Filipe Manuel Freire Fernandes

MODELOS FÍSICO-MATEMÁTICOS DE ESTRUTURAS ESTELARES



Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dezembro 2001

Filipe Manuel Freire Fernandes

MODELOS FÍSICO-MATEMÁTICOS DE ESTRUTURAS ESTELARES



Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dezembro 2001

Filipe Manuel Freire Fernandes

MODELOS FÍSICO-MATEMÁTICOS DE ESTRUTURAS ESTELARES



Tese submetida à Faculdade de Ciências do Porto para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Astronomia

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dezembro 2001

Dedico esta tese
a ti Ana Teresa

Gostaria de agradecer ao Dr. Mário João Monteiro por me ter acompanhado nos bons e maus momentos deste trabalho. Agradeço também ao Eng. Alexandre Sarmento e sua esposa e a todos aqueles que directamente ou indirectamente contribuíram para este trabalho se conclui-se.

SUMÁRIO

Cada processo físico que se pode descrever ou observar numa estrela depende de diversas quantidades físicas, tal como a temperatura, densidade, pressão, massa e luminosidade da estrela. Usando um conjunto de símbolos para representar o valor numérico de cada quantidade, combinando estes símbolos numa equação matemática, pode-se então obter um sistema que traduza as suas relações. A estas são também adicionadas outras quantidades como a opacidade, emissividade, composição química e características do gás. Estas equações chamadas equações de estrutura descrevem como variam a massa, pressão, temperatura e luminosidade desde o centro da estrela até à sua superfície.

A resolução desta "amálgama" de equações produz no resultado final um modelo matemático, ou seja, o nosso Modelo estelar. Para que se possa obter resultados, tem-se que utilizar máquinas que permitam efectuar os cálculos, com rapidez e com o máximo de exactidão possível. É pois neste papel que entram os computadores, pois estes como ferramenta de calculo, possibilitam efectuar integrações num numero enorme de pontos ao longo do raio e com grande rapidez. Efectivamente é graças aos computadores que se conseguiu nestes últimos 40 anos resultados impensáveis nos últimos séculos.

Por fim num ultimo estagio desta dissertação será curioso fazer uma ligação entre estes últimos avanços inovações da ciência e o ensino da Astronomia bem como da Matemática, permitindo desta forma redefinir os métodos de estudar e ensinar Astronomia e Matemática por exemplo.

ABSTRACT

Each physical process that can be described or observed in a star is dependent on several physical parameters such as star temperature, density, pressure, mass and luminosity. Using a set of symbols that represent the numeric value of each parameter and combining these symbols in a mathematical equation its possible to obtain a system that describes their relations. To these, further parametrs like "opacidade", "emissividade", chemical composition and gas characteristics are also added. These equations, called equations of structure, describe how mass, pressure, temperature and luminosity, vary from the start centre till its surface.

The resolution of these sets of equations produces, as final result, a mathematical model, which is our Star Model. In order to obtain results it's necessary to use machines able to calculate fast and with the highest accuracy possible. It's in this scenario that computers play a fundamental role since they make possible to integrate fast and with an enormous number of points through the ray. Effectively, computers allowed the achievement of the results obtained in the last 40 years, which had been unthinkable during the last centuries.

For last, in an ultimate stage of this dissertation, it will be curious to make a connection between these advances and innovations of science and Astronomy and Mathematics teach in order to redefine the methods of studying Astronomy and Mathematic.

RÉSUMÉ

Chaque processus physique qu'on peut décrire ou observer dans une étoile dépend de différentesquantités physiques, telles comme la température, la densité, la pression, la masse et la luminosité de l'étoile. À partir de l'usage de l'ensemble de symboles pour présenter la valeur numérique de chaque quantité e en combinaison de ces symboles dans une équation mathématique, on peut obtenir um systéme qui traduit ces relations. À ces relations if faut aussi ajouter d'autres quantités telles comme l'opacité, l'émission, la composition chimique et caractéristiques du gaz. Ces equations appelées aussi équations de structure décrivent comment la masse, la pression, la température et la luminosité changent dés le centre de l'étoile jusqu' à la surface.

La résolution de cette "amalgame" de equations produit, dans le résultat final, un modèle mathématique, c'est-à-dire, notre modèle stellaire. Pour qu' on puisse obtenir des résultats, il faut utiliser des machines qui permettent effectuer, de façon rapide et avec le maximun de précision, des calculs. Il est à ce moment que les ordinateurs, on un rôle trés important, puisqu' ils sont des vrais instruments de calcul qui permettent réaliser avec précision des intégrations dans un nombre énorme de points au long du rayon. Il est, en effet, grâce aux ordinateurs qu'on est arrivé, pendant ces derniers quarante ans, à des résultats jamais pensés dans les derniers siécles.

En conclusion, il serait intéressant établir une liason entre ces derniers progrés de la science et l'étude, non seulement de l'astronomie, mais aussi de la mathématique, permettant de cette façon une redéfinition des méthodes à étudier et à enseigner l'astronomie et la mathématique.

ÍNDICE

Sumário 4

Prefácio 9

Capítulo 1 11

Como se construiu uma estrela 11

1.1 Breve história da modelação estelar 12

Capítulo 2 17

Equações de Estrutura 17

Algumas Considerações 17

2.1 Equação da Conservação da Massa 19

2.2 Equação de Equilíbrio Hidrostático 20

2.3 Simples estimativas 21

2.4 Equação da Luminosidade 24

2.4.1 Reacções Nucleares 27

2.4.2 Emissividade 29

2.5 Transporte de energia 31

2.5.1 Critério de Convecção 32

2.5.2 Transporte Radiativo 36

2.5.3 Opacidade 38

Capítulo 3 42

Politropos 42

Introdução 42

3.1 Relações Politrópicas 42

3.2 Equação de Lane-Endem 44

3.3 Solução da equação de Lane-Emden 45

3.4 Aplicações ao Sol 50

Capítulo 4 63

Modelo Radiativo 63

Introdução 63

4.1 Condições Fronteira 64

4.2 Mudança de Variáveis 65

4.3 Método Numérico 69

4.4 Aplicações 74

4.5 Politropos versus Modelo Raditivo 77

Capítulo 5 83

Modelo Radiativo/Convectivo 83

Introdução 83

5.1 Algumas considerações matemáticas 84

5.2 Modelo Convectivo - alguns resultados 90

5.2.1 Convecção no Centro 91

5.2.2 Convecção na superfície 101

Capítulo 6 ____ *112*

Matemática e a Astronomia ____ **112**

Introdução ____ 112

6.1 O porque da modelação no ensino das ciências ____ 112

6.2 Programa "Modelos Estelares" ____ 116

6.3 Algumas aplicações ____ 120

Conclusão ____ *125*

ANEXO A1 ____ *127*

Tabela de Constantes Físicas e Astronómicas ____ 127

ANEXO A2 ____ *128*

Código do programa Modelo1 ____ 128

ANEXO A3 ____ *132*

Código do programa Politro ____ 132

ANEXO A4 ____ *140*

Codigo do programa Modelo_rad ____ 140

- Ciclo.m ____ 143
- Sistema.m ____ 145

ANEXO A5 ____ *146*

Código do programa Conv_cent ____ 146

Sistema.m ____ 150

ANEXO A6 ____ *151*

Código do programa Procura ____ 151

ANEXO A7 ____ *153*

Código do programa Mod_conv ____ 153

ANEXO A8 ____ *157*

Código do programa Modelos Estelares ____ 157

- Modelo.m ____ 157
- convercoes.m ____ 161
- conv_cent.m ____ 162
- conv_cent_tab.m ____ 172
- Modelo_rad.m ____ 174
- modelo_rad_tab.m ____ 182
- modelo_rad_comp.m ____ 182

Referências ____ *185*

Índice de figuras ____ *187*

PREFÁCIO

Notáveis progressos se deram nas ultimas décadas no entendimento dos fenómenos estelares bem como na compreensão da estrutura interna das estrelas. De tal modo apresento este trabalho, por forma a dar uma ideia de como foi evoluindo o conhecimento relativamente à estrutura interna das estrelas e como foram os conceitos matemáticos acompanhando essa mesma evolução. A motivação pela qual me empenhei em elaborar esta dissertação, prende-se principalmente pelo interesse que possuo relativamente a estes assuntos mas também pela lacuna que constatei existir no ensino da astronomia em explicar em termos matemáticos alguns dos fenómenos que ocorrem no interior das estrelas.

Reflectindo desta forma essa mesma ansiedade apresento o ***capítulo 1*** que é uma breve resenha histórica na qual se pretende dar uma visão global de como foram evoluindo os modelos matemáticos, por forma a se adaptarem às observações. Sendo o interior das estrelas um dos mais importantes assuntos da astrofísica, embora alguns processos físicos complicados sejam decisivos na explicação e compreensão de alguns resultados calculados pelos modelos estelares, os princípios básicos da estrutura interna da estrela não requerem um conhecimento exaustivo deles.

Deste modo o ***capítulo 2*** apresenta uma discussão introdutória da física e das equações que permitem descrever essa mesma física. Apresento também alguns possíveis resultados de como uma estrela como o sol se poderá comportar em termos de algumas das suas características físicas como a massa, temperatura etc. No ***capítulo 3*** exponho o primeiro de um conjunto de modelos de estrutura da estrela na qual este ainda se apoia muito na dedução matemática quer isto dizer que é ainda um modelo pouco físico mas mais matemático. Sendo um modelo unicamente matemático os seus resultados estão sujeitos a certas duvidas que só a introdução de novas relações físicas poderão esclarecer.

É pois então no ***capítulo 4*** que se tentará libertar unicamente da dedução matemática para que se crie um modelo que se apoie exclusivamente nas equações de estrutura da estrela. Este mesmo é posteriormente confrontado com o modelo anterior por forma a que se discuta que evolução houve em termos de conhecimento da estrutura da estrela.

Sempre com o objectivo de estar o mais próximo do que é observado e conhecido da nossa estrela criou-se o ***capítulo 5*** na qual é exibido um modelo um pouco mais sofisticado e

em que se procura conciliar num só modelo dois tipos diferentes de transporte de energia e ver em que zonas da estrela eles ocorrem.

Por fim tem-se o ***capítulo 6*** que a meu ver é um pouco mais subjectivo, pois procura confrontar tudo o que antes foi discutido com o ensino da matemática e procurar o papel que a matemática possui nas outras ciências e no conhecimento do homem da natureza, justificando desta forma a sua importância no ensino actual.

