

José Miguel Rodrigues de Sousa

Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia



**Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Departamento de Matemática Pura
Abril / 2001**

Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia

José Miguel Rodrigues de Sousa



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Matemática – Fundamentos e Aplicações*

Orientada por
Carlos Manuel Monteiro Correia de Sá

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Departamento de Matemática Pura
Abril / 2001

Para a Carolina Sofia

que com o seu Sorriso sempre me incentivou ...

AGRADECIMENTOS

Muito especialmente, desejo agradecer ao meu orientador Prof. Doutor Carlos Sá, pela disponibilidade, atenção dispensada, paciência, dedicação e profissionalismo ... um Muito Obrigado.

À minha esposa, Maria José, pelo incentivo, compreensão e encorajamento, durante todo este período.

À minha família, em particular, aos meus pais e aos meus sogros e em especial ao meu sogro pelo zelo nas construções em madeira.

Aos meus amigos, em especial à Teresa Dias e ao Coutinho Lopes, pelo seu apoio.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de entusiasmo partilhados em conjunto.

A todos os demais

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	6
CAPÍTULO 1 - TRISSECÇÃO DO ÂNGULO	
1.1 Preâmbulo	13
1.2 A trissecção do ângulo reduzida a um outro problema	17
1.3 A solução atribuída a Hípias	20
1.4 A contribuição de Arquimedes	24
1.4.1 A solução do problema de nêusis	28
1.4.2 O uso da espiral de Arquimedes	31
1.5 A concóide de Nicomedes a resolver uma construção por nêusis	33
1.6 Papo e as soluções pelo uso das cônicas	37
1.6.1 A solução de uma construção por nêusis envolvendo uma hipérbole ...	39
1.6.2 As soluções directas pelo uso da hipérbole	41
CAPÍTULO 2 - DUPLICAÇÃO DO CUBO	
2.1 A história do problema	46
2.2 A redução de Hipócrates	51
2.3 A solução de Arquitas	57
2.4 A solução de Eudoxo	63
2.5 A solução de Menecmo	65
2.6 A solução atribuída a Platão	68
2.7 A solução de Eratóstenes	71
2.8 A solução de Nicomedes	75
2.9 As soluções de Herão, Apolónio e Filão de Bizâncio	78
2.9.1 Herão	79
2.9.2 Apolónio	81
2.9.3 Filão de Bizâncio	83
2.10 A solução de Diocles	85
2.11 As soluções de Esporo e Papo	90
EPÍLOGO	93
LISTA DE REFERÊNCIAS	105
ÍNDICE ALFABÉTICO DOS NOMES	114

INTRODUÇÃO

“Os jogos antigos são os melhores jogos. Um dos mais antigos são as construções geométricas. Como Platão especificou, o jogo é executado com uma régua e um compasso, onde a régua é apenas usada para desenhar a recta que passa por dois pontos dados e o compasso é usado unicamente para desenhar um círculo de centro dado e que passa por um determinado ponto.” ([Ma], p. 9).

Porque será possível bissectar um ângulo mas, geralmente, não o podemos trissectar? Porque se pode duplicar um quadrado, mas não um cubo? Será que estes factos dependem unicamente das regras estabelecidas ou será que dependem dos conhecimentos existentes em geometria?

Esta dissertação aborda dois problemas clássicos da geometria antiga: a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. As soluções aqui estudadas envolvem construções geométricas que, embora não sejam da matemática elementar, fazem apelo a métodos geométricos simples. Estes assuntos poderão ter interesse pedagógico na formação de professores, proporcionando a introdução de novos conceitos, tais como o estudo das cónicas e outras curvas potencialmente úteis na vertente didáctica.

Pensa-se que a matemática dos antigos gregos nasceu do contacto deste povo com o Oriente e, em particular, com o Egipto, onde os sábios mais eminentes da Grécia foram ampliar as suas ideias e o seu saber. Os primeiros quatro séculos do período helénico (compreendido entre o século VI a.C. e o séc. V d.C.) constituem um período de realizações extraordinárias da matemática grega.

“(…) as matemáticas produziram neste período [pré-euclidiano], em íntima colaboração com a filosofia, o seu próprio progresso (…).” ([V], p. 234).

Foi neste período que se iniciou o estudo de três problemas geométricos que desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais, durante mais de dois mil anos. Durante séculos diversas soluções foram propostas para a resolução destes problemas geométricos mas não estavam de acordo com as regras do jogo, presumivelmente, colocadas na Academia de Platão, onde apenas *construções com régua não graduada e compasso* eram admitidas. Estes problemas ficaram famosos, talvez por serem os primeiros onde surgem

grandes dificuldades de resolução, de acordo com as regras inicialmente colocadas. São conhecidos pelos *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega*:

- *trisseção do ângulo* — o problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais;
- *duplicação do cubo* — o problema de construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;
- *quadratura do círculo* — o problema de construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado.

Os problemas da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo têm vários pontos em comum: ambos podem ser resolvidos através de secções cónicas; quando traduzidos em linguagem algébrica exprimem-se por equações cúbicas; a prova da impossibilidade de solução com régua não graduada e compasso faz uso da mesma abordagem. Nesta dissertação iremos analisar as contribuições de vários matemáticos para a resolução destes dois problemas, ao longo do período helénico¹. No entanto, refira-se que o problema da quadratura do círculo² remonta ao antigo Egipto.

Ao falarmos em construções com régua não graduada e compasso estamos a referir-nos aos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides. Estes postulados são a base destas construções, muitas vezes designadas por construções euclidianas. Nos *Elementos* de Euclides não se menciona o compasso ou quaisquer outros instrumentos, Euclides simplesmente assume que linhas rectas podem ser construídas dados dois pontos, e que uma circunferência pode ser construída dado o seu centro e passando por um outro ponto. A régua não tem propriedades métricas e o compasso é de pontas “caídas” (contrariamente ao nosso compasso de pontas fixas³) e assim a possibilidade de transposição de comprimentos é, obrigatoriamente, assegurada por *Elementos*⁴ I, 2.

¹ As tentativas de resolução não se limitaram a este período, basta consultar o apêndice do sétimo volume das *Obras Sobre Matemática* de Gomes Teixeira ([Te1]) para encontrarmos contribuições de outros matemáticos.

² O problema da quadratura do círculo está intimamente ligado à história do cálculo do número π . Visto que um círculo de raio r tem de área πr^2 , o problema de construir um quadrado com a área igual a um dado círculo, cujo raio seja um segmento unitário, é equivalente à construção de um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ para a aresta do requerido quadrado.

³ À primeira vista podia supor-se que o «compasso moderno» fosse mais poderoso que o «compasso euclidiano», mas é curioso que estes dois instrumentos sejam equivalentes ([Ev], p. 134). O matemático italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800) provou que as construções com compasso são tão poderosas como as construções com régua e compasso. Por outro lado, o matemático suíço Jacob Steiner (1796-1863) mostrou que as construções com régua (mas exigindo que no plano de desenho exista um círculo com centro e raio fixos) são tão eficazes como as construções com régua e compasso.

⁴ Ao longo de toda a dissertação será usada esta notação quando nos referirmos a proposições dos *Elementos* de Euclides ([Eu]; em [H2]).

A parte mais substancial do percurso efectuado pela matemática grega estava subordinada à geometria, cujo desenvolvimento parece ter sido influenciado pelas investigações feitas para tentar resolver estes três problemas clássicos da geometria grega. O raciocínio matemático dos gregos baseava-se, quase unicamente, nas formas e figuras geométricas. Um segmento de recta representava também o seu próprio comprimento; o produto de dois segmentos de recta representava uma área rectangular; o produto de três segmentos de recta representava um volume paralelepípedo. Isto é, efectuavam as operações aritméticas através das construções geométricas, por exemplo, se x e y representavam dois segmentos, então xy era a área do rectângulo de lados x e y .

Para os géometras gregos, um problema resolúvel com régua não graduada e compasso era um problema cuja solução passava por construir os elementos desconhecidos, utilizando apenas a régua não graduada e o compasso, a partir dos elementos geométricos conhecidos. O que significa, executar construções que se possam fundamentar nos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides. Papo classificou os problemas geométricos em três tipos, atendendo aos meios pelos quais é possível construir uma sua solução. Os que podem ser resolvidos apenas por meio de linhas rectas e circunferências são designados por *planos*, visto que as curvas referidas têm a sua origem num plano; os que envolvem na sua resolução superfícies cónicas, são chamados problemas *sólidos*, porque fazem uso de superfícies de figuras sólidas; os que envolvem, na sua construção, curvas que se obtêm de superfícies menos regulares e de movimentos mais complexos são os *lineares*.

O primeiro capítulo deste texto estuda o problema da trissecção do ângulo e as várias soluções apresentadas pelos matemáticos ao longo do período helénico. A partir de um ângulo arbitrário, os géometras gregos tinham conhecimento de como construir um ângulo com o dobro, triplo, etc. da amplitude do ângulo dado, isto é, sabiam como construir os múltiplos de um ângulo. O problema surge nos submúltiplos: apesar de ter sido fácil bissectar um ângulo, com o uso exclusivo da régua não graduada e compasso, o mesmo não aconteceu na trissecção de um ângulo arbitrário. Os géometras gregos reduziram este problema a um outro tipo de problema: um problema de construções por *nêusis*. Pensa-se que este tipo de construções eram já conhecidas de Hipócrates no séc. V a.C.. Como veremos, algumas das construções apresentadas têm por objectivo resolver esta *nêusis*, como é o caso da solução de Nicomedes e de uma das soluções apresentadas por Papo. No entanto, Arquimedes apresenta uma solução para uma outra *nêusis*, fundamentada por um dos resultados da sua obra *Livro dos Lemas*.

O desenvolvimento da matemática na Antiga Grécia deve-se, também, ao aparecimento de curvas, que não a recta e a circunferência, surgidas nas sucessivas tentativas de resolução dos três problemas clássicos da geometria grega. É o caso da curva trissectriz de Hípias, que é descrita por via cinemática e permite reduzir a multisseccção de um ângulo agudo à multisseccção de um segmento de recta. Assim, ela pode ser usada para dividir um ângulo arbitrário em várias partes iguais e não apenas em três partes. A espiral de Arquimedes é exemplo de uma outra curva que pode ser utilizada para a multisseccção de um ângulo, em particular, a trisseccção. Arquimedes contribui ainda, embora não directamente, com uma outra solução para a trisseccção do ângulo, aliás uma das mais interessantes construções do tipo nêusis.

Nicomedes inventou uma curva, a concóide, com o intuito primordial de trissectar o ângulo, mas contrariamente ao que se passa com a trissectriz de Hípias e a espiral de Arquimedes, a solução de Nicomedes não permite reduzir a multisseccção de um ângulo à multisseccção de um segmento de recta. Segundo parece, Nicomedes inventou um instrumento para construir a sua curva; no entanto, a concóide de Nicomedes tem um interesse muito mais teórico do que prático, visto que podemos mover uma régua marcada até que uma dada posição seja alcançada e, assim, obtemos a solução de Nicomedes.

O último dos grandes géometras do período helénico foi Papo de Alexandria; a sua obra *Colecção Matemática* será uma referência ao longo de toda esta dissertação, não só no que diz respeito à trisseccção do ângulo mas também à duplicação do cubo. As soluções para a trisseccção do ângulo transmitidas por Papo, sem fazer referência aos autores ou às suas fontes, fazem uso de cónicas. Na primeira solução, Papo apresenta uma construção por nêusis, enquanto que a segunda é uma construção directa, sem o recurso a nêusis, onde Papo utiliza uma hipérbole de dois modos distintos.

O segundo capítulo será integralmente dedicado ao problema da duplicação do cubo e às soluções apresentadas pelos matemáticos ao longo do período helénico. Que melhor motivação para estudar história da matemática do que uma lenda? Conta-se que depois de uma época de esplendor político e cultural, a ilha de Delos foi assolada por uma peste que assombrava a Grécia. De modo a combater a peste, o oráculo propôs aos habitantes que fosse construído um altar com o volume duplo daquele que existia em forma cúbica. Supuseram que se duplicassem a aresta do altar teriam o problema resolvido; ficaram espantados quando, efectivamente, obtiveram um altar cujo volume era oito vezes o volume do altar existente, o que constituiu um grande embaraço para os géometras da época.

Na Antiga Grécia a matemática tinha um valor especulativo, era parte da filosofia e não tinha uma intenção prática. O desígnio dos géometras gregos na resolução deste problema era chegar à solução por métodos planos, isto é, utilizar somente a régua não graduada e o compasso. O primeiro contributo para a resolução do problema da duplicação do cubo é de Hipócrates de Quios, que reduz este problema a um outro — *a procura de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o seu dobro*. A partir da contribuição de Hipócrates todos os esforços dos matemáticos se voltaram para a procura dos dois meios proporcionais em causa e, possivelmente, a ele se deve o nascimento do tão conhecido método de redução.

Talvez possamos afirmar que os matemáticos e filósofos gregos prepararam os alicerces do edifício geométrico, graças à sua capacidade visual. A solução apresentada por Arquitas é um bom exemplo desta conjectura, pois é uma solução de rara beleza tridimensional, que envolve três superfícies de revolução. Pensa-se que um dos discípulos de Arquitas, Eudoxo de Cnido, apresentou uma solução, possivelmente influenciada pela solução do seu mestre, mas que infelizmente não chegou até nós.

Os matemáticos gregos desenvolveram, largamente, a chamada álgebra geométrica, através de figuras geométricas simples e das respectivas áreas. Menecmo terá sido o primeiro a representar curvas por meio de equações, no entanto de um modo um pouco primitivo. A solução que Menecmo apresenta para encontrar os meios proporcionais, referidos por Hipócrates, faz uso de curvas que se podem obter pela intersecção dum cone de base circular com um plano. Pensa-se que foram as investigações efectuadas por Menecmo, para solucionar o problema em estudo, que o levaram à descoberta das secções cónicas.

Platão criticava todas as construções que não fizessem uso exclusivo de raciocínios geométricos, por estas desvirtuarem a beleza e a pureza da geometria. No entanto, é a ele atribuída, talvez incorrectamente, uma solução para o problema da duplicação do cubo através de um engenho mecânico — o esquadro de Platão — que faz uso de uma determinada configuração de triângulos rectângulos. Mas esta não é a única solução conhecida através de engenhos mecânicos; Eratóstenes de Cirene construiu um engenho, com o intuito de resolver este problema, do qual muito se orgulhava. Esse engenho, conhecido pelo nome de mesolabo, tem como base uma configuração de triângulos semelhantes que deslizam sobrepondo-se, permitindo construir os dois segmentos em proporção contínua entre a aresta do cubo dado e o seu dobro.

Os problemas clássicos da geometria grega originaram um pretexto para estudar curvas mais complexas que a recta e a circunferência. Além das cónicas, já anteriormente

referidas, outra curva — a concóide de Nicomedes — aparece associada ao problema da duplicação do cubo, ou seja, ao problema dos dois meios proporcionais. Esta curva, exposta por Nicomedes na sua obra *Sobre as Linhas Concóides*, é utilizada na duplicação do cubo e, como já referimos, na trissecção do ângulo.

Uma outra solução por meio de uma curva, legada pelos gregos, faz uso da cissóide de Diocles. A solução apresentada por este matemático parece ter influenciado outras soluções, nomeadamente, as soluções de Esporo e Papo. Estas soluções serão apresentadas simultaneamente, tendo em atenção que são, no essencial, a de Diocles; mas ao invés de usarem a curva cissóide, usam a manipulação de uma régua que deverá atingir uma posição pretendida.

A principal fonte para o nosso conhecimento dos desenvolvimentos do problema da duplicação do cubo é o legado de Eutócio no seu comentário à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*. As soluções de Apolónio, Herão e Filão serão também apresentadas em simultâneo, tendo em atenção que têm, em termos teóricos, o mesmo objectivo: a determinação de dois pontos numa posição desejada.

Como já referimos, todas as construções apresentadas após o trabalho de Hipócrates têm por objectivo encontrar os dois meios proporcionais a que Hipócrates se refere. Na procura das soluções para os problemas geométricos, os géometras gregos desenvolveram uma técnica especial chamada “análise”; supunham o problema resolvido e depois investigavam as propriedades e o processo utilizado nessa solução, raciocinando em sentido inverso. A solução de Menecmo para o problema da duplicação do cubo, relatada por Eutócio no seu comentário à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro* (cf. [E]; em [ver2], II, pp. 603-605), é um exemplo dessa “análise”.

Nos *Elementos* de Euclides podemos encontrar vários problemas de construções geométricas, cujas soluções podem ser obtidas com o uso exclusivo da régua não graduada e do compasso. Não é o caso dos três problemas clássicos da geometria grega; aliás Papo, no prefácio ao livro III da sua *Colecção Matemática*, insinua que estes problemas talvez sejam impossíveis de resolver com os instrumentos euclidianos.

A impossibilidade de resolução, com régua não graduada e compasso, destes dois problemas clássicos da geometria grega, só foi demonstrada no séc. XIX pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel. A demonstração da impossibilidade deve-se ao facto de que as únicas medidas que se podem obter nas construções com régua não graduada e compasso, são as que se podem obter através da adição, subtracção, multiplicação, divisão e extracção de raízes quadradas a partir de números naturais. Quer a trissecção do ângulo quer a duplicação

do cubo envolvem medidas que não podem ser construídas, unicamente, com régua não graduada e compasso.

No que concerne às referências bibliográficas, procuramos ser o mais abrangentes possível sobre o que se tem publicado acerca do conteúdo deste texto, o qual esperamos que possa contribuir para um melhor conhecimento de assuntos que fascinaram matemáticos ao longo dos tempos, em especial na *Antiga Grécia*.

CAPÍTULO 1

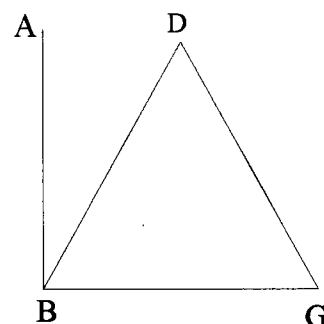
TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

1.1 PREÂMBULO

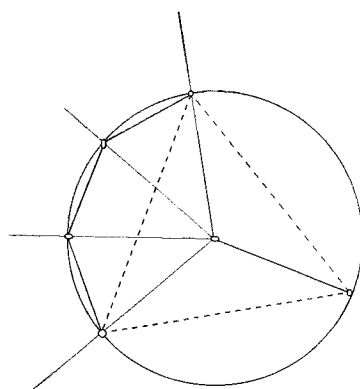
Há pelo menos dois aspectos em que o problema da trissecção do ângulo (dividir um ângulo arbitrário, apenas com régua não graduada e compasso, em três partes iguais) difere dos outros dois clássicos problemas da geometria grega — a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Em primeiro lugar não existe nenhuma lenda que lhe esteja associada; em segundo lugar, enquanto que não é possível duplicar um cubo ou quadrar um círculo, com régua não graduada e compasso, por mais especiais que sejam os valores da aresta do cubo ou do raio do círculo é, no entanto, possível trissectar ângulos de determinadas amplitudes. Por exemplo, Papo indica, no Livro IV da sua *Colecção Matemática* (cf. [P]; em [Ver3], I, p. 213), um método muito simples para trissectar um ângulo recto:

“XXXIX

Mas se o ângulo for recto, tomaremos uma recta BG sobre a qual descreveremos o triângulo equilátero BDG e, dividindo o ângulo compreendido pelas rectas DB , BG em duas partes iguais, teremos o ângulo compreendido pelas rectas AB , BG dividido em três partes iguais.”



Não é conhecida a origem do problema da trissecção do ângulo, mas é muito provável que tenha surgido no seguimento da construção de polígonos regulares. Por exemplo, para construir um polígono regular de nove lados é necessário trissectar um ângulo de 120° .



Além disso, podemos encontrar no Livro IV dos *Elementos* de Euclides construções para inscrever numa circunferência polígonos regulares de três, quatro, cinco e seis lados. Os menores números para os quais os géometras gregos não conheciam uma construção exacta eram os polígonos regulares de sete e de nove lados. Estes factos levam-nos a supor que a construção de polígonos regulares foi um assunto que ocupou os matemáticos na Antiga Grécia, talvez incentivados pela descoberta da construção do pentágono regular, pelos Pitagóricos.

“É provável que o terceiro problema célebre – a trissecção do ângulo – tenha também ocupado a atenção dos géometras neste período [o período do problema da duplicação do cubo]. Não há dúvida que os Egípcios conheciam como dividir um ângulo ou o arco de um círculo, em duas partes iguais; assim eles também deviam saber como dividir um ângulo recto em três iguais. Nós já vimos, além do mais, que a construção do pentágono regular era conhecida de Pitágoras e podemos inferir que ele podia dividir um ângulo recto em cinco partes. Deste modo, nessa altura, o problema da trissecção de um qualquer ângulo – ou o mais geral de dividir um ângulo num qualquer número de partes iguais – podia surgir naturalmente.” ([All], p. 88).

No entanto, não será de excluir a hipótese deste problema ter nascido como uma extensão natural da bissecção de um ângulo (*Elementos* I, 9), tarefa extremamente fácil e possível de executar com régua não graduada e compasso. A divisão de um segmento de recta em várias partes iguais, com os instrumentos euclidianos, é simples e poderá, também, ter levado ao problema da trissecção do ângulo, num esforço de transpor para ângulos o que era possível efectuar em segmentos de recta. ([H4], I, p. 235; [Ev], p. 137).

Tendo em atenção o simples enunciado deste clássico problema, dividir um ângulo em três partes iguais parecia ser uma tarefa trivial e, talvez por esse facto, tenha sido difícil de aceitar, desde a Grécia clássica até ao nosso século, que não era possível encontrar uma solução de acordo com os requisitos euclidianos. No entanto, não é um problema de tão simples resolução com poderia parecer à primeira vista. Howard Eves ([Ev], p. 136) escreve:

“Dos três famosos problemas da Antiguidade, o da trissecção do ângulo é destacadamente o mais popular entre os não iniciados em matemática dos Estados Unidos hoje em dia. Todos os anos os jornais de matemática e os membros da classe dos professores de matemática do país recebem muitas comunicações dos “trissecionadores de ângulos” e não é raro ler-se em jornais que alguém finalmente resolveu o evasivo problema.”

É admirável que um problema já conhecido dos géometras gregos e cuja impossibilidade de resolução (nas condições em que foi colocado), foi demonstrada no séc.

XIX faça, ainda, correr tanta tinta⁵. Embora as palavras de Howard Eves tenham sido escritas no ano de 1953; em Abril de 1999 John Conway, actualmente professor no Departamento de Matemática da Universidade de Princeton, respondia a uma questão colocada na Internet⁶ sobre uma possível solução para o problema da trissecção do ângulo. Aliás, o próprio John Conway afirmou-nos⁷: “(...) durante a minha actividade recebi e respondi a cerca de 50 pessoas que efectuaram tentativas da trissecção do ângulo (...)” Em Janeiro de 2000, John Conway responde a uma questão, no grupo de discussão da Internet Geometry.college, colocada por um céptico anónimo que não acredita que os matemáticos tenham provado a impossibilidade da trissecção do ângulo, uma vez que considera que a matemática e as tecnologias é que ainda não evoluíram ao ponto de ser possível tal trissecção.

Em 1987 surgiu uma obra⁸, inspirada em *A Budget of Paradoxes* de De Morgan, onde um dos seus objectivos era desencorajar o aparecimento de *trissecções*. No entanto, tal intenção foi infrutífera, em 1993, nos Estados Unidos, é patenteado um instrumento para a trissecção. Na segunda edição dessa obra ([Du4], xvi), sob o novo título *The Trisectors*, o autor escreve desesperadamente:

YOU CAN'T TRISECT ANGLES !

DON'T TRY !

Obviamente que o autor se refere à impossibilidade de trissecção unicamente com os instrumentos euclidianos – régua não graduada e compasso.

Papo de Alexandria, no Livro IV da sua *Colecção Matemática*, afirma que os géometras gregos foram incapazes de resolver o problema da trissecção do ângulo usando apenas métodos planos, isto é, utilizando unicamente linhas rectas e circunferências (no fundo, régua não graduada e compasso), pelo facto do problema não ser ‘plano’ mas sim ‘sólido’. Acrescenta ainda que, como os primeiros géometras não estavam familiarizados com as secções cónicas, o problema ficou na incerteza. Apesar disso, mais tarde, executaram a trissecção do ângulo com a preciosa ajuda de o terem reduzido a um outro tipo de problema. ([P]; em [Ver3], pp. 209-210).

As tentativas para resolver o problema da trissecção do ângulo foram muito frutíferas ao contribuírem para o desenvolvimento da geometria. No período grego⁹ apareceram várias

⁵ Em 1999 foi editado um livro intitulado *New Theory of Trisection: Solved the Most Difficult Math Problem for Centuries in the History of Mathematics*. ([Chel]).

⁶ No MathForum, em <http://forum.swarthmore.edu>.

⁷ Por e-mail em 18/01/2000.

⁸ Dudley, U. (1987) – *A Budget of Trisections*, Springer-Verlag, New York.

⁹ Estamos a considerar o período compreendido entre o séc. VI a.C. e o séc. V d.C..

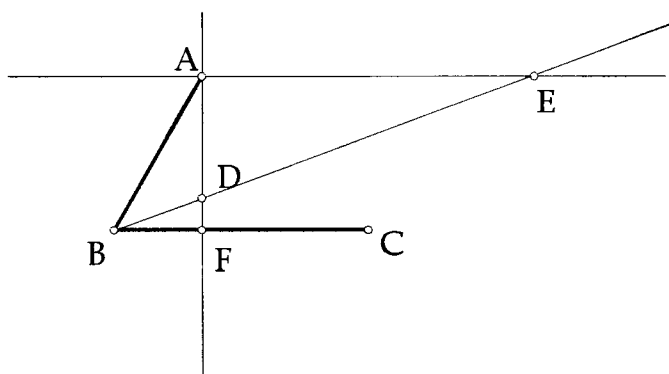
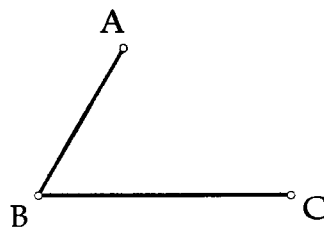
soluções para este clássico problema que, obviamente, não estavam de acordo com os requisitos de unicamente utilizar régua não graduada e compasso. É sobre estas construções, que presentemente conhecemos, que ao longo deste capítulo nos vamos debruçar, apresentando-as por uma possível ordem cronológica. Mas antes, comecemos por analisar a redução do problema da trissecção do ângulo a um outro problema, redução esta de extrema importância, tendo em atenção que permitiu o aparecimento de novas técnicas geométricas.

1.2 A TRISSECÇÃO DO ÂNGULO REDUZIDA A UM OUTRO PROBLEMA

Como anteriormente referimos, foi de extrema importância a redução do problema da trissecção do ângulo a um outro problema; vejamos qual.

Consideremos um qualquer ângulo ABC , que pretendemos trissectar. Basta-nos pensar num ângulo agudo, pois no caso de um ângulo recto é possível trissectá-lo com régua não graduada e compasso, recorrendo a um triângulo equilátero (cf. p. 13); quanto a um ângulo obtuso, podemos decompô-lo na soma de um ângulo recto com um ângulo agudo. Papo indica estes dois casos como corolários da proposição 32 do Livro IV da sua *Colecção Matemática* (cf. [P]; em [Ver3], I, pp. 213-214).

Voltemos então ao caso do ângulo agudo. Sejam, de acordo com a figura seguinte, BA e BC os lados que determinam o ângulo que pretendemos trissectar.

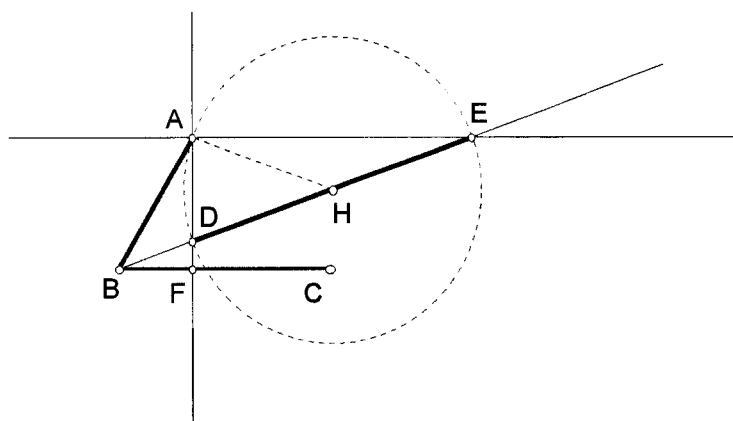


Pelo ponto A dum dos lados, tiram-se uma paralela e uma perpendicular ao outro lado. O segmento DE é *inserido* entre estas duas rectas de modo a que o seu comprimento seja duplo do comprimento do segmento AB e, ainda, de tal modo que o ponto B , vértice do ângulo a trissectar, esteja no seu prolongamento. Então, o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC .

Justifiquemos, agora, que o ângulo ABC é trissectado pelo recta BD . Marquemos H , o ponto médio do segmento DE , e unamos os pontos A e H .

Tendo em atenção que a recta DE intersecta as rectas paralelas AE e BC , com base em *Elementos* I, 29, podemos afirmar que os ângulos alternos internos HEA e DBC são geometricamente iguais. Por outro lado, o ângulo EAD , visto que é recto, pode ser inscrito numa semicircunferência de diâmetro DE e centro no ponto H – a tracejado na figura seguinte. Assim, visto que por construção os segmentos HE e HA são iguais, o triângulo AHE é isósceles e, portanto (*Elementos* I, 5) os ângulos EAH e HEA são iguais. Tendo em atenção que, DE tem o dobro do comprimento de BA , H é o ponto médio de DE e que AB é igual a

AH , chegamos à conclusão que o triângulo ABH é isósceles, portanto (*Elementos* I, 5) os ângulos ABH e BHA são iguais.



Como o ângulo BHA é um ângulo externo ao triângulo AHE , por *Elementos* I, 32, podemos afirmar que o ângulo BHA é igual à soma dos ângulos internos opostos, EAH e HEA . Mais, o ângulo BHA é o dobro do ângulo HEA (ou do ângulo EAH) e como o ângulo ABD é igual ao ângulo BHA temos que o ângulo DBC é metade do ângulo ABD e, finalmente, que o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC .

Pelo que acima foi exposto, o problema da trissecção dum ângulo agudo fica resolvido se soubermos inserir o segmento DE (duplo de BA) entre as rectas FA e AE e *apontado* para o ponto B . Assim, ao depararmo-nos com o problema da trissecção do ângulo, reduzimo-lo a um outro problema, que os géometras gregos designaram por problema de *construção por nêusis*¹⁰ – a inserção dum segmento de recta de comprimento pré-definido entre duas curvas, de modo a que um ponto fixo se encontre ou nesse segmento ou no seu prolongamento.

“Julga-se que este modo [pela construção por nêusis] de trissectar um ângulo [descrito por Papo na proposição *Colecção Matemática* IV, 32] seja muitos séculos mais antigo do que Papo pois, já no século V a.C., Hipócrates de Quios fizera uso duma construção por *nêusis*, num argumento bem mais complexo do que o da trissecção do ângulo.” ([ESQSC], p. 281).

Uma questão que agora se coloca é saber como efectuar esta construção por nêusis, a qual não pode ser efectuada apenas com régua não graduada e compasso. Aliás Thomas Heath ([H4], I, pp. 237-238) mostra que a solução desta construção por nêusis é equivalente à solução de uma equação cúbica¹¹. No entanto, existem construções por nêusis que podem ser resolvidas apenas com régua não graduada e compasso, como afirma Carlos Sá ([S], p. 4):

¹⁰ Do verbo grego *neuein*, que significa *apontar*.

¹¹ Mais tarde veremos quais são as equações algébricas passíveis de solução com régua não graduada e compasso.

“A primeira ocorrência histórica conhecida duma construção por *nêusis* data do século V a.C (a construção da terceira lúnula de Hipócrates de Quios) e pode na verdade ser levada a cabo apenas com régua e compasso (...). Em geral, contudo, as construções por *nêusis* não são redutíveis a construções com régua e compasso.”

