Subtemas

Nesta primeira aula são tratados os seguintes temas:

- Ângulos;
- Amplitudes de ângulos;
- Ângulos verticalmente opostos;
- Ângulos de lados paralelos.

6.6.2. Competências específicas

As competências que se pretende que os alunos adquirem são:

- Aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;

- Aptidão para discutir estratégias de resolução de problemas e interpretar resultados.

6.6.3. Pré-requisitos

Os alunos devem:

- Ter a noção de ângulo;
- Identificar ângulos agudos, graves e obtusos;
- Calcular a amplitude de um ângulo.

6.6.4. Descrição da aula

O professor faz uma breve introdução onde são abordados os seguintes temas:

- Enquadramento histórico sobre a evolução da geometria;
- Introdução ao estudo dos ângulos apelando aos conhecimentos dos alunos;
- Explicação sobre o funcionamento do protótipo de geometria.

Exploração, pelos alunos, do primeiro capítulo do protótipo sobre "Ângulos".

Os alunos são incentivados a trocar opiniões com o seu colega de grupo. Em caso de dúvida devem colocar o problema ao professor.

Os alunos devem registar as suas conclusões no caderno diário.

Depois de explorado o capítulo as ideias são apresentadas à turma.

Para consolidar as "descobertas" efectuadas os alunos vão realizar, em grupos de dois, a ficha de trabalho sobre ângulos.

6.7. 2ª Aula

6.7.1. Subtemas

Nesta aula são tratados os seguintes temas:

- Triângulos;
- Ângulos de um triângulo;
- Lados e ângulos de um triângulo;
- Quadriláteros.

6.7.2. Competências específicas

As competências que se pretende que os alunos adquirem são:

- Aptidão para analisar figuras e formular hipóteses;
- Aptidão para aplicar as relações entre lados e ângulos de opostos de um triângulo na análise de figuras.

6.7.3. Pré-requisitos

Os alunos devem:

- Saber classificar triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos;
- Saber a noção de polígono regular;
- Identificar os quadriláteros mais comuns.

6.7.4. Descrição da aula

O professor faz uma breve introdução ao estudo dos triângulos e quadriláteros apelando aos conhecimentos dos alunos.

Exploração pelos alunos do segundo capítulo do protótipo sobre "Triângulos e Quadriláteros".

Os alunos são incentivados a trocar opiniões com o seu colega de grupo. Em caso de dúvida devem colocar o problema ao professor.

Os alunos devem registar as suas conclusões no caderno diário.

Depois de explorado o capítulo as ideias são apresentadas à turma.

Para consolidar as "descobertas" efectuadas os alunos vão realizar, em grupos de dois, a ficha de trabalho sobre triângulos e quadriláteros.

6.8. 3ª Aula

6.8.1. Subtemas

Nesta aula são tratados os seguintes temas:

- Ângulo ao centro e ângulo inscrito;
- Amplitude do ângulo ao centro;
- Amplitude do ângulo inscrito.

6.8.2. Competências específicas

As competências que se pretende que os alunos adquirem são:

- Aptidão para relacionar as amplitudes dos ângulos ao centro e ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes.

6.8.3. Pré-requisitos

Os alunos devem saber distinguir entre um círculo e uma circunferência.

6.8.4. Descrição da aula

O professor faz uma breve introdução ao estudo do círculo realçando a sua importância na tecnologia e na compreensão do universo.

Exploração pelos alunos do terceiro capítulo do protótipo sobre "Ângulos e Círculos".

Os alunos são incentivados a trocar opiniões com o seu colega de grupo. Em caso de dúvida devem colocar o problema ao professor.

Os alunos devem registar as suas conclusões no caderno diário.

Depois de explorado o capítulo as ideias são apresentadas à turma.

No final da aula os alunos devem fazer uma pesquisa na Internet para encontrar sites sobre o círculo.

6.9. 4ª Aula

6.9.1. Subtemas

Nesta aula são tratados os seguintes temas:

- Ângulo ao centro e ângulo inscrito;
- Amplitude do ângulo ao centro;
- Amplitude do ângulo inscrito.

6.9.2. Competências específicas

As competências que se pretende que os alunos adquirem são:

- Relacionar as amplitudes dos ângulos ao centro e ângulos inscritos com as amplitudes dos arcos correspondentes;
- Aptidão para construir figuras, utilizando um programa de geometria dinâmica.

6.9.3. Local

Esta aula realiza-se em dois locais:

- Sala de Informática;
- Sala de aulas.

6.9.4. Descrição da aula

Na primeira parte da aula os alunos vão fazer as construções sugeridas nas páginas 145, 147, 149 e 150 do livro de Matemática utilizando o programa "The Geometer Sketchpad".

A segunda parte da aula é passada na sala de aulas normal e os alunos vão fazer os exercícios propostos no livro de Matemática.

6.10. 5ª Aula

6.10.1. Subtemas

Nesta aula são tratados os seguintes temas:

- Circunferências;
- Tangente a uma circunferência;
- Perpendicular ao meio de uma corda;
- Arcos e cordas definidos por rectas paralelas numa circunferência.

6.10.2. Competências específicas

As competências que se pretende que os alunos adquirem são:

- Aptidão para relacionar arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas;
- Aptidão para reconhecer que a tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência;
- Aptidão para reconhecer que numa circunferência, uma recta perpendicular ao meio de uma corda contém o centro da circunferência.

6.10.3. Pré-requisitos

Os alunos devem:

- Classificar uma recta em relação a uma circunferência;
- Identificar os segmentos mais importantes desenhados num círculo;
- Aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, assim como para justificar os processos utilizados.

6.10.4. Descrição da aula

Exploração pelos alunos do quarto capítulo do protótipo sobre a "Circunferência".

Os alunos são incentivados a trocar opiniões com o seu colega de grupo. Em caso de dúvida devem colocar o problema ao professor.

Os alunos devem registar as suas conclusões no caderno diário.

Depois de explorado o capítulo as ideias são apresentadas à turma.

Para consolidar as "descobertas" efectuadas os alunos vão resolver os problemas propostos nas páginas 157 e 162 dos livro de Matemática.

6.11. Conclusão

As aulas decorreram conforme estavam planificadas não tendo ocorrido nenhum incidente digno de registo.

Os alunos mostraram-se muito interessados e curiosos sobre como foi construído o protótipo. Houve interacção entre os pares, tendo uns ajudado os outros.

Os ritmos de aprendizagem e de utilização foram diferentes, mas nem sempre os melhores alunos eram os primeiros a concluir os exercícios propostos. Verificou-se que, os alunos com dificuldades a matemática, estavam bastante empenhados e com muita atenção nas tarefas propostas.

Como complemento às planificações feitas, os alunos que acabavam primeiros os trabalhos podiam fazer pesquisas na Internet sobre os temas em estudo. Esta tarefa mostrou-se muito enriquecedora.

7. Limitações condicionantes

Uma das limitações deste estudo consiste no facto de que o universo da experiência ter sido um reduzido número de alunos. Outra foi a falta de tempo para que os alunos construíssem as suas animações.

Se por um lado, 28 alunos são poucos para tirar conclusões definitivas sobre a utilização do protótipo, por outro lado são muitos para que se pudesse aprofundar um pouco mais o estudo e os alunos construíssem as suas figuras animadas. Este aprofundamento não podia ser feito na aula normal, visto não estar contemplado no programa de Matemática, mas podia ser trabalhado num clube de ocupação de tempo livros, com alunos voluntários e interessados em aprender um pouco de programação.

Embora a maior parte dos alunos trabalhasse bem com o computador e já tinha tido contacto com o programa "The Geometer's Sketchpad", havia um pequeno grupo de alunos repetentes cujos conhecimentos de informática eram muito reduzidos, estando constantemente a solicitar o professor para colocar questões sobre o funcionamento do computador.

Estes factores, se não permitiram tirar conclusões concludentes, não tiram validade ao estudo realizado, que aponta no sentido de que o protótipo apresentado contribui positivamente para o processo de ensino/aprendizagem da Geometria.