"...Science is a very human form of knowledge.
We are always at the brink of the known, we
always feel forward for what is to be hoped.
Every judgement in science stands
on the edge of error, and is personal. Science is
a tribute to what we can know
although we are fallible..."

CAPÍTULO 1

COMO SE CONSTRUIU UMA ESTRELA

Em 1984, dos sumários listados sobre Astronomia e Astrofísica obtiveram-se 9361 artigos escritos por 10863 autores, que cobriam cerca de 2200 tópicos de Astronomia. Subordinado ao tema de "Estrelas", por exemplo encontraram-se aproximadamente 45 sub-tópicos organizados desde "Catálogos de estrelas" até "Ventos estelares". A actividade implícita por todos estes artigos é deveras enorme. Cada artigo representa meses ou anos de trabalho baseado em parte em programas de investigação "recentes". Um simples artigo por sua vez pode ter trinta ou mais referências de datas ou ideias apresentadas por outros investigadores.

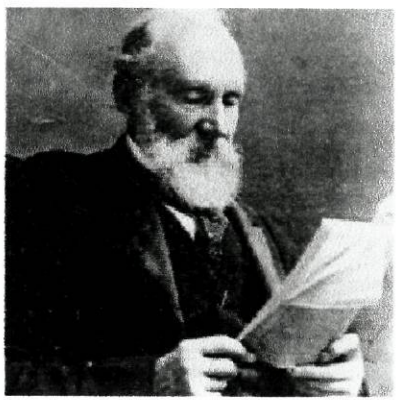
Qual será o resultado final desta actividade? Espera-se que culmine num entendimento detalhado das propriedades num determinado instante de tempo, bem como da evolução desde o nascimento à morte de toda a uma grande "colecção" de matéria do universo. Esta enorme "colecção" inclui desde moléculas inter-estelares, asteróides, planetas, sistemas solares, estrelas, enxames, galáxias até ao próprio universo. Não só gostar-se-ia, com recurso às leis básicas da física, obter uma resposta a questões tão gerais como esta " como é que uma estrela de 5.5 massas solares evolui?", mas também conseguir explicar objectos tão específicos tais como "quais os mecanismos que produzem os jactos em SS 433 e 3C 273?". É pois nesta caminhada incessante que evolui o conhecimento humano e é este o retrato da evolução do conhecimento da estrutura e evolução das estrelas.

1.1 Breve história da modelação estelar

Tal como uma crónica do progresso do conhecimento ao longo dos tempos, considerou-se o assunto da modelação matemática da estrutura e evolução das estrelas. É seguro afirmar que nos últimos séculos mais artigos foram escritos acerca deste assunto do que outro qualquer assunto. Isto significa que muito tempo e esforço foi despendido no entendimento da estrutura e mesmo evolução das estrelas do que noutro qualquer campo da Astronomia. É o que se pode chamar de disciplina madura e que está solidamente assente em bases teóricas e observacionais. O ser possível saber-se tanto sobre objectos que se encontram tão longe de nós é efectivamente um testemunho do poder do método científico e do engenho humano.

Durante milhares de anos as estrelas eram meros pontos brilhantes no céu. Pode-se dizer que qualquer discussão acerca deles revelaram muito da imaginação humana e da natureza. Foi no entanto com Joseph Fraunhofer, inventor do espectróscopio, que se começou a analisar a luz proveniente do Sol e de outras estrelas. Deu-se o primeiro passo para a resposta à velha questão "O que é uma estrela?". Mas foi nos finais do século dezanove que a resposta começou a adquirir corpo. Para isso muito contribuíram cientistas como, Eddington, Hans Bethe entre outros.

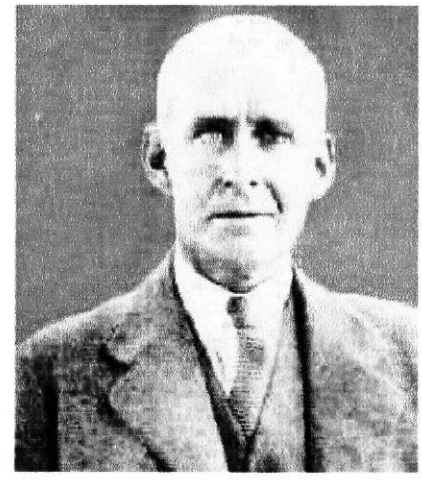
Desta forma, e com o objectivo de determinar a temperatura da superfície do Sol, o físico americano Jonathan Homer Lane (1819-1880) escreveu pela primeira vez um conjunto de equações que permitiram descrever uma esfera de gás em equilíbrio hidrostático. Por outras palavras, equações que permitiram descrever uma esfera de gás cuja configuração química fosse mantida como um todo através da gravidade e que obedecesse às leis da termodinâmica. Poder-se-ia afirmar que Lane foi pioneiro na construção do modelo físico do interior da nossa estrela. É curioso saber que este primeiro modelo previu com certa correcção a temperatura centra da estrelar. Quanto à temperatura da superfície o modelo de Lane deu origem a uma estimativa de 30000 K, o que está longe da realidade (6000 K). Este facto deveu-se, segundo alguns autores como D. B. Guenther e P. Demarque, ao facto de Lane ter baseado o seu trabalho nas leis da radiação de Stefan's, em vez de ter confiado nos primeiros trabalhos de Dulong, Petit e Hopkins sobre a



variação de energia emitida pela superfície. Outros Modelos solares com interior convectivo foram construídos nomeadamente pelo físico alemão A. Ritter (1878) e pelo físico teórico inglês Lord William Thonsom, Barão Kelvin (1824-1907), sendo este último o que colocou a termodinâmica na sua forma presente. Em 1861, Kelvin introduziu o conceito de "equilíbrio convectivo" em geofísica, que foi mais tarde adoptado por Emden no contexto das estrelas.

Em 1907, o físico e astrofísico Robert Emden (1862-1940) publica um extraordinário livro intitulado *"Gaskugen"* (esferas de gás) no qual sumaria muito do trabalho de Lane e Ritter e introduz grande parte da recente teoria sobre estruturas estelares. Desta forma a chamada equação de Lane-Emden é o ponto de partida de inúmeros trabalhos teóricos sobre estruturas das estrelas, nomeadamente a determinação da temperatura central, pressão e massa.

Seguindo o desenvolvimento da física atómica e o primeiro cálculo do coeficiente de absorção, Eddington melhorou o modelo solar de Lane, incluindo o transporte de energia por radiação. Pode dizer-se mesmo que o astrónomo inglês Sir Artur Stanley Eddington (1882-1944), no seu trabalho "Sobre a Constituição Interna das Estrelas", assentou a teoria moderna da estrutura estrelar. Eddington já era famoso por ter organizado as expedições de 1919 para confirmar a teoria da Relatividade de Albert Einstein (1879-1955), confirmando que a luz sofre um desvio perto da borda do Sol, através da observação desse mesmo desvio durante um eclipse.



Este astrónomo propôs a ideia de que a astrofísica permitiria explorar o interior das estrelas já que as propriedades da superfície eram consequência da sua estrutura interna. Contudo, o estudo das estrelas não ficou por aqui pois, como se sabe, os mais importantes avanços da ciência advêm de quando se colocam questões para as quais não existem respostas. Tomemos como exemplo esta simples questão "Porque razão as estrelas brilham?". Durante a história da Humanidade esta simples questão nunca foi respondida, provavelmente porque nunca terá sido colocada ou, quando colocada, a resposta seria: "as estrelas brilham porque são estrelas". Mas terá sido apenas no Século XIX que os cientistas se aperceberam desta lacuna e, deste modo, tentaram dar-lhe resposta. Isto ocorre quando a termodinâmica (Ciência do calor e da energia) se encontrava em pleno desenvolvimento. Pela primeira vez os

cientistas aperceberam-se que o calor e a luz que recebemos do Sol não seriam uma mera dádiva dos deuses.

Apesar de todas as tentativas de resposta a fonte de energia do Sol e das estrelas continuou um mistério até serem descobertas as reacções termonucleares. Em 1898, Sir Robert S. Bael (1840-?), um astrónomo de Cambridge, notou que os fósseis de certos peixes tinham olhos bem desenvolvidos, o que seria uma indicação de que o Sol já brilhava muito antes da humanidade. Ele considerou e descartou mais tarde a hipótese de que o Sol ainda estaria a arrefecer a partir de um aquecimento inicial durante a sua formação. Se assim fosse, o Sol já teria arrefecido ao ponto de não emitir mais luz visível. Porém pensou-se que o combustível do Sol seria talvez o carvão mineral. Contudo esta teoria apresentava um problema ao nível da escala de tempo, ou seja, com este combustível o Sol não duraria mais do que a história humana escrita. Então em 1854 Helmholtz lançou a hipótese de que a fonte de energia do Sol seria resultado da contracção gravitacional. No entanto, Kelvin verificou que esta hipótese possuía também um problema de escala temporal, pois o Sol terminaria a sua contracção num intervalo de tempo inferior à estimativa da idade da Terra. Kelvin, nos seus cálculos, chegou a uma idade entre 20 e 100 milhões de anos - valor melhor do que a hipótese do combustível de carvão, mas insuficiente para acomodar os dados dos Geólogos e evolucionistas que eram de mil milhões de anos.



Então, e mesmo antes da descoberta da radioactividade, alguns autores, entre eles o notável W. D. Hakins; J. Perrin e Eddington, sugeriram que o poder energético das partículas subatómicas poderia ser a fonte energética do Sol. Eddington chegou a considerar o que hoje é chamado de fusão nuclear, ou seja, colocou por hipótese um processo que hoje em dia sabe-se que não ocorre na natureza - a aniquilação de protões por electrões - o que seria suficiente, segundo o mesmo, para produzir energia para milhares de biliões de anos. Será curioso verificar que toda esta ideia, surge quando a equação de Einstein já era conhecida e se sabia que o átomo possuía electrões e protões, embora ainda não se conhecesse a existência dos neutrões. Será finalmente com o desenvolvimento da física nuclear que a fusão do hidrogénio em hélio, é discutida por Atkinson (1931);Von Weizsacker (1937) e Gamow (1938). No entanto, foi o emigrante alemão Hans Albrecht Bethe (1906-?) que, após a conferência de Março de 1938, organizada pela Carnegie Institution de Washington, para unir

os astrónomos e físicos, desenvolveu a teoria de como a fusão nuclear poderia produzir a energia que faz as estrelas brilharem. Esta teoria foi apresentada no seu artigo "A produção de energia nas estrelas" publicado em 1939 e que lhe valeu mais tarde o prémio Nobel em 1967.