Então, como efectuar esta construção por *nêusis*? A primeira ideia que nos surge é utilizar uma régua graduada e ajustá-la do modo pretendido. Mas, obviamente, os desenvolvimentos dos matemáticos não se ficaram por esta resposta.

“Descobriram-se várias curvas planas superiores que resolvem o problema de *nêusis* ao qual o problema da trissecção pode ser reduzido. Uma das mais antigas é a *concóide* inventada por Nicomedes (c. 240 a.C.).

(...)

Pode-se trissecionar um ângulo genérico com a ajuda de uma cónica. Os gregos antigos não tinham suficiente familiaridade com as cónicas para levar isso a efeito, e a mais antiga demonstração nesses moldes foi dada por Papo (c. 300 d.C.) usando a propriedade foco-directriz das cónicas. (...).

Há curvas transcendentais (não algébricas) que não só trissecionam um ângulo dado como, mais geralmente, multisseccionam-no num número qualquer de partes. De entre essas curvas estão a *quadratriz*, inventada por Hípias (c. 425 a.C.) e a *espiral de Arquimedes*.” ([Ev], pp. 137-138).

A *Colecção Matemática* de Papo é uma fonte riquíssima de informação sobre os desenvolvimentos das soluções para o problema da trissecção do ângulo na Antiga Grécia. A primeira solução apresentada por Papo faz uso de uma construção por *nêusis* cuja solução envolve o uso de uma hipérbole, como mais tarde veremos.

A redução do problema da trissecção do ângulo a um problema de inclinação, isto é, a um problema de *nêusis*, deve ter sido de extrema importância para os géometras gregos. De facto, embora não seja possível encontrar uma solução com régua não graduada e compasso, é extremamente fácil de executar a construção com outros instrumentos mecânicos, como por exemplo uma régua graduada onde se marca a medida pretendida. Assim, estava encontrado um novo caminho de investigação, embora não o único, pois como veremos é possível encontrar soluções sem recorrer a construções por *nêusis*.

Em termos práticos pouco mais havia a fazer, tendo em atenção que era possível mecanicamente encontrar soluções para a trissecção do ângulo. Mas de um ponto de vista puramente matemático os gregos não estavam, em geral, satisfeitos com as soluções mecânicas. É de ter presente as críticas de Platão às soluções que desvirtuassem o carácter ideal da geometria e, por consequência, a sua pureza e a sua beleza.

1.3 A SOLUÇÃO ATRIBUÍDA A HÍPIAS

O nome de Hípias de Elis, geómetra do séc. V a.C., ficou marcado na história das matemáticas principalmente pela sua contribuição com uma solução para o problema da trissecção do ângulo.

Papo de Alexandria no livro IV da sua *Colecção Matemática* descreve uma das mais antigas curvas da matemática, talvez a primeira depois da recta e da circunferência. A descrição dada por Papo sobre a principal propriedade desta curva torna bastante admissível que esta tenha sido inventada durante as tentativas de trissecção do ângulo. Esta curva foi posteriormente usada por Dinóstrato para a quadratura do círculo e como tal é chamada umas vezes *trissectriz*, outras vezes *quadratriz*.

“(…) a quadratriz foi inventada, provavelmente por Hípias de Elis, com o objectivo de trissectar o ângulo e foi originalmente empregada neste propósito; posteriormente Dinóstrato usou a curva para a quadratura do círculo e é daí que deriva o seu nome.” ([All], p. 191).

Tendo em atenção que a curva aparece na história da matemática pela primeira vez como uma curva que permite trissectar o ângulo, isto é, uma curva trissectriz, e associada ao nome do matemático Hípias de Elis, vamos optar pelo nome de *trissectriz de Hípias*.

Papo descreve o processo de construção desta curva que, ao que parece, foi a primeira a ser definida por via cinemática, tendo-se imaginado, desde essa época, instrumentos mecânicos para a traçar. ([V], pp. 194-195).

Seguidamente apresentamos a imagem de um mecanismo para desenhar a trissectriz de Hípias, obtida no site do Museu Universitário de História Natural e da Instrumentação Científica da Universidade de Modena e Reggio Emilia, Itália.

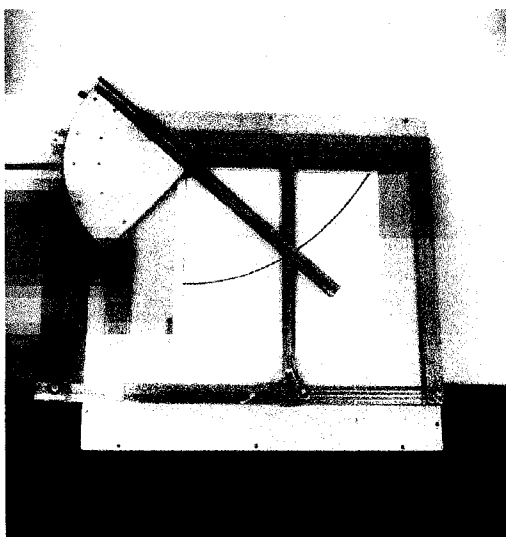


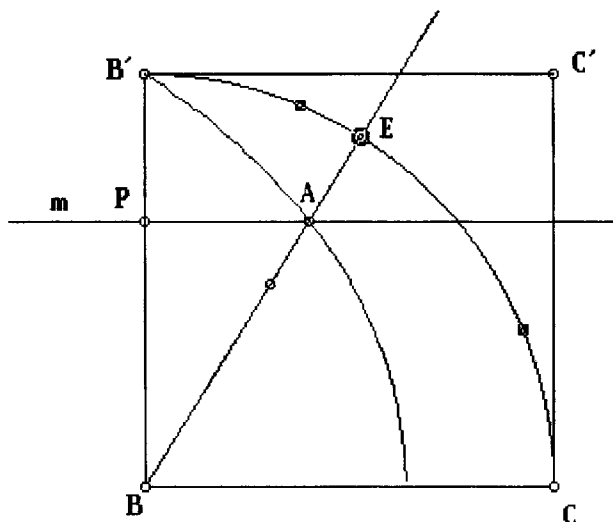
Imagem obtida em <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/155ogg.htm>

Papo começa por se referir à curva do seguinte modo (cf. [P]; em [Ver3], I, pp. 191-192):

“Uma linha que toma o nome da sua própria propriedade foi adoptada por Dinóstrato, Nicomedes e certos outros autores recentes para efectuar a quadratura do círculo; chamaram-lhe quadratriz e eis o modo como é gerada.”

Papo exprime, de uma maneira um pouco confusa, os movimentos que vão gerar a curva. O processo de construção da curva é cinemático, pois a curva é obtida pelos pontos que são a intersecção de dois segmentos de recta em movimento uniforme. Podemos descrever a sua construção do seguinte modo:

1. seja um quadrado $BB'C'C$, de acordo com a figura seguinte;
2. constrói-se uma linha m , paralela ao lado $B'C'$ e que gradualmente desce, a uma velocidade constante, desde a sua posição inicial – que é coincidente com o lado $B'C'$ – até coincidir com o lado BC ;
3. ao mesmo tempo, o lado BB' roda em torno do ponto B , com movimento circular uniforme, desde a posição inicial BB' até à posição final coincidente com o lado BC .



Ambos os movimentos acima descritos começam e terminam simultaneamente e têm velocidades constantes. Enquanto se deslocam, as duas rectas intersectam-se num determinado ponto, A , ponto esse que descreve a *trissectriz de Hípias*.

Do modo como foram considerados os movimentos anteriores podemos afirmar que a distância percorrida pelo lado $B'C'$ é proporcional ao tempo gasto no seu percurso. Do mesmo modo, a amplitude do arco determinado na circunferência de centro B e raio BB' é proporcional ao tempo percorrido no percurso circular deste raio. Assim, existe proporcionalidade entre a distância rectilínea percorrida pelo lado $B'C'$ e a amplitude angular percorrida pelo lado BB' . Ou seja, em todas as posições do ponto A , a condição

$$\frac{BB'}{BP} = \frac{\text{arc } B'C}{\text{arc } EC} \text{ é verificada.}$$

Ora, como afirma Carlos Sá ([ESQSC], p. 285):

“(…) é justamente devido a esta propriedade que a curva de Hípias permite reduzir todas as questões de proporcionalidade entre ângulos a questões análogas entre segmentos de recta e, em particular, permite reduzir a trissecção dum dado ângulo à trissecção dum segmento de recta.”

Como a trissecção de um segmento de recta, com régua não graduada e compasso, era conhecida dos geómetras gregos, está assim justificada a importância da curva de Hípias para o problema da trissecção do ângulo. É de salientar que a curva aqui exposta permite dividir um ângulo num qualquer número de partes, desde que a razão em causa possa ser expressa em termos de segmentos de recta.

Com já referimos, esta curva é também utilizada na quadratura do círculo. No entanto, Esporo de Nicea (séc. III d.C.) criticou a utilização da quadratiz como um método prático para a quadratura do círculo, nomeadamente em duas vertentes: por um lado, afirma que a curva só se consegue construir quando sabemos sincronizar as velocidades, isto é, quando conhecemos a relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro (se assim fosse tínhamos o problema da quadratura do círculo resolvido¹²); por outro lado, o ponto que procuramos para a quadratura do círculo, quando as duas rectas se intersectam no último momento, não existe (não se define). ([T4], pp. 10-11; [P] em [Ver3], I, pp. 193-197; [All], p. 184).

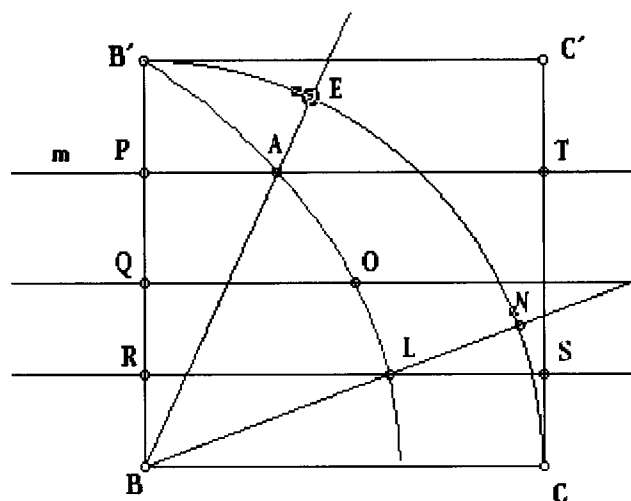
Enquanto que a segunda crítica apresentada por Esporo não se aplica ao nosso caso – a trissecção do ângulo – já quanto à primeira não podemos dizer o mesmo.

Vamos então agora trissectar um ângulo agudo ABC utilizando a trissectriz de Hípias. Comece-se por construir um quadrado $BB'C'C$, a partir do lado BC do ângulo ABC .

Construa-se a curva trissectriz de Hípias e designemos por A (sem perda de generalidade) o ponto de intersecção de um dos lados do ângulo ABC com a curva. Por A , trace-se uma paralela a $B'C'$ e designe-se por P o ponto de intersecção dessa paralela com o segmento BB' .

Trissecte-se o segmento BP (a trissecção de um segmento é possível com régua não graduada e compasso), sendo BR a sua terça parte. Por R trace-se uma outra paralela a $B'C'$ e designe-se por L o ponto de intersecção dessa paralela com a trissectriz de Hípias. Assim, o ângulo LBC é a terça parte ângulo ABC .

¹² Pois era conhecido o valor de π .



Provemos, agora, tal facto. Comecemos, de acordo com a figura anterior, por designar por E e N os pontos de intersecção do arco $B'C$ com as rectas BA e BL e por T e S os pontos de intersecção do lado CC' (do quadrado) com as rectas PA e RL , respectivamente.

Note-se que PT e BE se intersectam num ponto da trissectriz, A , e que RS e BN se intersectam num outro ponto da trissectriz, L .

Pelas propriedades da curva trissectriz de Hípias, é válida a seguinte relação

$$\frac{BP}{BR} = \frac{\text{arco } EC}{\text{arco } NC} = \frac{\angle ABC}{\angle LBC}, \text{ ou seja } \frac{BP}{BR} = \frac{\angle ABC}{\angle LBC}.$$

Mas, como o segmento de recta BR é a terça parte do segmento de recta BP , também o ângulo LBC é a terça parte do ângulo ABC . Mais ainda, tendo em atenção que se reduziu uma questão de proporcionalidade entre ângulos a uma questão de proporcionalidade entre segmentos de recta, a curva trissectriz de Hípias permite reduzir a multisseccção de um ângulo agudo à multisseccção de um segmento de recta.

Observe-se que, embora seja possível construir, com régua não graduada e compasso, alguns pontos da curva trissectriz de Hípias, não é possível desenhar a curva na sua totalidade, com o uso apenas dos instrumentos euclidianos. Continuamos, assim, sem uma solução para o problema de acordo com as regras de resolução inicialmente impostas.

1.4 A CONTRIBUIÇÃO DE ARQUIMEDES

Arquimedes de Siracusa foi um célebre geómetra do século III a.C., e um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Embora não se conheçam construções directamente a ele atribuídas para a solução do problema da trissecção do ângulo, pelo menos dois dos seus trabalhos indicam soluções para o referido problema: a proposição 8 do *Livro dos Lemas* e a curva espiral definida na obra *Acerca das Espirais*.

Wilbur Knorr afirma que a proposição 8 do *Livro dos Lemas* não é uma solução directa do problema da trissecção do ângulo, mas antes um lema apropriado à sua síntese, sendo este problema de nêusis do mesmo tipo daqueles que encontramos em várias proposições da obra *Acerca das Espirais*. Tendo em atenção a proposição em causa, a solução da trissecção do ângulo reduz-se à inserção de um comprimento dado, o raio do círculo, entre o círculo e uma determinada recta – a extensão do seu diâmetro. As descobertas que foram feitas relativamente ao heptágono e às espirais tornam claro que Arquimedes deve ter planeado uma construção desta configuração. ([Kn1], p. 185). Infelizmente muitos dos trabalhos de Arquimedes não chegaram até nós; refira-se, como exemplo, *O Método* que esteve perdido desde os primeiros séculos da nossa era até a sua redescoberta em 1906.

“Arquimedes, como os seus predecessores, foi atraído pelos três famosos problemas de geometria, e a bem conhecida espiral de Arquimedes forneceu soluções para dois deles (não, é claro, só com régua não graduada e compasso).” ([Boy], p. 93).

Embora nada tenha chegado até nós sobre o interesse directo de Arquimedes pelo problema da trissecção do ângulo, sendo este um problema tão famoso na época é de estranhar que Arquimedes não lhe tenha dado uma especial atenção. Sobretudo, porque utilizou construções por nêusis em várias proposições na sua obra *Acerca das Espirais* e, provavelmente, nessa época já era conhecida a redução do problema da trissecção do ângulo a uma construção por nêusis.

De facto, em várias proposições da obra *Acerca das Espirais*, Arquimedes refere construções por nêusis, as quais assume como possíveis sem qualquer explicação, o que nos leva a pensar que as construções por nêusis eram muito familiares aos matemáticos da época. Em termos de teoria matemática a maior parte das construções por nêusis dos gregos requerem o uso de cónicas ou curvas de grau superior a dois. ([Cl2], p. 91).

A influência da contribuição de Arquimedes não se restringiu à sua época. Ainda segundo Knorr, certas modificações no diagrama de Arquimedes para a trissecção do ângulo por meio de uma construção por nêusis levam a construções alternativas importantes nos

escritos de geómetras posteriores. Uma dessas variantes é um dos três métodos, de autor(es) desconhecido(s), transmitidos por Papo na sua *Colecção Matemática*. ([Kn1], pp. 186-187).

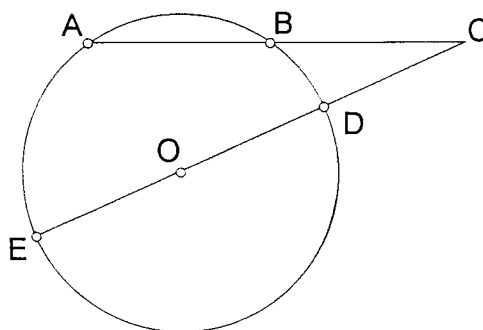
“O livro dos *Lemas* não se preservou no original grego mas em tradução árabe, que depois foi por sua vez traduzida para o latim. (Por isso frequentemente é designado pelo seu título em latim *Liber assumptorum*.) Na verdade, a obra que chegou em latim até nós não pode ser genuinamente a de Arquimedes, pois o seu nome é várias vezes citado no texto. No entanto, mesmo que não seja senão uma miscelânea de teoremas que os árabes atribuíram a Arquimedes, a obra provavelmente é, em substância, autêntica.” ([Boy], p.98).

Embora existam dúvidas se o *Livro dos Lemas* foi efectivamente composto por Arquimedes, Heiberg e Thomas Heath consideram razoável que a proposição 8 seja devida a Arquimedes, visto que a nêusis aí envolvida é muito parecida com as nêusis assumidas como possíveis nas proposições VI e VII em *Acerca das Espirais*. ([Cl1], I, p. 67). Segundo parece,¹³ a tradução feita pelos Árabes originou várias soluções para o problema da trissecção do ângulo, apresentadas por matemáticos Árabes.

Vejamos então o que diz a proposição 8, do *Livro dos Lemas*, donde podemos deduzir uma construção para a solução do problema da trissecção do ângulo, reduzindo-o a um problema de nêusis:

“Proposição 8.

Se AB for qualquer corda num círculo de centro O , e se AB for prolongada até C de modo a que BC seja igual ao raio; se por outro lado CO intersectar o círculo em D e for prolongado de modo a intersectar o círculo uma segunda vez em E , o arco AE será igual a três vezes o arco BD .” ([Ar1]; em [H1], p. 309).



Como facilmente nos apercebemos, esta proposição, pelo facto de relacionar arcos e ângulos, fornece-nos um método para reduzir a trissecção de um qualquer arco (e, deste modo, de um qualquer ângulo), a um problema de construção por nêusis. Assim, para trissectar o arco AE , e considerando EOD o diâmetro da circunferência de centro O , a partir de A traçamos a corda AB e prolongamo-la de modo a encontrar o prolongamento de EOD em

¹³ Tendo em conta o capítulo 8 – Angle Trisections in Pappus and Arabic Parallels – do livro de Wilbur Richard Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, ([Kn2]).

C , com o cuidado de BC ser igual ao raio da circunferência. Então, o arco BD é a terça parte do arco AE .

Na obra *Acerca das Espirais*, Arquimedes precede a proposição 12 de sete definições relacionadas com a espiral – define alguns dos elementos da referida curva, como sejam a origem da espiral, a recta inicial, etc. Define a curva espiral do seguinte modo:

“Se uma linha recta for desenhada num plano e se, permanecendo fixa uma das suas extremidades, ela girar com uma velocidade uniforme um número qualquer de vezes até retornar à posição de que partiu e se, além disso, durante esta rotação da linha recta, um ponto se mover sobre a recta com uma velocidade uniforme a partir da extremidade fixa, o ponto descreverá uma espiral no plano.” ([Ar2]; em [Ver2], I, p. 261).

Arquimedes trocou alguma correspondência com Conon¹⁴ sobre vários assuntos em aberto. De uma carta enviada por Arquimedes a Dositeu, a qual serve de prefácio à obra *Acerca das Espirais* (cf. [Ar2]; em [ver2], I, p. 239), podemos inferir que Arquimedes enviou os enunciados de alguns teoremas a Conon, mas este não chegou a demonstrá-los antes da sua morte. Foi Arquimedes quem, em primeiro lugar, fez um estudo aprofundado das propriedades da curva espiral, e assim se entende o facto desta espiral ser conhecida pelo nome de *Espiral de Arquimedes*. ([V], p. 353; [Ar2] em [Ver2], I, p. 239).

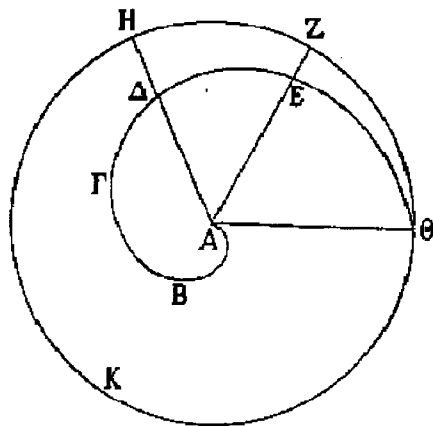
“O estudo que Arquimedes fez da espiral, curva que ele atribuiu ao seu amigo Conon (...), era parte da busca de soluções dos três problemas famosos. A curva presta-se tão bem a subdivisões de ângulos que pode bem ter sido inventada por Conon para esse fim. Como no caso da quadratiz, porém, ela também serve para quadrar o círculo, como Arquimedes demonstrou.” ([Boy], p. 94).

Na proposição 14, Arquimedes apresenta um resultado que contribui para a construção de uma solução para o problema da trisseccção do ângulo, pelo uso da espiral:

“Proposição XIV

Se, a partir da origem da espiral, se traçarem duas linhas rectas até encontrarem a primeira volta da espiral, e se se prolongarem até encontrarem a circunferência do primeiro círculo¹⁵, as linhas traçadas até à espiral terão entre si a mesma razão que os arcos da circunferência entre a extremidade da espiral e as extremidades das rectas prolongadas até encontrarem a circunferência, sendo os arcos medidos para a frente a partir da extremidade da espiral.

Seja $AB\Gamma\Delta E\Theta$ a primeira volta da espiral, seja A a



¹⁴ Conon de Samos, matemático e astrónomo do séc. III a.C..

¹⁵ A terminologia técnica será definida mais adiante, consoante for necessário.

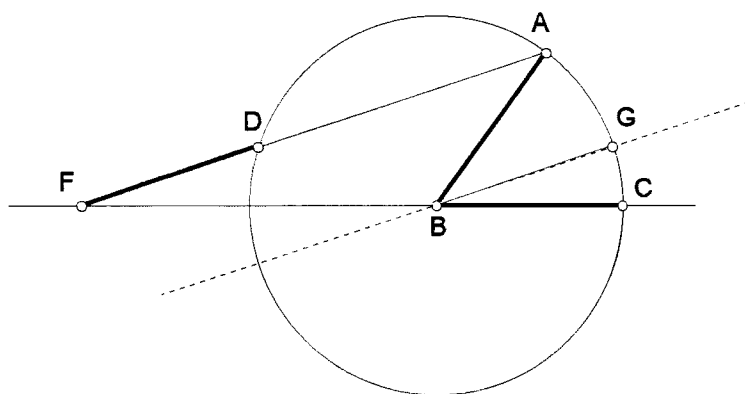
origem da espiral, seja OA a recta inicial, seja OKH o primeiro círculo, e a partir do ponto A tracem-se AE , $A\Delta$ até encontrarem a espiral e prolonguem-se até encontrarem a circunferência do círculo em Z , H . Quer provar-se que AE está para $A\Delta$ assim como ao arco OKZ está para o arco OKH .

Quando a recta $A\Theta$ gira, é claro que o ponto Θ se move uniformemente em torno da circunferência OKH do círculo, enquanto que o ponto A , que se move ao longo da linha recta, percorre a linha $A\Theta$. O ponto Θ , que se move em torno da circunferência do círculo, percorre o arco OKZ enquanto A percorre a linha recta AE ; além disso, o ponto A percorre a linha recta $A\Delta$ ao mesmo tempo que Θ percorre o arco OKH , movendo-se cada um deles uniformemente; portanto, é claro que AE está para $A\Delta$ assim como o arco OKZ está para o arco OKH .” ([Ar2]; em [Ver2], I, pp. 263-264).

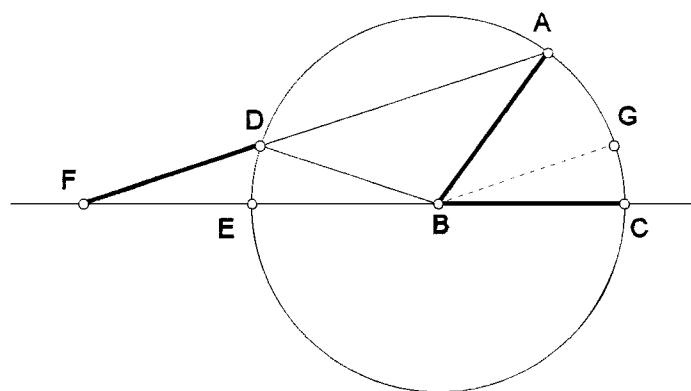
Nesta proposição Arquimedes afirma que se Δ e E são dois pontos da espiral de origem A , então AE está para $A\Delta$ assim como o arco OKZ está para o arco OKH , propriedade esta que, como veremos, será fundamental para construir uma solução para o problema da trissecção do ângulo.

1.4.1 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE NÊUSIS

Considere-se o ângulo agudo ABC o qual pretendemos trissectar. Construa-se uma circunferência de centro B e raio r (arbitrário), intersectando os lados do ângulo nos pontos A e C . O segmento de recta FD , de comprimento igual ao raio r , é *inserido* entre a recta CB e a circunferência, de tal modo que o ponto A esteja no seu prolongamento. Tracemos uma recta paralela a AF , que passe pelo ponto B , intersectando a circunferência num ponto que vamos designar por G . Assim, o ângulo GBC é a terça parte do ângulo ABC .



Provemos, agora, tal facto, provando que o ângulo ABG é o dobro do ângulo GBC . Pelo paralelismo das rectas BG e FA e pela proposição *Elementos* I, 29, podemos tirar duas conclusões. Por um lado, os ângulos GBC e DFB são iguais, por serem ângulos correspondentes no sistema das rectas paralelas cortadas pela transversal FB . Por outro, os ângulos BAF e ABG são iguais, por serem ângulos alternos internos no sistema das mesmas paralelas cortadas pela transversal AB .

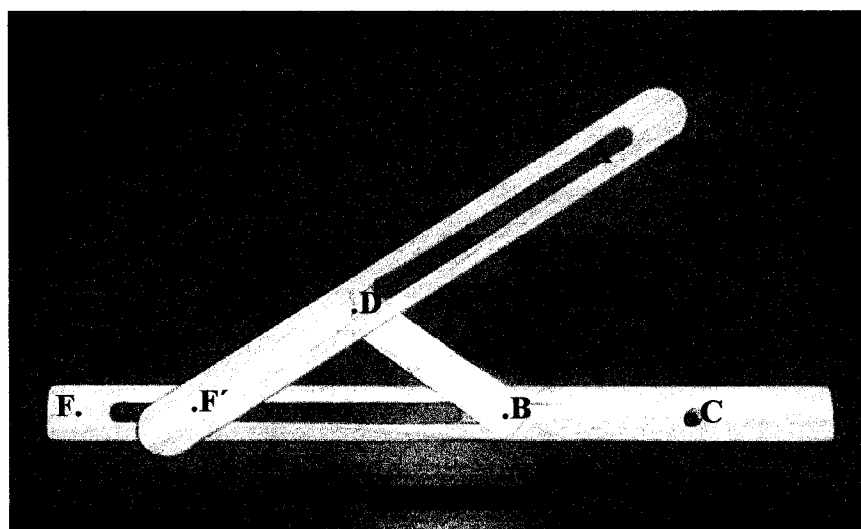


Tendo em atenção que FD , DB e AB são iguais, os triângulos BAD e FBD são isósceles, assim (*Elementos* I, 5), vem que os ângulos DFB e EBD são iguais, e de igual modo são iguais os

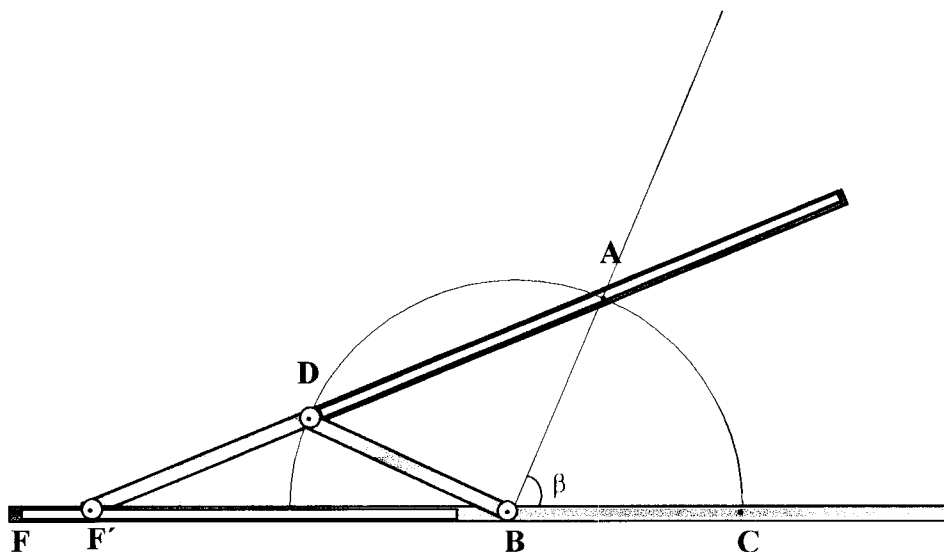
ângulos BAD e ADB . Note-se que ADB é um ângulo externo ao triângulo FBD e, por *Elementos* I, 32, podemos concluir que o ângulo ADB é igual à soma dos ângulos internos opostos, FBD e DFB . Mas, tendo em atenção que o ângulo FBD é igual ao ângulo DFB , podemos afirmar que o ângulo BAD (que é igual ao ângulo ADB) é o dobro do ângulo DFB , ou seja, o ângulo ABG é o dobro do ângulo GBC . Tínhamos visto atrás que o ângulo DFB era igual ao ângulo GBC , logo provámos o que pretendíamos, isto é, que o ângulo ABG é o dobro do ângulo GBC .

Embora se possa afirmar que temos uma solução para o problema da trissecção do ângulo, o segmento de recta em causa não pode ser inserido apenas com régua não graduada e compasso. Segundo parece, Arquimedes não apresentou um processo para inserir o segmento FD ; no entanto, podemos mover adequadamente uma régua com duas marcas (cuja distância seja o comprimento do segmento FD) de modo a inserir tal segmento. Mas, obviamente, esse não é o único caminho, pois foram inventados instrumentos mecânicos que permitem resolver esta *nêusis*.

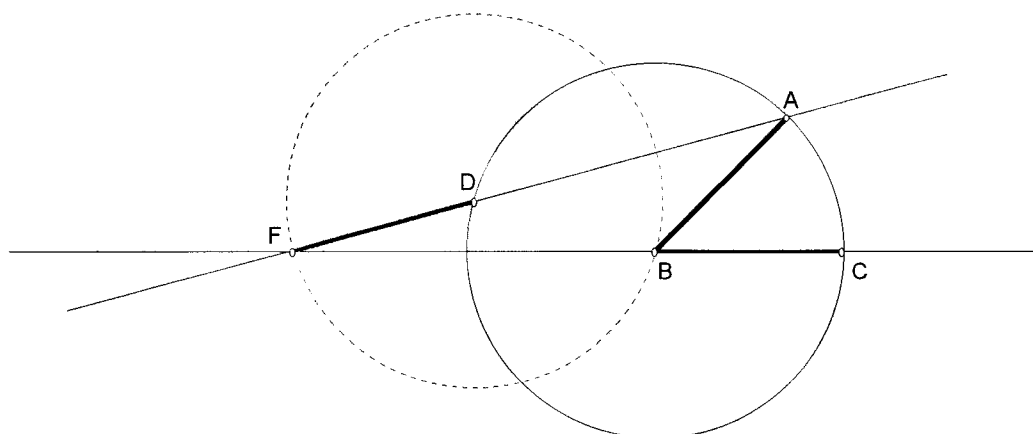
Um possível mecanismo consiste em duas barras iguais DB e DF' , articuladas em D . A extremidade, B , da primeira barra é fixa num ponto de uma terceira barra FC , de modo a que $\overline{DB} = \overline{BC}$. A extremidade F' desliza numa ranhura da barra FC . A fotografia seguinte representa um mecanismo, construído em madeira e metal, propositadamente para esta dissertação, e com o qual é possível trissectar um qualquer ângulo, de acordo com o ‘método de Arquimedes’.