CAPÍTULO 6

OS RESULTADOS – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE

1. Introdução

O inquérito apresentado aos alunos tinha dois objectivos fundamentais e complementares. Era importante verificar qual a sua opinião acerca da Matemática e da Geometria. Consideremos esta opinião como um enquadramento teórico. Do ponto de vista prático, pretendeu-se verificar qual o impacto que a informática e o aplicativo desenvolvido tiveram sobre os alunos.

A análise do inquérito está sintetizada em gráficos de barras, construídos em percentagem do número total de respostas obtidas. Em cada um dos gráficos podemos fazer três leituras imediatas, uma em relação aos rapazes, outra em relação às raparigas e uma última em relação ao total de alunos. De referir que a turma é composta por 28 alunos, em que 16 são raparigas.

Dado o reduzido número de alunos não se pretende tirar ilações conclusivas, mas orientações que permitam preparar melhor as actividades lectivas de forma a corresponder às solicitações dos alunos.

2. Análise do inquérito

É de salientar que cerca de dois terços dos alunos gostam ou gostam muito de Matemática (Gráfico 12). A importância da Matemática no dia a dia é sentida pela totalidade dos alunos, em que 86% deles refere que a Matemática se usa ou usa muito fora da escola (Gráfico 13). A Matemática não é sentida como uma disciplina estritamente escolar, a sua importância social é inegável, mesmo para aqueles que não gostam dela.

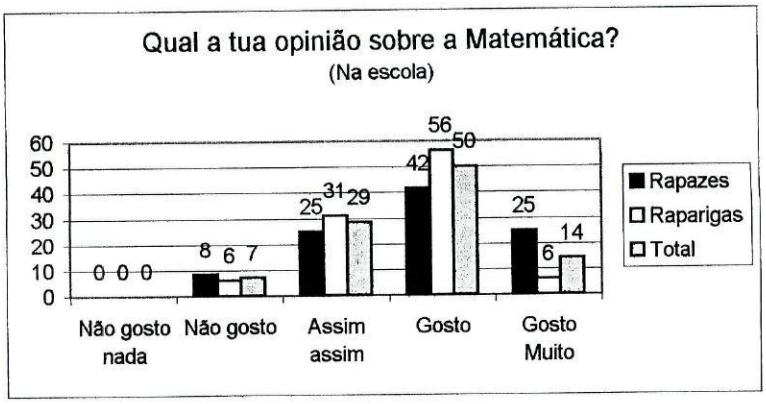


Gráfico 12

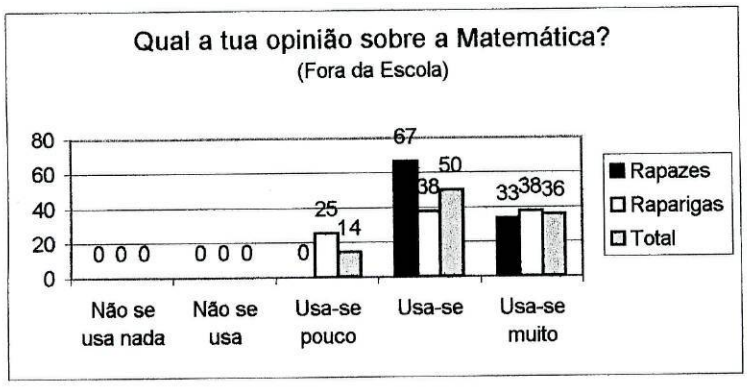


Gráfico 13

No cômputo geral das disciplinas do ensino básico, os alunos que colaboraram neste estudo têm uma imagem da Matemática que se pode considerar positiva. 54% dos alunos colocam-na nas quatro primeiras posições. É de salientar o facto de 14% a consideratem em primeiro lugar e 25% em segundo lugar (Gráfico 14).

Nesta turma os rapazes têm uma opinião mais positiva da Matemática do que as raparigas.

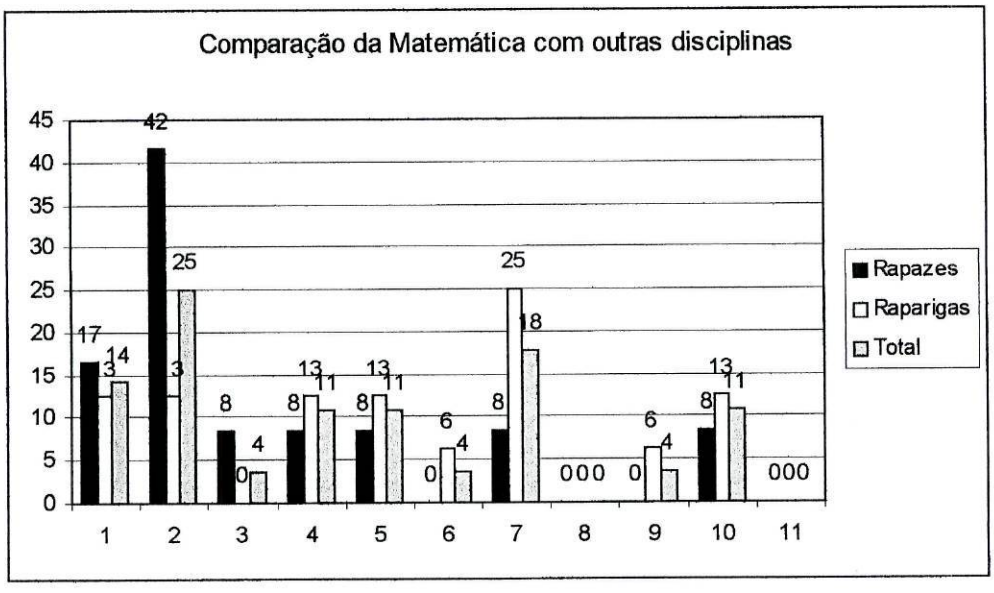


Gráfico 14

À questão "Quando te falam em Matemática o que é que te vem ao pensamento?" os alunos referem nas duas partes do inquérito que:

- lembram-se de contas – 54% e 79%;
- lembram-se de números ou equações – 68% e 68%;
- associam a problemas, desafios ou pensar – 68% e 86%;
- vem à ideia o futuro – 18% e 4%;
- vem à ideia confusões e complicações – 25% e 14%.

Somente 7% dos alunos, na 1ª parte do inquérito, referem lembrar-se de temas relacionados com a geometria (formas geométricas e teorema de Pitágoras). Na 2ª parte do inquérito o dobro dos alunos refere temas da geometria.

Desta forma pôde-se constatar que, quando se menciona Matemática, a maior parte dos alunos associa a questões relacionadas com a álgebra ou a aritmética.

É interessante verificar que, embora gostando de Matemática, a maioria dos alunos tem uma opinião diferente acerca da Geometria, 61% gostam "assim assim".

Verifica-se que, após o estudo efectuado utilizando o protótipo, a opinião dos alunos manifesta-se, na generalidade, mais favorável à Geometria: 29% dos alunos referem que gostam de Geometria (Gráfico 15) contra os 14% no início (Gráfico 16).

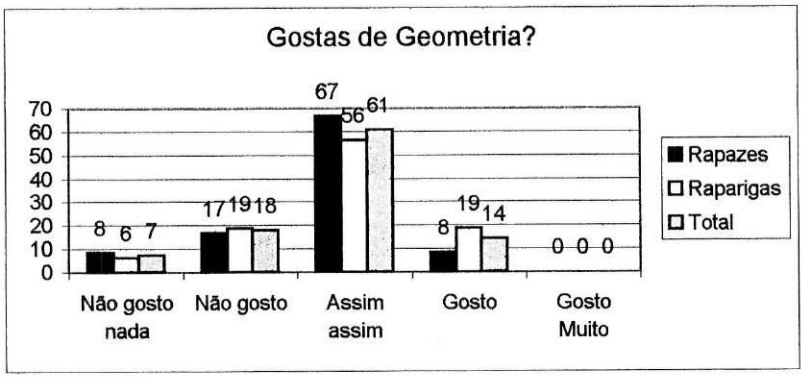


Gráfico 15

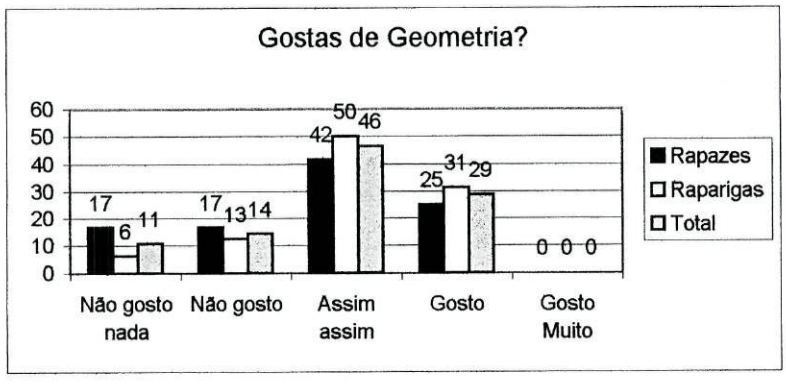


Gráfico 16

Os alunos têm alguma dificuldade em explicitar as razões pelas quais gostam ou não de Geometria. Da 1ª para a 2ª parte do inquérito não há grandes modificações, embora nesta parte o número de alunos que acha que a geometria é complicada diminuiu.