Hans Bethe reuniu os melhores dados sobre reacções nucleares e mostrou em detalhe como quatro protões poderiam ser unidos e transformados num núcleo de hélio libertando a energia que Eddington e outros cientistas haviam sugerido. O processo que Bethe elaborou no seu artigo, conhecido actualmente como o ciclo do carbono (CNO), envolvia uma cadeia complexa de seis reacções nucleares em que átomos de carbono e nitrogénio agiam como catalisadores para a fusão nuclear. Como na época os astrónomos calculavam a temperatura no interior do Sol um valor de 19 milhões de graus kelvin, Bethe demostrou que a essa temperatura o ciclo do carbono seria, pois, o modo dominante de produção de energia. Mais tarde com o melhoramento do cálculo da opacidade foi reconhecido que as cadeias PP, em vez do ciclo CNO, seriam as responsáveis pela maior parte da luminosidade do Sol. Desta forma a questão levantada séculos antes foi finalmente respondida e um mistério da natureza fora desvendado. No entanto outro problema levantar-se-ia: o chamado "Problema dos Neutrinos".

Os primeiros modelos estelares, que nos mostraram com detalhe como uma estrela evolui desde a fase da fusão de hidrogénio até à fase de gigante vermelha, apenas foram possíveis com o desenvolvimento dos computadores electrónicos. Antes do advento dos computadores os cálculos eram efectuados por meio de calculadoras. Este facto conduzia à troca de modelos imperfeitos do interior da estrela nos quais o tempo despendido para efectuar os cálculos era enorme, pela construção de modelos mais detalhados do interior e com menos tempo despendido nos cálculos.

Em 1955, em Princeton Institute for Advanced Study, R. Harm e Martin Schwarzschild, publicaram 15 "Modelos", alguns calculados à mão, outros usando computadores. Os modelos apresentavam três zonas: o núcleo, um envelope e uma camada intermédia. A pressão da radiação foi ignorada bem como a diferenças de composição química entre as diferentes zonas. Nenhuma fonte de energia foi estudada em detalhe. Foram necessários alguns anos de intenso trabalho através do uso da calculadora para construir os modelos que foram calculados à mão e na qual se contabilizou um total de 127 passos. Em contraste, os computadores produziram modelos em apenas 37 passos e apenas necessitaram de um dia de cálculos. Esta contínua progressão por parte dos computadores permitiu, já nos dias que decorrem, calcular modelos estelares completos em menos de um minuto. A extensão dos computadores a modelos estelares desde a fase da fusão do hidrogénio até a

fases mais adiantadas começou em 1961 com o aparecimento de alguns artigos independentes sobre estrelas de 5 a 15 massas solares por Chushiro Hayashi, Robert Cameron e Emil Polak. Eles usaram os computadores IBM 650 3 7090. Estratificando cada estrela em centenas ou mais camadas internas os seus programas seguiram a evolução estrutural de cada estrela, de camada em camada até à fase de fusão de hélio. Para as estrelas mais massivas chegaram a atingir a fase do carbono e mesmo do néon. Efectivamente desde os anos 60 os modelos estelares tornaram-se mais sofisticados e prova disso são os modelos relativos à evolução do Sol, tais como os modelos Solares calibrados, o que equivale àquilo que hoje se chama modelo *standard*, introduzido por Demarque e Percy (1964).

Nestes modelos os parâmetros da convecção e a abundância de hélio nos modelos estelares são ajustados de modo a irem ao encontro do que é observado a nível do raio e da luminosidade da estrela (Demarque e Larson 1964). Desde então muitos autores construíram modelos estelares que cada vez mais se aproximam da realidade.

Actualmente as observações precisas do Sol colocaram novas exigências ao modelo *standard*. Significativos melhoramentos foram feitos na opacidade e na equação de estado (Mihalas, Dappen & Hummer 1988; Rogers e Iglesias 1994). A determinação da difusão gravitacional do hélio (Proffitt e Michaud 1991; Guenther 1993; Guzik e Cox 1993) e os efeitos da rotação lenta (Endal e Sofia 1981; Chaboyer 1995) foram incluídos nos cálculos do modelo e mais recentemente foram feitas tentativas com o objectivo de substituir o "mixing length" da teoria convectiva por um modelo baseado em sofisticadas simulações numéricas da convecção estelar (Chan e Sofia 1989; Canuto e Mazzitelli 1991; Demarque 1996).

Como já deve ter reparado tem-se vindo a mencionar modelos matemáticos de uma estrela. Contudo ainda não se descreveu qual o propósito desta terminologia. Como se pode reduzir um pequeno ponto luminoso de uma estrela num conjunto de equações e como serão essas equações? As equações básicas que definem a estrutura de uma estrela são conhecidas há séculos. Elas descrevem quando uma estrela está estável ou em colapso gravitacional. Descrevem como a energia é transportada desde o centro até à superfície, bem como a densidade e a temperatura de um gás variam desde o núcleo até à superfície. Estes modelos teóricos possibilitam descrever também como a energia é libertada. Quando expressamos todas estas relações numa forma simbólica obtemos as equações de estrutura que foram estudas com mais detalhe nos capítulos que se seguem.

"Remote from human passions,
remote even from the pitiful facts of nature,
the generations have gradually created
an ordered cosmos, where pure thought can
dwell as in its natural home and where one,
at least, of our nobler impulses can escape
from the dreary exile of the actual world."
Bertrand Russell

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DE ESTRUTURA

Algumas Considerações

Das observações e estudos feitos pelos astrónomos pode dizer-se que existem quatro propriedades básicas que descrevem as estrelas. São elas a massa; a luminosidade; o raio e a sua composição química. Contudo, é legítimo questionar: - Serão estas propriedades suficientes para compreender a estrutura interna de uma estrela?

Na minha opinião e de alguns autores[1] não o são, pois tem que se considerar uma outra característica que é a sua estabilidade por longos períodos de tempo. Nos últimos anos intensas observações têm sido feitas pelos astrónomos, que revelaram não haver grandes alterações na maioria das estrelas. No entanto é válido argumentar que este período de observações não é um intervalo de tempo suficiente, para nos garantir que as estrelas mantêm a estabilidade da sua estrutura interna. É que todos estes anos de observações são como que um minuto na vida de uma estrela na medida em que esta pode ter um tempo de vida de milhares de milhões de anos. Existem algumas provas que vêm em apoio deste facto. Uma delas é a de os geólogos bem como os paleontólogos terem descoberto na Terra fósseis de algas com mais de 10^{12} anos. Segundo eles estas algas para terem florescido teria de ter havido uma temperatura na terra não muito diferente da temperatura actual, o que leva a

[1] Veja Structure and evolution of stars de M. Schwarzschild pag. 30

concluir que a luminosidade da nossa estrela terá sido relativamente constante estes últimos milhões de anos.

Será pois esta prova bem como outras que vieram coroar a ideia de que o Sol, como as estrelas em geral, terão períodos de equilíbrio muito longos. Deste modo e sabendo que a estrutura interna é o factor que condiciona as variações de uma estrela, logo se chega à conclusão de que as estrelas em geral se encontram estáveis em termos da sua estrutura interna por muitos milhões de anos.

Levanta-se agora uma nova questão não menos pertinente que a anterior: - Afinal quais serão os processos físicos pelos quais a estrutura interna de uma estrela é determinada?

Dos estudos já efectuados, verificou-se que a estrela é mantida como um todo pela força gravítica, na qual esta mesma força é compensada por um gradiente de pressão devido à energia cinética das partículas que compõem o material da estrela. Estas forças (força gravítica e força de pressão) terão assim um papel determinante na estrutura interna da estrela, podendo afirmar-se que estas estarão presentes na maior parte da vida da estrela Fig.(2-1).

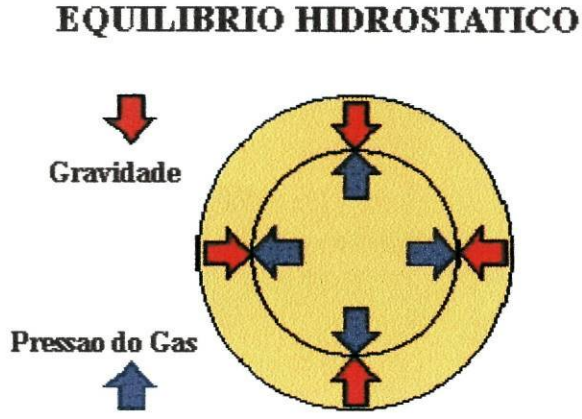


Fig. 2-1 Equilíbrio hidrostático

Mas além destas forças devem considerar-se outras propriedades que também são determinantes na estrela. Se não vejamos: sendo a estrela um objecto luminoso que está constantemente a irradiar energia para o espaço ela deverá ter mecanismos de produção de energia para compensar essa perda. Em suma pode afirmar-se que a origem dessa energia, bem como a forma como é transportada até à superfície deverá estar presente em qualquer teoria de estrutura estelar.

Sendo assim, irei utilizar neste capítulo os conhecimentos dos processos físicos com o objectivo de formular as equações de estrutura. No entanto terei presente dois pressupostos:

i) As propriedades da estrela não se alteram ou que se alteram tão devagar que não estaremos a cometer grandes erros se desprezarmos essas variações;

ii) que a estrela é uma esfera de gás com simetria esférica.

Finalmente e tendo em atenção estes dois últimos aspectos poderei então traduzir a estrutura da estrela como sendo governada por um conjunto de equações diferenciais em que as quantidades físicas dependerão apenas do raio.

2.1 Equação da Conservação da Massa

A primeira equação que poderá dar informações sobre a estrutura, é a chamada equação de conservação de massa, pois esta permite traduzir a variação da massa em função do raio e da densidade. Considere-se então a massa que se encontra numa coroa esférica que está contida entre r e $r + \delta r$ Fig.(2.1-1).