Utilizando este mecanismo podemos trissectar o ângulo agudo como ilustra o seguinte esquema¹⁶, onde o ângulo α é a terça parte do ângulo β :



Presentemente, com o software dinâmico *The Geometer's Skechpad*, é possível resolver esta nêusis do seguinte modo: se ABC for o ângulo que pretendemos trissectar, construímos uma circunferência de centro B e raio r (arbitrário) e intersectando os lados do ângulo nos pontos A e C . Desenhamos uma semi-recta, arbitrária, partindo de A e intersectando a circunferência em D . Com centro em D e raio BD construímos uma nova circunferência (a azul tracejado na figura). A semi-recta AD vai intersectar esta nova circunferência num ponto que vamos designar por F . Arrastemos o ponto D ao longo da circunferência inicial de modo a que o ponto F intersecte a recta CB . Assim, o ângulo DFB é a terça parte do ângulo ABC .¹⁷

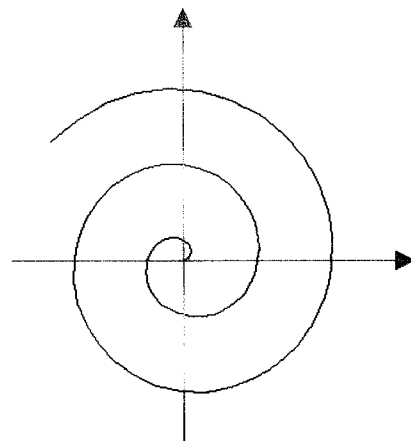


¹⁶ Ideia retirada da obra *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, ([BJB], p. 105).

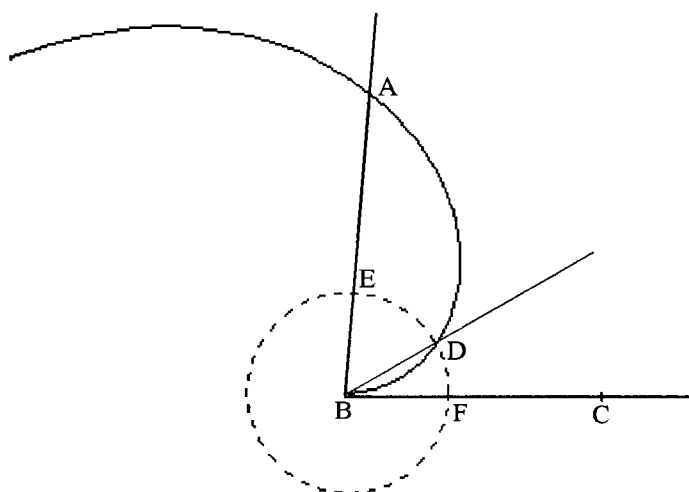
¹⁷ Uma construção dinâmica em JavaSkechpad, elaborada a propósito para esta dissertação, pode ser manuseada em <http://www.prof2000.pt/users/miguel/mest/tese1.htm>.

1.4.2 O USO DA ESPIRAL DE ARQUIMEDES

O que caracteriza o uso da espiral de Arquimedes para trissectar o ângulo, é o facto da distância entre a origem da espiral¹⁸, B , e o ponto sobre a espiral, A , na figura abaixo, ser proporcional ao ângulo cujos lados são a recta inicial¹⁹ e a recta BA . Isto é, a ideia para a trisseccção advém (como no caso da curva trissectriz de Hípias) da proporcionalidade entre uma distância em linha recta e uma medida angular. Quer isto dizer que, tendo em atenção que se reduziu uma questão de proporcionalidade entre ângulos a uma questão de proporcionalidade entre segmentos de recta, a curva espiral de Arquimedes permite reduzir a multisseccção de um ângulo à multisseccção de um segmento de recta. No nosso caso particular, para trissectar o ângulo apenas necessitamos de trissectar um segmento de recta.



Como já referimos, este método para trissectar um ângulo é uma consequência imediata da proposição 14 de *Acerca das Espirais*. O que Arquimedes afirma nesta proposição é que se D e A são dois pontos da espiral (no primeiro círculo²⁰) então BD está para BA como o arco FD está para o arco FE .



¹⁸ Arquimedes define a *origem da espiral* como sendo a extremidade da recta que permanece imóvel enquanto a recta gira (cf. definição II: [Ar2]; em [Ver2], I, p. 261).

¹⁹ Arquimedes chama *recta inicial da revolução* à posição a partir da qual a recta começa a girar (cf. definição III: [Ar2]; em [Ver2], I, p. 261).

²⁰ Arquimedes define o *primeiro círculo* como o círculo descrito em torno do ponto origem da espiral com o raio igual ao segmento de recta que o ponto móvel percorre durante a primeira revolução (cf. definição III: [Ar2]; em [Ver2], I, p. 261).

De facto, dado o ângulo agudo ABC , que pretendemos trissectar, construa-se a espiral de Arquimedes cuja origem é o vértice do ângulo em causa, isto é, o ponto B , fazendo coincidir um dos lados do ângulo, digamos o lado BC , com a recta inicial e intersectando a espiral o outro lado do ângulo, o lado BA , no ponto A . Como o nosso objectivo é trissectar o ângulo, vamos então trissectar o segmento AB , operação esta que é possível executar com recta não graduada e compasso (consequência de *Elementos* VI, 2). Designemos por E o ponto de BA tal que $BE = \frac{1}{3}BA$. Com centro no ponto B , construímos a circunferência de raio BE , a qual vai intersectar a espiral de Arquimedes no ponto D . Assim, o ângulo DBF é a terça parte do ângulo ABC .

Provemos agora que o ângulo DBF é efectivamente a terça parte do ângulo dado ABC . Ora, o fundamental da espiral é relacionar o comprimento do segmento de recta, que vamos designar por ρ , com o ângulo gerado pelo segmento de recta a partir da sua posição inicial, o qual vamos designar por θ , ou seja, em coordenadas polares $\rho = k\theta$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

Como A e D são dois pontos da espiral vem que $BA = k\theta$ e $BD = k\theta_1$, considerando θ a amplitude do ângulo ABC e θ_1 a amplitude do ângulo DBC . Mas, pelo modo como foi construído o ponto E , temos que $BA = 3BE = 3BD$ donde $k\theta = 3k\theta_1$, logo $\theta_1 = \frac{\theta}{3}$, isto é, o ângulo BDC é a terça parte do ângulo ABC .

Repare-se que, se pretendemos uma outra divisão do ângulo ABC , o processo é análogo. Por exemplo, se pretendemos sete quintos do ângulo ABC , basta considerar, analogamente, sete quintos do segmento BA . No entanto, não é possível construir a espiral de Arquimedes com régua não graduada e compasso.

1.5 A CONCÓIDE DE NICOMEDES A RESOLVER UMA CONSTRUÇÃO POR NÊUSIS

Segundo parece, Nicomedes inventou a *concóide* (curva em forma de concha), para resolver quer o problema da trissecção do ângulo quer o problema da duplicação do cubo.

“Vários comentadores antigos relacionam Nicomedes (séculos II-III d.C.) com a invenção da concóide. Os mais importantes são Papo de Alexandria (séculos III-IV d.C.), Proclo de Lícia (século V d.C.) e Eutócio de Áscalon (século VI d.C.).” ([S], p. 4).

Ao acreditar nas afirmações de Proclo, ao comentar a proposição de Euclides relativa à bissecção do ângulo (*Elementos* I, 9) na sua obra *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, (cf. [Pr]; em [Ver1], p. 233), o problema da trissecção do ângulo deu origem à invenção de mais uma nova curva – a concóide.

No livro IV da *Colecção Matemática*, Papo dá a definição de concóide e enuncia algumas das suas propriedades estabelecidas por Nicomedes e na proposição 23 explica como se pode utilizar a concóide para efectuar certa construção por nêusis, apresentando de seguida a solução de Nicomedes para o problema da duplicação do cubo.

Papo afirma²¹ (cf. [P]; em [Ver3], I, p. 187) que a concóide se pode descrever com toda a facilidade mecanicamente por um aparelho simples que Nicomedes imaginou. É ilustrativa a seguinte imagem, de um mecanismo para desenhar a concóide de uma recta, obtida no site do Museu Universitário de História Natural e da Instrumentação Científica da Universidade de Modena e Reggio Emilia, Itália.

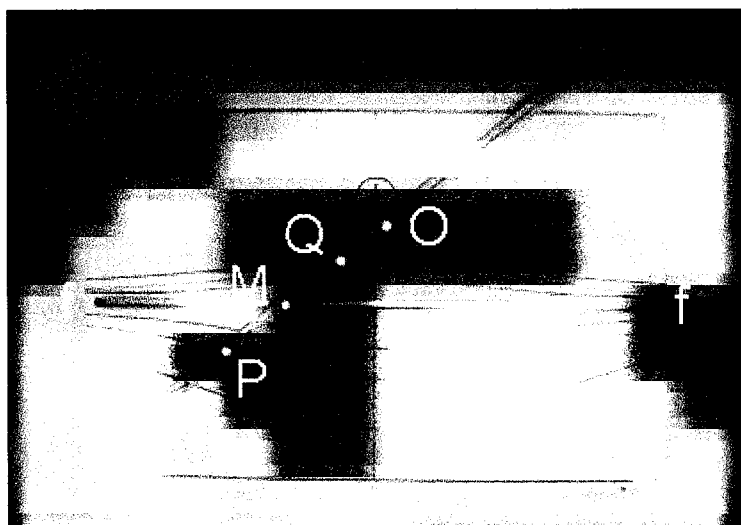
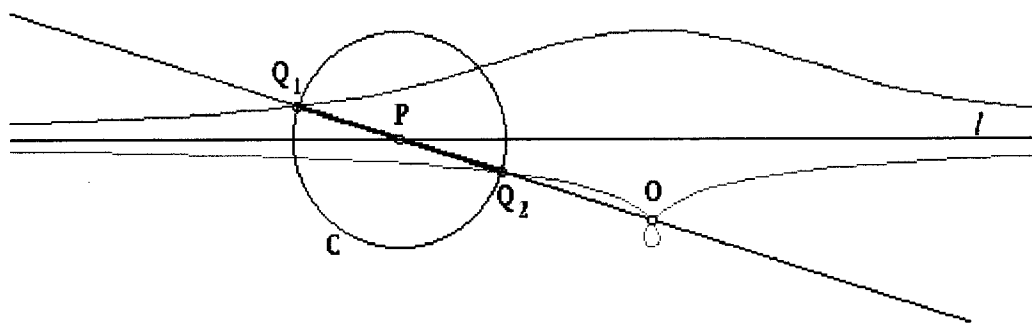


Imagem obtida em <http://www.museo.unimo.it/labmat/nicomin.htm>

²¹ Eutócio, nos seus *Comentários ao tratado Da Esfera e do Cilindro de Arquimedes*, dá-nos informações na mesma linha que Papo, mas frequentemente mais pormenorizadas. Refere um livro de Nicomedes chamado *Acerca das Linhas Concóides*, no qual o autor definia a curva e descrevia um tremalho para a desenhar. ([S], p. 4).

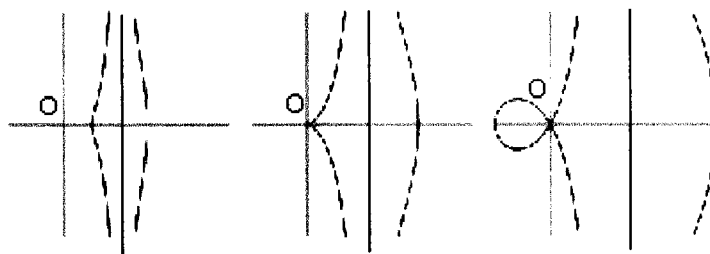
Comecemos por definir a concóide de uma curva: considere-se um curva qualquer, um ponto fixo O , exterior à curva, e uma dada distância k . Trace-se uma recta passando por O e encontrando a curva no ponto P . Se Q_1 e Q_2 forem pontos sobre a recta OP tais que $k = Q_1P = Q_2P$, então Q_1 e Q_2 desenharam a concóide da curva em causa em relação ao ponto fixo O . Refira-se que a concóide de uma curva varia consoante o ponto fixo escolhido, bem como a distância k , previamente considerada.

Um caso particular, e aquele que presentemente nos interessa, é a concóide de uma recta. Descrevamos uma sua construção, que nos parece muito simples: considere-se uma recta l , um ponto O exterior à recta e uma circunferência C cujo raio seja igual à distância k (previamente definida) e com o seu centro sobre a recta l , como ilustra a seguinte figura.



Consideremos a circunferência, de centro P , a mover-se ao longo da recta l (designada por Nicomedes como *régua*), isto é, sempre com o centro sobre a recta. Seja, ainda a recta que une o ponto O (designado por Nicomedes por *polo*) ao ponto P . Os pontos Q_1 e Q_2 , de intersecção desta recta com a circunferência, quando esta se move, desenharam os dois ramos da concóide.

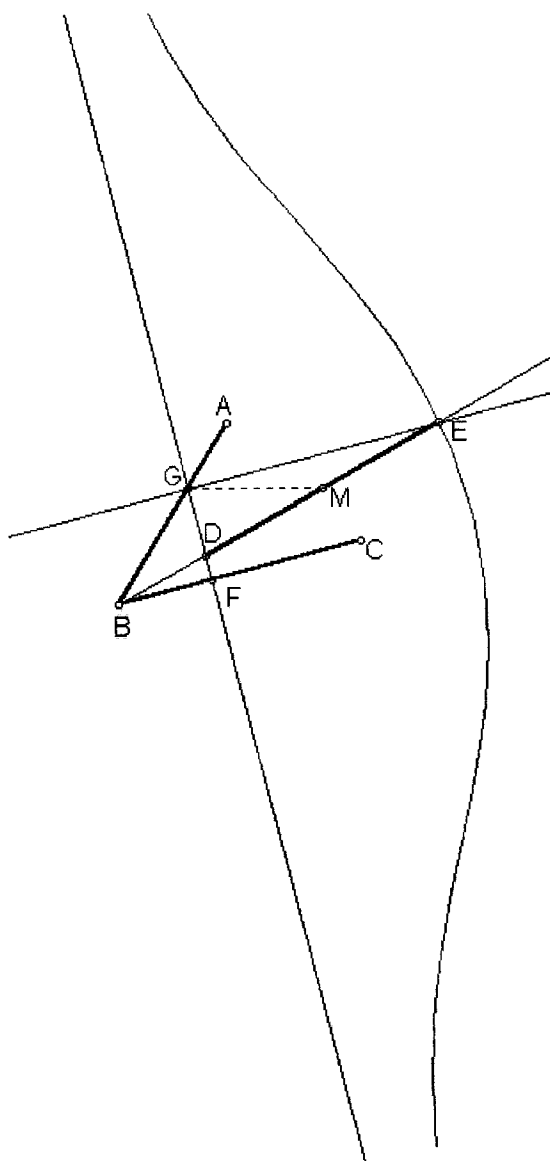
A curva concóide tem dois ramos e, consoante a relação entre a distância predefinida k e a distância d , entre o ponto O e a régua, ($k < d$, $k = d$, $k > d$) assim obtemos uma concóide de cada um dos seguintes tipos:



Vejamos, agora, como podemos utilizar a concóide de Nicomedes para efectuar a trissecção do ângulo, ou mais propriamente, resolver o respectivo problema de nêusis,

colocado na secção 1.2. O que pretendemos é inserir um segmento de recta, de comprimento predefinido, entre duas rectas, de modo que um certo ponto se encontre no prolongamento desse segmento. Dado um ângulo agudo ABC , a trissectar, podemos construir a concóide pretendida do seguinte modo:

Por um ponto G dum dos lados do ângulo, tiram-se uma paralela e uma perpendicular ao lado BC , designando por F a intersecção da perpendicular com o lado BC . Traça-se a concóide de Nicomedes definida pela régua GF , pelo polo B e por uma circunferência de raio $2BG$ e centro sobre a régua.



Seja E a intersecção do ramo da concóide, no lado oposto do polo, com a recta, paralela a BC , que passa por G . Assim, utilizando a concóide de Nicomedes, inserimos o segmento DE , duplo do segmento BG , entre as rectas GF e GE e *apontado* para o ponto B .

Está assim encontrado o ponto E e podemos concluir (tendo em atenção o que foi anteriormente provado, pp. 17 e 18) que o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC .

É de realçar que, contrariamente ao que se passa com outras curvas (como por exemplo, a espiral de Arquimedes), em que a mesma curva permite trissectar qualquer ângulo, com uma dada curva concóide só podemos trissectar um determinado ângulo. Isto é, para cada ângulo a trissectar necessitamos de uma concóide adequada pois a construção da concóide depende do polo e da distância previamente definida. Quer isto dizer que, se tivermos uma concóide, é possível ajustar o ângulo a trissectar a um dos dois parâmetros da curva, a distância $2BG$ ou a posição do polo B (mais propriamente a distância do polo à régua), mas não a ambos simultaneamente. Embora a concóide de Nicomedes permita obter uma solução para o problema da trissecção do ângulo, o nosso problema base continua sem solução, visto que não é possível desenhar a concóide de Nicomedes com apenas régua não graduada e compasso.

1.6 PAPO E AS SOLUÇÕES PELO USO DAS CÔNICAS

Papo de Alexandria, matemático e comentador da primeira metade do séc. IV d.C., na sua *Colecção Matemática*, uma vez mais contribuiu para o nosso conhecimento sobre as actividades dos géometras gregos, nomeadamente sobre o problema da trissecção do ângulo. Como já vimos, o Livro IV da *Colecção Matemática* contém propriedades de curvas, como a espiral de Arquimedes e a trissectriz de Hípias, utilizadas na trissecção do ângulo mas, não se fica por aqui.

Os gregos, segundo Papo, concebiam curvas de três formas diferentes: como curvas planas descritas como lugar geométrico satisfazendo relações envolvendo rectas e círculos; como intersecções de superfícies no espaço – como as cônicas; e ainda através de descrições cinemáticas ou produzidas por instrumentos mecânicos, como as espirais e a concóide de Nicomedes. Ao apresentar, no livro IV da sua *Colecção Matemática*, vários métodos (não euclidianos) para trissectar um ângulo, Papo de Alexandria, começa por um prefácio²² sobre os três tipos de problemas geométricos:

“Quando os antigos géometras procuraram dividir um dado ângulo rectilíneo em três ângulos iguais ficaram embaraçados com a tarefa. Nós dizemos que há três classes de problemas em geometria, aqueles que designamos por planos, sólidos e lineares. Como o nome indica, os que podem ser resolvidos apenas por meio de linhas rectas e da circunferência do círculo são chamados planos, porque as linhas pelas quais tais problemas são resolvidos têm a sua origem num plano. E os problemas que assumem na sua solução uma ou mais secções do cone são chamados problemas sólidos, porque fazem uso de superfícies de figuras sólidas na sua construção, particularmente de superfícies cônicas. Resta finalmente a terceira classe de problemas a que chamamos lineares, porque envolvem na sua construção outras linhas além daquelas que acabei de descrever, tendo origens diversas e mais envoltentes, derivando de superfícies menos regulares e de movimentos mais complexos. (...). Outras linhas deste tipo são as espirais, as quadratrizes, as concóides e as cissóides. (...). Uma vez que os problemas diferem nesta maneira, os géometras mais antigos foram incapazes de resolver o problema atrás mencionado relativo ao ângulo, porque ele é de natureza sólida, e procuraram fazê-lo por meios planos, visto que não estavam ainda familiarizados com as secções do cone, e por essa razão ficaram na incerteza. Mais tarde, entretanto, trissectaram o ângulo por meio de cônicas, usando na solução a construção por nêusis descrita abaixo.”²³ ([P]; em [Ver3], I, pp. 206-210).

²² De modo análogo ao que já tinha feito no Livro III, antes de apresentar quatro métodos para a duplicação do cubo: o de Eratóstenes, o de Nicomedes, o de Herão e o seu próprio. ([Kn2], p. 213).

²³ Papo refere-se à proposição 31, onde apresenta uma solução para a trissecção do ângulo por meio de uma construção por nêusis.

A primeira solução apresentada por Papo faz uso de uma construção por *nêusis*, cuja efectivação envolve a intersecção de uma hipérbole com um círculo – proposição²⁴ 31 (cf. [P]; em [Ver3], I, pp. 210-212). Na proposição 34, ele resolve o problema directamente, pelo uso de uma hipérbole, de dois modos diferentes. Papo inicia a proposição 35 afirmando que:

“Decompor um ângulo ou um arco dado em três partes iguais é um problema sólido, como foi demonstrado anteriormente, enquanto que decompor um ângulo ou um arco dado em uma certa razão é um problema linear, e isto foi demonstrado pelos mais recentes geómetras, e será exposto aqui por nós de duas maneiras.” ([P]; em [Ver3], I, p. 222).

É nesta proposição (proposição 35) que Papo reproduz os métodos pelo uso da quadratriz de Hípias e pela espiral de Arquimedes.

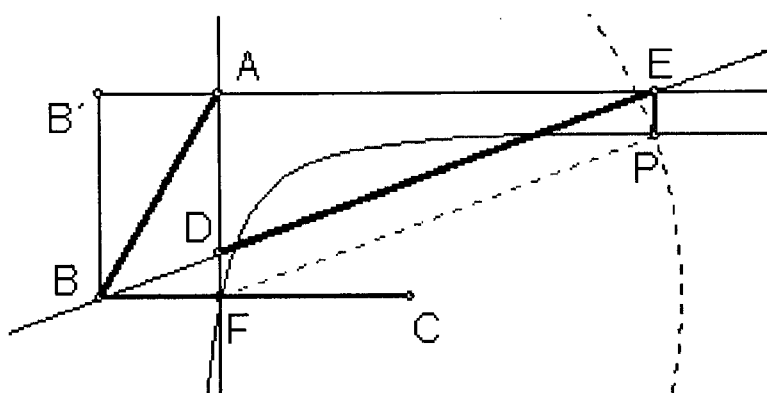
Não sabemos quais são as fontes e os autores dos métodos apresentados por Papo, segundo Wilbur Knorr ([Kn2], pp. 214-215) tal fica a dever-se ao facto de Papo generalizar os conceitos básicos dos métodos que apresenta, embora nenhum desses métodos seja de sua autoria. Knorr ainda aponta algumas luzes sobre a proveniência de tais métodos, nomeadamente tendo em atenção o modo como são utilizadas as construções por *nêusis* e algumas das propriedades da hipérbole.

²⁴ Na proposição 32, Papo aplica a construção por *nêusis* para construir a recta trissectriz de um qualquer ângulo agudo. Na proposição 33 indica como construir a hipérbole que assume na proposição 31.

1.6.1 A SOLUÇÃO DE UMA CONSTRUÇÃO POR NÊUSIS ENVOLVENDO UMA HIPÉRBOLE

Como já referimos, a primeira solução apresentada por Papo faz uso de uma construção por nêusis cuja determinação envolve a intersecção de uma hipérbole com uma circunferência, construção esta exposta na proposição 31 do Livro IV da sua *Colecção Matemática*.

Vamos retomar o assunto da secção 1.2. Recorde-se que provámos que o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC , isto é, que a semi-recta BD trissecta o ângulo ABC .



A questão que posteriormente se colocou era saber como inserir o segmento de recta DE , duplo do segmento BA , entre as rectas FA e AE e *apontado* para o ponto B . Ou seja, tudo se resume à procura do ponto E . Na construção de Papo, que agora analisamos, este ponto é encontrado pela intersecção de uma hipérbole equilátera com uma circunferência.

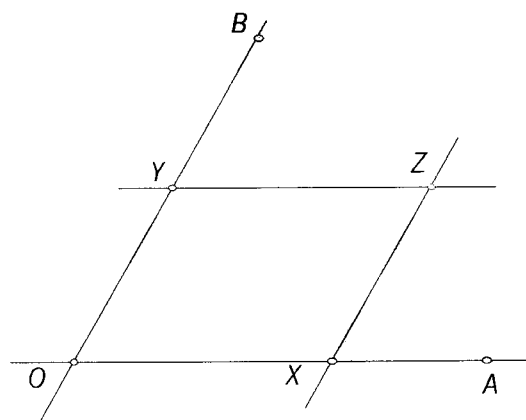
De facto, segundo Papo, para trissectarmos o ângulo ABC basta proceder do seguinte modo:

- 1) por um ponto A dum dos lados do ângulo a trissectar, tira-se uma perpendicular ao outro lado (no nosso caso será AF a perpendicular a BC);
- 2) completamos o rectângulo $AFBB'$;
- 3) construímos uma hipérbole de assíptotas BB' e $B'E$ e passando pelo ponto F ;
- 4) construímos uma circunferência de centro F e raio igual a $2AB$;
- 5) estas duas curvas intersectar-se-ão num ponto que designaremos por P ;
- 6) a partir do ponto P construímos uma recta paralela a AF que irá intersectar o prolongamento do segmento $B'A$ num ponto que designaremos por E .

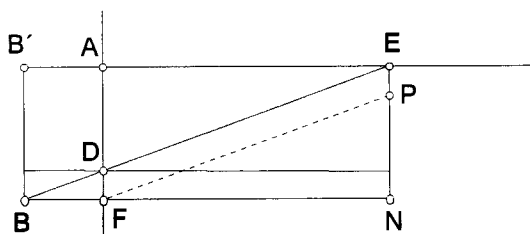
Assim, foi encontrado o ponto E , como pretendido. Falta, agora, provar que DE é igual a FP , (e, portanto, a $2AB$) o que vamos fazer provando que $DEPF$ é um paralelogramo.

Comecemos por analisar o que sabemos pelo facto de P e F serem dois pontos da hipérbole de assíntotas BB' e $B'E$.

É sabido desde Apolónio (Livro II, proposição 12) que, se considerarmos duas rectas concorrentes, AO e OB , e por cada ponto, Z , do plano por elas definido traçarmos uma paralela a OB intersectando OA no ponto X e uma paralela a AO intersectando OB no ponto Y , o lugar geométrico dos pontos Z tais que $YZ \cdot XZ$ é uma área dada, define uma hipérbole cujas assíntotas são as rectas OA e OB .



Tendo em atenção que o ponto P pertence à hipérbole de assíntotas BB' e $B'E$, vem que $B'E \cdot EP$ é constante e, do mesmo modo, por o ponto F também pertencer à mesma hipérbole vem que $B'A \cdot AF$ é também a mesma constante²⁵.



Por outro lado, considerando a chamada *decomposição na diagonal* (*Elementos* I, 43) do rectângulo $BB'EN$ vem que $EB' \cdot EP = AB' \cdot AF = BN \cdot DF = EB' \cdot DF$, donde $EP = DF$. Como EP e DF são paralelos por construção, tendo em atenção *Elementos* I, 33, podemos afirmar que DE e FP são paralelos e iguais, donde se conclui que $DEPF$ é um paralelogramo.

²⁵ No caso considerado por Papo, as rectas dadas (as assíntotas) são perpendiculares, o que equivale a considerar coordenadas ortogonais no plano e a dizer que a equação $OX \cdot OY = \text{constante}$ representa uma hipérbole equilátera de assíntotas AO e OB .

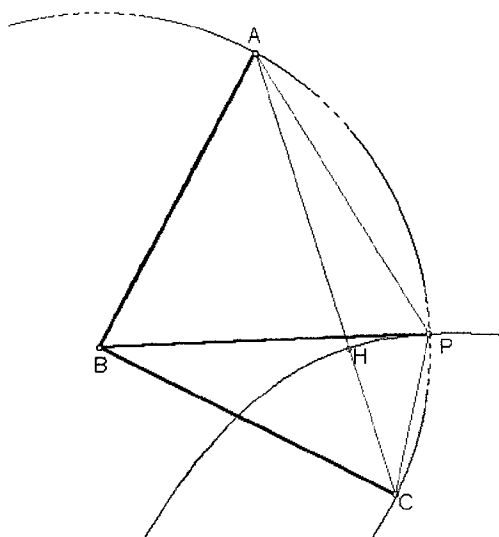
1.6.2 AS SOLUÇÕES DIRECTAS PELO USO DA HIPÉRBOLE

Enquanto que no caso anterior a hipérbole era utilizada, não para construir uma solução directa para o problema da trissecção do ângulo, mas sim para a solução de uma construção por nêsis, no presente caso (e de acordo com a proposição 34 da *Colecção Matemática*) Papo utiliza uma hipérbole, diferente da do caso anterior, para directamente, isto é, sem nenhuma preliminar redução do problema a uma nêsis, resolver o problema da trissecção do ângulo. Ele utiliza a hipérbole de dois modos diferentes²⁶: num usa a propriedade diâmetro-ordenada (como em Apolónio), no outro ele usa a propriedade foco-directriz. ([Th3], p. 1903).

Como já referimos, não sabemos a proveniência destes métodos transmitidos por Papo, mas a grande semelhança entre a propriedade usada nesta solução e as usadas por Apolónio faz-nos pensar que, provavelmente, esta solução é devida a este geómetra. Aliás, alguns autores referem esse facto:

“No início do século II a.C., Apolónio de Perga propôs outra solução, desta vez usando cónicas. De facto, este problema é um daqueles a que *Papo se propôs chamar “problemas sólidos”* tendo em atenção que na construção é necessário usar curvas que apenas podem ser definidas num sólido, nomeadamente secções cónicas.” [BD], p.93).

Vejamos então a primeira solução apresentada por Papo.



De facto, segundo Papo, para trissectarmos o ângulo ABC basta proceder do seguinte modo:

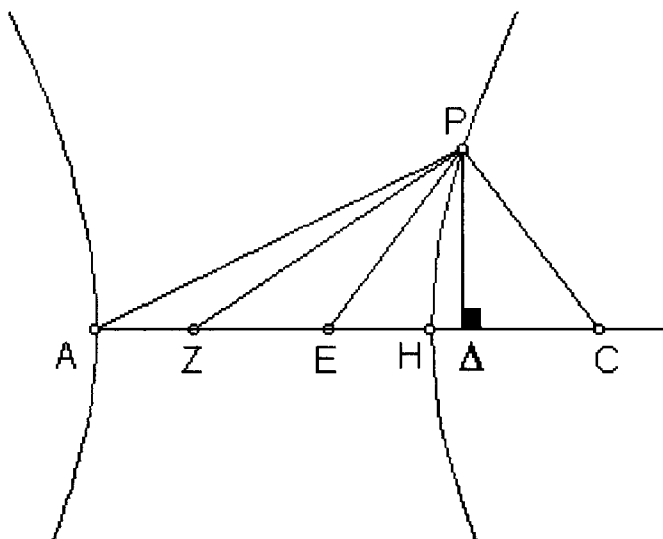
²⁶ É a mesma hipérbole que é utilizada de dois modos diferentes. Este facto pode ser confirmado utilizando um sistema apropriado de eixos nas figuras das páginas 41 e 44.

- 1) construímos uma circunferência de centro B e intersectando os lados do ângulo dado nos pontos A e C ; seja AC um seu arco;
- 2) seja a corda AC dividida em H de modo que $AH = 2HC$;
- 3) construímos a hipérbole com AH como eixo transverso e $\sqrt{3}AH$ como eixo não transverso;
- 4) um dos ramos desta hipérbole vai intersectar a circunferência num ponto que vamos designar por P .

Então, o ângulo PBC é a terça parte do ângulo ABC . Antes de provarmos que efectivamente o ângulo PBC é a terça parte do ângulo ABC , vamos começar por provar um resultado que será útil no nosso propósito — o ângulo PCA é o dobro do ângulo PAC .

Considere-se a hipérbole de eixo transverso AH e eixo não transverso $\sqrt{3}AH$. Pelo facto do ponto P ter sido construído de modo a estar sobre esta hipérbole, e designando por Δ o pé da perpendicular, passando por P , à recta AH , tem-se

$$\frac{P\Delta^2}{\Delta A \cdot \Delta H} = \frac{3}{1}. \quad (1)$$



No prolongamento da recta AH , marque-se um ponto C tal que $AH = 2HC$. Marquem-se também os pontos E e Z tais que $C\Delta = \Delta E = EZ$. Então, como $3CH = CA$ e $3C\Delta = CZ$, vem que

$$3\Delta H = 3(CH - C\Delta) = CA - CZ = ZA. \quad (2)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 PE^2 - EZ^2 &= PE^2 - \Delta E^2 = \\
 &= P\Delta^2 \quad (\text{aplicando } \textit{Elementos I}, 47 \text{ ao triângulo } PE\Delta) \\
 &= 3AH \cdot \Delta A \quad (\text{tendo em atenção (1)}) \\
 &= ZA \cdot \Delta A = (EA - EZ) \cdot (EA + EZ) \quad (\text{por (2)}) \\
 &= EA^2 - EZ^2.
 \end{aligned}$$

Donde, $PE = EA$.