Dos aspectos negativos realça-se os seguintes:

- complicado – 32% e 11%;
- não gosta de desenho geométrico – 21% e 21%;

Dos aspectos positivos refere-se os seguintes:

- interessante – 7% e 4%;
- gosta de desenhar – 7% e 11%.

A opinião da turma não é muito favorável à utilização dos instrumentos de geometria, como a régua e o compasso, somente 47% gostam ou gostam muito de os utilizar (Gráfico 17). Para reforçar esta fraca apetência para utilizar os referidos instrumentos, verifica-se que, depois do estudo efectuado, 82% dos alunos prefere estudar geometria utilizando o computador (Gráfico 18). De registar que a totalidade dos rapazes prefere utilizar o computador.

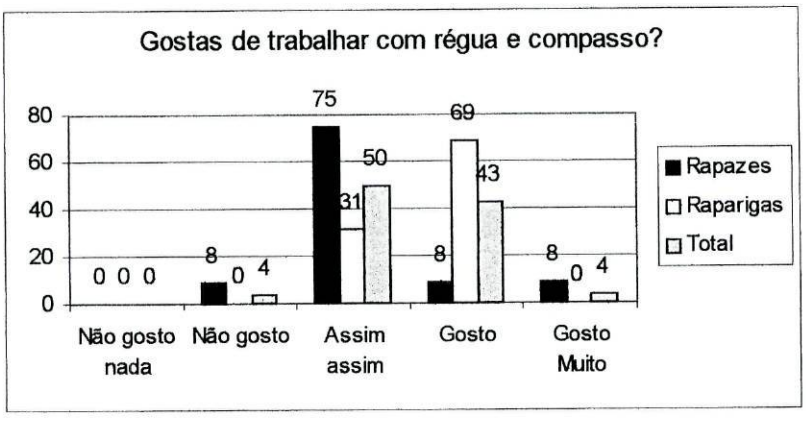


Gráfico 17

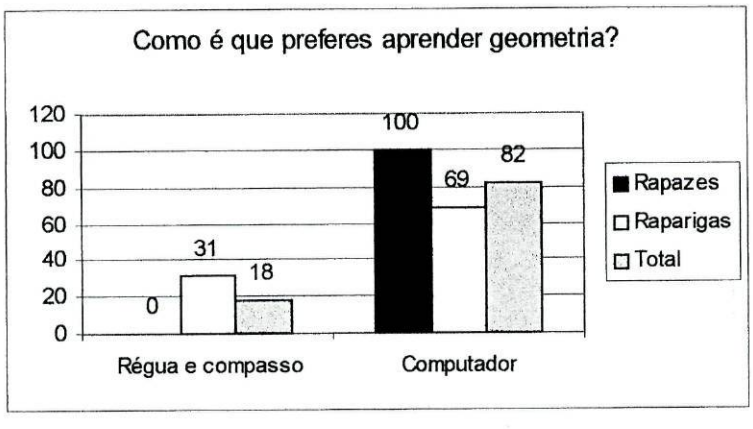


Gráfico 18

Os alunos que preferem usar régua e compasso dizem que não gostam de usar o computador.

Os alunos que preferem usar o computador dizem que:

- é fácil – 21%;
- é uma aula diferente/divertida/interessante – 18%;
- se compreende melhor – 14%;
- é mais perfeito – 11%.

No tempo que decorreu desde a 1ª até à 2ª parte do inquérito os alunos mudaram de alguma forma a sua opinião sobre como os professores deveriam de ensinar Geometria. Tem-se as seguintes opiniões:

- computador – 11% e 29%;
- instrumentos de desenho – 7% e 4%;
- não responde – 39% e 39%.

Depois de utilizarem o aplicativo os alunos sugerem que se utilize mais vezes o computador para o estudo da geometria.

Quanto à importância que os alunos atribuem à Geometria na sua vida futura é de registar que, após a leccionação da unidade sobre o círculo, há uma tendência para valorizar a Geometria (Gráficos 19 e 20). Este registo não é conclusivo devido ao número de alunos ser reduzido e as aulas terem sido poucas.

O elevado número de alunos que respondem "assim assim" merece ponderação. Na futura leccionação das unidades didácticas sobre Geometria é de considerar uma maior aproximação à realidade por forma de os alunos terem uma noção mais concreta da sua importância.

Esta incerteza sobre o futuro também é fruto da idade dos alunos. Estes estão num momento de escolherem o seu futuro, e ainda estão muito indecisos quanto ao curso que irão escolher no ensino secundário.

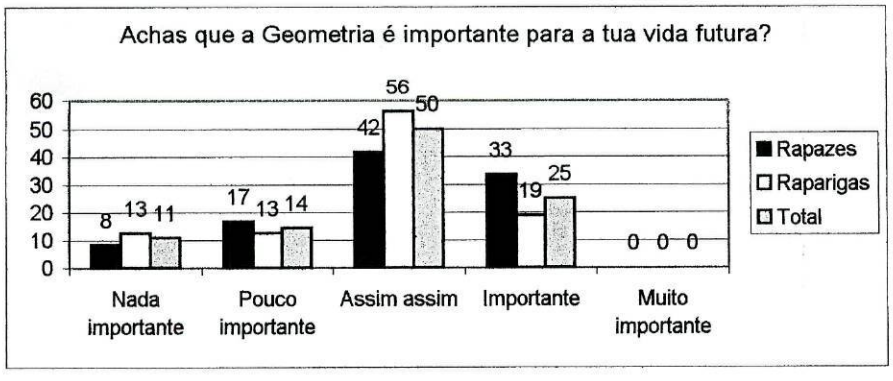


Gráfico 19

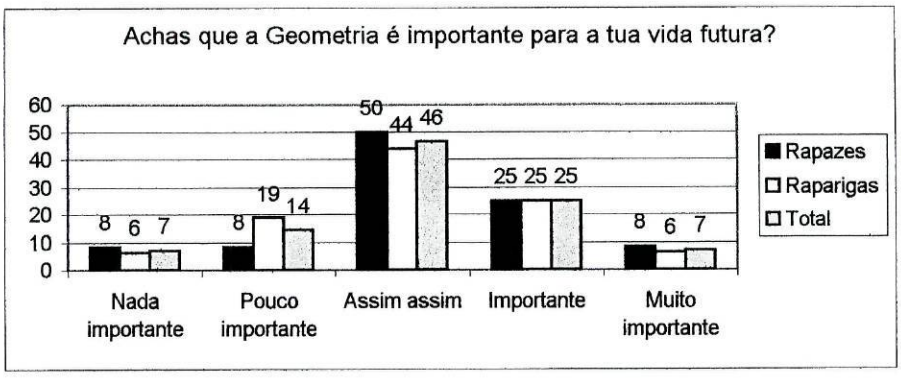


Gráfico 20

A razão pela qual os alunos emitiram as opiniões registadas nos gráfico anteriores depende um pouco das suas perspectivas de futuro: 50% refere expressamente que depende do futuro; 21% refere que o curso que quer seguir não tem geometria. São de referir as seguintes declarações:

- de alunos que consideram que a Geometria é importante: "Geometria será uma das muitas importantes para mim porque eu quero seguir Matemática"; "Sim, porque é preciso para fazer casas"; "Os arquitectos precisam muito de Geometria";

- de uns que consideram "assim assim": "Porque para o que eu vou seguir a Geometria é um pouco importante"; Porque havemos de precisar dela em algum momento";

- de um outro que considera pouco importante: Porque na minha vida futura não vou precisar de réguas, nem de compassos, nem de nada disso."