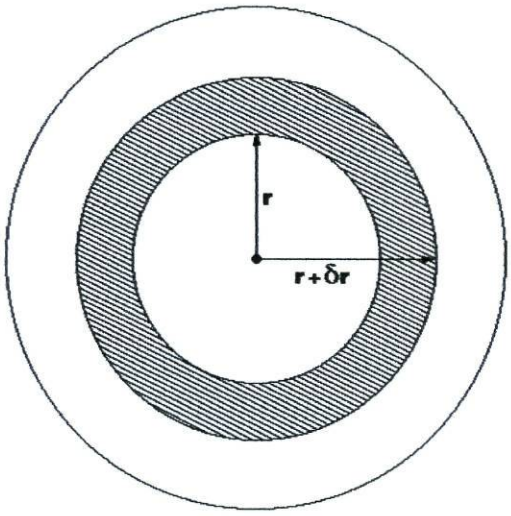


Fig. 2.1-1 Coroa esférica situada entre r e r + δr

Sabendo que o volume dessa coroa pode ser determinado por $4\pi r^2 \delta r$ e como a massa é igual ao produto do volume pela densidade então a massa dessa mesma camada esférica será $4\pi r^2 \rho \delta r$. Contudo também se pode obter essa mesma massa[2] como sendo uma diferença, ou seja,

$$m_{r+\delta r} - m_r = 4\pi r^2 \rho \delta r$$

$$\frac{m_{r+\delta r} - m_r}{\delta r} = 4\pi r^2 \rho ,$$

[2] m_r representa a massa contida numa esfera de raio r.

considerando $\delta r \to 0$ quer isto dizer que se tomar coroas esféricas cada vez mais finas, ter-se-á que a relação anterior assumirá uma forma diferencial.

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\pi^2\rho \; ; \quad \textbf{Equação da Conservação da Massa} \qquad (2.1\text{-}1).$$

Chegou-se desta forma à chamada equação de conservação de massa. Contudo, esta mesma só por si nada nos revela quanto à forma de como a estrela consegue compensar a força gravítica, que sobre ela própria é exercida.

Vamos então na secção seguinte tentar encontrar uma relação matemática que permita traduzir este mesmo fenómeno.

2.2 Equação de Equilíbrio Hidrostático

O equilíbrio já referido anteriormente entre a força gravítica e a pressão é conhecido como equilíbrio hidrostático. Este é em certa medida um dos principais condicionantes da "vida" da estrela, pois é deste equilíbrio que "depende" a forma como evolui a estrela ao longo da sua vida. Desta forma, tentemos chegar à relação que permite traduzir em termos matemáticos este fenómeno.

Considere-se as forças que podem actuar num pequeno volume que se situa a uma distância r do centro da estrela e que tenha uma altura δr e uma área em cada face de δS Fig. (2.2-1). Quanto ao volume deste elemento facilmente se vê que será de $\delta S \delta r$, relativamente à massa e sabendo que esta é o produto da densidade pelo volume então ter-se-á que $\delta m = \delta S.\delta r.\rho = \rho_r \delta S \delta r$.

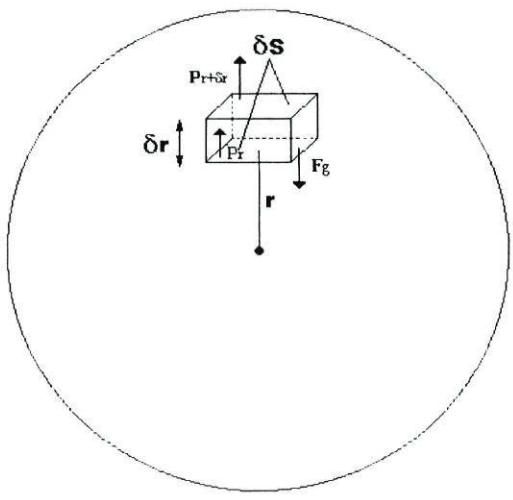


Fig. 2.2-1 Um pequeno elemento de massa do interior da estrela

Da figura anterior, pode observar-se que existem duas forças que actuam no volume. Uma será a força que tem o sentido para exterior e é exercida pela pressão do material da estrela tanto na face superior ($P_{r+\delta r}$) como na face inferior (P_r). Por outro lado temos a força gravítica exercida sobre o material a uma distância r do centro. Tendo em consideração que a pressão é igual ao quociente da força pela área $F_p = \Delta P.\ \delta S$ e da equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho,$$

da qual se obtém a aceleração da gravidade como sendo $g = \frac{Gm}{r^2}$, pode traduzir-se o conjunto da força gravítica e da pressão como sendo:

$$(P_r - P_{r+\delta r})\delta S + \frac{Gm_r}{r^2}\rho_r \delta S \delta r$$

em que já se viu que $\rho_r \delta S \delta r$ é a massa do elemento de volume. Como se está a considerar um equilíbrio hidrostático então as forças com direcção ao interior são contrabalançadas pelas forças com direcção ao exterior, ou seja

$$P_r \delta S = P_{r+\delta r}\delta S + \frac{Gm_r}{r^2}\rho_r \delta S \delta r$$

$$P_{r+dr} - P_r = -\rho_r \frac{Gm_r}{r^2}\delta r$$

$$\frac{P_{r+\delta r} - P_r}{\delta r} = -\rho_r \frac{Gm_r}{r^2},$$

de igual modo como se fez para a equação (2.1-1) considera-se volumes cada vez mais finos, ou seja, $\delta r \to 0$ então a relação anterior tomará a forma de equação diferencial assim escrita:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm_r}{r^2}\rho_r, \quad \textbf{Equação de Equilíbrio Hidrostático} \qquad (2.2\text{-}1).$$

Tem-se, finalmente, a equação que permite traduzir em termos matemáticos um equilíbrio que é fundamental à vida da estrela.

2.3 Simples estimativas

As equações (2.1-1) e (2.2-1) serão, pois, as duas primeiras condições básicas que possibilitam estabelecer e compreender alguns aspectos da estrutura interna. Contudo, estas

equações só por si não poderão fornecer informação da variação exacta da pressão, temperatura, massa ou densidade em função do raio da estrela. No entanto, podem estabelecer-se algumas estimativas válidas de certos valores como a pressão central e temperatura central da estrela. Então, se considerar a densidade como uma quantidade física que não varie com o raio da estrela, ou seja, uma constante, poder-se-á ter uma ligação entre a equação (2.1-1) e (2.2-1) que nos dará as ditas estimativas. Vejamos então como se processam esses resultados.

Seja (2.1-1) a equação que relaciona *m* em função de *r*, considere-se como antes referi $\rho_r = \rho_c$ (densidade constante), então

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho_c ,$$

integrando teremos

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi \rho_c r^3 \qquad (2.3\text{-}1).$$

Se $r = R$ então m(r) = M, ou seja,

$$M = \frac{4}{3}\pi \rho_c R^3 \Leftrightarrow$$

$$\rho_c = \frac{3M}{4\pi R^3} \qquad (2.3\text{-}2).$$

Logo no caso do Sol temos $\rho_{c_\Theta} = \frac{3M_\Theta}{4\pi R_\Theta^3} \cong 1.40$ g/cm^3. Obtemos desta forma uma primeira estimativa da densidade solar. Quanto à equação (2.2-1) poderá ser escrita de outra forma tendo em consideração (2.3-1) e (2.3-2).

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{Gm_r}{r^2} = -\rho_c G \frac{4}{3}\pi \rho_c r^3 \frac{1}{r^2},$$

ou seja,

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4G\pi}{3}\rho_c{}^2 r ,$$

integrando teremos

$$P(r)\text{-}P(0) = -\frac{4G\pi}{3}\rho_c{}^2 \cdot \frac{r^2}{2},$$

ou seja,

$$\mathrm{P(r)\text{-}P(0)} = -\frac{3GM^2}{8\pi R^6} r^2 \qquad (2.3\text{-}3).$$

Consideremos agora que $r = R$ (raio da estrela) então $P(r) = 0$, ou seja a pressão na superfície será nula logo poderemos concluir que $\boldsymbol{Pc} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$, ou seja, para o sol

$$Pc_{\Theta} = \frac{3GM_{\Theta}^2}{8\pi R_{\Theta}^4} \cong 1.343\times10^{15} \text{ dyn/cm}^2.$$

Finalmente tendo em atenção que $P = \frac{\Re}{\mu}\rho T$, equação de estado dos gases ideais, podemos deduzir que $\boldsymbol{T_c} = \frac{\mu}{\Re}\frac{\boldsymbol{Pc}}{\rho_c}$ em que μ é o peso médio molecular que compõem o gás e $\Re$ a constante dos gases ideais. No caso então da nossa estrela teremos:

$$Tc_{\otimes} = \frac{\mu Pc_{\otimes}}{\Re\rho_c} \cong 7.1097\times10^6 \text{ K}.$$

Se representarmos graficamente as equações (2.3-1) e (2.3-3), teremos uma primeira visão da variação da massa , pressão e temperatura em função de *r* Fig. (2.3-1 a, b, c).

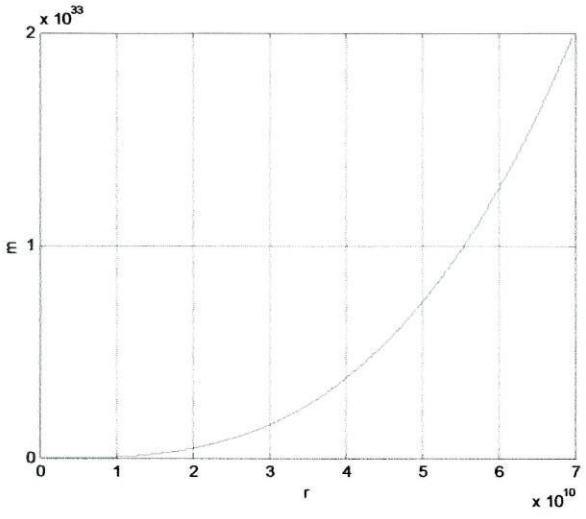


Fig. 2.3-1a Variação da massa para uma estrela de densidade constante

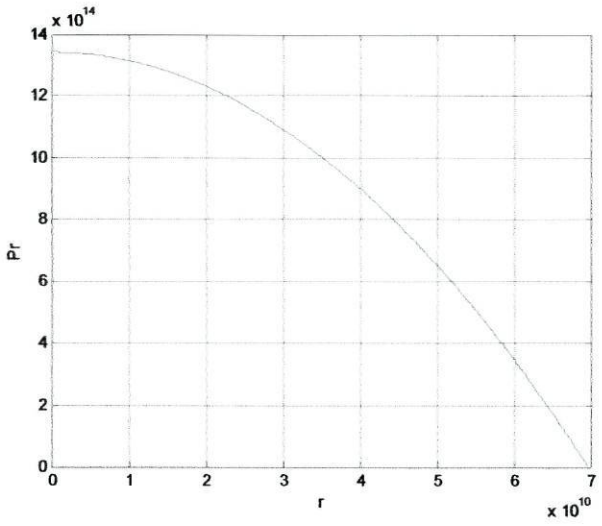


Fig. 2.3-2b Variação da pressão para uma estrela de densidade constante

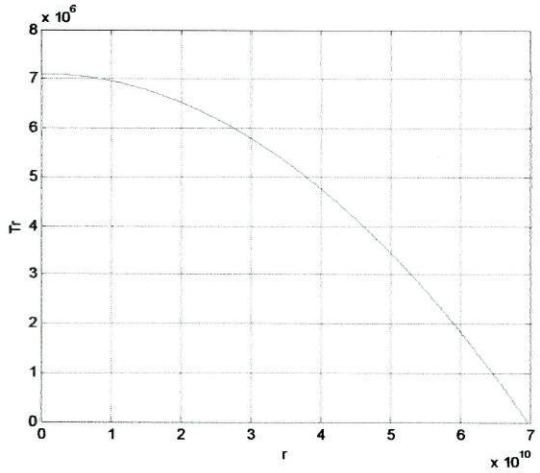


Fig. 2.3-1c Variação da temperatura, para uma estrela de densidade constante

Apesar de se ter uma visão generalista de como se comporta a variação da massa e temperatura da estrela e quais os valores possíveis para a temperatura e pressão central, continuam a faltar-nos algumas relações ou mesmo alguns factores, que se tidos em consideração, talvez nos permitam dar uma imagem mais correcta do comportamento da estrela no seu interior. Sendo assim, vejamos o que se afirma nas secções seguintes.