Portanto, $\angle APE = \angle PAE$. Tendo em atenção *Elementos I*, 32 vem que $\angle PEC = \angle APE + \angle PAE$, donde $\angle PEC = 2\angle PAE$. Ora, $\angle PCA = \angle PEC$ (pois Δ é o ponto médio de EC e $P\Delta$ é perpendicular a EC).

Logo, $\angle PCE = \angle PEC = 2\angle PAE$. Isto é, como pretendíamos,

$$2\angle PAC = \angle PCA. \quad (3)$$

Note-se que $\angle PBA = \text{arc}AP$, por se tratar de um ângulo ao centro da circunferência de raio AB . Por outro lado $\angle PCA = \frac{\text{arc}AP}{2}$, por se tratar de um ângulo inscrito na circunferência, donde

$$2\angle PCA = \angle PBA. \quad (4)$$

Analogamente temos que $\angle PBC = \text{arc}PC$ e $\angle PAC = \frac{\text{arc}PC}{2}$, donde

$$2\angle PAC = \angle PBC. \quad (5)$$

Tendo em atenção (3), (4) e (5) vem que:

$$\angle PBC = 2\angle PAC = \angle PCA = \frac{1}{2}\angle PBA.$$

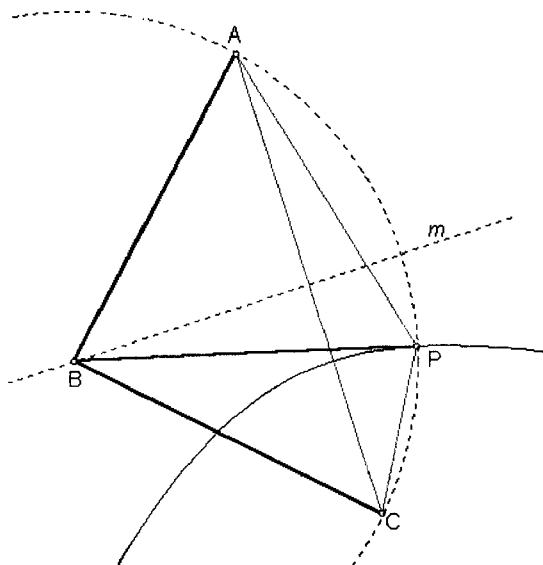
Logo,

$2\angle PBC = \angle PBA$, como pretendíamos provar; ou seja, o ângulo PBC é a terça parte do ângulo ABC .

Na segunda construção, ainda na proposição 34, Papo usa a propriedade foco-directriz da hipérbole. De facto, segundo Papo, para trissectarmos o ângulo ABC basta proceder do seguinte modo:

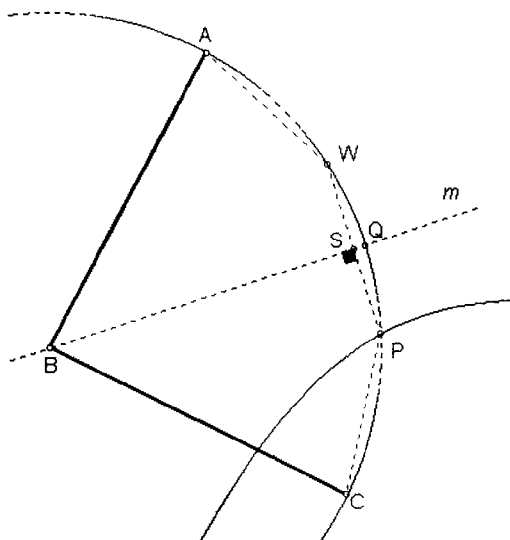
- 1) construímos uma circunferência de centro B e intersectando os lados do ângulo dado nos pontos A e C ;
- 2) seja m a recta mediatriz de AC ;

- 3) construímos a hipérbole de excentricidade 2, cuja directriz é m e em que um dos focos é C ;
- 4) um dos ramos desta hipérbole vai intersectar a circunferência num ponto que vamos designar por P .



Então, o ângulo PBC é a terça parte do ângulo ABC . Provemos agora tal facto. Para tal, vamos provar que o arco de circunferência PC é a terça parte do arco de circunferência APC , ou seja, que o arco PC é metade do arco AP .

Pelo facto do ponto P estar sobre a hipérbole, sabemos que PC é o dobro de PS (propriedade foco-directriz). Mas agora há que provar que o arco CP é a terça parte do arco AC . Para tal vamos duplicar a figura, por simetria, para o outro lado da recta m , como ilustrado na figura seguinte.



De facto, como PS é perpendicular à recta m , o prolongamento de PS intersecta a circunferência num ponto, W , tal que $PS = SW$.

Portanto, $PW = PS + SW = 2PS = PC$.

Além disso, por simetria, também $AW = PC$. Portanto, as três cordas CP , PW , WA são iguais entre si. Logo, também os arcos CP , PW , WA , são iguais entre si.

Assim, provamos que as duas partes em que o ponto P divide o arco AC são tais que o arco PC é metade do arco AP .

Papo contribuiu, assim, directamente para a solução do problema da trissecção do ângulo. No entanto, o problema inicial continuou por resolver tendo em atenção que se procurava uma solução de acordo com a axiomática do primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, e não é possível construir uma hipérbole com régua não graduada e compasso. A *Colecção Matemática* de Papo de Alexandria foi de grande importância na história das matemáticas, tendo possivelmente sido escrita com o objectivo de expor aos géometras do seu tempo toda a matemática dos antigos gregos, cobrindo praticamente todos os resultados até aí existentes. Como afirma Fernando Vasconcelos ([V], p. 500):

“Papo é o último grande géometra da antiguidade, dando-se, depois dele, a queda irremediável e sendo necessário que decorressem perto de treze séculos, para que, ao calor vivificante da Renascença, Descartes, descobrindo uma nova via, recuasse os limites da antiga geometria.”

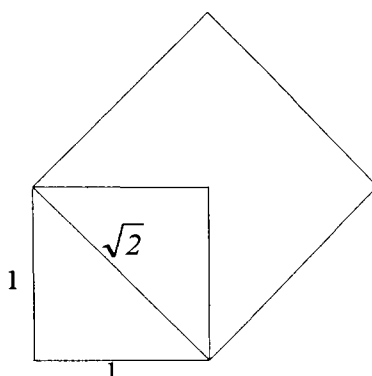
CAPÍTULO 2

DUPLICAÇÃO DO CUBO

2.1 A HISTÓRIA DO PROBLEMA

Dos três famosos problemas clássicos da matemática grega – a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo – extremamente importantes no desenvolvimento da geometria, a duplicação do cubo foi talvez o mais famoso, na Antiguidade. A duplicação do cubo é um problema de enunciado muito simples e talvez por esse motivo tenha despertado o interesse de matemáticos, e não só, ao longo dos tempos²⁷. Mas a primeira questão que se coloca ao escrever sobre este problema é: *como terá surgido o problema da duplicação do cubo*? Florian Cajori afirma:

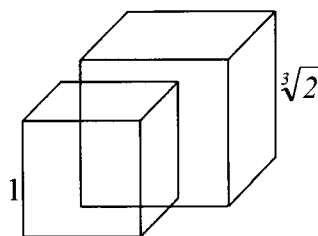
“Os Pitagóricos mostraram que a diagonal de um quadrado é o lado de um outro quadrado com o dobro da área do primeiro. Isto provavelmente sugere o problema da duplicação do cubo, isto é, encontrar a aresta de um cubo com o dobro do volume dum cubo dado.” ([C], p. 21).



Os géometras da época tinham conhecimento que para duplicar²⁸ um quadrado bastava considerar para lado do quadrado procurado a diagonal do quadrado original. Isto é, se um quadrado tem lado 1 e procuramos um quadrado com o dobro da área deste, basta construir um quadrado de lado $1 \cdot \sqrt{2}$. Assim, para duplicar um quadrado de aresta a basta construir um quadrado de aresta $a \cdot \sqrt{2}$. É então natural surgir a questão de transpor este problema para figuras sólidas, sendo de esperar que se comece por um cubo. ([Du3], p. 86).

²⁷ Mesmo até nos nossos dias, pois basta consultar o reconhecido site da Internet *The Math Forum* ([Www7]) para encontrar, reportada a Agosto de 1998, troca de correspondência sobre o problema da duplicação do cubo.

²⁸ O termo *duplicar* é aqui utilizado no sentido de área.



Eratóstenes de Cirene, bibliotecário na famosa biblioteca de Alexandria no séc. III a.C. e “(...) reconhecido pelos seus contemporâneos como um homem de grande distinção em todos os ramos do conhecimento (...)” ([H4], II, p. 104), atribui a este problema uma outra origem. Como escreve Wilbur Knorr:

“Nós possuímos relatos sobre os primeiros estádios do estudo da duplicação do cubo em duas fontes derivadas de Eratóstenes de Cirene (...). Uma delas é um fragmento de uma parte do seu diálogo *Platonicus*, que foi preservado por Teão de Esmirna e Plutarco, em escritos datados do século II a.C.. A outra assume a forma de uma carta dirigida por Eratóstenes ao seu real patrono Ptolomeu III Evergeta (...)” ([Kn1], p. 17).

Devemos a Eutócio de Áscalon, comentador do início do século VI d.C, os principais conhecimentos históricos que hoje possuímos sobre o problema da duplicação do cubo. Mais adiante ficará claro o contexto – comentário à proposição²⁹ 1 do livro II do tratado *Da Esfera e do Cilindro*, de Arquimedes – em que este comentador faz alusão ao problema da duplicação do cubo.

“A descrição de Eutócio consta de cinco longas páginas na edição standard de J. L. Heiberg.” ([Kn1], p. 17). Wilbur Knorr, na página 17 da obra citada, apresenta um «breve sumário» do texto de Eutócio. E, como diz Fernando Vasconcelos ([V], p. 553):

“É nos comentários *Sobre a Esfera e o Cilindro* que, depois de ter mencionado a carta de Eratóstenes a Ptolomeu, Eutócio indica os processos de Arquitas, Menecmo, Eratóstenes e Nicomedes, bem como os métodos usados por Platão, Apolónio, Diocles, Herão, Filão e Esporo, para a *inserção de duas meias proporcionais entre duas rectas*, (...)”

Fernando de Vasconcelos não contabiliza a solução de Papo e ficamos na dúvida sobre o motivo desta omissão. Será pelo facto, que mais adiante analisaremos, das soluções de Esporo e Papo serem praticamente a mesma que a de Diocles?

Eutócio reproduz a carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu III Evergeta do Egipto, a qual contém duas lendas sobre o aparecimento do problema da duplicação do cubo. Conta³⁰ assim:

²⁹ Onde Arquimedes assume ter encontrado duas linhas que são meios proporcionais entre duas linhas dadas.

³⁰ É aqui transcrita a tradução de Fernando Vasconcelos, na sua obra *História das Matemáticas na Antiguidade*, ([V], p. 365).

“«Eratóstenes a Ptolomeu, saúde !

«Conta-se que um dos antigos poetas trágicos fêz aparecer Mino em scena, no acto de mandar construir um túmulo a Glauco; e que Mino, verificando que êste tinha de cada lado *cem pés de comprimento*, disse: «pequeno espaço na verdade concedeste ao sepulcro de um rei; duplica-o, conservando-lhe sempre a forma cúbica, ficarão imediatamente duplicados todos os lados do sepulcro». Ora, é claro que êle se enganava. De facto duplicando-se os lados duma figura plana, esta fica quadruplicada, e uma figura sólida ficará octuplicada.

«Então foi agitada entre géometras a questão de saber como se podia duplicar uma dada figura sólida qualquer, conservando-lhe a forma. E êste problema foi chamado *duplicação do cubo*. Todos ficaram duvidosos, durante muito tempo, até que Hipócrates de Chios achou que, «*se entre duas linhas rectas, das quais a maior seja dupla da menor, se inscreverem duas médias em proporção contínua, o cubo ficará duplicado*»; transmudando-se, assim, uma dificuldade noutra não menor.

«Narra-se também que, mais tarde, os Délcios³¹, levados pelo oráculo a dobrar um certo altar, caíram no mesmo embaraço. E alguns embaixadores vieram procurar os géometras que conviviam com Platão na Academia, para os excitar a descobrir o que lhes era exigido. Êstes ocuparam-se do assunto com diligência, e diz-se que, tendo procurado *inserir duas meias entre duas rectas*, Arquitas Tarentino o resolveu com o *semi-cilindro*, e Eudóxio mediante certas *linhas curvas*.

«A êstes géometras seguiram-se outros, que conseguiram tornar mais perfeitas as *demonstrações*, mas não a *construção* e a sua *exequibilidade prática*, exceptuando talvez Menecmo, e com grande trabalho».”

A autenticidade desta carta é posta em causa por alguns historiadores. O intelectual alemão U. von Wilamowitz-Moellendorff (1848-1931) defendeu³² que a carta não pode ser genuína. Apesar de poder não ter sido escrita por Eratóstenes, o desconhecido autor deu um grande contributo para a história da matemática ao ter incluído um importante e verdadeiro documento histórico – um epigrama de Eratóstenes, constante de uma placa fixa no templo de Ptolomeu, em Alexandria. ([Wa1], p. 160-161).

Van der Waerden (1903-1996), na linha de pensamento de Thomas Heath (1861-1940), aponta que existem divergências entre os dois relatos quanto à história do aparecimento do problema da duplicação do cubo. Se de acordo com a primeira lenda o

³¹ É devido a esta referência que o problema da duplicação do cubo é frequentemente mencionado como *Problema Deliano*.

³² Tanto Thomas Heath ([H4], I, pp. 244-245) como van der Waerden ([Wa1], p. 160) referem que Wilamowitz instituiu a não autenticidade da carta.

problema surgiu no tempo de Hipócrates, então não poderá ter surgido (como dá a entender a segunda lenda) no tempo de Platão. ([Wa1], p. 161; [H4], I, pp. 245-246):

“Notamos uma certa contradição entre as duas partes da narrativa; aparentemente duas versões da história são transmitidas, uma depois da outra. De acordo com a primeira versão, a duplicação do cubo é um velho problema, relacionado com uma lenda sobre Minos. Hipócrates de Quios, e outros antes dele, ocuparam-se deste problema. Na segunda versão, o problema surge de uma declaração feita aos habitantes de Delos por um oráculo no tempo de Platão, meio século depois de Hipócrates.” ([Wa1], p. 161).

Mas a segunda lenda, na própria versão de Eratóstenes, é citada por Teão de Esmirna:

“Na sua obra intitulada *Platonicus*, Eratóstenes relata que quando o deus anunciou aos habitantes de Delos, através dum oráculo, que se queriam ver-se livres de uma praga deveriam construir um altar duplo daquele que existia, os artífices ficaram muito embaraçados por não serem capazes de descobrir como um sólido podia ser duplicado mantendo a sua forma. Foram perguntar a Platão como o haviam de fazer, tendo este respondido que o significado das palavras do oráculo não era que o deus queria duplicar o altar, mas que o seu desejo, ao dar-lhes esta tarefa, era envergonhar os gregos pela sua indiferença pela matemática e pela sua ignorância no que diz respeito à geometria.” (citado em: [Wa1], p. 161).

Van der Waerden foi mais longe que Thomas Heath ao procurar a fonte, ou fontes, da carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu, e concluiu:

“É provável que o *Platonicus* seja um diálogo onde os habitantes de Delos, Platão, Arquitas, Eudoxo e Menecmo aparecem. Nesta história dramática, Eratóstenes condensou todo o desenvolvimento do problema num curto espaço de tempo. Sendo assim, ele não podia fazer referência a Hipócrates de Quios. De facto o problema é muito mais antigo, visto ter origem na tradução da equação cúbica babilónica $x^3 = V$ na álgebra geométrica tridimensional. Assim, a contradição entre a primeira e segunda lenda na “carta” esclarece-se por si própria: a primeira fábula provém, possivelmente, de fontes históricas, a segunda do *Platonicus*.” ([Wa1], p. 161).

A tradição deste problema não é muito clara mas, verdadeiras ou falsas as lendas e suposições sobre o seu aparecimento, um facto é certo: este problema foi estudado na Academia de Platão pois foram atribuídas soluções, que não se enquadram na geometria do primeiro livro de Euclides, a vários géometras da época, como, por exemplo, Arquitas e Menecmo.

Seidenberg, num artigo intitulado “The Ritual Origin of Geometry” datado de 1962 e publicado na revista *Archive for History of Exact Science*, coloca a seguinte questão:

“Se o oráculo colocou o problema, uma questão que se levanta é: Como ocorreu ao oráculo que duplicar um altar é um meio de combater uma praga? E se o oráculo não colocou o problema, a

questão continua a ser a mesma: Como é que a pessoa que inventou a história teve a ideia de que duplicando o altar iria combater a praga?” ([Se1], p. 494).

Seidenberg conclui, um pouco à laia de interrogação:

“Não será provável que ele [o oráculo ou o autor da história] tenha ido buscar [a ideia] a um ritual já existente, talvez guardado na forma de uma lenda?”³³ ([Se1], p. 495).

É habitual todos aqueles que trabalham em matemática ilustrarem as suas ideias recorrendo a motivações do dia a dia: a rituais, a problemas da física, da geografia, da economia, etc.. Não poderá, assim, a lenda do oráculo de Delos ter sido usada como motivação externa para o problema matemático em questão?

Como já referimos, os conhecimentos sobre o problema da duplicação do cubo advêm, principalmente, do legado de Eutócio. Este comentador transmite-nos, respectivamente, as soluções de Platão, Herão, Filão, Apolónio, Diocles, Papo, Esporo, Menecmo, Arquitas, Eratóstenes e Nicomedes. O próprio Eutócio não faz grande referência sobre as suas fontes. Ele começa por afirmar, no seu comentário sobre a síntese da proposição I, do livro II de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*, que “(...) nós encontramos este problema nos escritos que a isso se referem por vários homens famosos.” ([E]; em [Ver2], II, p. 588).

Antes de nos debruçarmos sobre estas soluções (que vamos analisar pela ordem cronológica apontada por Thomas Heath na obra *A History of Greek Mathematics* ([H4], I, pp. 244-268)), comecemos por concentrar-nos no primeiro progresso efectivo e, é claro, no primeiro nome que aparece associado ao problema da duplicação do cubo – Hipócrates de Quios.

³³ No artigo citado, o autor, com base em antigas obras indianas sobre construções de altares, aponta interessantes relações entre altares e pragas. O título do artigo é deveras sugestivo – *A Origem Ritual da Geometria*. Até que ponto a tradição dos géometras gregos para o uso exclusivo da régua não graduada e compasso nas construções geométricas, não terá tido origem religiosa?

2.2 A REDUÇÃO DE HIPÓCRATES

Como já anteriormente nos apercebemos, a suposta carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu coloca na boca de Hipócrates de Quios, matemático da segunda metade do século V a.C., que “se entre duas linhas rectas, das quais a maior seja dupla da menor, se inscreverem duas médias em proporção contínua, o cubo ficará duplicado.” (citado em: [V], p. 365).

Parece, assim, que foi Hipócrates quem deu os primeiros passos no sentido da tentativa de resolução do problema da duplicação do cubo, ou mais genericamente a ampliação do cubo numa dada razão. Este géometra reduziu o problema a um outro – um problema de geometria plana – de dificuldade não propriamente menor, visto que continuou a não ser possível encontrar uma solução usando apenas régua não graduada e compasso, mas que possibilitou o desenvolvimento de novas técnicas geométricas.

O que Hipócrates afirma é que se, dado um cubo de aresta³⁴ a , encontrarmos dois segmentos x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, isto é, encontrarmos dois meios proporcionais entre os segmentos a e b , então o cubo de aresta x tem o volume ampliado na razão b/a .

A duplicação do cubo é um caso particular, quando $b = 2a$, e procuramos assim x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. De facto, facilmente se deduz das proporcionalidades anteriores que $x^3 = 2a^3$, o que prova que o cubo de aresta x tem volume duplo do cubo de aresta a . Ou seja, a razão dos volumes dos cubos em causa (de arestas a e x respectivamente) é a razão de 1 para 2, pois $\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}$. Sendo assim, é evidente a equivalência entre os dois problemas – a *duplicação do cubo* e a *construção de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo inicial e o seu dobro*.

É muito provável que a descoberta de Hipócrates tenha sido feita em analogia com o problema da duplicação do quadrado. François Lasserre (1919-1989) fez uma interessante conexão entre o caso «plano» e o caso «sólido»:

“Dados dois quadrados diferentes a^2 e b^2 , a área que será o meio proporcional entres eles é a do rectângulo ab , designado de rectângulo *medial*, obtido pela multiplicação do lado do primeiro quadrado pelo lado do segundo, ou *vice-versa*: $a^2/ab = ab/b^2$. Mas se considerarmos dois cubos diferentes, a^3 e b^3 , multiplicando a base do primeiro pelo lado do segundo, e *vice-versa*, isto é, a base

³⁴ A letra tanto indica o segmento de recta como a sua medida de comprimento, de modo a estarmos de acordo com o pensamento dos géometras da época que tratavam os segmentos de recta sem fazer referência específica à sua medida de comprimento.

do segundo pelo lado do primeiro (por analogia com o precedente cálculo), resulta não em um, mas em dois meios volumes, tendo a forma de paralelepípedos rectangulares; a^2b e ab^2 . Estes paralelepípedos são os meios proporcionais entre a^3 e b^3 : $a^3/a^2b = a^2b/ab^2 = ab^2/b^3$. Se substituirmos os quatro volumes representados por estas expressões pelas sucessivas grandezas a , x , y , e b , parece assim, que o problema da duplicação do cubo se reduz, em termos geométricos, à construção de duas grandezas x e y como meios proporcionais entre duas dadas grandezas a e b , de modo que $b=2a$.” ([L], pp. 115-116)³⁵.

George Allman ([All], p. 84) defende que Hipócrates deve ter considerado o problema resolvido supondo que foi encontrado um cubo com o dobro do volume do cubo dado, depois terá procurado o terceiro proporcional entre as arestas destes dois cubos, seguidamente encontrado o quarto proporcional entre estas três linhas; o quarto proporcional tinha o dobro da aresta do cubo dado. Assim estava o problema resolvido: bastava procurar os dois meios proporcionais entre a aresta do cubo inicial e o seu dobro.

Consideremos então um cubo de aresta a . Suponhamos que a aresta do cubo de volume duplo é x . Assim

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

O terceiro proporcional de a , x será y tal que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}.$$

O quarto proporcional de a , x , y será b tal que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

Mas então, por um lado, $\frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$ e, por outro lado, $\frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a^3}{x^3} = \frac{1}{2}$.

Logo, $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

Os Pitagóricos tinham resolvido o problema de encontrar o meio proporcional entre duas linhas dadas, é por isso muito provável que Hipócrates tenha colocado este novo problema de uma maneira análoga³⁶. ([All], p. 84).

No entanto, Thomas Heath aponta uma outra direcção:

³⁵ François (Gustave) Lasserre (14.09.1919–22.12.1989), foi professor de grego na universidade de Lausanne desde 1959 até 1985 e director do Departamento de Estudos Clássicos da mesma universidade de 1973 a 1983. Também foi docente privado de Literatura Grega na Universidade de Genebra de 1948 a 1958 e novamente de 1962 a 1974. Duas vezes Honoris Causa, Athena em 1982 e Urbino em 1988; (dados obtidos por e-mail, Weboffice@unil.ch, junto do WebOffice da Universidade de Lausanne).

³⁶ George Allman considera, ainda, que o problema da duplicação do cubo tem um significado mais profundo, remontando ao tempo dos Pitagóricos ([All], pp. 84-88). Não iremos aprofundar este assunto por considerar estar fora do âmbito desta dissertação.

“Alternativamente ele [Hipócrates] pode ter ido buscar a ideia à teoria dos números.” ([H4], I, p. 201).

De facto existe uma proposição nos *Elementos* de Euclides, *Elementos* VIII, 12, que³⁷ refere que entre dois números cúbicos existem dois meios proporcionais e “(...) é bastante provável que Hipócrates tenha apenas dado uma interpretação geométrica deste facto.” ([H4], I, p. 201).

Não se sabe qual foi o raciocínio de Hipócrates para ter reduzido o problema da duplicação do cubo ao problema de encontrar dois meios proporcionais. No entanto, é natural aceitar a analogia com o problema da duplicação do quadrado.

“(...) Hipócrates pode ter usado um *argumento por analogia* para obter o seu propósito. Ele queria tratar um problema em aberto, na geometria tridimensional, do mesmo modo que um problema em geometria plana tinha sido resolvido muito tempo antes. Ele pode ter começado com a ideia que ‘quadrado’ e ‘cubo’ são, de certo modo, figuras análogas.” ([Sz], pp. 97-98).

“Embora não haja nenhum testemunho directo desse facto, os historiadores acreditam que Hipócrates começou por reflectir na questão da duplicação do quadrado e que, de seguida, a procurou generalizar.” ([ESQSC], p. 310).

De facto, se o problema da duplicação do quadrado pode ser reduzido ao problema de encontrar *um meio proporcional* entre a aresta e o seu dobro, não seria de «esperar» que o problema da duplicação do cubo pudesse ser reduzido ao problema de encontrar *dois meios proporcionais* entre a aresta e o seu dobro? Assim, tendo em conta esta analogia, vamos começar por dar alguma atenção ao problema da duplicação do quadrado.

Seja dado um quadrado de lado a ; juntando dois desses quadrados obtemos um rectângulo de área dupla da do quadrado inicial. A questão que agora se coloca é quadrar este rectângulo, isto é, construir um quadrado com a mesma área do rectângulo em causa.



Esta quadratura resolve-se³⁸ construindo o meio proporcional, x , entre os segmentos a e $2a$. E construir um meio proporcional com régua não graduada e compasso não era difícil para os geómetras da época.

³⁷ Segundo Thomas Heath ([H4], I, p. 201) esta proposição é Pitagórica. Refira-se, ainda, que a proposição *Elementos* VIII, 11 diz respeito a números quadrados e ao meio proporcional.

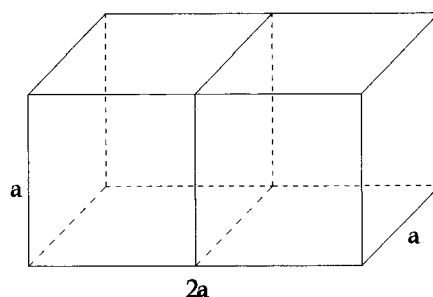
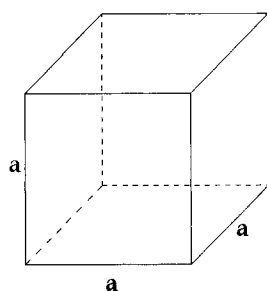
³⁸ Um outro processo mencionado no diálogo *Menon*, de Platão, escrito no séc. IV a.C., refere que o lado procurado é a diagonal do quadrado inicial.

Repare-se que da proporção $\frac{a}{x} = \frac{x}{2a}$ deduzimos que $x^2 = 2a^2$, o que prova que o

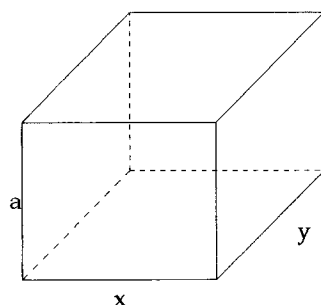
quadrado de lado x tem área dupla da do quadrado de lado a .

Relativamente ao problema da duplicação do cubo, é possível que Hipócrates tenha efectuado um percurso análogo ao seguinte raciocínio³⁹:

- 1- Consideremos um cubo de lado a , juntando dois desses cubos obtemos um paralelepípedo de arestas $2a$, a , e a , cujo volume é duplo do volume do cubo inicial.



- 2- Suponhamos, agora, que pretendemos transformar o paralelepípedo noutro com o mesmo volume, a mesma altura a , mas com uma das arestas da base x . Tendo em atenção que o volume terá de se manter o mesmo, a outra aresta da base terá de se alterar, designemo-la por y .

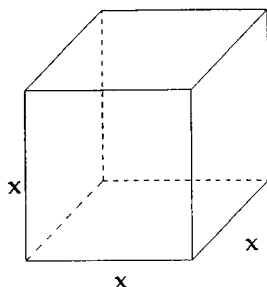


Como o volume e a altura dos sólidos das últimas duas figuras se mantiveram, vem que $xy = 2a^2$, donde

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a}. \quad (1)$$

³⁹ Os passos seguintes são adaptados da obra *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, ([BJB], pp. 97-100).

- 3- Finalmente vamos transformar o paralelepípedo da figura anterior num cubo, mantendo o volume, mas de aresta x .



Assim, a face de arestas a e y transformou-se numa face quadrada de aresta x mas com a mesma área, donde, $ay = x^2$ e assim vem que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}. \quad (2)$$

- 4- De (1) e (2) deduzimos então, como pretendíamos, que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Não temos registos de que Hipócrates tenha sido capaz de construir os dois meios proporcionais a que se refere na sua redução do problema da *duplicação do cubo* ao problema dos *dois meios proporcionais*; aliás, será que ele procurou tal construção?

“Mais tarde os géometras reconheciam claramente que uma *redução* não é ela própria equivalente a uma *solução* do problema proposto. Mas será que Hipócrates já fazia esta distinção no seu tratamento do problema da duplicação do cubo? Uma passagem de Aristóteles sugere que sim.” ([Kn1], p. 24).

Efectivamente a passagem a que Knorr se refere encontra-se na obra de Aristóteles *De Anima II* quando este define “quadratura”. (cf. em [H3], p. 191).

Depois de Hipócrates ter descoberto que o problema da duplicação do cubo se podia reduzir ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o dobro desta, parece que todo o esforço subsequente foi no sentido de encontrar uma construção para os dois meios proporcionais em causa. Estas buscas foram muito frutíferas no desenvolvimento da matemática, sendo um exemplo de tal facto a “ (...) descoberta (ou, pelo menos, estudo atento) das secções cónicas.” ([ESQSC], p. 311).

É amplamente aceite que Hipócrates reduziu o problema da duplicação do cubo ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre duas linhas dadas. Aliás, George

Allman ([All], p. 59) refere uma passagem de Proclo, onde Hipócrates é mencionado com tendo sido o primeiro inventor da redução geométrica⁴⁰. No entanto, entre as muitas dúvidas que persistem, tem grande relevância aquela que diz respeito ao modo como ele terá justificado a sua *redução*.

A questão continua a suscitar interesse entre os historiadores. Em 1995, Ken Saito publicou na revista *Historia Mathematica*, o artigo⁴¹ “Doubling the Cube: A New Interpretation of its Significance for Early Greek Geometry.”⁴²

É provável que Hipócrates tenha efectivamente provado a sua redução; caso contrário, seria de estranhar o facto de Arquitas⁴³, como parece, ter partido logo para a procura dos dois meios proporcionais como tentativa de solução para o problema da duplicação do cubo, tomando como certa a equivalência entre os dois problemas.

⁴⁰ Segundo George Allman (cf. [All], p. 41) os Pitagóricos já conheciam uma versão “ingénua” do método da redução, embora o aparecimento de uma versão “sistematizada” de tal método seja, usualmente, associada ao nome de Hipócrates de Quios. Aliás, embora não existam certezas entre uma ligação Pitagóricos-Hipócrates, não seria muito especulativo que essa ligação existisse (cf. [All], p. 99).

⁴¹ Na primeira página do artigo, em modo de resumo, podemos ler: “É amplamente conhecido que Hipócrates de Quios reduziu o problema da duplicação do cubo ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre duas linhas dadas. No entanto, nada é conhecido sobre o modo como ele justificou a sua redução. Para responder a esta questão, proposições e padrões de argumentos nos Livros VI, XI e XII dos *Elementos* são examinados. Uma reconstrução de acordo com a que Arquimedes utilizou na prova da Proposição II-1 da sua obra *Da Esfera e do Cilindro* é proposta, sendo discutido se tal é plausível.” ([Sa], p. 119).