Relacionando os gráfico 16 com o gráfico 21, verifica-se que a opinião dos alunos sobre as aulas de Geometria é mais favorável do que a sua opinião sobre a Geometria (29% gostam de Geometria e 40 % gostam ou gostam muito das aulas de Geometria). Esta ligeira diferença pode indiciar que a utilização do protótipo pode tornar mais positiva a opinião do aluno sobre a geometria.

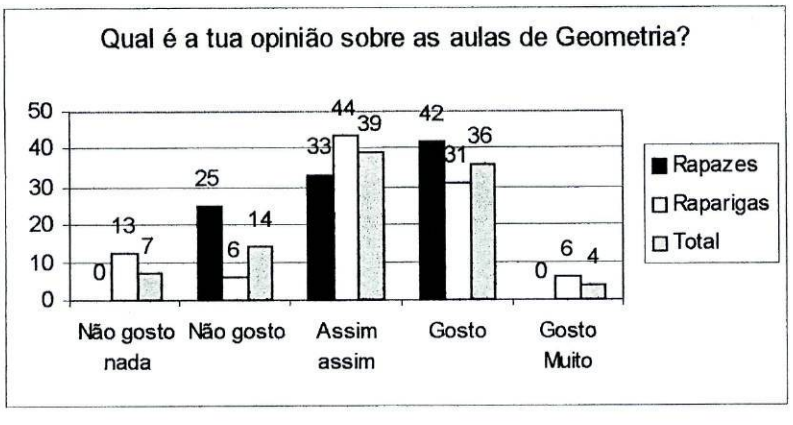


Gráfico 21

Os aspectos positivos mais relevantes referidos pelos alunos são:

- usa-se o computador – 32%;
- divertidas – 21%;
- ficam cultos/inteligentes – 18%;
- diferentes – 7%.

Os aspectos negativos referidos foram os seguintes:

- lentas – 21%;
- não há – 11%;
- utilizar instrumentos – 11%;
- não respondem – 21%

O que realça das afirmações feitas pelos alunos é o facto de o aspecto mais referido ser um aspecto positivo, que é exactamente a utilização do computador.

Quanto ao aplicativo, a maior parte dos alunos gostou do aspecto gráfico (Gráfico 22) e compreendeu bem os conceitos transmitidos (Gráfico 23). De referir que nenhum aluno não compreendeu a matéria.

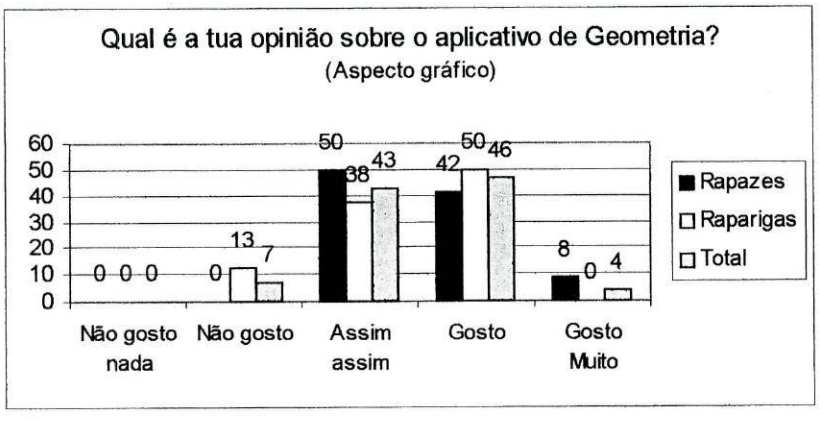


Gráfico 22

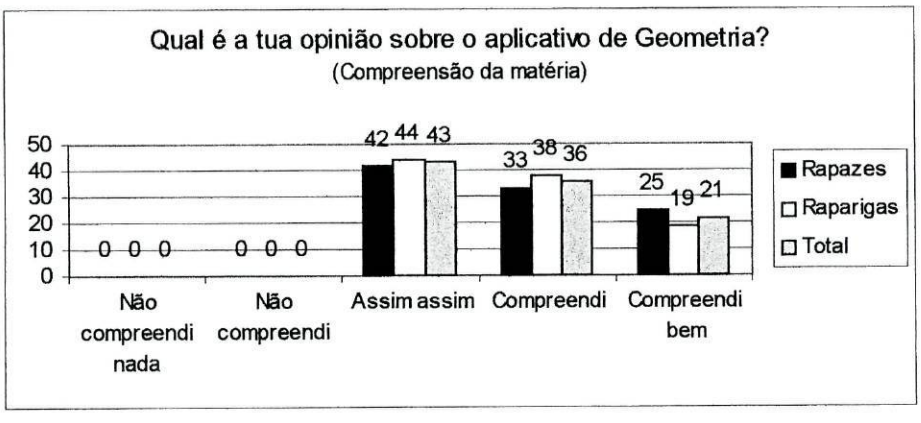


Gráfico 23

Verifica-se que os alunos têm alguma dificuldade em expressar a sua opinião por escrito, 57% não sabe ou não respondes sobre quais os aspectos positivos ou negativos do aplicativo.

O aspecto positivo mais referido é que com o aplicativo aprende-se melhor (29%).

Quanto aos aspectos negativos 14% responde que é rigoroso.

Verifica-se que cerca de dois terços dos alunos possuem computador, incidindo uma maior percentagem sobre os rapazes (Gráfico 24). Apesar de alguns não terem computador em casa, a escola possui duas salas de informática de acesso aos alunos mediante marcação. Nas aulas de Matemática a maior parte dos alunos já tinha usado o computador.

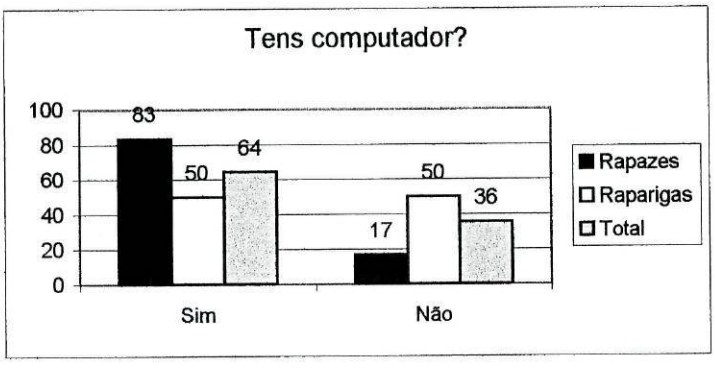


Gráfico 24

Verifica-se que a maior parte dos alunos sabe trabalhar bem ou razoavelmente bem com o computador (Gráfico 25). É nos rapazes que esta competência tem maior incidência.

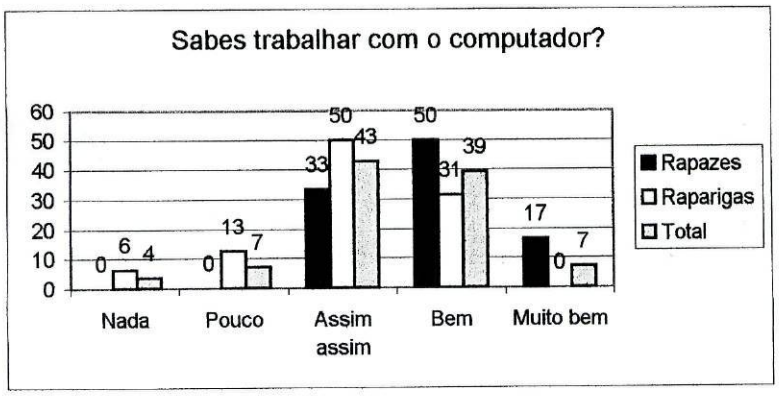


Gráfico 25

Os programas informáticos que os alunos conhecem melhor são o Word (64%) e o Excel (54%). 18% dos alunos ainda refere o Paint e a Internet.