2.4 Equação da Luminosidade

Como antes referi, o equilíbrio hidrostático não será só por si a única condição que pode assegurar a estabilidade da estrela. São necessárias outras condições, entre as quais o chamado equilíbrio térmico. Em termos teóricos, o equilíbrio térmico é obtido por um sistema se todas as partes do mesmo tiverem a mesma temperatura e se não houver trocas de energia entre as partes.

É evidente que este tipo de equilíbrio não se verifica numa estrela como o Sol, pois como já se constatou a sua temperatura central ronda os 10^6 K e a sua temperatura à superfície é de aproximadamente 6000 K. Contudo, será interessante pensar que se a estrela está constantemente a perder energia, o que é fácil de verificar pois a luminosidade é de 3.82×10^{33} erg/s, ela terá que possuir uma fonte produtora de energia que consiga compensar essa perda. Vejamos algumas hipóteses de possíveis fontes de energia.

Se a energia da estrela fosse produzida por reacções químicas, umas das reacções mais eficientes que se conhece é a combustão de hidrogénio com uma eficiência de 1/66000000 %. Calculando o tempo de vida que a estrela teria se fosse essa a sua fonte de energia, ele rondaria os 1800 anos, o que é notoriamente insuficiente. Se por outro lado, a energia fosse

obtida não por reacções químicas, mas por contracção gravítacional, ou seja, partindo da ideia de um corpo a "cair" num campo gravítico, esse corpo adquiria energia cinética que seria convertida em energia térmica. Sendo assim teríamos um tempo de vida[3] para a estrela de

$$Tv = \frac{Eg}{L_{\otimes}} \cong 10^{15}\ \mathrm{s} = 3\times 10^{7}\ \text{anos.}$$

Teremos novamente um tempo insuficiente, pois o sistema solar e nomeadamente a Terra, tem um tempo de existência bastante superior.

Por último temos a energia nuclear. No interior da estrela as temperaturas são suficientemente altas para que se dêem os processos de fusão nuclear. Este tipo de reacções nucleares libertam energia proveniente da deficiência de massa que se verifica entre os núcleos que se fundem e os núcleos finais.

Este processo é possível se o combustível usado for constituído por elementos mais leves que o ferro. Deste modo, o limite teórico que nos mostra, com uma boa aproximação, as reservas de energia nuclear são de $E_n = 0.75\times\ 0.02\times 0.2\times M_{\Theta}\times c^2 = 5.36\times 10^{50}$ ergs. 0.75 representa a percentagem em termos de massa da estrela, de hidrogénio disponível. 0.02 fornece a eficiência da reacção. Por fim 0.2 é a percentagem de massa que se encontra no núcleo da estrela. Teremos então um tempo de vida para a estrela de

$$Tv = \frac{E_n}{L_{\Theta}} \cong 1.4\times 10^{17}\ \mathrm{s} \cong 4.4\times 10^{10}\ \text{anos.}$$

Logo pode constatar-se que este tempo de vida será suficiente para que se dê uma transmutação gradual dos elementos, o que possibilita e reforça a ideia de estabilidade da estrutura estelar.

Em suma, pode concluir-se da discussão anterior que a energia perdida na superfície pela luminosidade é compensada por uma produção de energia de elevada eficiência.

Vejamos então qual é a equação que poderá traduzir este referido equilíbrio. Consideremos a estrela como uma esfera simétrica em que L_r é a quantidade de energia que atravessa uma esfera de raio r e $L_{r+\delta r}$ a quantidade de energia que atravessa a esfera de raio $r + \delta r$. Fig. (2.4-1).

[3] Eg representa a chamada energia gravitacional que é obetida pela contração da estrela

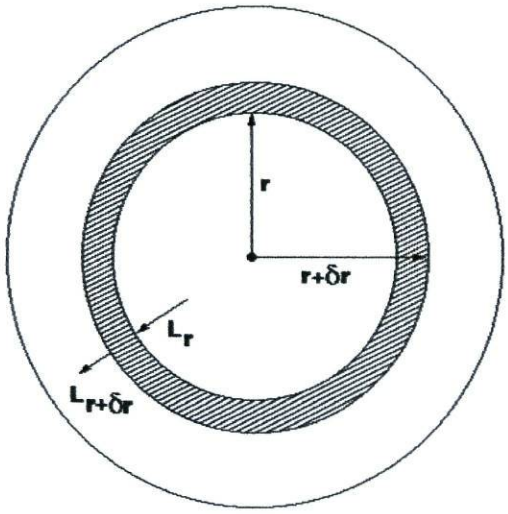


Fig. 2.4-1 Coroa esférica situada entre r e r + δr

De igual modo, como se fez na Secção 2.1, o volume da camada esférica compreendida entre r e r + δr, será dado por $4\pi r^2\delta r$ e a sua massa de $4\pi r^2\rho\delta r$. Então a energia libertada por essa camada será de $4\pi r^2\rho\varepsilon\delta r$ em que ε (emissividade) corresponde à energia produzida por unidade de massa e por unidade de tempo.

Tendo então em consideração o princípio da conservação de energia, pode dizer-se que a energia libertada pela esfera de raio $r+\delta r$ será:

$$L_{r+\delta r} = L_r + 4\pi r^2 \varepsilon\rho\delta r \text{ , ou seja,}$$

$$L_{r+\delta r} - L_r = 4\pi r^2 \rho\varepsilon\delta r$$

$$\frac{L_{r+\delta r} - L_r}{\delta r} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon \text{ ,}$$

considerando camadas esféricas cada vez mais finas, ou seja, δr→0, a relação anterior toma a seguinte forma diferencial:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon \text{ ; } \textbf{Equação de produção de energia.} \qquad (2.4\text{-}1)$$

Obtemos, deste modo, a chamada equação de produção de energia que pode permitir localizar em que zona do interior da estrela se processa a produção de energia, o que se irá constatar em capítulos seguintes.

Já que se falou de produção de energia gostaria, antes de passar à última equação de estrutura, fazendo uma breve abordagem relativamente a este assunto.

2.4.1 Reacções Nucleares

Como já se viu a energia da estrela é obtida por processos de fusão nuclear, ou seja, da combinação de quatro núcleos, no caso da fusão de hidrogénio, obtém-se um núcleo de um elemento mais pesado. Contudo, como o leitor já deve ter deduzido, haverá uma dificuldade a ser ultrapassada que é tentar ligar cargas eléctricas iguais, o que pelas leis de Coulomb, têm tendência a repelirem-se e não a atraírem-se.

É então, neste facto que a temperatura joga um papel importante, na medida em que com o aumento da temperatura teremos um aumento da energia cinética dos núcleos permitindo desta forma contrariar as forças de repulsão das cargas nucleares. Será fácil concluir que quanto maior forem os núcleos a fundir, maior terá que ser a temperatura. Logo, teremos que os núcleos que menor temperatura necessitam são os núcleos de hidrogénio.

Todo este balanço entre estes efeitos pode se traduzido nesta curva, chamada também de pico de Gamow Fig. (2.4.-2).

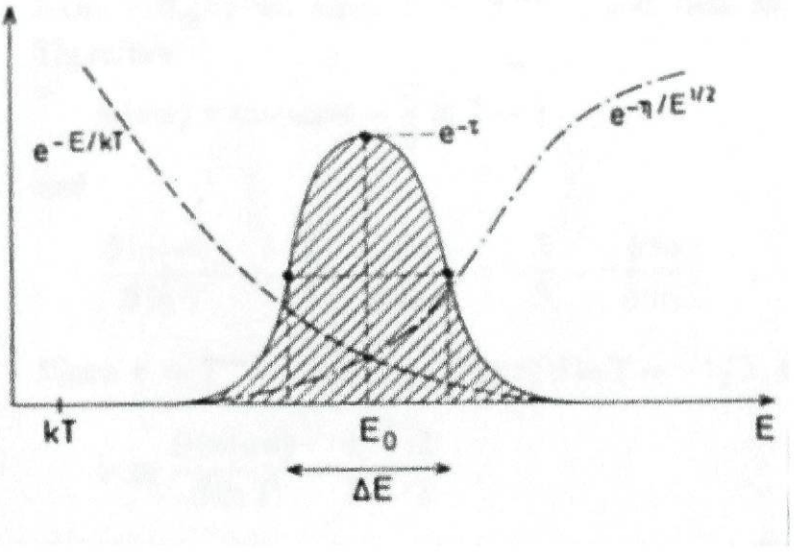


Fig. 2.4-2 Curva de Gamow

Esta curva terá importância para podermos compreender a origem e o desenvolvimento da equação da emissividade ε. Considerando primeiro uma breve abordagem dos diferentes caminhos ou vias pela qual se poderão transformar hidrogénio em hélio.

i) Reacções Protão- Protão

Para temperaturas da ordem de 8×10^6 K, a transmutação de hidrogénio em hélio ocorre principalmente no chamado ciclo PPI. Este ciclo consiste na fusão de quatro núcleos de ^1H obtendo um núcleo de hélio Fig. (2.4-3).