⁴² A análise detalhada deste artigo de Saito excede o âmbito desta dissertação.

⁴³ Cronologicamente parece que foi Arquitas o primeiro matemático a procurar uma solução para o problema dos dois meios proporcionais.

2.3 A SOLUÇÃO DE ARQUITAS

Arquitas de Tarento, géometra do séc. IV a.C., é o autor da mais antiga solução⁴⁴ para o problema da duplicação do cubo, da qual temos conhecimento através de uma passagem de Eudémio de Rhodes reproduzida nos escritos de Eutócio. ([Ver2], II, p. 607).

Pensamos que a notoriedade desta solução, de extrema beleza e absolutamente rigorosa, não lhe advém só pelo facto de ser a primeira mas, principalmente, por ser uma construção engenhosa a três dimensões (e não no plano). Esta construção envolve a procura de um certo ponto, obtido pela intersecção de três superfícies de revolução – um cone recto, um cilindro e um toro. A intersecção do cilindro com o toro é uma curva e o ponto pretendido obtém-se pela intersecção desta curva com o cone.

“(…) *curva de dupla curvatura*, à qual Arquitas não deu denominação especial – provavelmente o primeiro exemplo duma curva dêste género concebida por um géometra –, cuja construção mostra que a Escola Pitagórica empregava, já nesta época, o conceito de *logar geométrico* e fazia uso da *geometria do espaço* (...)” ([V], p. 182).

A solução proposta por Arquitas, além de ser uma solução de extrema beleza geométrica, revela uma excelente inovação por parte deste matemático, nomeadamente por utilizar movimentos mecânicos na solução de um problema geométrico⁴⁵.

“A solução de Arquitas é a mais notável de todas, especialmente quando é considerada a sua data (primeira metade do século quarto a.C.), porque não é uma construção plana mas uma construção corajosa a três dimensões, determinando um certo ponto como a intersecção de três superfícies de revolução (...)” ([H4], I, pp. 246-247).

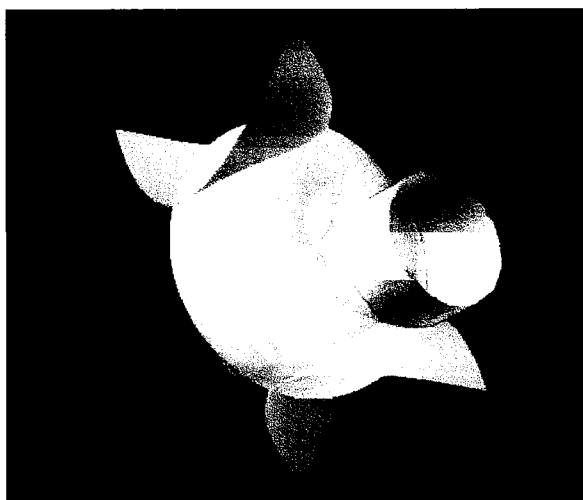


Imagem obtida com o Software *Graphing Calculator*

⁴⁴ Obviamente, quando escrevemos «solução», estamos a considerar uma solução para o problema que não está em conformidade com os requisitos das construções com régua não graduada e compasso.

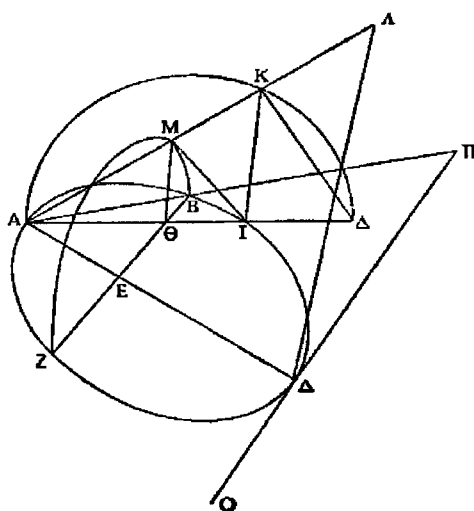
⁴⁵ Segundo George Allman (cf. [All], p. 110) podemos inferir que Arquitas foi o primeiro a utilizar movimentos mecânicos na solução de um problema geométrico.

Relativamente a esta solução, comecemos por atender ao texto histórico transmitido por Eutócio no seu comentário à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*, transcrita aqui em conformidade com o que transcreve Paul Ver Eecke no seu livro *Les Oeuvres Complètes d'Archimède* ([Ver2], II, pp. 607-609):

“A solução de Arquitas, segundo Eudémio

Sejam $A\Delta$, Γ duas linhas rectas dadas; pretendemos encontrar os dois meios proporcionais entre $A\Delta$ e Γ .

Seja o círculo $AB\Delta Z$ descrito sobre a maior linha recta $A\Delta$, e seja AB inserido igual a Γ e prolongado de modo a encontrar em Π a tangente ao círculo em Δ . Seja a recta BEZ desenhada paralela à recta $\Pi\Delta O$; imagine-se um semicilindro recto sobre o semicírculo $AB\Delta$, e em $A\Delta$, um semicírculo recto situado no paralelogramo do semicilindro. Se, mantendo-se fixa a extremidade A do diâmetro, este semicírculo rodar a partir de Δ para B , irá cortar a superfície cilíndrica no seu movimento descrevendo nela uma certa curva.



De novo, se $A\Delta$ se mantiver estacionário e o triângulo $A\Pi\Delta$ rodar com um movimento contrário em relação ao semicírculo, então a linha recta $A\Pi$ descreverá uma superfície cónica que na sua rotação irá intersectar a curva no cilindro num certo ponto; ao mesmo tempo o ponto B irá descrever um semicírculo na superfície do cone. Correspondendo ao ponto onde as curvas se encontram, seja o semicírculo em movimento a ocupar a posição ΔKA , e o triângulo movido na direcção oposta para a posição $\Delta\Lambda A$, seja o ponto do sobredito encontro K . Seja BMZ o semicírculo descrito por B e seja BZ a secção comum deste com o círculo $B\Delta ZA$ e tire-se a partir de K uma perpendicular ao plano do semicírculo $B\Delta A$. Esta perpendicular cairá na circunferência do círculo, visto que o cilindro é recto. Que assim caia e designemo-la por KI . Seja a recta que junta o ponto I ao ponto A a intersectar BZ no ponto Θ ; seja $A\Lambda$ a encontrar o semicírculo BMZ em M e sejam $K\Delta$, MI , $M\Theta$ ligadas. No entanto, tendo em atenção que cada um dos semicírculos ΔKA , BMZ está em ângulo

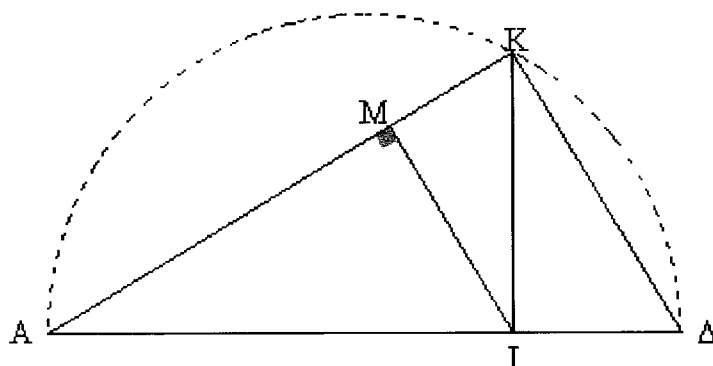
recto com o plano que está por baixo, a sua secção comum $M\Theta$ está também em ângulo recto com o plano do círculo, assim $M\Theta$ está também em ângulo recto com BZ . Em consequência o rectângulo limitado por $B\Theta$, ΘZ , que é o mesmo que o rectângulo limitado por $A\Theta$, ΘI , é igual ao quadrado em $M\Theta$; donde, o triângulo AMI é semelhante a cada um dos triângulos $MI\Theta$ e $MA\Theta$, sendo o ângulo formado pelas rectas IM , MA recto. O ângulo formado pelas rectas ΔK , KA é também recto, donde as rectas $K\Delta$ e MI são paralelas e devido à semelhança dos triângulos a seguinte proposição é válida:

$$\Delta A : AK = KA : AI = IA : AM.$$

Então, as quatro linhas rectas ΔA , AK , AI , AM estão em proporção contínua. E a recta AM é igual a Γ , visto que é igual a AB , donde, para os dois segmentos de recta dados AK , AI , dois meios proporcionais $\Delta\Delta$ e Γ foram encontrados.”

De facto, o que Arquitas afirma é que se $\Delta\Delta$ e Γ ($\Delta\Delta > \Gamma$) forem os dois segmentos entre os quais pretendemos construir os dois meios proporcionais, devemos proceder do seguinte modo: num plano horizontal traça-se um círculo de diâmetro $\Delta\Delta$ e constrói-se a corda $AB=\Gamma$; prolonga-se AB de modo a intersectar a recta tangente à circunferência no ponto Δ num ponto que vamos designar por I ; constrói-se verticalmente a metade superior de um semicilindro circular recto, cuja base seja o semicírculo $B\Delta A$; rodando o segmento de recta AI em torno do segmento de recta $\Delta\Delta$ vamos gerar um cone circular recto; rodando, em torno da recta perpendicular ao plano $AB\Delta$ que passa por A , o semicírculo vertical recto de diâmetro $\Delta\Delta$ vamos gerar um toro de raio interno nulo. Denotamos por K o ponto de intersecção destas três superfícies (o cilindro, o cone e toro) e, sendo I o pé no plano $AB\Delta$ da perpendicular a este plano e que passa por K , então AI é a aresta do cubo procurado (considerando o caso que nos interessa, isto é, $\Delta\Delta = 2\Gamma$).

“Não é admirável? Arquitas deve ter tido uma verdadeira inspiração divina quando encontrou a sua construção. A figura que Arquitas imagina em sua mente e a qual pretende construir é, evidentemente, o triângulo rectângulo $AK\Delta$ com as duas perpendiculares KI e IM (...).” ([Wa1], p. 151).



Arquitas, discípulo da escola pitagórica, deve ter observado que a partir de um triângulo rectângulo era possível calcular os meios proporcionais em causa traçando a altura do triângulo e construindo o segmento perpendicular que se prolonga desde o pé da dita altura para um dos catetos. Tendo em linha de conta que os triângulos $AK\Delta$, AKI e AMI são semelhantes, é válida a proporção

$$\frac{A\Delta}{AK} = \frac{AK}{AI} = \frac{AI}{AM}.$$

Assim, se $A\Delta = 2AM$, temos que AI é a aresta procurada. Então, a questão era situar correctamente o ponto K de tal modo que $AK\Delta$ fosse um triângulo rectângulo, onde ao construir os segmentos IK e IM se obtivesse $A\Delta = 2AM$. E, como vimos, a solução proposta por Arquitas para encontrar o ponto K foi intersectar três superfícies, um cilindro, um cone e um toro⁴⁶.

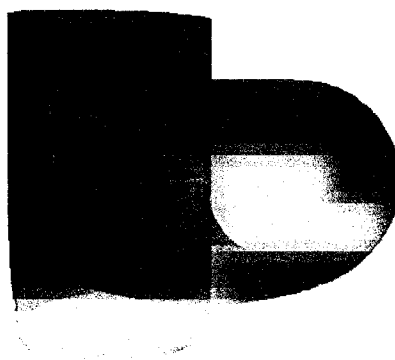


Imagem retirada de [RFG]

Ao contrário de outras soluções transmitidas por Eutócio, as quais posteriormente iremos analisar, esta é uma solução extremamente abstracta e geométrica, pois os «movimentos» envolvidos na sua construção são muito complexos para permitir a utilização de um engenho mecânico.

“A solução referida do *problema de Delos*, que Eutócio nos conservou em conformidade com o que expõe Eudémio, mostra-nos que Arquitas – que é designado como o *ultimus Pithagoreorum* – tinha vistas exactas sobre a *geração dos cones e dos cilindros*, (...)” ([V], p. 183).

Presentemente, à luz da geometria analítica e com a utilização de software adequado, é possível reproduzirmos imagens que ilustrem a solução de Arquitas mas, na sua época, em que processo ou processos se terá ele apoiado? Esta é uma questão que, possivelmente, continuará sem resposta e,

⁴⁶ Uma justificação mais detalhada do possível raciocínio de Arquitas pode ser encontrada em ([Wa1], p.152), que aqui não apresentamos por ultrapassar o âmbito desta dissertação.

“(…) torna ainda mais extraordinária a solução de Arquitas, se imaginarmos a época em que foi feita e as condições de trabalho – instrumentos e materiais para a escrita e desenho, por exemplo – que então existiam.” ([Ve], p. 47).

Debrucemo-nos, agora, sobre a solução de Arquitas, mas à luz da actual geometria analítica. Se $A\Delta$ for considerado para eixo dos x , a perpendicular a $A\Delta$ em A no plano do círculo ABA , como eixo dos y e a perpendicular a estas rectas como eixo dos z , temos assim um sistema de eixos cartesianos adequado à figura imaginada por Arquitas.

Seja agora $A\Delta = b$ e $\Gamma = a$ (sem esquecer que o caso que nos vai interessar é $A\Delta = 2\Gamma$, isto é, $b = 2a$, considerando que o cubo a duplicar tem aresta a). O ponto K é obtido pela intersecção das três seguintes superfícies:

- (1) o cilindro $x^2 + y^2 = bx$;
- (2) o toro⁴⁷ $x^2 + y^2 + z^2 = b\sqrt{x^2 + y^2}$;
- (3) o cone $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$.

De facto, tendo em atenção que (2) é equivalente a $\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = b\sqrt{x^2 + y^2}$, temos

$$\frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Tendo em atenção que (3) é equivalente a $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(bx)^2}{a^2}$ e considerando (1) vem que

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a^2}, \text{ donde,}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 + y^2}{a}; \text{ logo } \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

E, assim:

$$\frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}. \quad (4)$$

⁴⁷ A superfície gerada pelo movimento do semicírculo recto $A\Delta$ em torno de A (um toro de diâmetro interno nulo).

Estamos a considerar um sistema de eixos coordenados em que a origem é o ponto A . Vamos considerar o ponto que procuramos, K , com coordenadas (x, y, z) , e assim $AK = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tendo em atenção que o ponto I é a projecção de K sobre o plano XOY , vem que I tem coordenadas (x, y) , donde $AI = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Assim, de (4) obtemos

$$\frac{b}{AK} = \frac{AK}{AI} = \frac{AI}{a}.$$

E, tendo em atenção que $A\Delta = b$ e $\Gamma = a$ ($= AB$) vem que $\frac{A\Delta}{AK} = \frac{AK}{AI} = \frac{AI}{\Gamma}$. Isto é, para os dois segmentos de recta dados $A\Delta$ e Γ , os dois meios proporcionais AK e AI foram encontrados. Repare-se que da relação anterior obtém-se

$$\left(\frac{AI}{\Gamma}\right)^3 = \frac{AI}{\Gamma} \cdot \frac{AI}{\Gamma} \cdot \frac{AI}{\Gamma} = \frac{A\Delta}{AK} \cdot \frac{AK}{AI} \cdot \frac{AI}{\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Gamma}; \text{ isto é, } \left(\frac{AI}{\Gamma}\right)^3 = \frac{A\Delta}{\Gamma}.$$

Fica assim provado que o cubo de aresta AI está para o cubo de aresta Γ como $A\Delta$ está para Γ . O caso particular da duplicação do cubo, isto é, da construção de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo dado e o seu dobro, corresponde a ser $A\Delta = 2\Gamma$, donde vem $\left(\frac{AI}{\Gamma}\right)^3 = \frac{2\Gamma}{\Gamma}$, ou seja, $AI^3 = 2\Gamma^3$; assim o cubo de aresta AI tem volume duplo do cubo de aresta Γ , como pretendíamos.

Por muito rigorosa que seja a contribuição de Arquitas, tal não invalidou que a procura de uma solução continuasse em aberto, visto que a solução que Arquitas apresentou para o problema da duplicação do cubo é uma solução no campo da geometria tridimensional e não no campo da geometria plana, como era pretendido.

2.4 A SOLUÇÃO DE EUDOXO

Através do legado de Eutócio temos conhecimento do epigrama de Eratóstenes, onde as palavras, “(...) por alguma espécie de linhas curvas como é descrito pelo divino Eudoxo” (citado em [E]; em [Th5], p. 297), permitem-nos deduzir que Eudoxo de Cnido, eminente cientista e estudioso do século IV a.C., apresentou uma solução para o problema da duplicação do cubo.

Eutócio dá a entender que teve acesso a documentos que podiam ser uma transcrição da solução de Eudoxo para o referido problema. No entanto, Eutócio omite a prova, talvez pelo facto de nela ter encontrado erros. Levanta-se aqui uma questão: sendo Eudoxo um excelente matemático, apresentaria uma prova com erros? Não será mais provável que o(s) erro(s) provenha(m) de alguém que transcreveu, sem entender correctamente, o original de Eudoxo? Sendo assim, talvez Eutócio não tenha tido acesso ao original de Eudoxo, mas a um extracto ou compilação do original. ([H4], I, p. 249).

Além da referência feita por Eutócio, não se conhece nenhuma outra que nos permita reconstruir com segurança a solução de Eudoxo. Segundo Wilbur Knorr, algumas propostas têm sido apresentadas para reconstruir a solução perdida de Eudoxo:

“Uma faz uso da curva (...) relacionada com a análise que conduz à solução de Arquitas (...). Uma segunda sugestão, defendida por Tannery, também advém da figura de Arquitas.” ([Kn1], p. 53).

Paul Tannery (1843-1904), no seu artigo “*Sur les Solutions du Problème de Délos par Archytas et par Eudoxe – Divination d’une Solution Perdue*”, defende que a verdadeira solução de Eudoxo terá sido adaptada da solução de Arquitas, não sendo mais do que uma versão a duas dimensões desta última, isto é, a projecção da solução de Arquitas num plano ([T2], pp. 53-61). No entanto, Thomas Heath contrapõe afirmando:

“É de admitir que a sugestão de Tannery para o método de Eudoxo é atraente; mas obviamente que é apenas uma conjectura. Na minha opinião, a objecção encontrada é ser uma solução muito próxima de uma adaptação das ideias de Arquitas. Eudoxo foi, é verdade, um aluno de Arquitas e, existe uma grande semelhança de estilo entre a construção de Arquitas para a curva de dupla curvatura e a construção de Eudoxo para a lemniscata esférica, usando a revolução de esferas concêntricas; mas Eudoxo era, penso eu, muito original como matemático para se contentar ele próprio com uma mera adaptação da solução de Arquitas.” ([H4], I, p. 251).

Mas Paul Tannery não foi o único a relacionar Eudoxo com Arquitas. Riddell, no artigo “*Eudoxan Mathematics and the Eudoxan Spheres*”, estabelece uma relação entre o

trabalho de Eudoxo no campo da astronomia com a configuração dos triângulos semelhantes, que estão subjacentes à construção de Arquitas. ([R]).

Provavelmente nunca teremos a certeza sobre qual seria a solução atribuída a Eudoxo e não é difícil concordar com as palavras de Thomas Heath acima transcritas, embora seja de considerar que a solução de Arquitas, pela sua beleza matemática, poderá ter «agitado» os matemáticos da época ao ponto de motivar novas soluções (ou versões).

2.5 A SOLUÇÃO DE MENECCMO

A fama de Menecmo, matemático do século IV a.C., está relacionada com as curvas que hoje conhecemos pelo nome de cónicas – elipse, parábola e hipérbole; nomeadamente com a descoberta de que estas curvas se podem obter por intersecção dum cone recto de base circular, com um plano perpendicular a uma geratriz.

“Demócrito⁴⁸ especulou nas secções planas de um cone, paralelas à base e muito próximas umas das outras, e outros géometras devem ter cortado o cone (e o cilindro) por secções não paralelas à base; mas Menecmo foi o primeiro que é conhecido por ter identificado as secções resultantes como curvas com certas propriedades.” ([Th1], p. 1683).

As descobertas de Menecmo advieram da sua procura de uma solução para o problema da duplicação do cubo, mais propriamente, da procura de curvas que possuíssem as propriedades adequadas à resolução do problema de encontrar os dois meios proporcionais da redução de Hipócrates. As soluções de Menecmo, preservadas por Eutócio, têm por base a construção de um certo ponto como a intersecção de duas cónicas, num dos casos uma parábola e uma hipérbole equilátera, no outro caso duas parábolas.

A prova que chegou até nós não reproduz as palavras de Menecmo e é possível que tenha sido «remodelada» por Eutócio na sua própria linguagem ou por algum seu antecessor, tendo em conta que utiliza termos que só mais tarde foram introduzidos por Apolónio (séc. III a.C.) ou por Aristeu (séc. IV a.C.). ([Th1], p. 1684).

Tendo em atenção a redução feita por Hipócrates, o problema que então se coloca é determinar dois *meios proporcionais* entre dois segmentos a e $2a$ (sendo a a aresta do cubo a duplicar), ou seja, a determinação de x e y tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}. \quad (1)$$

Na linguagem da actual geometria analítica é fácil reconhecer que para se verificar a relação anterior basta que se verifiquem duas das três equações seguintes:

$$x^2 = ay ; \quad (2)$$

$$xy = 2a^2 ; \quad (3)$$

$$y^2 = 2ax . \quad (4)$$

Para tornar-se mais elucidativo, de (2) podemos ainda deduzir

$$y = \frac{1}{a}x^2, \quad (5)$$

⁴⁸ Supõe-se que Demócrito tenha nascido no séc. V a.C..

e de (4) deduzir

$$x = \frac{1}{2a} y^2. \quad (6)$$

Portanto, podemos obter x de dois modos:

- como abcissa do ponto de intersecção da parábola $y = \frac{1}{a} x^2$ com a hipérbole equilátera $xy = 2a^2$ – a *primeira solução de Menecmo*;

- como abcissa do ponto de intersecção da parábola $y = \frac{1}{a} x^2$ com a parábola

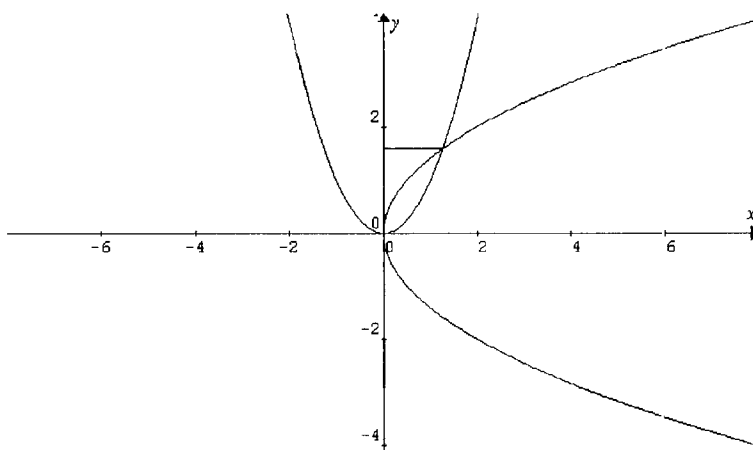
$$x = \frac{1}{2a} y^2 \text{ – a segunda solução de Menecmo.}$$

Note-se que, em ambos os casos, se conclui que $x^3 = 2a^3$, ou seja, x é a aresta do cubo cujo volume é duplo do volume do cubo dado, de aresta a . À luz dos nossos conhecimentos (e notações) actuais estas soluções parecem simples, mas para Menecmo que não podia recorrer à geometria analítica – um legado de Descartes no séc. XVII – são muito elaboradas, e não é de admirar que tenham exigido de Menecmo uma atenção especial às propriedades das curvas em causa.

De modo a reforçar a actual simplicidade da(s) solução(s) atribuída(s) a Menecmo, vamos exemplificar a duplicação do cubo recorrendo ao uso de duas parábolas e, obviamente, com a ajuda da geometria analítica.

Seja, por exemplo, um cubo de aresta $a=1$, o qual pretendemos duplicar. Procuramos a solução da equação $x^3 = 2 \cdot 1^3$, ou seja, pretendemos construir um segmento x cujo comprimento seja $\sqrt[3]{2}$.

Para tal, vamos desenhar as parábolas $y = x^2$ e $x = \frac{1}{2} y^2$; o seu ponto de intersecção (diferente da origem) tem por abcissa a medida procurada. O segmento x , aresta do cubo procurado, está representado a vermelho na figura.



É importante não esquecer que, embora esteja encontrada a aresta do cubo procurado, esta solução não se restringe ao uso exclusivo da régua não graduada e do compasso, visto

que não é possível desenhar todos os pontos de uma parábola (ou de uma hipérbole) com tais instrumentos; além disso a definição de uma cônica através de secções do cone envolve geometria tridimensional. Note-se, ainda, que a atribuição da autoria da segunda solução (duas-parábolas) a Menecmo é posta em causa por G. J. Toomer, que publicou, em 1976, a tradução para inglês da versão árabe da obra de Diocles *Dos Espelhos Cáusticos*⁴⁹.

“Tem sido até agora assumido por todos os historiadores que esta segunda prova é também atribuída a Menecmo, mas G. J. Toomer descobriu, como proposição 10 da versão árabe da obra de Diocles *Dos Espelhos Cáusticos*, uma solução para o problema dos dois meios proporcionais pela intersecção de duas parábolas (...), que se assemelha muito à segunda solução. E segue-se, como proposição 11, uma outra solução que é idêntica nos conteúdos matemáticos àquela que é atribuída a Diocles, por Eutócio. Toomer acredita que a segunda solução deve assim ser atribuída a Diocles e não a Menecmo.” ([Th1], p. 1685).

No entanto, Knorr ([Kn1], p. 240) discorda, por considerar que o intuito de Diocles, ao apresentar o método das duas-parábolas, não era oferecer uma nova solução para o problema da duplicação do cubo:

“Na proposição 10 Diocles volta-se para a duplicação do cubo, mostrando como pode ser resolvida através da intersecção de duas parábolas. Pelo facto deste ser precisamente o método das duas-parábolas, que Eutócio apresenta como uma construção alternativa, seguidamente ao método da parábola-hipérbole atribuído a Menecmo, não podemos inferir que a inclusão de Diocles do método das duas-parábolas contrarie a sua origem em Menecmo. É concebível, embora improvável, que Diocles não tivesse conhecimento dos esforços de Menecmo.

(...)

Parece-nos, assim, que aqui a intenção de Diocles não é oferecer uma nova solução para o problema, mas antes apresentar um outro exemplo do seu método de desenhar parábolas.”

Aliás, como mais à frente veremos, Diocles apresenta uma solução original (através de uma nova curva) para o problema dos dois meios proporcionais. Uma questão que tem intrigado os historiadores é saber qual terá sido a ‘inspiração’ de Menecmo, aluno de Eudoxo, para obter as curvas cónicas como a intersecção dum cone recto de base circular, com um plano perpendicular a uma geratriz, e nomeadamente saber se Menecmo terá construído algum aparelho para desenhar tais curvas. George Allman ([All], pp. 160-174) analisa algumas das investigações sobre o assunto, as quais não vamos aqui referir por estarem fora do âmbito desta dissertação.

⁴⁹ Uma maior referência a esta obra será feita quando analisarmos a solução de Diocles.

2.6 A SOLUÇÃO ATRIBUÍDA A PLATÃO

Eutócio atribui a Platão, influente filósofo e matemático da segunda metade do séc. V a.C. e primeira metade do séc. IV a.C. e “(...) principal promotor do desenvolvimento intelectual do seu tempo (...)” ([V], p. 202), uma solução de cariz mecânico para o problema da duplicação do cubo, ou melhor, e uma vez mais, para o problema da inserção de dois meios proporcionais entre dois segmentos de recta.

No entanto, é amplamente aceite que esta solução foi incorrectamente atribuída a Platão. “Platão reprovou as soluções mecânicas por estas destruírem a virtuosidade da geometria.” ([H4], I, p. 255). E, portanto, seria de estranhar que ele próprio apresentasse uma solução dentro dos parâmetros que reprovava⁵⁰.

“A proveniência Platónica deste método deixa em aberto sérias dúvidas. Primeiro, Eratóstenes não lhe faz referência ao longo das suas considerações sobre os primordiais esforços na duplicação do cubo. Tal facto é ainda mais notório tendo em atenção que o seu interesse pela filosofia platónica é muito evidente ao longo da sua obra *Platonicus*, onde relata a história do envolvimento de Platão com o oráculo de Delos. Certamente, se fosse o caso, Eratóstenes teria um interesse particular em indicar uma efectiva solução de Platão, se a conhecesse. Além disso, este método depende da concepção de um engenho⁵¹ mecânico.” ([Kn1], p. 57).

Existem duas teorias relativas à autoria da solução mecânica atribuída a Platão para resolver o problema da duplicação do cubo. Uma que defende que Platão inventou esta solução mecânica para ilustrar como é fácil descobrir tais soluções; a outra, talvez a mais aceite, que defende que esta solução mecânica foi inventada pelos seus discípulos na Academia. ([H4], I, p. 255).

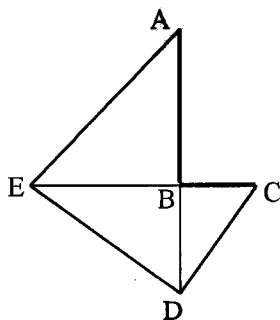
Sendo assim, uma dúvida persiste: a quem atribuir a autoria deste método? Sem responder directamente a esta questão, Thomas Heath ([H4], I, pp. 256-258) indica alguns pontos comuns entre o método aqui em causa (na sua vertente mais teórica e menos mecânica) e a segunda solução de Menecmo; enquanto que Knorr ([Kn1], pp. 57-62) acrescenta a procura de uma relação com a solução perdida de Eudoxo.

⁵⁰ Ao reprovos as soluções existentes pressupomos que Platão também reprovou a solução de Menecmo. Mas, tendo em atenção que a solução de Menecmo é puramente teórica, não envolvendo instrumentos de qualquer tipo, em que se terá baseado Platão para reprovos tal solução? Van der Waerden ([Wa1], pp. 162-164), com base na análise do diálogo *Platonicus*, tenta responder a esta questão. No entanto, não será de considerarmos que para Platão todas as soluções que não fossem soluções possíveis de executar apenas com régua não graduada e compasso seriam soluções mecânicas?

⁵¹ De referir que Eutócio, no seu texto, traça com muita minúcia o engenho mecânico em causa, indo ao pormenor de descrever o tipo de ranhuras, encaixes, etc..

Vejamos então em que consiste a solução mecânica atribuída a Platão. Considerem-se duas linhas rectas BC e AB perpendiculares entre si, entre as quais pretendemos encontrar os dois meios proporcionais. Tendo em atenção que o problema é a duplicação de um cubo de aresta a , vamos aqui considerar o caso particular em que AB é o dobro de BC , isto é, $AB=2a$ e $BC=a$.

Sejam os triângulos EDC e AED , rectos em D e E , respectivamente, e de modo a que ED seja comum. Consideremos ainda que as hipotenusas AD e EC se intersectam perpendicularmente em B , como ilustrado na figura.



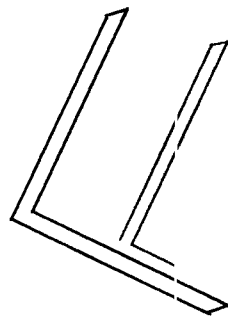
Deste modo, são semelhantes entre si os triângulos BDC , AEB e BED , visto que, tendo em atenção as condições de construção da figura, os ângulos BDC e BAE são iguais bem como os ângulos BAE e BED , sendo ainda recto o ângulo em B .

Donde, $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{AB}$, isto é,

$$\frac{a}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{2a}.$$

Logo, BD e BE são os dois meios proporcionais entre a e $2a$, sendo BD a aresta do cubo cujo volume é duplo do volume do cubo de aresta a . Assim, o problema em causa fica solucionado desde que se construa uma figura nas condições anteriormente descritas.