Embora alguns tenham algumas dificuldades na utilização do computador, todos reconhecem a sua utilidade (Gráficos 26 e 27).

A variação da opinião dos alunos não é significativa após o estudo do aplicativo de Geometria. São alunos que ao longo dos seus estudos têm utilizado o computador em diversas ocasiões, daí a sua opinião bem definida.

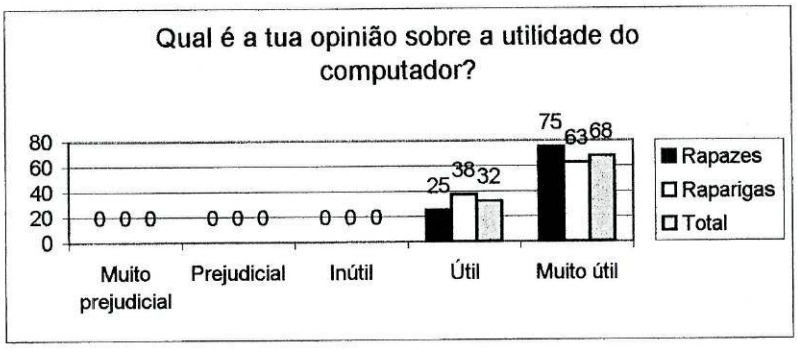


Gráfico 26

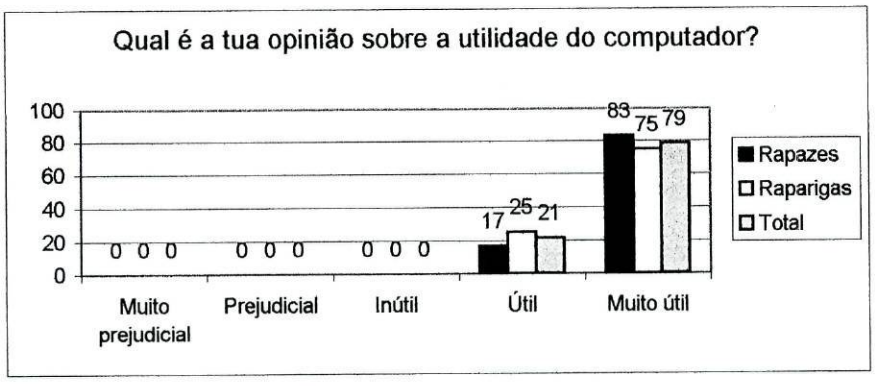


Gráfico 27

Os aspectos positivos que os alunos mais referiram na 1ª parte do inquérito foram os seguintes:

- informação e ensino – 46%;
- instrumento de trabalho – 39%;
- organização dos trabalhos – 39%;
- divertimento e ocupação dos tempos livres – 32% ;
- Internet, pesquisa e comunicação – 32%.

Verifica-se que os alunos referem algumas das utilizações mais importantes dos computadores.

Na 2ª parte do inquérito aparecem os aspectos anteriores e alguns aspectos novos:

- informação e ensino – 21%;
- instrumento de trabalho – 46%;
- divertimento e ocupação dos tempos livres – 50%;
- Internet, pesquisa e comunicação – 50%;
- compreensão da matéria – 11%;
- gráficos e construções – 11%.

Os aspectos novos referem-se explicitamente à melhor compreensão das matérias e a aspectos da geometria, cujo tema tínhamos acabado de tratar. A ocupação dos tempos livres e a Internet são sem dúvida os aspectos que os alunos relacionam imediatamente com o computador. É de salientar que na escola os alunos são muito solicitados para fazer pesquisas na Internet.

Os aspectos negativos apontados pelos alunos nas duas partes do inquérito foram os seguintes:

- faz mal aos olhos e provoca dores de cabeça - 39% e 57%;
- caro - 36% e 18%;
- gasta energia eléctrica - 18% e 18%;

- vicia - 14% e 18%;

- difícil - 18% e 7%.

Os problemas de saúde apontados podem indiciar uma utilização por tempo prolongado do computador. É um comportamento que merece ser discutido com os alunos.

O facto de entenderem que o computador é caro pode ser a causa de ainda 36% dos alunos não possuírem um. O meio onde se insere a escola não é muito favorecido.

A questão do vício provocado pelo computador, prende-se com o facto de os alunos terem a consciência de o utilizarem durante muito tempo para passar os seus tempos livres.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

Este estudo/investigação corporiza uma abordagem ao ensino da Geometria, no âmbito do 9º ano do ensino básico, em que se procurou incentivar nos alunos a investigação, a experimentação, a visualização e o raciocínio utilizando um protótipo informático construído pelo autor deste trabalho.

Este estudo/investigação foi realizado com uma turma da Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos de Baguim.

Pretendeu-se concretizar essencialmente dois objectivos: averiguar as potencialidades dos programas de geometria dinâmica na construção de material didáctico para o ensino da Geometria; experimentar um protótipo informático em ambiente de aula por forma a conciliar a utilização das tecnologias de informação e comunicação com o ensino tradicional. De uma forma complementar estudou-se a opinião dos alunos sobre a Matemática, a Geometria e a utilização dos computadores.

Partiu-se de uma realidade concreta, em que muitas das vezes os alunos não adquirem as competências essenciais em Geometria devido à utilização de métodos que não privilegiam a descoberta e a procura do conhecimento. Constata-se que, com a evolução das tecnologias informáticas, a Geometria ganha uma nova importância e actualidade. O desenvolvimento de programas informáticos destinados ao ensino e ao estudo da Geometria veio dar novo alento a professores e alunos para trabalharem com mais afinco estas matérias.

A Matemática(e consequentemente a Geometria) é uma ciência que ajuda o Homem na compreensão do Mundo e que requer uma grande capacidade de abstracção e de concentração. Por outro lado, sabe-se da psicologia experimental que é principalmente através da visão que o Homem adquire o conhecimento. Se a este facto se acrescentar a utilização de objectos manipuláveis, estaremos na presença de um ambiente propiciador de aprendizagens significativas e de grande alcance pedagógico.

Programas de geometria dinâmica associam a capacidade de visualizar fenómenos geométricos com a sua manipulação directa. Estes programas são muito importantes, quer para os alunos o usarem como uma folha de desenho dinâmica e assim adquirir competências essenciais em Geometria, quer para a construção de objectos autónomos em que o aluno vai descobrir propriedades fundamentais.

O exposto anteriormente despertou a curiosidade e motivou à elaboração deste estudo no âmbito da geometria dinâmica. Como ferramenta do trabalho escolheu-se o programa "The Geometer's Sketchpad", por ser aquele que parece ser mais completo e de fácil utilização. Os seus comandos e janelas seguem uma lógica semelhante ao dos programas que os alunos estão mais habituados a utilizar.

Da análise dos resultados do inquérito verificou-se que os alunos gostaram de trabalhar com o protótipo e que este contribuiu positivamente par as suas aprendizagens. Durante o desenvolvimento da unidade didáctica foi possível constatar o entusiasmo e o empenhamento com que os alunos faziam as suas descobertas no computador. Quando se chegava ao fim de uma aula os alunos ficavam admirados por o tempo se ter passado tão depressa.

Com este trabalho viu-se reforçada a ideia de que os programas de geometria dinâmica podem ser muito importantes quando bem integrados no processo de ensino/aprendizagem. Com efeito, a motivação e consequente aprendizagem por parte dos alunos é melhor mas é necessário que estas estratégias sejam implementadas mais cedo.

Como os resultados foram positivos, vai-se trabalhar para que a partir do 7º ano da escolaridade se comece a desenvolver trabalhos de geometria utilizando o computador.

Desta experiência fica a ideia de no futuro ser criado um Clube, fora do horário lectivo, para que alunos mais interessados posam desenvolver melhor as suas capacidades e o seu gosto pela Matemática. Neste clube pode fazer-se uma exploração mais exaustiva das potencialidades do "Sketchpad".