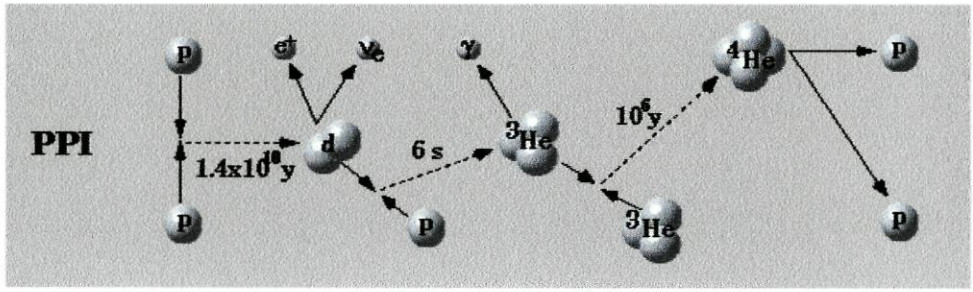


Fig. 2.4-3 Cadeia PPI

A obtenção de núcleos de hélio (He) pode processar-se não só pela via anterior mas também por outras vias a que chamamos cadeias PPII e PPIII, Fig.(2.4-4) nas quais algumas reacções se iniciam com ^{3}He. Conforme se demonstra:

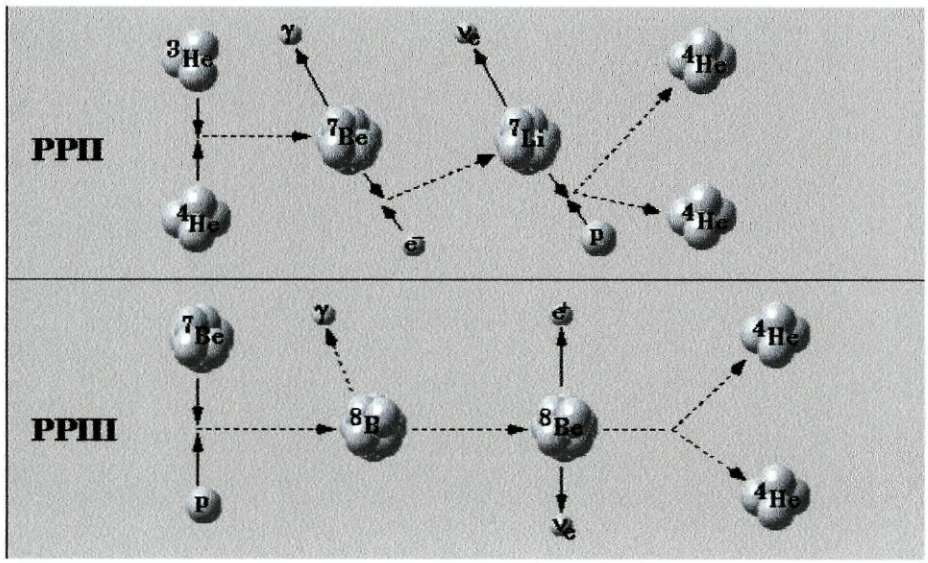


Fig. 2.4-4 Cadeias PPII e PPIII

O ciclo PPI terá um Q^4 = 26,20 Mev e dois neutrinos de energia média de 0,263 Mev. A cadeia PPII tem um Q = 25,67 Mev correspondendo a uma perda por neutrinos de 4% com neutrinos de 0,80 Mev, além dos dois de 0,263 Mev. Finalmente a cadeia PPIII terá Q = 19,2 Mev, e corresponde a uma perda por neutrinos de 28% com neutrinos carregando 7,2 Mev alem dos dois de 0,263 Mev.

No entanto não será apenas este o único mecanismo que permite transmutar o hidrogénio em hélio, pois senão vejamos.

ii) Ciclo CNO

O ciclo CNO é um processo que domina a fusão de hidrogénio em hélio, em estrelas de massa superior à massa do Sol. Esta reacção processa-se em temperaturas superiores a 18×10^7 K e em que C e N são utilizados como catalisadores do processo, Fig. (2.4-5).

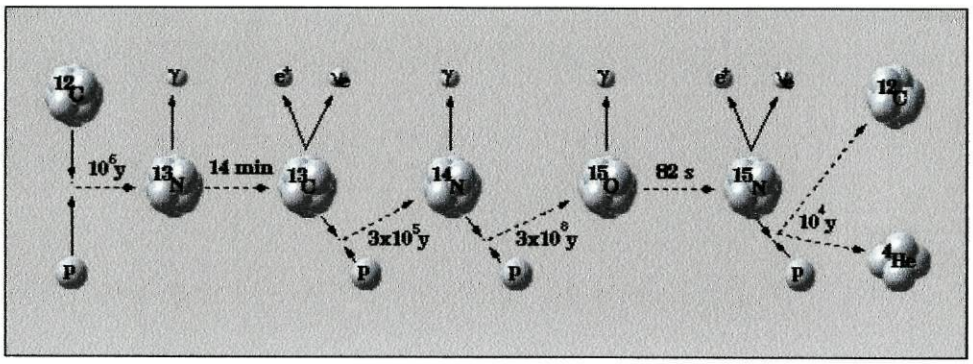


Fig. 2.4-5 Cadeia CNO

Este processo terá uma libertação de 25, 02 Mev por núcleo de He produzido. Depois desta breve introdução da forma como se processa as reacções, iniciemos uma breve abordagem do que é a emissividade em termos matemáticos.

2.4.2 Emissividade

A emissividade poderá então ser aproximada por uma expressão do tipo $\varepsilon = \varepsilon_0(x, z)\rho T^{\eta}$ em que $\eta = \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log T}$, este último parâmetro depende do processo pelo qual se dá a fusão nuclear (cadeias PP ou ciclo CNO).

A partir da curva de Gamow, (Fig.2.4-2), podemos re-escrever ε como:

$$\varepsilon = Q_{jk} \frac{x_j x_k}{m_j m_k} \rho \frac{4 s_\phi \sqrt{\frac{2}{m}}}{3k^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\xi}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{-\xi}, \qquad (2.4\text{-}2)$$

onde

$$\xi = \frac{3}{KT}\left[\pi\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{z_j z_k}{\hbar} KT\right]^{\frac{2}{3}},$$

e em que:

[4] $Q=\Delta mc^2-E\nu$

Q_{jk} – energia libertada na reacção da partícula j com a partícula k;

x_j; x_k – abundância de cada uma das partículas;

z_j; z_k – números atómicos;

$s_{\varnothing}$- secção eficaz da reacção.

Logaritmizando a equação (1.4.2-1) esta poderá ser reescrita da seguinte forma

$$\log \varepsilon = \log\left[Q_{jk} \frac{X_j X_k}{m_j m_k} \rho \frac{4 S_\Phi \sqrt{\frac{2}{m}}}{3K^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{2}(\log \xi - \log T) - \xi$$

então

$$\frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \xi}{\partial \log T} - 1\right) - \xi \frac{\log \xi}{\log T} \qquad (2.4\text{-}3).$$

Sabendo que $\xi = \xi_0 . T^{-\frac{1}{3}}$ então $\log \xi = \log \xi_0 - \frac{1}{3}\log T$, ou seja

$$\frac{\partial \log \xi}{\partial \log T} = -\frac{1}{3} \qquad (2.4\text{-}4)$$

desta forma e tendo em consideração a equação (1.4.2-3) teremos

$$\frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log T} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} - 1\right) + \frac{1}{3}\xi$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{3}\right) + \frac{1}{3}\xi = -\frac{2}{3} + \frac{\xi}{3},$$

ou seja

$$\frac{\partial \log \varepsilon}{\partial \log T} = \frac{\xi - 2}{3} = \eta \qquad (2.4\text{-}5)$$

que será para as cadeias PP de $\eta \cong 4$ e para o ciclo CNO $\eta \cong 16$, após se calcular o valor tipico de ξ.

Depois desta breve análise, relativamente à produção de energia, vamos, de seguida, fazer uma pequena abordagem das diferentes formas que a estrela pode utilizar para transportar a energia produzida no seu núcleo até à superfície e de que maneira se pode traduzir em termos matemáticos este fenómeno de modo a termos a quarta equação de estrutura para que se possa criar um modelo matemático o mais representativo possível da realidade.

2.5 Transporte de energia

A energia pode ser transportada por três formas diferentes que são:

i) Convecção- A energia é transportada por movimentos colectivos de porções de gás.

ii) Condução- A energia é transportada por trocas de energia entre as partículas do gás, por colisão.

iii) Radiação- A energia é transportada pela emissão e absorção de fotões gerados no gás.

Sem qualquer critério específico, vamos abordar primeiro em termos gerais como se processa o transporte por condução e radiação. A condução tal como a radiação são processos bastante similares, porque ambos envolvem a transferência de energia por interacção directa, ou entre partículas no caso da condução ou de fotões no caso da radiação. Será interessante questionar, nesta altura da análise, qual destes dois mecanismos de transporte (condução e radiação) é o mais importante, ou melhor dizendo, o mais dominante na estrela? A energia transportada por partícula típica, $\frac{3kT}{2}$ é comparável com a que é transportada por um fotão típico, $\frac{hc}{\lambda}$, mas a densidade de partículas na estrela é superior à densidade de fotões. Isto significa que a quantidade de energia das partículas é muito maior que a dos fotões. Visto desta forma seria de esperar que a condução seria o mecanismo de transporte mais importante na estrela, em vez da radiação. Contudo esta "pequena" quantidade de fotões valem mais só pelo maior trajecto livre que possuem entre colisões e pela velocidade.

Efectivamente um fotão num determinado ponto da estrela viaja cerca de 10^{-2}m antes de ser absorvido ou espalhado enquanto uma partícula apenas se desloca cerca de 10^{-10}m. Quer isto dizer que os fotões se deslocam mais facilmente de um ponto onde a temperatura é mais alta para onde a temperatura é mais baixa, antes mesmo, de colidirem e transferirem a energia, resultando desta forma um mais eficiente transporte de energia.

Por tal facto, pode dizer-se que a condução, será praticamente desprezível em todas as estrelas que se situam na sequência principal como o nosso Sol, onde a radiação é a forma de transporte mais "importante". É de notar que todo o caminho livre dos fotões é maior que o das partículas, comparativamente, apesar de se tratar de percursos relativamente pequenos.

Isto pode significar que demora algum tempo para que "um" fotão se disperse desde o centro do Sol, até à sua superfície, apesar de à velocidade da luz demorar cerca de 2 segundos a efectuar o mesmo trajecto. De facto pode demonstrar-se que um fotão gerado no centro da estrela é absorvido e reemitido cerca de 10^{22} vezes antes de se escapar da superfície e o tempo que leva a faze-lo será aproximadamente de 3×10^{7} anos. Quer isto dizer que quando se observa a energia radiactiva na superfície do Sol, está a ver-se o resultado de uma reacção nuclear que ocorreu já há alguns milhões de anos.