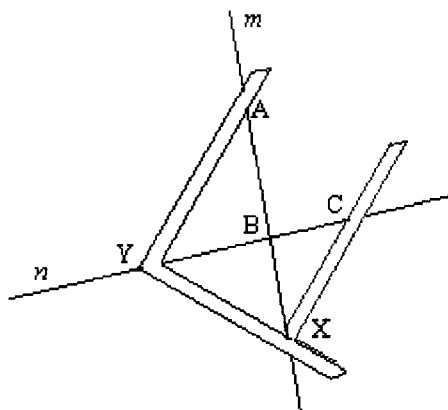
“O *esquadro de Platão*, seria um instrumento constituído por três réguas, duas delas paralelas entre si e uma terceira perpendicular às anteriores, estando esta última fixada a uma das primeiras, mas permitindo a deslocação da outra numa calha. Portanto, duas das réguas seriam fixas, enquanto que a outra deslizaria paralelamente a si mesma.” ([ESQSC], p. 311).



Vamos então construir essa figura utilizando o *esquadro de Platão*. Comece-se por traçar duas rectas perpendiculares m e n intersectando-se num ponto B e marquem-se dois

pontos A e C sobre m e n , respectivamente, de modo a que $AB = 2BC$ (note-se que estamos a considerar o caso em que $BC=a$ é a resta do cubo a duplicar).

De seguida, manipule-se o esquadro de Platão ajustando-o à figura de modo a que as duas réguas paralelas passem por A e C e os pontos em que estas encontram a outra régua, X e Y , estejam sobre as rectas m e n , respectivamente, como ilustra a figura.



Assim, os segmentos BX e BY são os dois meios proporcionais procurados, como anteriormente provámos; sendo BX a aresta do cubo procurado. Uma vez mais estamos em presença de uma solução que não está de acordo com as regras previamente estabelecidas, pois a solução em causa envolve um instrumento mecânico (o esquadro de Platão) muito diferente da régua não graduada e compasso.

2.7 A SOLUÇÃO DE ERATÓSTENES

O nome de Eratóstenes de Cirene não está apenas associado ao problema da duplicação do cubo devido ao relato das lendas sobre a história deste problema, nomeadamente na sua obra *Platonicus* e na suposta carta ao Rei Ptolomeu. Está também associado a uma solução do problema dos dois meios proporcionais, através de um instrumento mecânico. Esse instrumento, conhecido pelo nome de *mesolabo*, é descrito⁵² por Papo no livro III da *Colecção Matemática* e por Eutócio no comentário ao livro II do tratado *Da Esfera e do Cilindro*.

Seguidamente, apresentamos a imagem de um mesolabo, obtida no site do Museu Universitário de História Natural e da Instrumentação Científica da Universidade de Modena e Reggio Emilia, Itália.

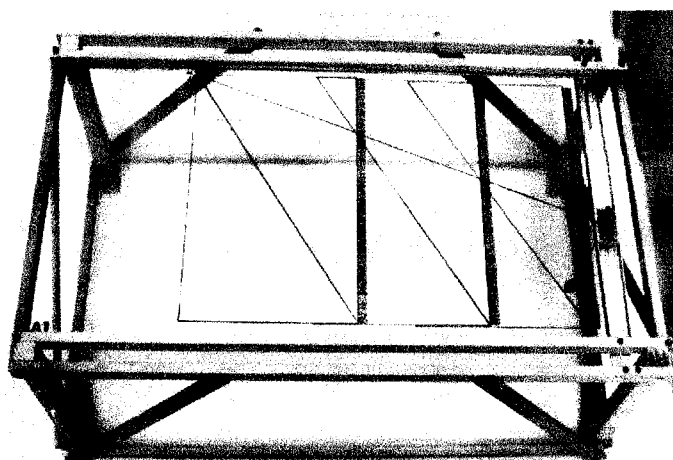


Imagem obtida em <http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/141ogg.htm>

A suposta carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu é mais uma vez uma importante fonte de informação histórica e, embora seja amplamente aceite que a carta é forjada,

“(…) não há motivos para duvidar da história aí relatada, a qual é, de facto, amplamente confirmada. E deve agradecer-se ao autor por ter incluído na sua carta a prova e o epigrama, retirados dum monumento votivo, que são trabalhos genuínos de Eratóstenes.” ([Th5], I, pp. 256-257).

Eratóstenes colocou uma réplica do seu mecanismo, segundo parece em bronze, numa coluna dedicada ao rei Ptolomeu, erguida em Alexandria. Da coluna também constava uma breve demonstração e um epigrama onde se lia:

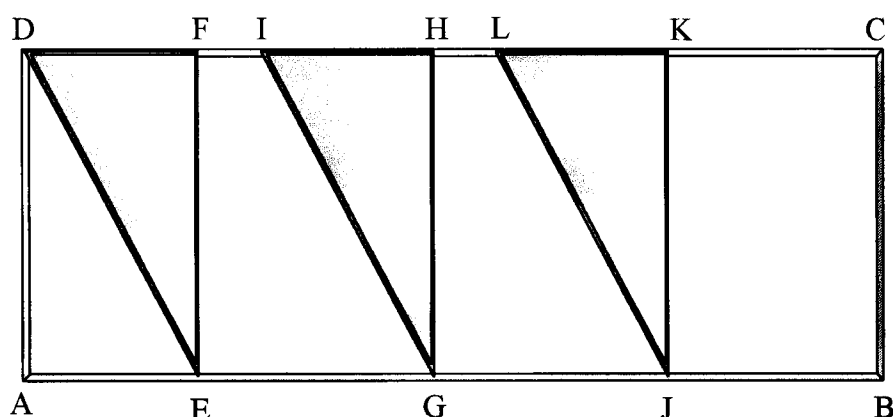
⁵² A descrição feita por Papo de Alexandria tem uma pequena variação em relação à descrição de Eutócio. Enquanto que este último fala em paralelogramos, Papo fala em triângulos. No entanto, este facto é indiferente no contexto em causa. ([Th5], I, p. 291).

“Se, bom amigo, de qualquer cubo pequeno queres obter um cubo duas vezes maior, e rapidamente transformar um qualquer sólido noutra, aqui está a tua possibilidade (...). Não procures conseguir coisas difíceis de executar por meio dos cilindros de Arquitas, nem cortar o cone pela triade⁵³ de Menecmo, nem descrevê-las por alguma espécie de linhas curvas de divino Eudoxo. De facto, por meio destas placas, facilmente construirás milhares de médias a partir de uma base pequena.

Afortunado Ptolomeu, porque és um pai que goza a juventude com o seu filho e lhe deste tu próprio tudo o que é preciso para as Musas e Reis; possa ele no futuro, Zeus Celestial, receber o ceptro das tuas mãos. Que assim aconteça, e que cada um que veja esta oferta votiva diga: ‘esta é uma oferta de Eratóstenes de Cirene’.” (citado em: [H4], I, p. 260).

Vamos basear-nos no mesolabo descrito por Eratóstenes para construir os dois meios proporcionais da redução de Hipócrates, de modo a duplicar um cubo de aresta a .

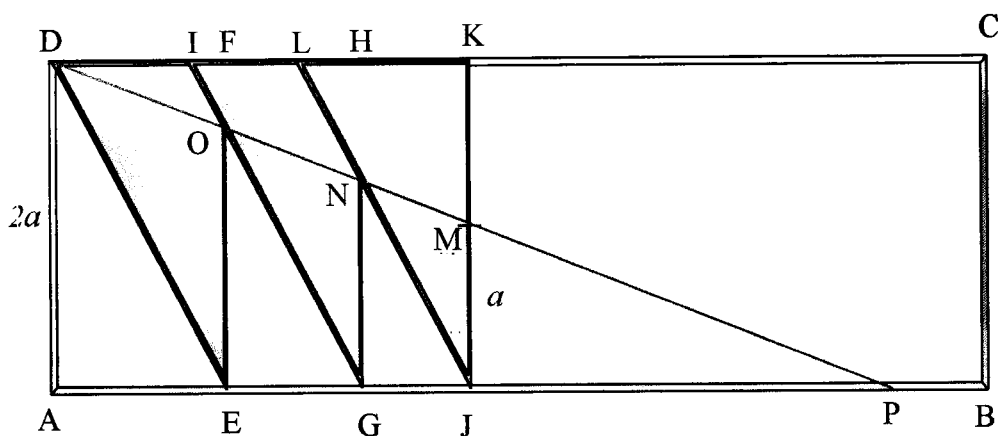
Começemos por construir uma estrutura rectangular $ABCD$ de bases paralelas AB e DC . Em cada uma das bases está uma calha tripla de modo que em cada ranhura possa deslizar um triângulo, como ilustra a figura seguinte. Os três triângulos em causa são congruentes e podem deslizar (tendo em atenção o modo como foram colocadas as calhas) paralelos a si mesmos, podendo ocorrer sobreposições (parciais ou totais).



Tendo em atenção que o cubo a duplicar tem aresta a , o mesolabo deverá ser construído de modo a que $AD = 2a$.

Seja M o ponto médio do lado KJ , do triângulo LJK , e consideremos fixo o triângulo DEF . Deslocam-se os outros dois triângulos de tal modo que o ponto N , de intersecção de HG com LJ , e o ponto O , de intersecção de FE com IG , sejam colineares com os pontos D e M , de modo a que a recta que os une encontre AB num ponto que designaremos por P .

⁵³ A frase “ (...) pela triade de Menecmo (. . .) ” pode fazer parecer que se trata das três formas de secções cónicas, parábola, hipérbole e elipse. No entanto, Knorr é de opinião que, tendo em atenção o contexto, esta triade é a hipérbole e as duas parábolas, as curvas cónicas especificamente associadas ao problema da duplicação do cubo. ([Kn1], p. 62)



Assim, tem-se,

$\frac{OE}{DA} = \frac{OP}{DP}$, tendo em atenção que nos triângulos equiângulos, OEP e DAP , os lados adjacentes a ângulos iguais são proporcionais (*Elementos* VI, 4);

$\frac{OP}{DP} = \frac{OG}{DE}$, tendo em atenção que nos triângulos equiângulos, OGP e DEP , os lados adjacentes a ângulos iguais são proporcionais (*Elementos* VI, 4);

$\frac{OG}{DE} = \frac{GP}{EP}$, tendo em atenção que nos triângulos equiângulos, OGP e DEP , os lados adjacentes a ângulos iguais são proporcionais (*Elementos* VI, 4);

$\frac{GP}{EP} = \frac{NG}{OE}$, tendo em atenção que nos triângulos equiângulos, NGP e OEP , os lados adjacentes a ângulos iguais são proporcionais (*Elementos* VI, 4);

Donde, $\frac{OE}{DA} = \frac{OP}{DP} = \frac{OG}{DE} = \frac{GP}{EP} = \frac{NG}{OE}$.

De forma análoga justificaríamos que $\frac{NG}{OE} = \frac{NP}{OP} = \frac{NJ}{OG} = \frac{JP}{GP} = \frac{MJ}{NG}$.

Logo,

$\frac{MJ}{NG} = \frac{NG}{OE} = \frac{OE}{DA}$ ou, ainda, atendendo às condições iniciais,

$$\frac{a}{NG} = \frac{NG}{OE} = \frac{OE}{2a}.$$

Concluimos, assim, que NG e OE são os dois meios proporcionais entre a e $2a$ e portanto NG é a aresta do cubo cujo volume é duplo do cubo de aresta a .

Note-se que pode ser necessário prolongar as «calhas» DC e AB de modo a encontrar-se o ponto P , da intersecção da recta DM com o lado AB . Repare-se, ainda, que se pretendermos encontrar os dois meios proporcionais entre c e d ($d > c$), isto é, não sendo o caso particular de um deles ser o duplo do outro, bastaria construir um mesolabo nas condições análogas, mas em que $AD = d$ e $JM = c$. É interessante a visão de Eratóstenes ao afirmar que:

“(…), por meio destas placas, facilmente construirás milhares de médias a partir de uma base pequena.” (citado em: [H4], I, p. 260).

De facto, se pretendermos encontrar três meios proporcionais entre c e d , bastará considerar mais um triângulo (numa nova calha) e, de modo análogo, encontraremos x , y , e z tais que $\frac{c}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{d}$; e assim sucessivamente.

Do mesmo modo que no caso da solução pelo uso do esquadro de Platão, a solução de Eratóstenes não está de acordo com as regras previamente estabelecidas, pois a solução em causa envolve um instrumento mecânico (o mesolabo) muito diferente da régua não graduada e compasso.

2.8 A SOLUÇÃO DE NICOMEDES

Pouco se sabe sobre a vida de Nicomedes, mas é possível, cronologicamente, situá-lo entre Eratóstenes e Apolônio, isto é, no séc. III a.C., visto que ele critica Eratóstenes pela construção mecânica dos dois meios proporcionais que este apresentou, enquanto que Apolônio faz referência, a certa altura, à «concóide de Nicomedes». ([To3], p. 1864).

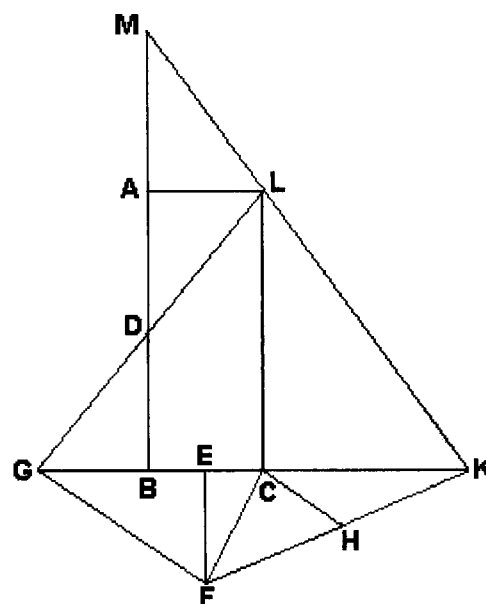
A solução de Nicomedes⁵⁴ para a construção dos dois meios proporcionais teve por base a redução do problema a uma construção por nêusis, que resolveu por meio de uma curva – a concóide – também usada para resolver o problema da trissecção do ângulo (cf. pp. 33-36).

Nicomedes ficou muito orgulhoso pela sua construção, usando a curva que tinha descoberto, ao ponto de reclamar que esta solução para o problema da duplicação do cubo era muito superior ao método de Eratóstenes, que considerou estar fora do espírito da geometria:

“Nicomedes também descreve, no seu livro *Sobre as Linhas Concóides*, a construção de um instrumento cumprindo o mesmo propósito, e do qual parecia estar excessivamente orgulhoso ao ponto de ridicularizar grandemente as descobertas de Eratóstenes como impraticáveis e privadas de sentido geométrico.” ([E]; em [Th5], pp. 297-298).

Vejamos então em que consiste o método de Nicomedes para inserir dois meios proporcionais entre dois segmentos dados, seguindo Tomas Heath ([H4], I, pp. 260-263).

Sejam dadas duas rectas perpendiculares AB e BC entre as quais se pretende construir os dois meios proporcionais⁵⁵. Complete-se o rectângulo $ABCL$ e bissectem-se as duas rectas BC e AB nos pontos E e D , respectivamente. A partir de L trace-se uma recta passando por D e encontrando o prolongamento de CB num ponto que designamos por G . Tire-se, por E , a perpendicular EF a BC e de modo que



⁵⁴ Segundo Tomas Heath, as explicações que Eutócio e Papo dão do procedimento de Nicomedes apenas diferem ligeiramente ([H4], I, p. 260). Refira-se que apenas conhecemos a obra de Nicomedes *Sobre as Linhas Concóides* de fontes indirectas.

⁵⁵ O caso que nos interessa é $AB = 2BC$, que é um caso particular daquele aqui descrito.

$CF = AD$. Una-se agora GF e trace-se a paralela a esta passando por C , a qual vamos designar de CH .

Agora, construamos a concóide⁵⁶ que tem F como polo, CH como régua e a «distância» igual a FC (ou AD). Esta concóide (um dos seus ramos) encontra o prolongamento do segmento de recta EC num ponto que vamos designar por K .

Assim, a determinação de K foi reduzida a uma construção por nêusis: a inserção, entre as rectas CH e EC , de um segmento de comprimento igual ao comprimento de AD e «apontado» para o ponto F (o segmento HK).

De seguida, unamos FK e, pelas propriedades da curva concóide, HK é igual à «distância». Assim, $HK = FC = AD$.

Finalmente, trace-se KL e prolongue-se até encontrar a recta BA num ponto que vamos designar por M . Deste modo, CK e MA são os meios proporcionais procurados, isto é,

$$\frac{AB}{CK} = \frac{CK}{MA} = \frac{MA}{BC}.$$

Provemos agora tal facto. Efectivamente, por BC ser bissectado em E e prolongado até K , temos (tendo em atenção *Elementos* II, 6) que $BK \cdot CK + EC^2 = EK^2$, adicionando EF^2 a ambos os membros, vem $BK \cdot CK + EC^2 + EF^2 = EK^2 + EF^2$.

$$\text{Assim, (Elementos I, 47) temos } BK \cdot CK + CF^2 = FK^2. \quad (1)$$

Tendo em atenção que, no triângulo MBK , AL é paralela à base BK , temos (*Elementos* VI, 2) que $\frac{MA}{AB} = \frac{ML}{LK}$. Analogamente, tendo em atenção que LC é paralelo a MB , tem-se

$$\frac{ML}{LK} = \frac{BC}{CK}. \text{ Donde } \frac{MA}{AB} = \frac{BC}{CK}. \text{ Mas, } AB = 2AD \text{ e } BC = \frac{1}{2}GC \text{ (visto que } GB = BC \text{, tendo}$$

em atenção que os triângulos ADL e DGB são geometricamente iguais), logo

$$\frac{MA}{AD} = \frac{GC}{CK}. \quad (2)$$

Seja agora o triângulo GFK , onde GF e CH são paralelas, pelo modo como foi construída a figura. Assim (*Elementos* VI, 2), tem-se

$$\frac{GC}{CK} = \frac{FH}{HK}. \quad (3)$$

⁵⁶ A curva concóide foi descrita com maior pormenor no capítulo sobre a trissecção do ângulo (cf. p. 34).

De (2) e (3) obtém-se que $\frac{MA}{AD} = \frac{FH}{HK}$. Tendo em atenção *Elementos* V, 18 vem que $\frac{MA + AD}{AD} = \frac{FH + HK}{HK}$, donde $\frac{MD}{AD} = \frac{FK}{HK}$ e pela hipótese de construção temos que $AD = HK$ (visto que $AD = FC$), e consequentemente $MD = FK$, donde $MD^2 = FK^2$.

Temos ainda que $MD^2 = MB \cdot MA + AD^2$ (*Elementos* II, 6). E, de (1), obtém-se $MB \cdot MA + AD^2 = BK \cdot KC + CF^2$.

Mas $AD = CF$, donde $MB \cdot MA = BK \cdot KC$ e portanto $\frac{KC}{MA} = \frac{MB}{BK}$.

Atendamos agora aos triângulos MBK e LCK , os quais são semelhantes. Temos que $\frac{MB}{BK} = \frac{LC}{CK}$ (*Elementos* VI, 4), e assim vem que $\frac{CK}{MA} = \frac{LC}{CK}$.

Analogamente, $\frac{MB}{BK} = \frac{MA}{AL}$ e, consequentemente, $\frac{LC}{CK} = \frac{CK}{MA} = \frac{MA}{AL}$, ou seja (porque $AB = LC$ e $BC = AL$),

$$\frac{AB}{CK} = \frac{CK}{MA} = \frac{MA}{BC}.$$

Isto é, CK e MA são os meios proporcionais entre AB e BC .

Se pretendermos construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado de aresta AB , basta considerar $BC = 2AB$ e assim CK será a aresta do cubo procurado. Temos assim uma vez mais uma solução que não está de acordo com as construções que se restringem ao uso apenas da régua não graduada e compasso, pois como já afirmámos no capítulo anterior, não podemos construir todos os pontos da concóide de Nicomedes utilizando apenas estes instrumentos.

No entanto, citando van der Waerden, pelo exposto podemos "(...) admirar o talento de Nicomedes, que descobriu não só a prova mas a construção em si." ([Wa1], p. 237).

2.9 AS SOLUÇÕES DE HERÃO, APOLÓNIO E FILÃO DE BIZÂNCIO

Seguindo o exemplo de Gomes Teixeira e Thomas Heath, optamos por apresentar as soluções destes três géometras em simultâneo, uma vez que elas são muito parecidas. Pois “(...) sabemos por Eutócio que a solução de Herão é praticamente a mesma que a de Filão” ([H4], II, p. 300). No entanto, o método de Herão “(...) não aparece apenas na narrativa de Eutócio, mas também nos legados de Herão, *Mecânica* e *Belopoeica*, e Papo toma conhecimento deste método através de Herão. Mas outro comentador, João Filópono⁵⁷, atribui-o a Apolónio.” ([Kn1], p. 188). Além disso:

“Papo, nas *Colecções Matemáticas* (...), atribui a Apolónio dois métodos, um mecânico e outro geométrico, para resolver o problema de Delos, sem no entanto os expor. Nas obras de Apolónio, que chegaram até nós, não encontramos coisa alguma sobre este problema [duplicação do cubo], mas no *Comentário* [à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*] de Eutócio encontramos o método mecânico de Apolónio, o qual não difere no essencial daquele que foi dado por Herão. A relação estreita entre a construção mecânica e a construção mediante uma hipérbole, exposta atrás⁵⁸, levou alguns autores a considerar como provável que o método geométrico de Apolónio seja idêntico a esta última construção, ou pelo menos não defira dela no essencial; e que as três soluções mecânicas de Herão, Filão Bizantino e Apolónio foram deduzidas da solução geométrica de Apolónio, como aplicações práticas.” ([Te1], p. 295).

Temos assim razões⁵⁹ que sobejamente nos levam a agrupar estas três soluções do problema da duplicação do cubo. E, como seguidamente veremos, os «três métodos» em causa têm, em termos de construção, o mesmo objectivo: a determinação de dois pontos (G e F , na nossa exposição), com características especiais. Pontos estes que não serão possíveis de encontrar com o uso exclusivo da régua não graduada e compasso mas, como veremos, tal já será possível se a régua empregada tiver um bordo com marcas.

⁵⁷ Filósofo da primeira metade do séc. VI d.C..

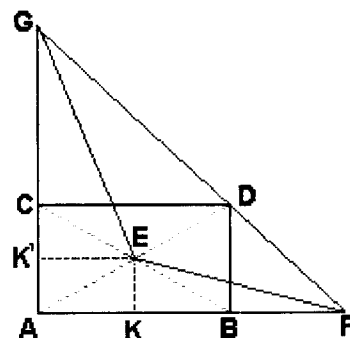
⁵⁸ Gomes Teixeira ([Te1], pp. 293-295) explica como encontrar geometricamente uma determinada recta mediante certa hipérbole, enquanto que, e ainda segundo ele, Eutócio supõe que se procede por tentativas para determinar tal recta (a recta GF na figura da página seguinte).

⁵⁹ Knorr considera que existem três versões (muito próximas umas das outras) da solução do problema da duplicação do cubo que aparecem associadas ao nome de Apolónio, existindo ainda a menção, por Papo, a uma quarta – esta pelo uso de secções cônicas. Aquela que é reproduzida por Eutócio é equivalente ao método apresentado por Herão e, relativamente às duas versões dados por João Filópono, uma é precisamente o método de Herão, enquanto que a outra coincide com aquela que é reproduzida por Eutócio associada ao nome de Filão ([Kn1], p. 305). Podemos encontrar em Knorr ([Kn1], pp. 305-308) uma descrição aprofundada das interligações entre os métodos de Apolónio, Herão e Filão.

2.9.1 HERÃO

A solução de Herão de Alexandria, matemático que possivelmente⁶⁰ terá vivido no séc. I d.C., aparece nas suas obras *Mecânica* e *Belopoeica*⁶¹ e é também umas das onze⁶² soluções transmitidas⁶³ por Eutócio no seu comentário à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*. Vejamos em que consiste essa solução.

Sejam CD e DB os dois segmentos⁶⁴ entre os quais pretendemos construir os dois meios proporcionais. Construamos o rectângulo $CABD$, sendo E o ponto de intersecção das suas diagonais. Consideremos uma régua com a aresta colocada em D e encontrando o prolongamento de AB num ponto que vamos designar por F e o prolongamento de AC no ponto que vamos designar por G . Manipule-se a régua de modo a que esta assuma uma posição em que



$EF = EG$. Assim, os segmentos CG e BF são os meios proporcionais procurados, isto é,

$$\frac{CD}{CG} = \frac{CG}{BF} = \frac{BF}{DB}.$$

Justifiquemos agora estes factos. Seja K o ponto médio de AB ($= CD$), então (tendo em atenção *Elementos* II, 6) $AF \cdot FB + BK^2 = FK^2$, adicionando KE^2 a ambos os membros obtemos $AF \cdot FB + BK^2 + KE^2 = FK^2 + KE^2$, donde (tendo em atenção *Elementos* I, 47)

$$AF \cdot FB + EB^2 = EF^2. \quad (1)$$

⁶⁰ As incertezas sobre a data em que viveu Herão são muitas. Por um lado Michael Mahoney, autor da biografia de Diocles no *Biographical Dictionary of Mathematicians*, aponta a data de 62 d.C.; por outro lado Thomas Heath ([H4], II, pp. 300-306) investiga sobre a data em que viveu Herão, concluindo assim como provável o séc. III d.C. No entanto, todos os autores são unânimes em considerar como certo que Herão viveu entre o ano 150 a.C. e o ano 250 d.C..

⁶¹ No fim dessa obra, consagrada à fabricação de armas de arremesso, encontra-se um método instrumental pelo qual Herão determina dois meios proporcionais para um problema de certo modo análogo ao problema de Delos. ([Ver2], II, p. 590).

⁶² Não estamos a contabilizar a «solução de Eudoxo».

⁶³ Como sabemos, o que caracteriza as fontes dos textos gregos, mesmo os nossos textos mais antigos, é que geralmente são cópias de cópias, que por sua vez já eram cópias ou fragmentos de originais. Este facto leva alguns historiadores a ter preferência por determinada fonte em detrimento de outra ou outras. Por exemplo, Ivor Thomas ([Th5], p. 267) tem preferência pela versão transmitida por Papo na *Colecção Matemática* em detrimento da versão transmitida por Eutócio, por considerar que a versão de Papo conserva com maior autenticidade as palavras de Herão, enquanto que Eutócio faz alguns aditamentos.

⁶⁴ Mais uma vez o caso que nos interessa é um deles o dobro do outro, isto é, $CD = 2DB$.

Seja agora K' o ponto médio de AC , então (tendo em atenção *Elementos* II, 6) $AG \cdot CG + CK'^2 = GK'^2$, adicionando $K'E^2$ a ambos os membros obtemos $AG \cdot CG + CK'^2 + K'E^2 = GK'^2 + K'E^2$, donde (tendo em atenção *Elementos* I, 47)

$$AG \cdot CG + CE^2 = GE^2. \quad (2)$$

Visto que $EB = CE$ e $EF = GE$, de (1) e (2) obtém-se que $AF \cdot FB = AG \cdot CG$, ou seja,

$$\frac{AF}{AG} = \frac{CG}{FB}. \quad (3)$$

Consideremos agora os triângulos GCD , GAF e DBF , os quais são semelhantes entre si (pois têm os três ângulos iguais, cada um a cada um); tendo em atenção *Elementos* VI, 4, tem-se que $\frac{FA}{AG} = \frac{CD}{CG} = \frac{FB}{DB}$.

Assim, considerando (3) tem-se que $\frac{CD}{CG} = \frac{CG}{FB} = \frac{FB}{DB}$, isto é, CG e BF são os meios proporcionais entre os segmentos dados, CD e DB , como pretendíamos provar.

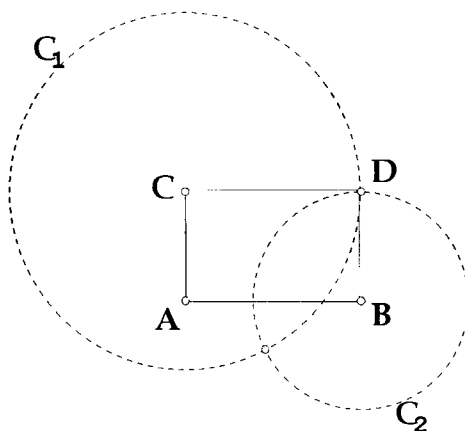
Portanto, se o cubo dado tiver de aresta DB , basta considerar $CD = 2DB$ e o cubo procurado (como o dobro do volume) terá de aresta FB .

2.9.2 APOLÓNIO

Apolónio de Perga, matemático da segunda metade do séc. III a.C. e princípio do séc. II a.C., é reconhecido como um geómetra de mérito excepcional, principalmente pelo seu famoso tratado *Cónicas*. Esta obra passou a ser o tratado por excelência sobre as sessões cónicas e substituiu os escritos anteriores de Menecmo, Aristeu e Euclides, pois Apolónio estudou tão profundamente e exaustivamente as propriedades das cónicas que tornou as obras anteriores obsoletas. Embora se trate de uma obra extensa e de leitura difícil, para quem está familiarizado com os métodos modernos, este tratado está a par do que de mais brilhante conhecemos da geometria antiga. ([V], pp. 368-369). No entanto, Apolónio também se dedicou ao problema da duplicação do cubo:

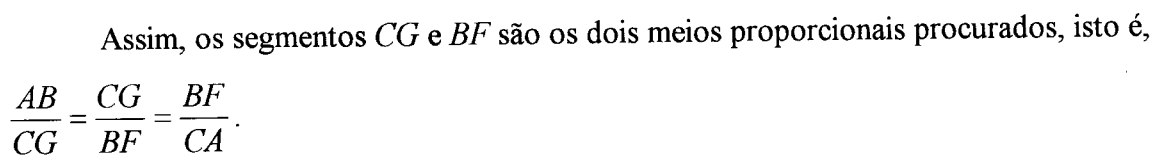
“São do mesmo sábio geómetra outros trabalhos, como: *Sobre o problema de Delos*, com uma solução – diz Eutócio – que teria sugerido outra inserta nas *Mecânicas* de Herão (...).” ([V], p. 383).

Atendamos à versão transmitida por Eutócio. Sejam AB e CA os dois segmentos entre os quais pretendemos construir os dois meios proporcionais. A primeira parte da solução de Apolónio resume-se à construção de um rectângulo com os dois segmentos dados como lados. Coloquemo-los de modo a fazer um ângulo recto entre si, como indicado na figura.



Com centro no ponto C e raio igual a AB construímos a circunferência C_1 , e com centro no ponto B e raio igual ao segmento CA construímos a circunferência C_2 . Seja D o ponto de intersecção destas duas circunferências. Temos assim construído o rectângulo $CABD$.

A partir daqui, a solução de Apolónio é uma variação da de Herão. Seja E o ponto de intersecção das diagonais do rectângulo $CABD$. Com centro no ponto E construímos uma circunferência intersectando os prolongamentos de AB e AC em F e G , respectivamente, e de modo a que F , D e G sejam colineares.



Visto que as condições da figura que usamos no caso da solução de Herão são ainda válidas no presente caso (repare-se que os segmentos GE e EF são raios da circunferência em causa, logo iguais), é portanto obvio que a mesma prova é válida neste caso.

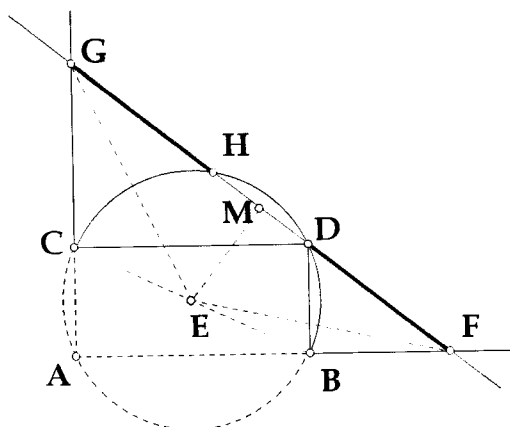
2.9.3 FILÃO DE BIZÂNCIO

Pouco sabemos sobre a vida deste matemático que, segundo parece, viveu no séc. III a.C.. No entanto, Eutócio menciona um seu trabalho sobre o problema da duplicação do cubo:

“É no livro I, actualmente perdido, do *Tratado de Mecânica* de Filão de Bizâncio que esta solução empírica do problema dos dois meios proporcionais é retirada por Eutócio.” ([Ver2], II, p. 592).