Têm-se a consciência de que o número de alunos com quem trabalhamos não terá permitido observações conclusivas, mas fica a ideia de que se realizou um trabalho de certo modo inovador e que poderá servir para futuros trabalhos de investigação no aperfeiçoamento do processo de ensino/aprendizagem da Matemática.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (coord.) (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* ME – DEB. Lisboa

Abrantes, P., Leal, L. C. e Ponte, J. P. (org.) (1998). *Investigar para aprender Matemática.* APM. Lisboa.

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* DEB. Lisboa.

Almeida, L. e Freire, T. (1997). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação.* APPORT – Associação de Psicólogos Portugueses. Coimbra.

Alsina, A., Burgés, C. e Fortuny, J. M. (1997). *Invitacion a la Didactica de la Geometria.* Editorial Sintesis. Madrid.

Associação de Professores de Matemática. (1995). *Renovação do Currículo da Matemática.* APM. Lisboa.

Associação de Professores de Matemática. (1998). *Matemática 2001 – Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática.* APM. Lisboa.

Associação de Professores de Matemática. (1999). *Geometria com Cabri-Géomètre.* APM. Lisboa.

Ausbrooks, R. et al. (2001). Mathematical Markup Language. http://www.w3.org/TR/2001/PR-MathML2-20010108

Battista, M. e Clements, D. (1995). Geometry and Proof. In *Mathematics Teacher* (88-1), pp. 48-54.

Biehler, R. et al. ed. (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluber. Dordrecht.

Boavida, A. M. et al. ed. (1997). *Aprendizagens Matemáticas.* Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto Editora. Porto.

Bottino, R. M. (s/d). *Advanced Learning Environments : Changed Views and Future Perspectives.* Documento fotocopiado.

Cabri Géomètre. (2001). http://www.cabri.net

Carvalho, J. M., (2001). *Diferenciação Pedagógica: da Teoria à Pessoa.* http://www.deb.min-edu.pt/revista/revista1

Chacón, I. M. G., Figueiras, L. e Marín, M. (2001). *Matemáticas en la Red.* Narcea. Madrid.

Churchhouse, R. F. et al. (1986). *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching.* Cambridge University Press. Cambridge.

Clements, D., Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning In Grouws, D. ed. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Macmillan. New York.

Crowe, D. e Zand, H. (2000). Computers and undergraduate mathematics I: setting the scene. In *Computers & Education*, 35, 95-121.

Crowe, D. e Zand, H. (2000). Computers and undergraduate mathematics 3: Internet resources. In *Computers & Education*, 35, 123-147

Davis, P. J. e Hersh, R. (1995). *A Experiência Matemática.* Gradiva. Lisboa.

Davis, P. J. e Hersh, R. (1997). *O Sonho de Descartes.* Difusão Cultural. Lisboa.

Domingos, A. (2001). *Diferentes abordagens na construção dos conceitos matemáticos.* http://www.apm.pt/siemxii/difabcons.pdf

Dreyfus, T. (1994). The role of cognitive tools in Mathematics education. In Biehler, R. et al. ed. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluber. Dordrecht.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In Mammana, C. e Villani, V. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Kluber Academic Publishers. Dordrecht.

Enciclopédia Einaudi (1998). *Estruturas Matemáticas. Geometria e Topologia.* INCM. Lisboa

Fey, J. T. (1988). Tecnologia e Educação Matemática In Ponte, J. P. (org.) *O Computador na Educação Matemática.* APM. Lisboa.

Fischbein,E. (1993). *'The theory of figural concepts'*, Educational Studies in Mathematics, 24/2, 139-162.

Fosnot, C. T. (1999). *Construtivismo e educação*, Instituto Piaget, Lisboa

Gardner, H. (2001). *As ramificações educativas da teoria das IM.* http://www.deb.min-edu.pt/revista/revista1

Gebert, J. R. e Kortenkamp, U. H. (1999). *The Interactive Geometry Software Cinderella.* Springer. Berlin.

Geddes, D. et al. (2001). *Geometria nos 2º e 3º Ciclos, Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Colecção de Adendas, Anos de Escolaridade 5 – 8.* APM. Lisboa

Glasersfeld, E. (1996). Construtivismo Radical, Instituto Piaget, Lisboa

Graf, K D. e Hodgson, B. R. (1998). The computer as a context for new possible geometrical activities. In Mammana, C. e Villani, V. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Kluber Academic Publishers. Dordrecht.

Gravina, M. A. (1996). *Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o aprendizado da Geometria* http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/artigo.htm#indice.

Gravina, M. A. (1996). Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria, Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, Belo Horizonte, MG.

Gravina, M. A. (1998). A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados, Anais do IV Congresso RIBIE, Brasília.

Holland, G. (1994). Intelligent tutorial systems. In Biehler, R. et al. ed. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluber. Dordrecht.

Hoyles, C. e Jones, K. (1998) In Mammana, C. e Villani, V. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Kluber Academic Publishers. Dordrecht.

HTML Goodies (2002). http://www.htmlgoodies.com

Jacobs, H. (1987). *Geometry.* Freeman. New York.

Jackiw, N. (2001). *JavaSketchpad.* http://forum.swarthmore.edu/dynamic/java_gsp

Joyce, D. E. (1998). *Euclide's Elements*
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

Junqueira, M. e Valente, S. (1998). *Exploração de Construções Geométricas Dinâmicas.* APM. Lisboa.

Kaput, J. (1992) Technology and Mathematics Education In Grouws, D. ed. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Macmillan. New York

Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics.* Harper Collins. New York.

King, J. e Schattschneider, D. (1997). *Making Geometry Dinamic.* *http://mathforum.org/dynamic/geometry_turned_on/*

Kuntz G. (1997). *Projet Cabri-java.* http://www.cabri.net/cabrijava

Kuntz, G. (1998). *Géométrie dynamique sur le Web.*
http://www-cabri.imag.fr/~kuntz/INET98/index-f.html

Laborde, C. (1997). La géométrie et les figures dynamiques à l'écran de l'ordinateur: Passage d'un monde à l'autre. In Boavida, A. M. et al. ed. *Aprendizagens Matemáticas.* Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Laborde, C. (1998). Visual Phenomena in the Teaching/Learning of Geometry ina Computer-Based Environment. In Mammana, C. e Villani, V. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Kluber Academic Publishers. Dordrecht.

Mammana, C. e Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.* Kluber Academic Publishers. Dordrecht.

Masini, G. (1979). *A Matemática.* Círculo de Leitores. Lisboa.

Matos, J. M. e Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática.* Universidade Aberta. Lisboa.

Mellar, H., Bliss, J., Boohan, R., Ogborn, J. & Tompsett, C. (1994). *Learning with Artificial Worlds: Computer Based Modelling in the Curriculum.* The Falmer Press. London.

Moigne, J. L. (1995). *Les epistémologies constructivistes*, PUF, Paris

Munshi, J. (1990). *A Method for Constructing Likert Scales.* http://munshi.sonoma.edu/working/LIKERT.HTML

National Council of Teachers of Mathematics. (1991) *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* APM/IIE. Lisboa

National Council of Teachers of Mathematics. (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* APM/IIE. Lisboa.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* http://standards-e.nctm.org/

Negroponte, N. (1996). *Ser Digital.* Caminho. Lisboa.

Neves, M. A. F. (2000). *Matemática 9º Ano.* Porto Editora. Porto.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L. e Neves, A. (2002). *Matemática 7º Ano. Guia do Professor.* Porto Editora. Porto.

Papert, S. (1970). Ensinar crianças a serem matemáticos versus ensinar Matemática. In Ponte, J. P. (org.) *O Computador na Educação Matemática.* APM. Lisboa.

Peyrard, F. (Trad.) (1993). *Les Oeuvres d'Euclides.* Albert Blanchar. Paris.

Piaget, J. (1973). Comments in Mathematical Education, em A.G. Howson (ed) *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*, Cambridge University Press.

Poincaré, H. (1908). A Investigação Matemática. In Abrantes, P., Leal, L. C. e Ponte, J. P. (org.). *Investigar para aprender Matemática.* APM. Lisboa.

Ponte, J. P. (org.) (1991). *O Computador na Educação Matemática.* APM. Lisboa.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. Em Educação e Matemática n.º 34

Ponte, J. P. e Canavarro, A. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias.* Universidade Aberta. Lisboa.