Relativamente ao ultimo mecanismo de transporte de energia, convecção, corresponde em traços gerais à circulação do gás de regiões mais frias para regiões mais quentes e vice-versa Fig. (2.5-1)

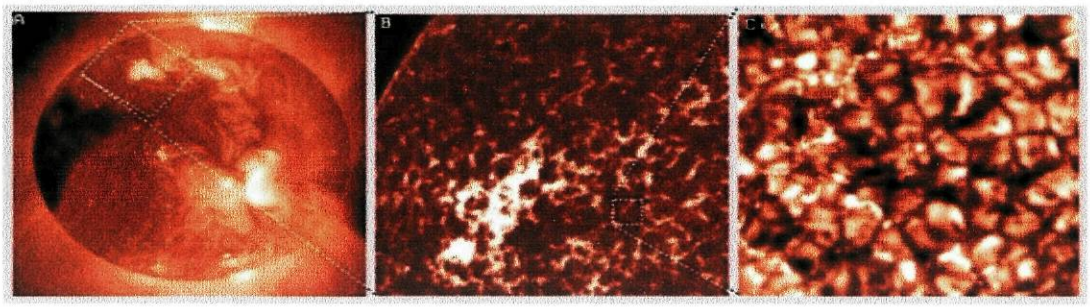


Fig. 2.5-1 Células convectivas da superficie solar.

Estando estabelecido este padrão de circulação a convecção poderá ser um mecanismo de transporte de energia bastante eficiente, pois, para camadas em que a temperatura muda rapidamente, a convecção pode desenvolver-se como o principal meio de transporte de energia. Estas referidas camadas têm o nome de zonas convectivas nas quais os seus constituintes atómicos estão bem misturados pela contínua agitação que aí se verifica. Vamos então de seguida fazer uma abordagem matemática dos transportes convectivos e radiativos de energia, com o objectivo de podermos obter a ultima equação de estrutura.

2.5.1 Critério de Convecção

Tal como já referi a convecção apenas ocorre quando o gradiente de temperatura ultrapassa determinados valores críticos. Então vamos deduzir a expressão que pode permitir obter os valores para os quais a convecção pode acontecer.

Considere-se um elemento de material convectivo, que se situe a uma distância r do centro da estrela Fig. (2.5-2). Pondo por hipótese que este elemento, a que chamo A, por uma

questão de simplificação de escrita, se encontra em equilíbrio térmico e não só, com o meio envolvente, ou seja, com pressão e densidade igual à do meio envolvente.

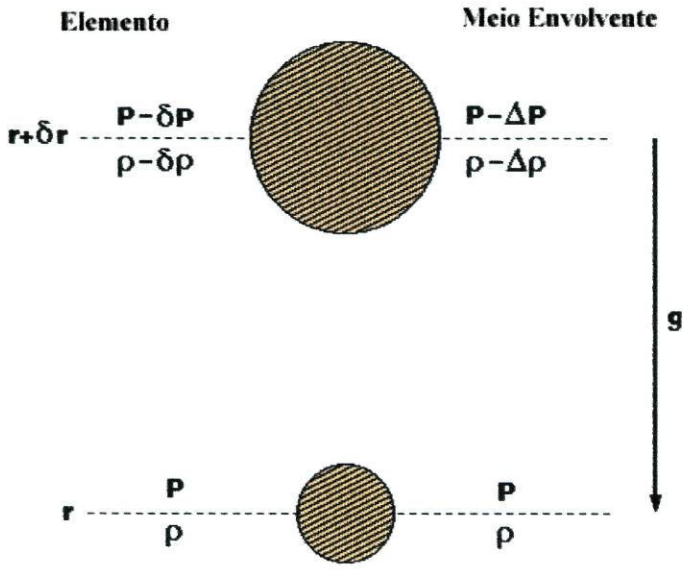


Fig. 2.5-2 Um elemento convectivo

Supondo que A se desloca uma distância δr, para a superfície e expande (B), reduzindo deste modo a sua pressão e densidade. A pressão bem como a densidade de B à distância r + δr do centro, poderá ou não ser a mesma com o meio envolvente. Desta forma define-se δp e $\delta\rho$ como sendo a variação de pressão e densidade que se deu no elemento de convecção e Δp, Δρ a variação da pressão e densidade, respectivamente, do meio envolvente. Considerando que esta "bolha" é mais densa que o meio em $r + \delta r$, então ela terá a tendência a descolar-se para a sua posição original e nesta circunstâncias dir-se-á que o gás está estável contra a convecção.

Mas pelo contrário se B for menos denso, que o meio circundante, então este continuará a subir e dir-se-á que nesta situação o gás está convectivamente instável. Esta instabilidade poderá ser traduzida pela seguinte desigualdade:

$$\rho - \delta\rho < \rho - \Delta\rho \qquad (2.5\text{-}1).$$

Seja ou não satisfeita esta condição ela depende de dois factores:

i) A taxa de variação pela qual o elemento se expande, permitindo a diminuição da pressão exercida no elemento.

ii) A taxa de variação pela qual a densidade do meio circundante diminui com a distância ao centro.

Obtida a condição que permite a ocorrência de convecção, vamos então reescrever a relação (2.5-1) em termos do gradiente de temperatura para que seja "compatível" com as equações de estrutura já obtidas. Para tal consideram-se duas suposições, relativamente ao movimento do elemento:

i) O elemento sobe adiabaticamente, ou seja, move-se o suficientemente rápido de forma a assegurar que não existe trocas de calor com o meio envolvente.

ii) À medida que o elemento sobe, ele não o fará com uma velocidade superior à velocidade do som. Isto quer dizer que durante o movimento as ondas sonoras têm tempo suficiente para dissipar a diferença de pressão entre o elemento e o meio, obtendo dai $\delta p = \Delta p$ a qualquer momento.

A primeira suposição quer dizer que o elemento de convecção deve obedecer à seguinte relação entre a pressão e o volume:

$$PV^{\gamma} = \textbf{const.} \qquad (2.5\text{-}2)$$

em que $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ é o calor especifico (energia em joules necessário para elevar a temperatura de 1 K, 1Kg de matéria) a uma pressão constante dividido pelo calor especifico a um volume constante. De notar que o calor especifico de grande parte das substâncias medidas a pressões constantes, são maiores do que o calor especifico a um volume constante, porque à pressão constante alguma da energia adquirida vai para o aumento do volume do gás e daí ser necessária mais energia para aumentar a temperatura a 1 K.

Sabendo que o volume é inversamente proporcional à densidade ρ então pode-se escrever que:

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}} = \text{const},$$

logo

$$\frac{(P-\delta p)}{(\rho-\delta\rho)^{\gamma}} = \frac{P}{\rho^{\gamma}} \qquad (2.5\text{-}3).$$

Se por outro lado considerar δρ o mais pequeno possível então $(\rho-\delta_\rho)^\gamma$ pode ser exprimido como sendo:

$$(\rho-\delta\rho)^\gamma \cong \rho^\gamma - \gamma\rho^{\gamma-1}\delta\rho \qquad (2.5\text{-}4)$$

combinando as duas ultimas relações (2.5-3) e (2.5-4) obtém-se

$$\delta\rho = \frac{\rho}{\gamma P}\delta p \qquad (2.5\text{-}5).$$

Necessitamos agora de desenvolver as mudanças, ou variações que ocorrem na densidade do meio envolvente Δρ. Se considerar uma subida infinitésima, (δr), pode-se então ter:

$$\Delta\rho = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)\delta r \qquad (2.5\text{-}6)$$

substituindo na condição (2.5-1) as expressões de δρ e Δρ encontrados em (2.5-5) e (2.5-6), obtemos:

$$\left(\frac{\rho}{\gamma P}\right)\delta p < \left(\frac{d\rho}{dr}\right)\delta r \qquad (2.5\text{-}7).$$

Esta última relação poderá ser reescrita, tendo em atenção a segunda consideração, ou seja, o elemento manterá a mesma pressão que o meio envolvente, então se considerar que δr→0, então $\frac{\delta p}{\delta r} = \frac{dp}{dr}$:

$$\left(\frac{\rho}{\gamma P}\right)\left(\frac{dp}{dr}\right) < \left(\frac{d\rho}{dr}\right)$$

dividindo ambos os membros por $\frac{dp}{dr}$ (que é negativo) ter-se-á:

$$\left(\frac{P}{\rho}\right)\left(\frac{d\rho}{dp}\right) < \frac{1}{\gamma} \qquad (2.5\text{-}8).$$

Tendo em atenção a lei dos gases ideais $P = \frac{\Re}{\mu}\rho T$ e logaritmizando esta mesma equação tem-se $Log\ P = Log\ \rho + Log\ T + \text{const.}$, derivando teremos:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \qquad (2.5\text{-}9)$$

combinando as relações (2.5-9) e (2.5-8) obtemos:

$$\frac{P}{T}\frac{dT}{dp} > \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{d\ln T}{d\ln P} > \frac{\gamma-1}{\gamma} \qquad (2.5\text{-}10)$$

que é a chamada **Condição Para a Ocorrência de Convecção**. Esta condição significa em termos gerais que um gás é convectivamente instável se o gradiente de temperatura for maior que o gradiente adiabático. Se a condição para a ocorrência da convecção é satisfeita então movimentos de subida e descida ocorrem em larga escala ao gás. Subida de elementos menos densos que o meio e mais quentes que o meio, enquanto descem elementos mais densos e mais frios que o meio circundante. Serão pois estes movimentos de subidas e descidas que permitem transportar a energia.

Finalmente é de referir que o critério para a convecção obtido em cima pode ser satisfeito de dois modos diferentes. Um será quando a variação do calor especifico γ é muito perto da unidade, outro é quando o gradiente de temperatura é muito alto. Desta forma se uma grande "quantidade" de energia é libertada num pequeno volume no centro da estrela, isto requer um elevado gradiente de temperatura para que se possa transportar essa energia para o exterior. Isto significa que a convecção pode ocorrer no núcleo da estrela. Essas estrelas são conhecidas como tendo núcleos convectivos. Por outro lado noutras camadas mais frias e onde o gás é parcialmente ionizado, a maior parte do calor usado para aumentar a temperatura do gás, vai para a ionização e por esta razão o calor especifico do gás, a um volume constante, é praticamente igual ao calor especifico do gás a uma pressão constante, ou seja, $\gamma \approx 1$. No caso do modelo que irei construir no ***Capítulo 5***, considero um gás totalmente ionizado, ou seja, $\gamma = \frac{5}{3}$.