Filão, nos seus empreendimentos de inventor, deparou-se com o problema de criar uma catapulta que teria como objectivo lançar um projectil com o dobro do peso de um outro lançado por outra catapulta. Assim, encontrou o problema de ter de duplicar o cubo, tendo em atenção que os pesos dos dois projecteis em causa estavam em proporção com os cubos dos seus diâmetros. A resolução do seu problema não pode ser obtida por uma construção euclidiana com apenas régua não graduada e compasso, a solução passa por encontrar dois meios proporcionais e, assim, Filão descreveu como encontrar esses meios proporcionais. ([Dr], p. 587).

Sejam CD e DB os dois segmentos entre os quais pretendemos construir os dois meios proporcionais. Coloquemo-los de modo a que façam um ângulo recto em D . Unamos agora os pontos C e B e construamos a semicircunferência CDB , de diâmetro CB . De seguida, construamos a recta BF perpendicular a DB e a recta CG perpendicular a CD .



Considere-se uma régua com a aresta colocada no ponto D e encontrando o prolongamento de AB no ponto F , o prolongamento de AC no ponto G e o semicírculo no ponto H . Manipule-se esta régua de modo a que esta assuma uma posição em que $GH = DF$.

Assim, os segmentos CG e BF são os dois meios proporcionais entre CD e DB , isto é,

$$\frac{CD}{CG} = \frac{CG}{BF} = \frac{BF}{DB}, \text{ como provaremos a seguir.}$$

Suponhamos que as rectas FB e GC são prolongadas, intersectando-se no ponto A . É obvio que as rectas DB e GA são paralelas, o ângulo de vértice em A é recto e se completarmos a semicircunferência, a circunferência obtida passa pelo ponto A . O rectângulo $CABD$, onde E é o ponto de intersecção das diagonais, é o mesmo que o da construção de Herão (cf. p. 79).

Consideremos a perpendicular a GF passando por E (a vermelho na figura). Tendo em atenção que HD é uma corda da circunferência de centro E , por *Elementos* III, 3, tem-se que essa perpendicular bissecta HD . Atendendo à hipótese de construção da figura temos que $GH = DF$, então M é o ponto médio de GF . Assim, os triângulos MEF e GEM são congruentes⁶⁵ (*Elementos* I, 4), donde $GE = EF$.

Atendendo que as condições da figura que usamos no caso da solução de Herão são ainda válidas no presente caso, é obvio que a mesma prova é também válida, razão pela qual se omite aqui.

Assim, para duplicar (em volume) um cubo de aresta DB , basta considerar $CD=2DB$ e o cubo procurado terá de aresta BF .

⁶⁵ Caso de congruência de triângulos lado-ângulo-lado.

2.10 A SOLUÇÃO DE DIOCLES

Durante longo período de tempo tudo o que se conhecia sobre a obra e vida de Diocles, matemático do início do séc. II a.C., era através de dois fragmentos da sua obra *Dos Espelhos Cáusticos*, preservados por Eutócio no comentário ao já referido texto de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*. Um desses fragmentos é a contribuição de Diocles para o famoso problema de Delos.

Só recentemente é que uma tradução⁶⁶ árabe *Dos Espelhos Cáusticos* foi descoberta⁶⁷ numa Biblioteca em Mashhad, Irão.

Assim, é de referir que nenhuma obra (completa) de Diocles era conhecida de Thomas Heath quando este escreveu, em 1921, *A History of Greek Mathematics*, tendo Toomer, em 1976, traduzido para inglês e publicado a versão árabe do perdido tratado de Diocles.

“Na terceira parte Diocles apresenta dois métodos para a duplicação do cubo: o primeiro reproduz simplesmente uma forma alternativa ao método das duas parábolas de Menecmo (Prop. 10), enquanto que o segundo utiliza uma curva especial, conhecida nos tempos modernos com o nome de *cissóide* (Props. 11-16).” ([Kn1], p. 234).

Como inferimos, deve-se a Diocles a solução do problema da duplicação do cubo por meio de uma nova curva – a *cissóide*. Segundo parece não foi Diocles quem lhe atribuiu este nome, pois nos seus escritos ele utiliza o termo ‘linha’⁶⁸ para se referir a tal curva e além disso “o nome *cissóide* (‘forma de hera’) é mencionado [pela primeira vez] por Gémino no séc. I a.C., isto é, cerca de um século depois da morte do inventor Diocles.” ([Lo], p. 132).

Mais tarde, o método usado para gerar a curva atribuída a Diocles foi generalizado e todas as curvas geradas por um processo análogo ao da *cissóide* de Diocles são designadas por *cissóides*⁶⁹.

⁶⁶ De modo a melhor abrangermos a importância desta descoberta podemos atender às palavras pelas quais G. J. Toomer inicia a sua tradução da referida obra de Diocles: “Nada sabemos sobre Diocles excepto o que pode ser inferido da presente obra. Até à descoberta do texto árabe, mesmo a sua data constituía uma incerteza.” ([To1], p. 1).

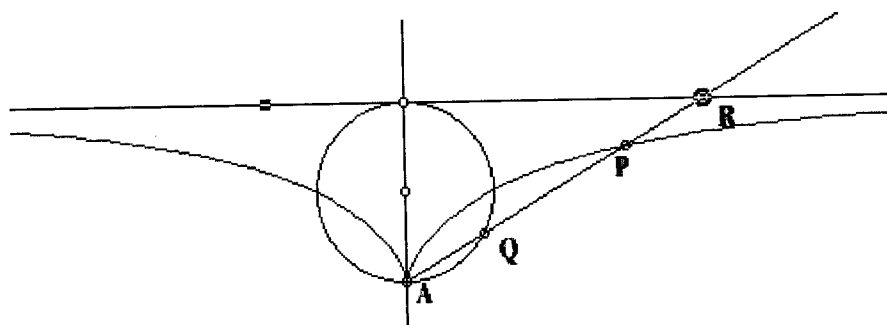
⁶⁷ Informação obtida em <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Diocles.html>, site da responsabilidade de Edmund Robertson e John O'Connor, docentes do Departamento de Matemática da Universidade de St. Andrews, Escócia.

⁶⁸ Segundo *Elementos* I, def. 2 “Linha é o que tem comprimento sem largura” e é no comentário a esta definição que Thomas Heath, analisando o conceito/relação entre linha e curva, refere que, segundo Eutócio, a *cissóide* é supostamente a curva através da qual Diocles resolve o problema da duplicação do cubo. (cf. [H2], I, p. 164).

⁶⁹ A *cissóide* despertou o interesse de várias gerações de matemáticos. “Os matemáticos do séc. XVII colocaram à prova a sua perícia através da *cissóide*. Fermat e Roberval construíram a tangente (1634); Huygens e Wallis encontraram a área (1658); enquanto Newton dá-a como exemplo, na sua *Arithmetica Universalis*, das antigas tentativas na resolução de problemas cúbicos (...).” ([Lo], p. 133). Ainda recentemente, matemáticos portugueses colocaram em discussão na Internet, em <http://www.fc.up.pt/mp/machaves/diocles.html>, uma proposta de construção (utilizando o moderno software de geometria dinâmica *The Geometer's Sketchpad*) da *cissóide* de Diocles, como lugar geométrico do vértice de uma parábola móvel rolando sem escorregamento sobre uma parábola fixa.

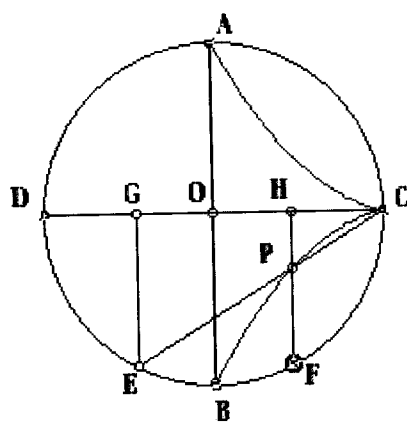
Comecemos por definir a curva cissóide no seu caso geral. Sejam S e S' duas quaisquer curvas e A um ponto fixo. Desenhemos uma linha recta passando por A e intersectando S e S' em Q e R , respectivamente, e considere-se o ponto P , encontrado nesta linha, de modo que $AP = QR$. Então, o lugar geométrico do ponto P descreve a *cissóide de S e S' relativamente ao ponto A* . ([Lo], p. 131).

Na cissóide de Diocles as duas curvas envolvidas são uma circunferência e uma linha recta que lhe é tangente, sendo o ponto fixo o ponto da circunferência diametralmente oposto ao ponto de tangência, como pode ser observado na figura seguinte.



Vejamos como Diocles construiu a sua cissóide⁷⁰. Considere-se uma circunferência de centro O onde AB e DC são diâmetros perpendiculares entre si. Sejam E e F pontos da circunferência nos quadrantes BD e BC , respectivamente, e colocados de modo a que os arcos EB e BF sejam iguais.

Desenhemos GE e HF perpendiculares a DC , tracemos EC e seja P o ponto de



intersecção de EC com HF . Suponhamos, agora, que E e F ocupam novas posições nos

⁷⁰ Diocles define a sua curva apenas em relação a um dos quadrantes da circunferência de referência.

quadrantes DB e BC , respectivamente, mas sempre a igual distância de B . A cissóide de Diocles é a curva traçada pelo ponto P nas várias posições que este ocupa.

Assim o ponto P , encontrado como acima foi descrito, permite provar que HF e HC são os dois meios proporcionais entre os segmentos DH e HP , isto é:

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} = \frac{HC}{HP}.$$

De facto, tendo em atenção *Elementos* VI, 13, tem-se que HF é o meio proporcional entre os segmentos DH e HC , isto é, $\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC}$.

Pelas condições de construção da figura anterior é imediato que $\frac{DH}{HF} = \frac{GC}{GE}$, pois $HF = GE$, bem como $DG = HC$.

Por outro lado, $\frac{GC}{GE} = \frac{HC}{HP}$, tendo em atenção que em triângulos equiângulos, GEC e HPC , os lados adjacentes aos ângulos iguais são proporcionais (*Elementos* VI, 4).

Ficou então provado o que pretendíamos, isto é,

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} = \frac{HC}{HP}.$$

Vemos assim, que HF e HC são os dois meios proporcionais entre DH e HP .

E se se pretender construir os dois meios proporcionais entre dois segmentos a e b , como fazer?

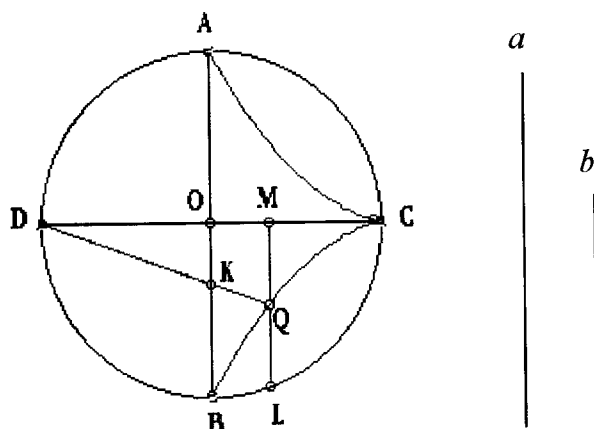
Construímos uma circunferência, de centro O , onde AB e DC são diâmetros perpendiculares. Seguidamente, construímos a cissóide de Diocles, como anteriormente descrito⁷¹, e tomamos um ponto K em OB de modo a que $\frac{DO}{OK} = \frac{a}{b}$ ($a > b$). (1)

Ligamos o ponto D ao ponto K e prolongamos o segmento DK de modo a intersectar a curva cissóide num ponto que vamos designar por Q . Passando por Q construímos o segmento ML paralelo a AB .

Pelo que foi anteriormente exposto, ML e MC são os dois meios proporcionais entre DM e MQ , isto é,

$$\frac{DM}{ML} = \frac{ML}{MC} = \frac{MC}{MQ}. \quad (2)$$

⁷¹ Atendendo à definição de cissóide, dada na página anterior, as curvas aqui em causa são a circunferência de diâmetro DC e uma recta (a tangente à circunferência no ponto D), sendo C o ponto fixo.



Por outro lado, aplicando *Elementos* VI, 4 aos triângulos DMQ e DOK , obtemos

$$\frac{DM}{MQ} = \frac{DO}{OK} \quad (3)$$

De (1) e (3) tem-se que $\frac{DM}{MQ} = \frac{a}{b}$. (4)

Recorde-se que entre DM e MQ já inserimos dois meios proporcionais: ML e MC . Vamos agora procurar dois meios proporcionais entre a e b (que são dados), procurando x e y

tais que, $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

Tais x e y encontram-se através de duas construções do quarto proporcional (*Elementos* VI, 12):

- seja x tal que $\frac{DM}{a} = \frac{ML}{x}$; (5)

- seja y tal que $\frac{MQ}{b} = \frac{MC}{y}$. (6)

Efectivamente, tendo em atenção *Elementos* V, 16, de (5) sai que

$$\frac{DM}{ML} = \frac{a}{x}, \quad (7)$$

e, analogamente, de (6) vem que $\frac{MQ}{MC} = \frac{b}{y}$. (8)

Por outro lado, tendo em atenção (4), tem-se que:

$$\frac{ML}{MC} = \frac{ML}{DM} \cdot \frac{DM}{MQ} \cdot \frac{MQ}{MC} = \frac{x}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{y} = \frac{x}{y}, \text{ isto é,}$$

$$\frac{ML}{MC} = \frac{x}{y}. \quad (9)$$

Finalmente, de (7), (8) e (9) e porque $\frac{DM}{ML} = \frac{ML}{MC} = \frac{MC}{MQ}$, temos $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, isto é, x e y são os dois meios proporcionais entre a e b .

Alternativamente, segundo van der Waerden, para obter os dois meios proporcionais entre os segmentos dados a e b , basta multiplicar os quatro termos da proporção

$$\frac{DM}{ML} = \frac{ML}{MC} = \frac{MC}{MQ} \text{ por um factor de proporcionalidade adequado. ([Wal], p. 268).}$$

Assim, se $b=2a$ o cubo de aresta x tem volume duplo do cubo dado de aresta a . Obtivemos mais uma solução que obviamente não pode ser efectuada apenas com régua não graduada e compasso, pois não é possível construir todos os pontos da curva com estes instrumentos.

2.11 AS SOLUÇÕES DE ESPORO E PAPO

Pouco se sabe sobre a vida de Esporo, matemático e comentador que segundo parece nasceu na segunda metade do séc. III d.C.. No entanto, e acreditando em algumas fontes, podemos concluir que ele se dedicou intensamente a dois problemas matemáticos: a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. A sua contribuição para o estudo destes problemas parece ficar a dever-se, principalmente, à sua crítica construtiva das soluções até então existentes. ([Sza], p. 2311). E é novamente apenas devido a Eutócio que temos conhecimento da solução atribuída a Esporo.

Quanto a Papo de Alexandria, matemático e comentador da primeira metade do séc. IV d.C., deixou-nos a sua *Colecção Matemática*, uma importante fonte – muitas vezes a principal ou a única – para os nossos conhecimentos sobre os desenvolvimentos da matemática que o precederam. Assim, relativamente ao problema da duplicação do cubo, além da versão transmitida por Eutócio podemos ter acesso à versão de Papo, nas suas próprias palavras⁷², no Livro III da sua *Colecção Matemática*. (cf. em [P]; em [Ver3], I, pp. 47-50).

As soluções de Esporo e Papo são essencialmente a mesma que a de Diocles; a principal diferença consiste no facto de que, em vez de usarem a cissóide, usam uma régua que roda em torno de um certo ponto até que certa intersecção leve a que dois pares de linhas sejam iguais. Papo tem conhecimento da obra de Esporo e é provável que Esporo fosse seu professor ou colega. ([H4], I, p. 266).

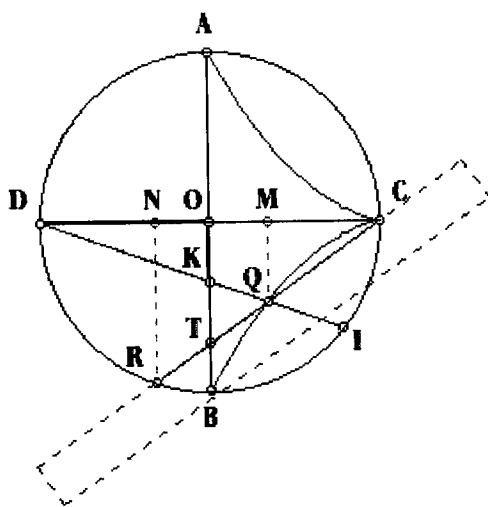
Na sucessão das soluções transmitidas por Eutócio, no seu comentário à obra de Arquimedes, as soluções de Papo e Esporo seguem-se à solução de Diocles e efectivamente é provável que esta sequência seja propositada, tendo em atenção as similaridades entre as três soluções. Após concluir a exposição da solução de Esporo, o próprio Eutócio refere que essa solução é a mesma que a de Papo e de Diocles (cf. em [E]; [Ver2], II, p. 603).

Knorr vai um pouco mais longe e afirma que tanto Esporo como Papo edificam o procedimento como uma *nêusis* e que por uma observação atenta podemos detectar que Esporo trabalhou directamente a partir de Diocles, enquanto que Papo parece ter elaborado uma reformulação independente do método pseudo-Platónico. ([Kn1], pp. 240-242).

⁷² No livro VIII da *Colecção Matemática*, Papo expõe novamente a construção dos dois meios proporcionais, embora de uma forma mais abreviada. Parece que foi esta a fonte da versão que Eutócio nos transmite. (cf. em [P]; em [Ver3], II, pp. 843-845).

De modo a melhor ilustrar a relação entre a versão de Diocles e as versões de Esporo e Papo, vamos trabalhar tendo por base a figura utilizada anteriormente, aquando da versão de Diocles.

Estes segmentos são colocados perpendicularmente e de modo a que DO seja o raio de uma circunferência de centro em O . O segmento DK é prolongado de modo a intersectar a circunferência⁷⁵ num ponto que vamos designar por I .



Agora, temos então a grande diferença: consideramos uma régua com a aresta colocada em C e manipulada em torno deste ponto de modo a que assuma uma posição em que intersectando DI no ponto Q , OB no ponto T e a circunferência no ponto R , origine $QT = TR$.

⁷⁴ Contrariamente a Diocles e a Pápo, que consideram que DO e OK estão na mesma proporção que os segmentos entre os quais pretendemos construir os dois meios proporcionais.

91

Efectivamente o ponto Q está⁷⁶ na cissóide de Diocles. Assim, estamos em condições de encontrar, com um raciocínio análogo ao método anteriormente exposto (na solução de Diocles), os dois meios proporcionais entre DO e OK .

Esporo prova que OT é o primeiro meio proporcional dos dois meios proporcionais entre DO e OK , sendo válida a relação $\frac{DO}{OT} = \frac{OT}{NM} = \frac{NM}{OK}$. (cf. em [E]; em [Ver2], II, p. 602).

Papo prova que o cubo construído sobre DO está para o cubo construído sobre OT , como DO está para OK , isto é, $\frac{DO^3}{OT^3} = \frac{DO}{OK}$. (cf. em [P]; em [Ver3], I, p. 48; II, p. 844).

Omitimos aqui as demonstrações de Esporo e Papo (que podem ser encontradas nas obras acima citadas), já que anteriormente apresentámos a prova da solução de Diocles. Segundo Thomas Heath, a prova apresentada por Papo é menos confusa do que a prova apresentada por Esporo. ([H4], I, p. 267).

Será que Papo ao atribuir esta solução a si próprio, expondo-a de uma maneira mais acessível que a solução de Esporo (a acreditar na versão transmitida por Eutócio) apenas está a chamar para si os créditos de uma solução que efectivamente será originalmente de Esporo? ([H4], I, p. 266). Mais uma pergunta que, presentemente, está sem resposta.

E, sem solução continua o problema da duplicação do cubo visto que as soluções de Esporo e Papo também não respeitam as regras da geometria plana.

Como foi inteligível ao longo de todo este capítulo, além desta solução que Papo atribui a si próprio, podemos encontrar na *Colecção Matemática* algumas das soluções que são transmitidas por Eutócio no seu comentário à obra de Arquimedes *Da Esfera e do Cilindro*. No entanto, no início do Livro III da *Colecção Matemática*, Papo discute (e critica) um método para a resolução do problema de Delos que não é propriamente uma solução exacta para o problema em causa, mas sim um processo, através de métodos planos, para obter aproximações cada vez melhores para uma solução exacta. Papo não diz quem é o autor deste método, mas também não atribui a si próprio a autoria; refere apenas que é da autoria de um grande geómetra. (cf. em [P]; em [Ver3], I, pp. 21-32).

⁷⁶ A justificação pode ser elaborada tendo em atenção ([H4], I, p. 267).

EPÍLOGO

Como vimos nos capítulos precedentes, apesar dos géometras se terem debruçado, durante um longo período de tempo (cerca de dois mil anos), sobre os problemas da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo, não conseguiram encontrar uma solução apenas com o uso da régua não graduada e do compasso, ou seja, através de métodos que designavam por planos e que só faziam apelo a rectas e círculos. A diversidade das construções que envolvem outras curvas atesta não só a curiosidade e o interesse pela questão, mas também a consciência que os géometras gregos tinham da sua dificuldade. Contudo, não é certamente fácil de avaliar até que ponto era generalizada, na Antiguidade, a suspeita de que estes problemas não tinham solução de acordo com as regras da geometria plana.

A impossibilidade de existência de uma tal solução, no âmbito da geometria euclidiana, foi abordada por René Descartes (1556-1650) em 1937, na sua obra *A Geometria*, e talvez se possa dizer que nasceu aqui o germe da prova dessa impossibilidade.

“Foi então a geometria analítica (obra do século XVII) que permitiu estabelecer a ligação entre as figuras e os números e que possibilitou a tradução das operações com régua e compasso da geometria nas operações fundamentais da aritmética mais extracção de raiz quadrada. Num dos sentidos, esta tradução passou pela criação duma *álgebra de segmentos* e podemos até ver a linguagem em que Descartes tratou o problema no livro primeiro de *A Geometria* de 1637.” ([Vi], pp. 99-100).

De facto, sob o título, escrito na margem, de “Como o cálculo da Aritmética se relaciona com as operações da Geometria”, Descartes diz:

“Todos os Problemas de Geometria se podem facilmente reduzir a tais termos que, de seguida, é apenas preciso conhecer o comprimento de algumas linhas rectas para os construir.

E [tal] como a Aritmética é apenas composta de quatro ou cinco operações, que são: a Adição, a Subtracção, a Multiplicação, a Divisão, & a Extracção de raízes, que se pode tomar como uma espécie de divisão; assim [também] não há outra coisa a fazer em Geometria, no que respeita às linhas procuradas, para as preparar para serem conhecidas, do que juntar-lhe outras, ou retirar-lhas; ou então, tendo uma a que chamarei a unidade para melhor a relacionar com os números, & que pode usualmente ser tomada à discrição, e tendo ainda duas outras, encontrar uma quarta que esteja para uma destas duas como a outra está para a unidade, o que é o mesmo que a Multiplicação; ou então encontrar uma quarta que esteja para uma destas duas como a unidade está para a outra, o que é o mesmo que a Divisão; ou enfim encontrar um ou dois ou vários meios proporcionais entre a unidade & qualquer outra linha, o que é o mesmo que tirar a raiz quadrada ou cúbica etc.. E não hesitarei em introduzir estes termos de Aritmética na Geometria, a fim de a tornar mais inteligível.” ([De]; em [SL], p.2, p.5).

No entanto, a impossibilidade de resolução dos problemas geométricos só foi completamente esclarecida no final do século XIX, depois dos trabalhos de Abel (1802-1829) e Gauss⁷⁷ (1777-1855) sobre a resolução de equações algébricas por meio de radicais. A prova da impossibilidade dos problemas já referidos depende da teoria das equações cúbicas, isto é, de conceitos algébricos que foram sendo desenvolvidos ao longo de vários séculos. A primeira demonstração, efectiva, da impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo⁷⁸ foi apresentada por Pierre Laurent Wantzel no artigo “Recherches sur les Moyens de Reconnaître si un Problème de Géométrie Peut se Résoudre avec la Règle et le Compas”, publicado em 1837 no *Journal de Liouville*⁷⁹. ([Te1], p. 385; [Ca], p. 3, p. 5).

Na parte final do livro *Teoria de Galois*, da autoria de Owen J. Brison, podemos encontrar uma prova da impossibilidade dos três problemas clássicos da geometria grega (cf. [Br], p. 119). De acordo com a Teoria de Galois, *os números construíveis são números algébricos*⁸⁰ cujo grau é uma potência de 2. Assim, $\sqrt{2}$ é um número construível porque tem grau 2, enquanto que $\sqrt[3]{2}$ não é construível por ter grau 3. O conjunto dos números reais construíveis é um corpo que contém todos os racionais. Tendo em conta que este trabalho se insere na área da História da Matemática, vamos “provar” a impossibilidade destes problemas, da forma menos algébrica e, se possível, mais geométrica. A “prova” estará enquadrada nos capítulos precedentes, sem, no entanto, descurar os resultados da álgebra que a suportam. Um entendimento profundo da impossibilidade destes dois problemas da geometria grega, fundamenta-se por traduzir os problemas geométricos na linguagem da álgebra. E, como afirmou Franco de Oliveira, numa conferência no Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências na Universidade do Porto: «Estudamos álgebra para podermos compreender a prova da impossibilidade de resolução dos três problemas clássicos da geometria grega».

⁷⁷ Em 1796 Gauss mostrou que era possível inscrever, usando apenas régua não graduada e compasso, um polígono regular de 17 lados numa circunferência. Enunciou, então, uma condição necessária e suficiente para que um polígono regular de n lados fosse construível.

⁷⁸ Os dois problemas em causa requerem a construção de raízes cúbicas, enquanto que a quadratura do círculo requer a construção de π . Em 1837 Ferdinand Lindemann (1852-1939) demonstra que π é um número transcendente, isto é, não é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. Este resultado, juntamente com os trabalhos de Wantzel, permitiu concluir a impossibilidade da quadratura do círculo.

⁷⁹ *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2, pp. 366-372. Em 1836 Liouville fundou um jornal de matemática chamado *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, muitas vezes denominado *Journal de Liouville*.

⁸⁰ Um número real diz-se um *número algébrico* se for raiz de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, com $n \in \mathbb{N}_0$, e cujos coeficientes são números inteiros não simultaneamente todos nulos. O menor n nestas condições diz-se o *grau* do número algébrico.

A seguir, exploraremos um pouco melhor a relação existente entre os dois problemas geométricos em causa — duplicação do cubo e trissecção do ângulo — e as equações algébricas envolvidas. E, como afirmam John Conway e Richard Guy ([CG], p. 192):

“A maior parte dos números que surgem nos problemas geométricos são números algébricos. Porquê isto? O Teorema de Pitágoras mostra a existência das raízes quadradas. (...) para encontrar o ponto de intersecção de duas rectas basta resolver duas *equações lineares*; os *dois* pontos onde duas circunferências se intersectam, ou onde uma circunferência intersecta uma linha recta, são obtidos pela resolução de uma equação *quadrática*.

Trabalhando na direcção contrária, podemos ver que qualquer número que seja raiz de uma equação quadrática pode ser obtido geometricamente.”

Vejamos o seguinte resultado que clarifica a questão acima abordada.

Lema: Um problema geométrico que seja resolúvel usando apenas régua não graduada e compasso é equivalente a um problema com números, envolvendo apenas as quatro operações fundamentais e a extracção da raiz quadrada.

Demonstração:

Consideremos um problema geométrico que seja resolúvel usando apenas régua não graduada e compasso.

Suponhamos que o problema tem solução. Então pelo menos dois pontos do plano são construíveis com régua não graduada e compasso; e se dois pontos são construíveis podemos construir a recta r que os une (*Elementos* I, postulado 1). Sendo assim, é possível construir uma recta perpendicular à recta r (*Elementos* I, 11). Se considerarmos uma medida de comprimento, escolhida para unidade, podemos definir um referencial ortonormado (a que por conveniência chamaremos referencial XOY). Um ponto qualquer desse referencial identifica-se por um par ordenado de números (x, y) , que se designam por coordenadas desse ponto; neste contexto vamos assumir que as coordenadas são números racionais.

Se o problema geométrico é resolúvel com régua não graduada e compasso, então todos os novos elementos geométricos são obtidos através de um número finito de passos, entre os seguintes:

- a) dados dois pontos, desenhar a recta que os une (*Elementos* I, postulados 1 e 2);
- b) desenhar uma circunferência dado um ponto como centro e passando por outro ponto (*Elementos* I, postulado 3);
- c) desenhar o(s) ponto(s) de intersecção de duas rectas, de uma recta com uma circunferência ou de duas circunferências.

A operação da alínea a) corresponde a, partindo das coordenadas dos dois pontos, considerar a equação da recta que os une. Dados os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, então a equação da recta que os une é

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2y_1 - x_1y_2) = 0.$$

Ou seja,

$$ax + by + c = 0,$$

onde,

$$a = y_2 - y_1; \quad b = x_1 - x_2 \quad \text{e} \quad c = x_2y_1 - x_1y_2.$$

Mas x_1, y_1, x_2 e y_2 são números racionais e como o conjunto dos números racionais é um conjunto fechado relativamente às quatro operações elementares (adição, subacção, multiplicação e divisão), os números procurados a, b , e c podem obter-se usando só as quatro operações elementares.

Para a operação da alínea b) consideremos a circunferência de centro no ponto $A(\alpha, \beta)$ e raio ρ . A sua equação é

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

onde,

$$a = -2\alpha; \quad b = -2\beta; \quad \text{e} \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2.$$

Como α, β e ρ são números racionais, mais uma vez os números procurados a, b , e c obtêm-se usando apenas as quatro operações algébricas elementares.

Relativamente às operações da alínea c) para encontrar as coordenadas do ponto de intersecção (caso exista) de duas rectas, elas envolvem apenas operações racionais sobre os coeficientes das equações em causa; enquanto que encontrar o(s) ponto(s) de intersecção de uma recta com uma circunferência ou de duas rectas poderá envolver, além das quatro operações elementares já referidas, a extracção da raiz quadrada.

Podemos, assim, concluir que um problema geométrico que seja resolúvel apenas com régua não graduada e compasso, traduz-se num problema numérico envolvendo apenas as quatro operações fundamentais e a extracção da raiz quadrada.

Consideremos agora um problema numérico que seja resolúvel apenas com as quatro operações fundamentais mais a extracção da raiz quadrada; vamos, a seguir, provar que também é resolúvel com a utilização, apenas, da régua não graduada e do compasso.

Sejam dois segmentos de recta que têm como medida de comprimento respectivamente os números a e b , dada uma *unidade* de comprimento previamente escolhida. Se conseguirmos construir um segmento que (nessa mesma unidade) tenha como medida de

comprimento a soma, a diferença, o produto e o quociente desses dois números a e b , e um segmento que tenha como medida de comprimento a raiz quadrada da medida de comprimento do segmento escolhido, então fundamentamos o nosso propósito.

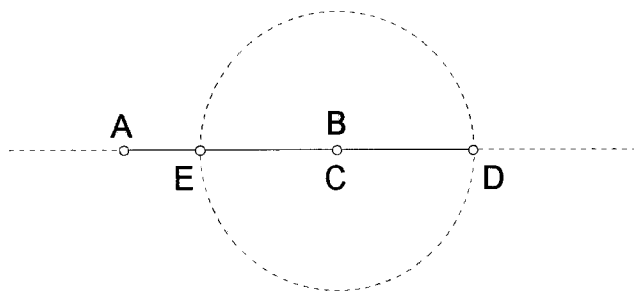
Consideremos a seguinte unidade de comprimento $\overline{\quad\quad\quad}^1$;

e os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Construir os segmentos de medidas de comprimento $AB+CD$, $AB-CD$, $AB \cdot CD$, AB/CD e $\sqrt{AB}$ é um processo simples e de justificação directa, no campo da geometria elementar, como se ilustra a seguir:

i) $AB+CD$

Tracemos uma linha recta e nela construamos – por *Elementos* I, 2 – um segmento congruente com AB . Pretendemos construir, sobre a mesma recta, um segmento congruente com o segmento CD e de modo a que B coincida com C . Construamos uma circunferência com centro em B e raio CD , que vai intersectar a recta nos pontos D e E . Um destes dois pontos, digamos D , é tal que B está entre A e D . Portanto, está construído, apenas com régua não graduada e compasso, o segmento AD , ou seja, $AB+CD$.