Ponte, J. P., Nunes, F. e Veloso, E. (1991). *Computadores no Ensino da Matemática.* APM. Lisboa.

Projet TéléCabri. (2000). http://www.cabri.net/TeleCabri/

Santos, J. M. (1999). *Construção de Páginas interactivas com o JavaSketchpad.* http://planeta.clix.pt/santos/tese/Inicio.htm

Sanders, C. (1994). *Perspective Drawing.* Key Curriculum Press. Berkeley

Schifter, D. (1999). Uma perspectiva construtivista do ensino e da aprendizagem da Matemática. In Fosnot, C. T. *Construtivismo e Educação.* Instituto Piaget. Lisboa.

Schumann, H. (1991). Interactive theorem finding through continous variation of geometric configuration. In *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* 10 (3), 81-105

Serres, M. (1997). *As Origens da Geometria.* Terramar. Lisboa.

Shabo, A., Guzdial, M. e Stasko, J. (1997). An apprenticeship-based multimedia cousware for comouter graphics studies provided on the world wide web. In Computers Education. Vol. 29, No. 2/3, 103-116.

Steen, L. A.. (1995). Living with a new Mathematical Species. In Churchhouse, R. F. et al. *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching.* Cambridge University Press. Cambridge.

Stockstill, D. (2001). *Resources in Teaching Multiple Intelligences.* http://www.harding.edu/~cbr/midemo/mifirst.html

Sun Microsystems (2001). *Java Foundations Classes* http://java.sun.com/products/jfc

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of Mathematics In Biehler, R. et al. ed. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluber. Dordrecht.

The Geometer's Sketchpad Resource Center. (2001). http://www.keypress.com/sketchpad/index.html

The Interactive Geometry Software Cinderella. (2001). http://www.cinderella.de/en/

Veloso, E. (2000). *Geometria: Temas actuais.* IIE. Lisboa.

Whiteley, W. (1999). *The Decline and Rise of Geometry in 20th Century North America.* http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/cmes.pdf.

Whiteley, W. (2000). *Dynamic Geometry Programs and the Practice of Geometry.* http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Dynamic.pdf.

Yin, R. (1989). *Case Study Research: Design and Methods.* Sage Publications. London.

Zebrowski, E. (1999). *A History of the Circle.* Rutgers University Press. New Brunswick.

ANEXOS

A Matemática, a Geometria e o Computador

Inquérito aos Alunos

1ª Parte **Novembro de 2001**

Exprime a tua opinião. Este inquérito é anónimo. Não escrevas o teu nome na folha.

1. Qual o teu sexo?

Feminino. ☐ Masculino. ☐

2. Quando te falam em Matemática o que é que te vem ao pensamento?

Escreve três ideias ou palavras.

.....

.....

3. Qual é a tua opinião sobre a Matemática?

a) Na escola.

Não gosto nada	Não gosto	Assim assim	Gosto	Gosto muito

b) Fora da escola.

Não se usa nada	Não se usa	Usa-se pouco	Usa-se	Usa-se muito

c) Comparação com as outras disciplinas.

Ordena as disciplinas pela tua preferência. (**1 – A que gostas mais.**)

Disciplinas	**N.º de ordem**
Língua Portuguesa	
Inglês	
Francês	
História	
Geografia	
Matemática	
Ciências Naturais	
Físico-Química	
Educação Visual	
Educação Tecnológica	
Educação Física	

4. Gostas de Geometria?

Não gosto nada	Não gosto	Assim assim	Gosto	Gosto muito

Porquê?

.....

.....

.....

.....

5. Gostas de trabalhar com a régua e com o compasso?

Não gosto nada	Não gosto	Assim assim	Gosto	Gosto muito

Porquê?

.....

.....

.....

.....

6. Achas que a Geometria é importante para a tua vida futura?

Nada importante	Pouco importante	Assim assim	Importante	Muito importante

Porquê?

.....

.....

.....

.....

7. Dá sugestões sobre como os professores deveriam ensinar Geometria.

.....

.....

.....

.....

8. Sabes trabalhar com o computador?

Nada	Pouco	Assim assim	Bem	Muito bem

9. Quais são os programas informáticos que conheces melhor? Indica três.

.....

.....

.....

10. Qual é a tua opinião sobre a utilidade do computador?

Muito prejudicial	Prejudicial	Inútil	Útil	Muito útil

a) Indica três aspectos positivos.

.....

.....

.....

b) Indica três aspectos negativos.

.....

.....

.....

11. Tens computador?

Sim. ☐ Não. ☐

Obrigado pela tua colaboração.

A Matemática, a Geometria e o Computador

Inquérito aos Alunos

2ª Parte **Fevereiro de 2002**

Exprime a tua opinião. Este inquérito é anónimo. Não escrevas o teu nome na folha.

1. Qual o teu sexo?

Feminino. ☐ Masculino. ☐

2. Quando te falam em Matemática o que é que te vem ao pensamento?

Escreve três ideias ou palavras.

.....

.....

.....

3. Qual é a tua opinião sobre a utilidade do computador?

Muito prejudicial	Prejudicial	Inútil	Útil	Muito útil

a) Indica três aspectos positivos.

.....

.....

.....

b) Indica três aspectos negativos.

.....

.....

.....

4. Gostas de Geometria?

Não gosto nada	Não gosto	Assim assim	Gosto	Gosto muito

Porquê?

.....

.....

5. Achas que a Geometria é importante para a tua vida futura?

Nada importante	Pouco importante	Assim assim	Importante	Muito importante

Porquê?

.....

.....

.....

.....

6. Qual é a tua opinião sobre as aulas de Geometria?

Não gosto nada	Não gosto	Assim assim	Gosto	Gosto muito

a) Indica três aspectos positivos.

.....

.....

.....

b) Indica três aspectos negativos.

.....

.....

.....

7. Qual é a tua opinião sobre o aplicativo de Geometria?

a) Aspecto gráfico

Detestei	Não gostei	Assim assim	Gostei	Gostei muito

b) Compreensão da matéria

Não compreendi nada	Não compreendi	Assim assim	Compreendi	Compreendi bem

c) Indica três aspectos positivos.

.....

.....

.....

d) Indica três aspectos negativos

.....

.....

.....

8. Dá sugestões para melhorar o aplicativo.

.....

.....

.....

9. Como é que preferes aprender a Geometria?

Usando a régua e o compasso.	Usando o computador.

Porquê?

.....

.....

.....

.....

10. Dá sugestões sobre como os professores deveriam ensinar Geometria..

.....

.....

.....

.....

11. Tens computador?

Sim. ☐ Não. ☐

Obrigado pela tua colaboração.

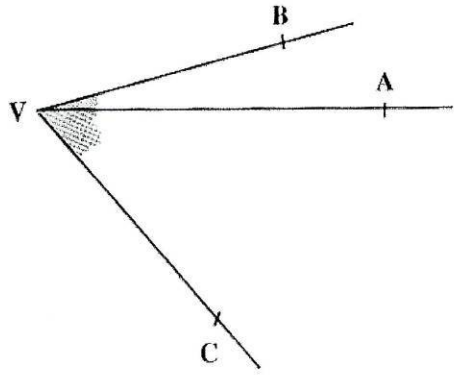
Escola E. B. 2, 3 de Baguim	
MATEMÁTICA	**9º ANO**
Ficha de Trabalho	**Janeiro de 2002**

ÂNGULOS

1. Ângulos adjacentes

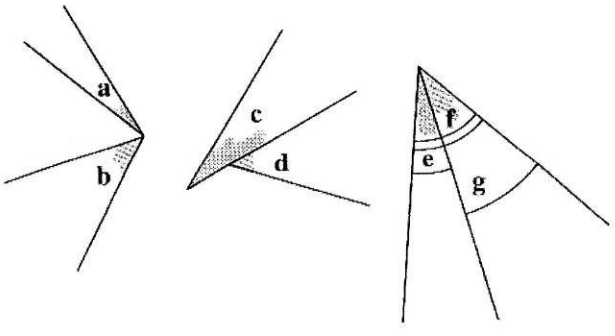
Dois ângulos dizem-se adjacentes se têm o vértice comum e a sua intersecção é uma semi-recta (lado comum aos dois ângulos).