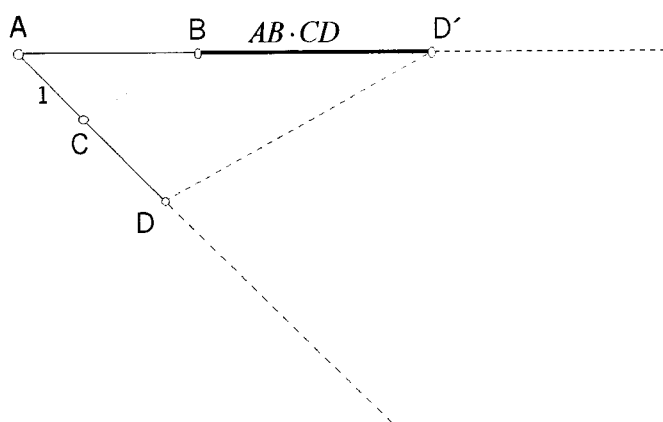


ii) $AB-CD$

A construção do segmento $AB-CD$ é análoga à anterior, no entanto, teremos que considerar obrigatoriamente que o segmento AB é maior do que o segmento CD , caso contrário não é possível efectuar a subtracção dos dois segmentos. Uma vez que AB é maior do que CD , um destes pontos, digamos E , pertence ao segmento de recta AB . Como E está entre A e B está construído, apenas com régua não graduada e compasso, o segmento AE , ou seja, $AB-CD$.

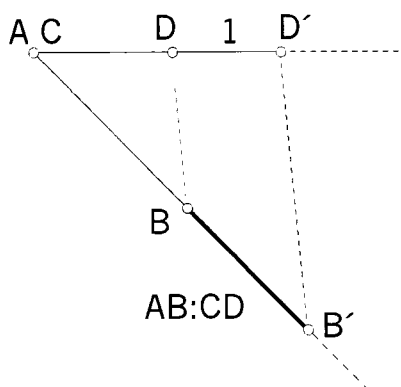
iii) $AB \cdot CD$

Sobre uma linha recta marquemos o segmento de comprimento AB . A partir de A construíamos uma semi-recta onde marcamos a *unidade* e, seguidamente, o segmento de comprimento CD . Unamos o ponto C com o ponto B (segmento verde na figura seguinte). Construíamos uma paralela a este segmento passando por D (a azul na figura); assim construímos o segmento de comprimento $AB \cdot CD$. A justificação deste facto deve-se à aplicação directa de *Elementos* VI, 2 ao triângulo cujos vértices são os pontos assinalados a vermelho⁸¹.



iv) AB/CD

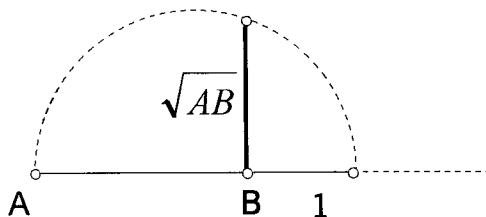
Construíamos o segmento AB/CD , de modo análogo ao caso anterior, como ilustra a figura:



⁸¹ Repare-se que a construção do segmento $AB \cdot CD$, não é mais do que a construção do quarto proporcional dos segmentos de recta: *unidade*, AB e CD — *Elementos* VI, 12.

v) $\sqrt{AB}$

Quanto à construção de um segmento cuja medida de comprimento seja $\sqrt{AB}$, basta ter em atenção o esquema exemplificado na figura seguinte⁸².



Como refere Maria Teresa Viegas ([Vi], p. 100):

“Deste modo, o problema das construções com régua e compasso passou a poder ser visto a uma luz muito diferente. Com efeito, averiguar o que é possível construir apenas com estes instrumentos, no mundo das figuras, traduz-se agora em saber o que se pode obter apenas com as operações fundamentais mais extracção de raiz quadrada, no mundo dos números. Ora, este ponto de vista era completamente inacessível aos gregos, dado o divórcio que a crise dos incomensuráveis tinha provocado entre geometria e aritmética. A geometria analítica, unindo estas de novo, veio permitir que a geometria pudesse usufruir das poderosas técnicas algébricas entretanto desenvolvidas na aritmética e que os números passassem a contar com a preciosa intuição visual fornecida por um desenho.

Tornou-se assim natural que a solução de muitos problemas enunciados em termos de régua e compasso viessem a ser resolvidos com recurso à álgebra. E também faz sentido a grande distância no tempo entre o pôr de alguns desses problemas (na Antiguidade) e o indicar da respectiva solução (no século XIX). Não só foi preciso que a geometria analítica traduzisse os problemas noutra linguagem, como também encontrar técnicas adequadas para os resolver na sua nova formulação.”

Continuemos, então, com a apresentação de resultados que conduzem à prova da impossibilidade da duplicação do cubo e da trissecção do ângulo.

Definição: A raiz de uma equação diz-se uma raiz construível com régua não graduada e compasso, ou simplesmente raiz construível, se possuir a seguinte propriedade: dada uma unidade de comprimento (um segmento unitário), podermos construir, com régua não graduada e compasso, um segmento de recta de medida de comprimento igual à raiz.

⁸² Trata-se da construção do meio proporcional entre os segmentos de recta: unidade e AB — *Elementos* VI, 13.

Quando nos referimos ao facto de poder construir, com régua não graduada e compasso, um segmento de recta de medida de comprimento igual à raiz em causa, estamos a dizer que pretendemos desenhar esse segmento com um número finito de operações entre as seguintes: dados dois pontos, desenhar a recta que os une; desenhar uma circunferência em torno de um ponto e passando por outro ponto; desenhar os pontos de intersecção de duas rectas, duma recta e duma circunferência ou de duas circunferências.

Teorema da Raiz-Construível: *Uma equação cúbica de coeficientes inteiros que não tenha raízes racionais também não tem raízes construíveis.*

A prova deste teorema está fora do âmbito deste trabalho; no entanto, podem ser encontradas provas em vários textos, como por exemplo em ([Ma], p. 42-43).

Teorema da Raiz-Racional: *Seja $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ uma equação polinomial de coeficientes inteiros. Qualquer raiz racional desta equação pode ser escrita na forma p/q , onde p é um factor de a_0 e q é um factor de a_n .*

Demonstração :

Consideremos que p/q é uma raiz racional da equação, onde $q \neq 0$ e $\text{mdc}(p,q)=1$. Substituindo, na equação, x por esta solução e multiplicando por q^n obtemos,

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Uma vez que p divide o segundo membro da equação, também divide o primeiro membro. Mas como p divide todos os termos do primeiro membro, com a excepção, talvez apenas, do último, terá obrigatoriamente também de dividir o último. Tendo em atenção que $\text{mdc}(p,q)=1$, obtém-se que p divide a_0 , ou seja, p é um factor de a_0 .

Por outro lado, visto que q divide o segundo membro da equação, também divide o primeiro membro. Mas como q divide todos os termos do primeiro membro, com a excepção, talvez apenas, do primeiro, terá obrigatoriamente também de dividir o primeiro. Dado que $\text{mdc}(p,q)=1$, então q divide a_n , isto é, q é um factor de a_n .

Seguidamente, veremos o que está em causa na demonstração da impossibilidade da resolução do problema da duplicação do cubo. Consideremos um cubo de aresta $a=1$ (cujo volume é 1^3), o qual pretendemos duplicar, o que significa que, pretendemos encontrar a solução da equação $x^3 = 2 \cdot 1^3$, ou seja, construir um segmento x cuja medida de comprimento seja $\sqrt[3]{2}$.

Estamos perante a seguinte equação polinomial

$$x^3 - 2 = 0. \quad (1)$$

Para mostrar que a duplicação do cubo é impossível de efectuar com régua não graduada e compasso, vamos ver que a equação (1) não tem raízes construíveis; caso contrário, uma das soluções encontradas seria a medida de comprimento da aresta do cubo procurado (de volume 2), portanto seria construível com régua não graduada e compasso.

Pelo Teorema da Raiz-Racional, as possíveis raízes racionais para a equação (1) são:

$$-1, +1, -2 \text{ e } +2.$$

Dado que nenhum destes valores satisfaz a equação (1), podemos afirmar que a equação não tem raízes racionais e, pelo Teorema da Raiz-Construível podemos concluir que a equação (1) não tem raízes construíveis. Logo $\sqrt[3]{2}$ (medida de comprimento da aresta do cubo procurado) não é um número construível com régua não graduada e compasso.

Concluimos, então, que não é possível duplicar, com régua não graduada e compasso, o cubo de aresta 1; então podemos afirmar que não é possível duplicar um qualquer cubo.

Seguidamente, vamos debruçar-nos sobre a impossibilidade do problema da trissecção do ângulo. Isto é, dado um qualquer ângulo, pretendemos construir, com régua não graduada e compasso, um ângulo cuja amplitude seja a terça parte da amplitude do ângulo dado. Obviamente que, para provar que a trissecção de um qualquer ângulo é impossível, basta encontrar⁸³ um ângulo que seja impossível de trissectar. No entanto, já vimos que é possível efectuar a trissecção de determinados ângulos, como é o caso do ângulo recto.

Como vimos no capítulo 1, uma possível abordagem para o problema da trissecção do ângulo é reduzi-lo a um problema de nêusis (cf. secção 1.2, pp. 17-19), o qual pode ser resolvido de várias maneiras, sendo exemplos de resolução a apresentada por Nicomedes através da concóide (cf. secção 1.5, pp. 33-36) e por Papo pelo uso da hipérbole (cf. secção 1.6.1, pp. 39-40).

⁸³ Vamos ter por base o interessante esquema apresentado na obra *The Historical Roots of Elementary Mathematics* ([BJB], pp. 118-120).

Designemos, BF por b , AE por x e BD por y .

$$\frac{AE}{DE} = \frac{FB}{DB} = \frac{IE}{AE}. \quad (2)$$
$$IH = \frac{l}{2}BH = \frac{y+a}{2}$$
$$IE = IH + HE =$$

$$\frac{y+a}{2} + a = \frac{y+3a}{2}.$$

102

$$\frac{x}{2a} = \frac{b}{y} = \frac{y+3a}{2x}. \quad (3)$$

Recorde-se que o ponto A é um ponto qualquer de um dos lados do ângulo ABC , o que significa que, sem perda de generalidade, podemos tomar $AB = 1$, ou seja, $a = 1$. Assim a relação (3) toma a forma

$$\frac{x}{2} = \frac{b}{y} = \frac{y+3}{2x},$$

donde se obtém $xy = 2b$ e $x^2 = y + 3$.

Finalmente, obtemos a equação seguinte que designaremos por *equação da trissecção*:

$$x^3 - 3x - 2b = 0. \quad (4)$$

Quer isto dizer que trissectar o ângulo ABC é procurar x que satisfaça a equação anterior. Encontrado x , será possível localizar o ponto E e trissectar o ângulo em causa através da recta BD . Portanto, só falta agora averiguar se a equação da trissecção tem raízes construíveis.

Note-se que, na equação da trissecção, existe um parâmetro representado por b . Vejamos que a existência de raízes construíveis nesta equação depende do parâmetro b . Consideremos o parâmetro $b = 0$. Assim, a equação é dada por

$$x^3 - 3x = 0,$$

cujas raízes são 0 , $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

Como estas raízes são construíveis, em particular $\sqrt{3}$, então é possível trissectar um ângulo, com régua não graduada e compasso, quando $b=0$. A que corresponde este caso? Se atendermos à figura anterior, facilmente descobrimos que é o caso do ângulo recto que, como já vimos, é possível trissectar com os instrumentos euclidianos (cf. secção 1.1, p. 13).

Consideremos agora o caso de $b = \frac{1}{2}$, o que corresponde a trissectar um ângulo de 60° .

Tendo presente o triângulo rectângulo ABF , facilmente se prova que a amplitude do ângulo ABC é de 60° . Neste caso a equação da trissecção é:

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \quad (5)$$

Pelo Teorema da Raiz-Racional, as possíveis raízes racionais para a equação anterior são:

$$-1 \text{ e } +1.$$

Visto que nenhum destes valores satisfaz a equação (5), podemos afirmar que a equação não tem raízes racionais. E, pelo Teorema da Raiz-Construível, concluímos que a equação não tem raízes construíveis. Isto significa que não podemos construir, com régua não graduada e compasso, o segmento de recta AE . Acabámos de provar que não é possível trissectar o ângulo de amplitude 60° , com os instrumentos euclidianos; então, podemos afirmar que não é possível trissectar um qualquer ângulo.

Longo foi o caminho percorrido pelos matemáticos ao tentarem resolver estes dois famosos problemas da Antiguidade; caminhos que conduziram a conceitos modernos de álgebra. Os geómetras gregos falharam nas suas buscas porque procuravam algo de impossível, como o próprio Papo referiu ([P]; em [Ver3], I, pp. 206-210), procuravam resolver problemas sólidos por meios planos.

A busca de solução para estes, e outros, problemas geométricos permitiu, ao longo destes dois mil anos, que inesperados e interessantes desenvolvimentos matemáticos surgissem e novos horizontes se abrissem no universo da álgebra. Problemas de enunciados muito simples levaram à criação de ramos da matemática muito complexos.

LISTA DE REFERÊNCIAS

BIBLIOGRAFIA

- [A] Aaboe, A. (1984) – *Episódios da História Antiga da Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.
- [Al] Allan, D. (1991) – “Plato”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, 4, pp. 1998-2007.
- [All] Allan, G. (1976) – *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, New York.
- [An] Anglin, W. (1994) – *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Springer-Verlag, New York.
- [AL] Anglin, W. & Lambek, J. (1995) – *The Heritage of Thales*, Springer-Verlag, New York.
- [Ar1] Arquimedes (Séc. III a.C.) – *Livro dos Lemas*; em [H1].
- [Ar2] Arquimedes (Séc. III a.C.) – *Acerca das Espirais*; em ([Ver2], I).
- [Art] Artin, M. (1991) – *Algebra*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [Ay] Aymes, J. (1988) – *Ces Problèmes Qui font Les Mathématiques (La Trisection de L'Angle)*, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris.
- [B] Baccou, R. (1951) – *Histoire de la Science Grecque: de Thalès à Socrate*, Aubier, Paris.
- [Ba] Ball, W. (1960) – *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover, New York.
- [Bo] Bold, B. (1969) – *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover, New York.
- [Boy] Boyer, C. (1993) – *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher, São Paulo.
- [Bi] Biering, C. (1844) – *Historia Problematis Cubi Duplicandi*, Typis A. Michaelsen, Hauniae.
- [BJB] Bunt, L. & Jones, P. & Bedient, J. (1976) – *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Dover, New York.
- [BD] Bkouche R. & Delattre J. (1977) – “Why Ruler and Compass?”, *History of Mathematics: History of Problems*, Inter-IREM Commission, translated by

Chris Weeks, Ellipses, Paris.

- [BMK] **Bradis, V. & Minkovshii, V. & Kharcheva, A.** (1963) – *Lapses in Mathematical Reasoning*, Pregamon Press, London.
- [Br] **Brison, O.** (1997) – *Teoria de Galois*, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.
- [C] **Cajori, F.** (1991) – *A History of Mathematics*, Chelsea, New York.
- [Ca] **Carrega, J.-C.** (1981) – *Theorie des Corps. La Regle et le Compas*, Hermann, Paris.
- [CD] **Cohen, M. & Drabkin, I.** (1958) – *A Source Book in Greek Science*, Harvard University Press, Cambridge.
- [CG] **Conway, J. & Guy, R.** (1996) – *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, New York.
- [Ch] **Chasles, M.** (1875) – *Aperçu Historique sur l'Origine et Développement des Méthodes en Géométrie*, Gauthier-Villars, Paris.
- [Che] **Chen, F.** (1999) – *New Theory of Trisection: Solved the Most Difficult Math Problem for Centuries in the History of Mathematics*, International School Math & Sciences Institut, Virginia.
- [Cl1] **Clagett, M.** (1964) – *Archimedes in the Middle Ages*, The University of Wisconsin, Madison.
- [Cl2] **Clagett, M.** (1991) – “Archimedes”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **1**, pp. 85-103.
- [Co] **Coolidge, J.** (1940) – *A History of Geometrical Methods*, Clarendon Press, Oxford.
- [Cow] **Cow, J.** (1968) – *A Short History of Greek Mathematics*, Chelsea, New York.
- [CR] **Courant, R. & Robbins, H.** (1996) – *What Is Mathematics?*, Oxford University Press, New York.
- [Ch1] **Chen, T.** (1966) – “Proof of the Impossibility of Trisecting an Angle With Euclidean Tools”, *Mathematics Magazine*, Mathematical Association of America, **39**, pp. 239-241.
- [Ch2] **Chen, T.** (1966) – “Approximate Trisection of an Angle With Euclidean Tools”, *Mathematics Magazine*, Mathematical Association of America, **39**, pp. 261-264.
- [D] **Dannenfeldt, K.** (1991) – “Diocles”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles

Scribner, New York, 2, pp. 622-623.

- [De] **Descartes, R.** (1637) – *La Géométrie*; em [SL].
- [DI] **Dedron, P. & Itard, J.** (1959) – *Mathématiques et Mathématiciens*, Magnard, Paris.
- [Di] **Dicks, D.** (1991) – “Eratosthenes”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, 2, pp. 681-686.
- [Do] **Dorrie, H.** (1965) – *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, Dover, New York.
- [Dr] **Drachmann, A.** (1974) – “Philo of Byzantium”, *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, 10, pp. 586-589.
- [Du1] **Dudley, U.** (1983) – “What to do When the Trisector Comes”, *Mathematical Intelligencer*, Springer-Verlag, New York, 5, pp. 20-25.
- [Du2] **Dudley, U.** (1987) – *A Budget of Trisections*, Springer-Verlag, New York.
- [Du3] **Dudley, U.** (1992) – *Mathematical Cranks*, Mathematical Association of America, S.L.
- [Du4] **Dudley, U.** (1994) – *The Trisectors*, Mathematical Association of America, S.L.
- [DDB] **Dhombres, J. & Dalmedico, A. & Bkouche, R.** (1987) – *Mathématiques au Fil des Âges*, Gauthier-Villars, Paris.
- [Eu] **Euclid** (Séc. III-IV a.C.) – *Elements*; em [H2].
- [E] **Eutocius** (Séc. VI d.C.) – *Commentaire sur le Traité de la Sphère et du Cylindre*; em [Ver2].
- [Ev] **Eves, H.** (1997) – *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, São Paulo.
- [ESQSC] **Estrada, M. & Sá, C. & Queiró, J. & Silva, M. & Costa, M.** (2000) – *História da Matemática*, Universidade Aberta, Lisboa.
- [F1] **Fauvel, J.** (1987) – *Mathematics in the Greek World*, Open University Press, Milton Keynes.
- [F2] **Fauvel, J.** (1987) – *The Greek Concept of Proof*, Open University Press, Milton Keynes.
- [F3] **Fauvel, J.** (1987) – *The Greek Study of Curves*, Open University Press, Milton Keynes.
- [FG] **Fauvel, J. & Gray, J.** (1987) – *History of Mathematics: A Reader*, Open

University Press, Milton Keynes.

- [Fl] **Flegg, G.** (1975) – *Greek Mathematics: Three Problems*, Open University Press, Milton Keynes.
- [Fr] **Fritz, K.** (1991) – “Archytas of Tarentum”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **1**, pp. 103-105.
- [G] **Gleason, A.** (1988) – “Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon”, *American Mathematical Monthly*, MAA, Washington, **95**, pp. 186-194.
- [Gr] **Grattan-Guinness, I.** (1994) – *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, London.
- [Gu] **Guimarães, A.** (1973) – *O Pensamento Matemático na Grécia Antiga. 1ª parte – da Antiguidade Oriental até Zenão de Eleia*, Centro Universitário do Porto, Porto.
- [H1] **Heath, T.** (1912) – *The Works of Archimedes*, Dover, New York.
- [H2] **Heath, T.** (1956) – *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover, New York.
- [H3] **Heath, T.** (1970) – *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Press, Oxford.
- [H4] **Heath, T.** (1981) – *A History of Greek Mathematics*, Dover, New York.
- [Ho] **Hogendijk, J.** (1981) – “How Trisections of the Angle Were Transmitted from Greek to Islamic Geometry”, *Historia Mathematica*, **8**, pp. 417-438.
- [Hu] **Huxley, G.** (1991) – “Eudoxus of Cnidus”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **2**, pp. 734-736.
- [K] **Katz, V.** (1998) – *A History of Mathematics: an Introduction*, Addison-Wesley, Reading.
- [Kl] **Klein, F.** (1962) – “Famous Problems of Elementary Geometry”, *Famous Problems and Other Monographs*, Chelsea, New York.
- [Kn1] **Knorr, W.** (1993) – *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Dover, New York.
- [Kn2] **Knorr, W.** (1989) – *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Birkhäuser, Boston.
- [Ko] **Kostovskii, A.** (1961) – *Geometrical Constructions Using Compasses Only*, Pergamon Press, Oxford.
- [L] **Lassere, F.** (1964) – *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*, Hutchinson, London.

- [Ll] **Lloyd, G.** (1973) – *Greek Science After Aristotle*, Norton, New York.
- [Lo] **Lockwood, E.** (1978) – *A Book of Curves*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [Lor1] **Loria, G.** (1914) – *Le Scienze Esatte nell'Antiga Grecia*, Hoepli, Milano.
- [Lor2] **Loria, G.** (1929) – *Histoire des Sciences Mathématiques dans l'Antiquité Hellénique*, Gauthier-Villars, Paris.
- [M2] **Mahoney, M.** (1968) – “Another Look at Greek Geometrical Analysis”, *Archive for History of Exact Sciences*, **5**, pp. 318-348.
- [Ma] **Martin, G.** (1998) – *Geometric Constructions*, Springer-Verlag, New York.
- [Mas] **Mascheroni, L.** (1980) – *Geometrie du Compas*, Albert Blanchard, Paris.
- [Me] **Meschkowski, H.** (1966) - *Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry*, Oliver & Boyd, Edinburg.
- [Mi] **Michel, P.** (1950) – *De Pythagore a Euclide*, Société D'Édition «Les Belles Lettres», Paris.
- [N] **Neugebauer, O.** (1966) - *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover, New York.
- [P] **Pappus** (Séc. IV d.C.) – *La Collection Mathématique*; em [Ver3].
- [Pr] **Proclus de Lycie** (Séc. V d.C.) – *Les Commentaires Sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*; em [Ver1].
- [R] **Riddell, R.** (1979) – “Eudoxan Mathematics and Eudoxan Spheres”, *Archive for History of Exact Sciences*, **20**, pp. 1-19.
- [S] **Sá, C.** (1999) – “A Concóide de Nicomedes”, material da sessão prática “O estudo da Concóide de Nicomedes e do Folium de Descartes, segundo Francisco Gomes Teixeira no *Traité Des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*”, dinamizada por Maria Fernanda Estrada, Maria Graça Alves e Carlos Correia de Sá, ProfMat99, Portimão.
- [Sa] **Saito, K.** (1995) – “Doubling the Cube: A New Interpretation of Its Significance for Early Greek Geometry”, *Historia Mathematica*, **22**, pp. 119-137.
- [Sab] **Sabetai, U.** (1975) – “On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics”, *Archive for History of Exact Sciences*, **15**, pp. 67-114.
- [Se1] **Seidenberg, A.** (1962) – “The Ritual Origin of Geometry”, *Archive for History of Exact Sciences*, **1**, pp. 488-527.
- [Se2] **Seidenberg, A.** (1966) – “Some Remarks on Nicomedes' Duplication”, *Archive for History of Exact Sciences*, **3**, pp. 97-101.

- [Se3] Seidenberg, A. (1991) – “Mascheroni, Lorenzo”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, 3, pp. 1665-1667.
- [Si] Silva, J. (2000) – *A Matemática na Antiguidade*, SPM, Lisboa.
- [SL] Smith, D & Latham, M. (1954) – *The Geometry of Rene Descartes, with a Facsimile of the First Edition*, Dover, New York.
- [Sm] Smith, D. (1958) – *History of Mathematics*, Dover, New York.
- [Smo] Smogorzhevskii, A. (1961) – *The Ruler in Geometrical Construtuions*, Pergamon Press, Oxford.
- [St] Struik, D. (1997) – *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa.
- [Ste] Stein, S. (1999) – *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?*, Mathematical Association of America, S.L.
- [Sw] Swetz, F. (1994) – *Learning Activities from the History of Mathematics*, J. Weston Walch, Portland.
- [Sz] Szabó, A. (1978) – *The Beginnings of Greek Mathematics*, Reidel, Dordrecht.
- [Sza] Szabo, M. (1991) – “Sporus of Nicaea”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, 4, p. 2311.
- [T1] Tannery, P. (1887) – *La Géométri Greque: Comment son Histoire est Parvenue et ce que Nous en Savons*, Gauthier-Villars, Paris.
- [T2] Tannery, P. (1912) – “Sur les Solutions du Problème de Délos par Archytas et par Eudoxe”, *Mémoires Scientifiques*, Édourd Privat, Toulouse, Vol. I, pp. 53-61.
- [T3] Tannery, P. (1912) – “Sur Sporos de Nicee”, *Mémoires Scientifiques*, Édourd Privat, Toulouse, Vol. I, pp. 178-184.
- [T4] Tannery, P. (1912) – “Por l’Histoire des Lignes et Surfaces Courbes”, *Mémoires Scientifiques*, Édourd Privat, Toulouse, Vol. II, pp. 1-47.
- [Te1] Teixeira, F. (1915) – *Obras Sobre Matemática*, vol. VII, Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra.
- [Te2] Teixeira, F. (1955) – *Traté des Courbes Speciales Remarquables Planes et Gauches*, Editions Jacques Gabay, Paris.
- [Th1] Thomas, I. (1991) – “Menaechmus”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, 3, pp. 1682-1690.

- [Th2] **Thomas, I.** (1991) – “Hippocrates of Chios”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **2**, pp. 1083-1091.
- [Th3] **Thomas, I.** (1991) – “Pappus of Alexandria”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **4**, pp. 1902-1912.
- [Th4] **Thomas, I.** (1991) – “Eutocius of Ascalon”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **2**, pp. 753-757.
- [Th5] **Thomas, I.** (1991-93) – *Greek Mathematical Works*, Harvard University Press, Cambridge.
- [Th6] **Thomas, I.** (1991) – “Hippias of Elis”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **2**, pp. 1078-1083.
- [Th7] **Thomas, I.** (1991) – “Conon of Samos”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **1**, pp. 534-535.
- [Ti] **Tietze, H.** (1965) – *Famous Problems of Mathematics. Solved and Unsolved Math. Prob. From Antiquity to Modern Times*, Graylock Press, Baltimore.
- [To1] **Toomer, J.** (1976) – *Diocles: On Burning Mirrors*, Springer-Verlag, Berlin.
- [To2] **Toomer, J.** (1991) – “Apollonius of Perga”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **1**, pp. 66-80.
- [To3] **Toomer, J.** (1991) – “Nicomedes”, *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from The Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner, New York, **4**, pp. 1864-1867.
- [V] **Vasconcelos, F.** (1925) – *História das Matemáticas na Antiguidade*, Aillaud e Bertrand, Lisboa.
- [Ve] **Veloso, E.** (1998) – *Geometria: Temas Actuais - Materiais para Professores*, Instituto de Inovação Educacional, Lisboa.
- [Ver1] **Ver Eecke, P.** (1948) – *Proclus de Lycie: Les Commentaires Sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*, Desclée de Brouwer, Bruges.
- [Ver2] **Ver Eecke, P.** (1960) – *Les Oeuvres Complètes d'Archimède*, Albert Blanchard, Paris.
- [Ver3] **Ver Eecke, P.** (1982) – *Pappus d'Alexandrie: La Collection Mathématique*, Albert Blanchard, Paris.

- [Vi] **Viegas, M.** (1998) – “Divisão duma Circunferência em Partes Iguais usando apenas Compasso e Régua não Graduada (Um Problema do Tempo de Euclides que Gauss Colocou nas Mãos de Fermat)”, *Actas do ProfMat98*, APM, Lisboa.
- [W] **Wantzel, L.** (1837) – “Recherches sur les Moyens de Reconnaître si un Problème de Géométrie Peut se Résoudre avec la Règle et le Compas”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (Liouville)*, **2**, pp. 366-372.
- [Wa1] **van der Waerden, B. L.** (1954) – *Science Awakening*, Noordhoff, Groningen.
- [Wa2] **van der Waerden, B. L.** (1983) – *Geometry and Algebra in Ancient Civilization*, Springer-Verlag, New York.
- [Wo] **Woo, P.** (2000) – “Straightedge Constructions, Given a Parabola”, *The College Mathematics Journal*, **31**, pp. 362-372.
- [Y] **Yates, R.** (1971) – *The Trisection Problem*, National Council of Teachers of Mathematics, S.L.

INTERNET

- [Www1] <http://www.britanica.com> – *Encyclopaedia Britannica On-line*.
- [Www2] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history> – *The MacTutor History of Mathematics Archive*, John O'Connor's & Edmund Robertson's, University of St. Andrews.
- [Www3] <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html> – *Euclid's Elements On-line*, David E. Joyce, Clark University.
- [Www4] http://www.math.niu.edu/~beachy/abstract_algebra – *Abstract Algebra On-line*, John Beachy, Northern Illinois University.
- [Www5] http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html – *A Visual Dictionary of Special Plane Curves*, Xah Lee.
- [Www6] <http://www.perseus.tufts.edu> – *The Perseus Digital Library*, Gregory Crane, Tufts University.
- [Www7] <http://forum.swarthmore.edu> – *The Math Forum*, A Math Education Community Center on the Internet, Swarthmore College.
- [Www8] <http://www.geom.umn.edu> – *The Geometry Center*, A Mathematics Research and Education Center on the Internet, University of Minnesota.

- [Www9] <http://www.museo.unimo.it/theatrum> – Mostra "*Theatrum Machinarum*" (*strumenti per la geometria*), Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica, Università degli studi di Modena e Reggio Emilia.

VÍDEO (VHS)

- [RFG] Reguant, R. & Freixenet, J. & Garcia, E. (S.D.) – *La Duplicación del Cubo en la Grecia Clásica*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS NOMES

Apolônio — 11, 40, 41, 47, 50, 65, 75, 78, 81, 91.

Arquimedes — 8, 9, 11, 19, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 47, 50, 56, 58, 78, 79, 85, 90, 92.

Arquitas — 10, 47, 48, 49, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 72.

Diocles — 11, 47, 50, 67, 79, 85, 86, 87, 90, 91, 92.

Eratóstenes — 10, 37, 47, 48, 49, 50, 51, 63, 68, 71, 72, 73, 74, 75.

Esporo — 11, 22, 47, 50, 90, 91, 92.

Eudoxo — 10, 49, 63, 64, 67, 68, 72, 79.

Filão de Bizâncio — 11, 47, 50, 78, 83, 91.

Herão — 11, 37, 47, 50, 78, 79, 81, 82, 84, 91.

Hípias — 9, 19, 20, 21, 22, 23, 31, 37, 38.

Hipócrates — 8, 10, 11, 18, 19, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 65, 72.

Menecmo — 10, 11, 47, 48, 49, 50, 65, 66, 67, 68, 72, 81, 85.

Nicomedes — 8, 9, 11, 19, 21, 33, 34, 35, 36, 37, 47, 50, 75, 77, 101.

Papo — 8, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 33, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 45, 47, 50, 71, 75, 78, 79, 90, 91, 92, 101, 104.

Platão — 6, 10, 19, 47, 48, 49, 50, 53, 68, 69, 70, 74.