Os ângulos BVA e AVC são adjacentes.



Os dois ângulos assinalados têm o mesmo vértice, **V**, e a sua intersecção é a semi-recta **VA** (lado comum aos dois ângulos)

♦ As afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas?



a) Os ângulos **a** e **b** não são adjacentes.

b) Os ângulos **c** e **d** são adjacentes.

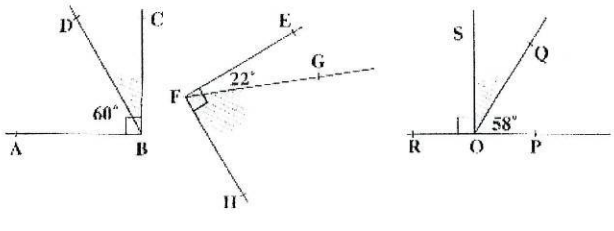
c) Os ângulos **e** e **f** são adjacentes.

d) Os ângulos **e** e **g** não são adjacentes.

2. Ângulos complementares

Dois ângulos são complementares se a soma das suas amplitudes é 90º.

♦ Calcula a amplitude de cada um dos ângulos sombreados.



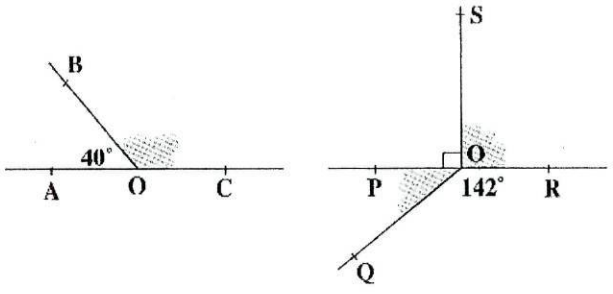
♦ Calcula a amplitude do complementar dos ângulos.

a) 80º b) 17º c) 5º

3. Ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares se a soma das suas amplitudes é 180°.

♦ Calcula a amplitude de cada um dos ângulos sombreados.



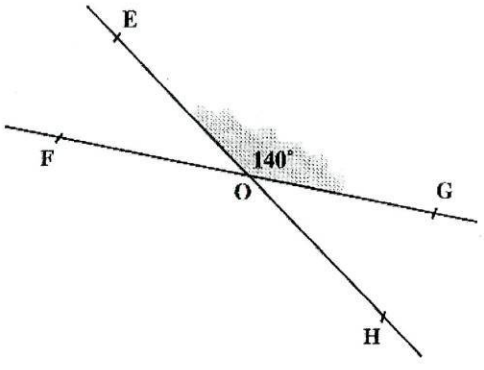
♦ Calcula a amplitude do suplementar dos ângulos.

a) 105° b) 20° c) x°

4. Ângulos verticalmente opostos

Dois ângulos dizem-se verticalmente opostos se têm o vértice comum e os lados de cada um estão no prolongamento dos lados do outro.

Dois ângulos verticalmente opostos são geometricamente iguais.



♦ Considera a figura.

Os ângulos EOG e FOH são .... O mesmo acontece com os ângulos .....

Completa:

FÔH = ... EÔF = ... GÔH = ...

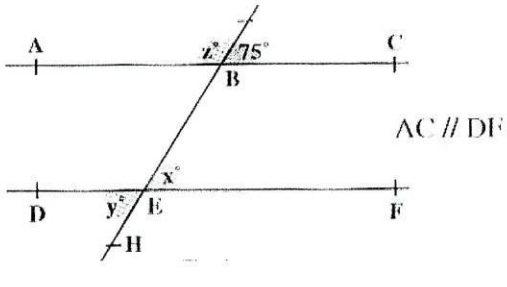
5. Ângulos de lados paralelos

O lado de um ângulo é paralelo ao lado de outro ângulo se os lados pertencem à mesma recta ou a rectas paralelas.

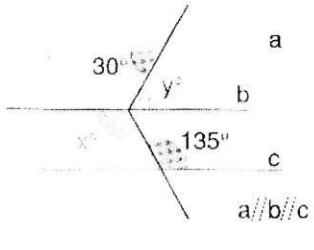
Dois ângulos de lados paralelos, ambos agudos ou ambos obtusos, são iguais.

Dois ângulos de lados paralelos, um agudo e outro obtuso, são suplementares.

♦ Determina **x**, **y** e **z** em cada uma das figuras. Justifica.



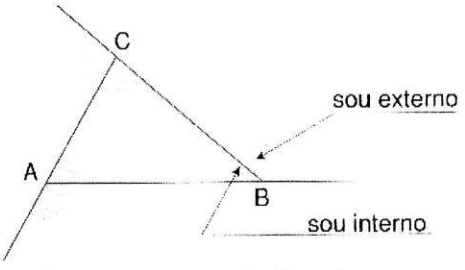
AC // DF



Escola E. B. 2, 3 de Baguim	
MATEMÁTICA	9º ANO
Ficha de Trabalho	Janeiro de 2002

TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

1. Ângulos num triângulo



Num triângulo há três ângulos internos e três ângulos externos.

Convencionou-se que quando se diz ângulos do triângulo se refere aos ângulos internos.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

2. Relação entre os lados e os ângulos de um triângulo

Num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais e a ângulos iguais opõem-se lados iguais.

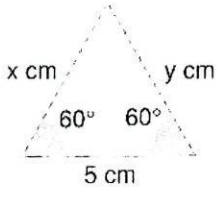
Num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

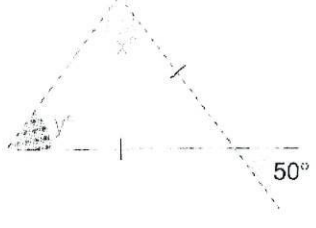
Num triângulo, ao menor lado opõe-se o menor ângulo.

♦ Sabe-se que num triângulo [AEO] se tem $\hat{A} = 40º$, $\hat{E} = 130º$ e $\hat{O} = 10º$.

Indica o maior lado e o menor lado.

♦ Determina **x** para cada uma das seguintes situações.

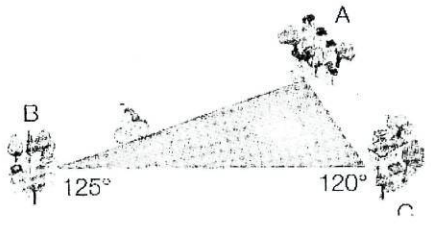




♦ O Nuno foi de bicicleta da cidade **A** até à cidade **B** e da cidade **B** até à cidade **C**, regressando à cidade **A**.

Os ângulos que teve de rodar para mudar de direcção estão indicados na figura.

Qual das cidades, **B** ou **C**, está a maior distância de **A**? Justifica.



3. Quadriláteros

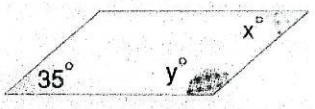
Um quadrilátero é um polígono com 4 lados.

Um quadrilátero é regular se tem os lados iguais e os ângulos iguais.

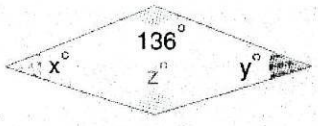
Só existe um quadrilátero regular, o _____.

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

♦ Para cada uma das seguintes figuras determina o valor das letras.



Paralelogramo



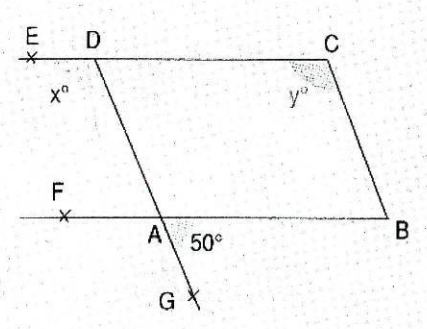
Losango

♦ Observa a figura, onde DC//FB e CB//DG.

a) Indica dois ângulos verticalmente opostos.

b) Indica dois ângulos adjacentes.

c) Determina **x** e **y**.



♦ Determina **x** e **y**.