2.5.2 Transporte Radiativo

Vamos, então, tentar traduzir este último tipo de transporte através de uma análise mais matemática. Nesta equação vamos assumir por momentos que o transporte por Convecção não ocorra e deste modo, podemos escrever finalmente a quarta equação de estrutura que poderá exprimir a taxa de variação da temperatura em função do raio. Numa estrela na qual, repito, a energia é transportada por radiação (isto é ignorando os efeitos da convecção e da condução), a energia transportada por radiação por secção de área por segundo, ou seja, o fluxo de radiação (F_{rad}) poderá ser expresso em termos do gradiente de temperatura e em termos do coeficiente de condutividade λ_{rad}, ou seja,

$$F_{rad} = -\lambda_{rad} \frac{dT}{dr} \qquad (2.5\text{-}11)$$

na qual o sinal "menos" indica que o fluxo de energia vai de zonas mais quentes para zonas mais frias. Assumindo que a energia é transportada por radiação podemos esquecer o índice "*rad*" que aparece na expressão anterior por uma questão de simplificação de escrita.

A condutividade da radiação permite medir a facilidade da corrente de calor. Os astrónomos geralmente preferem trabalhar com o inverso da condutividade, conhecida pela opacidade que permite medir a resistência do material ao fluxo de radiação. Sabendo que a opacidade K é definida por

$$\boldsymbol{K = \frac{4acT^3}{3\rho\lambda}}, \tag{2.5-12}$$

na qual a é a constante da densidade de radiação e c é a velocidade da luz. Desta forma podemos combinar as equações (2.5-1) e (2.5-2) obtendo assim:

$$F_{rad} = -\frac{4acT^3}{3\rho K}\frac{dT}{dr} \tag{2.5-13}$$

sabendo que a luminosidade e o fluxo estão relacionados por

$$L = 4\pi r^2 F \tag{2.5-14}$$

pode-se então escrever

$$\boldsymbol{L = -\frac{16\pi acr^2T^3}{3K\rho}\frac{dT}{dr}}$$

ou seja

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\rho KL}{16\pi r^2 acT^3}$$

ou seja

$$\boldsymbol{\frac{dT}{dr} = \frac{dP}{dr}\frac{T}{P}\nabla_{rad}}, \quad \textbf{Equação do transporte Radiativo} \tag{2.5-15}$$

em que

$$\nabla_{rad} = \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{rad} = -\frac{3}{16\pi acG}\frac{PK}{T^4}\frac{L_r}{m}.$$

Esta equação é conhecida como sendo a equação do transporte radiativo, a partir da qual se pode determinar o gradiente de temperatura. É evidente que o fluxo de energia transportada por radiação só poderá ser determinada se a expressão K for conhecida. Desta forma vamos fazer um breve estudo dessa última propriedade.

i) Absorção Ligado-Ligado

A absorção Ligado-Ligado acontece quando um electrão de um átomo ou ião, se move de uma órbita para outra de energia superior, havendo a absorção de um fotão Fig. (2.5-3). Sendo as energias das duas órbitas de E_1 e E_2, o fotão de frequência ν_{bb} produz a transição se verificar a seguinte relação:

$$E_2 - E_1 = h\,\nu_{bb}.$$

O processo Ligado-Ligado é representado pelas linhas espectrais que se encontram no espectro solar formadas na atmosfera da estrela. No entanto no interior do Sol, este processo Ligado-Ligado não terá uma grande importância, pois os átomos no interior estão altamente ionizados e só uma pequena fracção de átomos contém electrões nas órbitas. Em suma a maior parte dos fotões no interior da estrela estão tão energéticos que terão tendência a causar a absorção Ligado-Livre, que passo a descrever:

ii) Absorção Ligado-Livre

A absorção Ligado-Livre envolve a injecção de um electrão de uma órbita de um átomo ou ião para uma órbita livre aquando da absorção de um fotão Fig. (2.5-3). Um fotão de frequência ν_{bf} converte um electrão "ligado" de energia E_1 para um electrão livre de energia E_3 se

$$E_3 - E_1 = h\,\nu_{bf}.$$

O fotão fornece energia suficiente para libertar o electrão de uma órbita ligada para uma órbita livre de um determinado átomo ou ião.

O processo Ligado-Livre é a razão pela absorção continua da atmosfera. Contudo no interior da estrela, a importância deste processo é também reduzida pois é raro encontrar electrões ligados aos átomos.

iii) Absorção Livre-Livre

A absorção Livre-Livre ocorre quando um electrão livre de energia E_3 absorve um fotão de frequência ν_{ff} e o move para um estado de energia E_4 Fig. (2.5-3) em que

$$E_4 - E_3 = h\,\nu_{ff}.$$

Não existe restrição quando à energia do fotão que induz a transição livre-livre é o processo de absorção continua que ocorre na atmosfera e no interior da estrela.

iv) Espalhamento

Em adição aos processos de absorção temos outro processo em que é possível um fotão ser espalhado, ou seja, redireccionado por um electrão ou átomo Fig. (2.5-3). Pode pensar-se no espalhamento como sendo uma colisão entre duas partículas. Se a energia do fotão satisfizer a relação

$$h\nu << mc^2$$

em que m é a massa da partícula que provoca o espalhamento, esta dificilmente se move pela colisão. Neste caso o fotão pode ser imaginado como tendo sido injectado pela partícula. Todo este processo não corresponde a uma verdadeira absorção da radiação, apenas permitindo diminuir a variação da saída de energia da estrela pelo facto do fotão estar a ser constantemente redireccionado.

Deste modo o parâmetro K que se encontra na equação (2.5-15) é o coeficiente médio de absorção $\overline{K}$ e é geralmente conhecido como opacidade média de Rosseland dada por:

$$\frac{1}{K_{ross}} = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{1}{K_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^{+\infty} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} = \frac{\pi}{4\sigma T^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{K_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \qquad (2.5\text{-}16)$$

em que $B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ é a função de Planck.

Contudo pode aproximar-se a opacidade por uma equação do tipo

$$K = K_0 \rho^\alpha T^\beta \qquad (2.5\text{-}17).$$

Muito embora não seja muito precisa, será suficiente para nos dar uma estimativa da variação da opacidade. α e β são parâmetros e K_0 é uma constante que depende da composição química da estrela e dos processos que contribuem para a opacidade.

A figura (2.5-4) mostra-nos como a equação 2.5-17 se adapta à curva que traduz cálculos detalhados da opacidade de uma estrela com densidade $10^{-1}\ kgm^{-3}$.

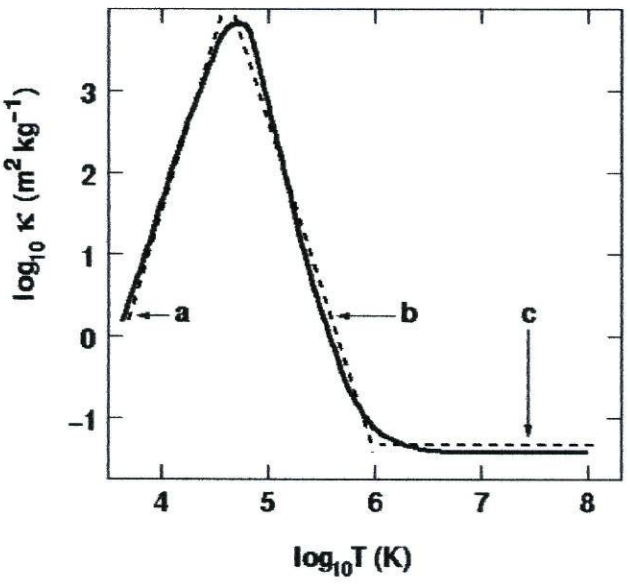


Fig. 2.5-4 No gráfico a linha a cheio mostra-nos a opacidade em função da temperatura para uma estrela de densidade $10^{-1} kgm^{-3}$. A linha a tracejado é uma aproximação dada pela equação 2.5-17 consoante o α e β.

Pelo gráfico anterior verificamos que a opacidade para temperaturas mais baixas, decresce à medida que a temperatura decresce. Nesta situação grande parte dos átomos não estão ionizados. Logo, existe uma pequena quantidade de electrões disponíveis para espalhar a radiação ou para fazerem parte de um processo de absorção livre- livre, pois nesta situação a maioria dos fotões não tem energia suficiente para ionizar os átomos. Então, a aproximação analítica da opacidade será dada por α=1/2 e β = 4, ou seja,

$$K = K_a \rho^{1/2} T^4 \qquad \text{(curva a).}$$

Pode também verificar-se pelo gráfico que a opacidade será máxima em temperaturas intermédias onde os processos de absorção Livre-Livre são muito importantes e por conseguinte aumenta quando diminui a temperatura. Uma boa aproximação analítica da opacidade nesta situação é fornecida por α=1 e β= -7/2, ou seja,

$$K = K_b \rho / T^{3.5} \qquad \text{(Curva b).}$$

Finalmente teremos que a opacidade é baixa para temperaturas elevadas, chegando mesmo a manter-se constante. Este facto deve-se a elevadas temperaturas onde, desta forma, grande parte dos átomos estão totalmente ionizados e os fotões possuem energias elevadas. Neste regime a opacidade dominante será o espalhamento por electrões, que a opacidade se traduz, analiticamente, como sendo uma situação em que $\alpha = \beta = 0$ logo

$$K = K_c \qquad \text{(Curva c).}$$

"When they come to model Heaven
And calculate the stars, how they will wield
The mighty frame, how build, unbuild, contrive
To save appearances, how grid the sphere
With centric and eccentric scribbled o'er
Cycle and epicycle, orb in orb."
John Milton (Paradise Lost)

CAPÍTULO 3

POLITROPOS

Introdução

O caracter estático de uma esfera de gás mantida pela gravidade é descrito pela condição de equilíbrio hidrostático. Na essência a equação de equilíbrio hidrostático estabelece a pressão necessária, exercida em cada ponto da estrela, para compensar o peso de cada camada da estrela. No entanto a própria pressão é determinada pela equação de estado aplicada às condições locais da estrela. Estas considerações ou condicionantes não são suficientes para determinar a estrutura da estrela, pois os valores da pressão que permitem compensar a gravidade de cada camada é obtida por uma infinidade de combinações entre a densidade e a temperatura. Desta forma é evidente a necessidade de mais condições entre a densidade e a temperatura para que se possa descrever outros processos físicos do interior da estrela. Estas referidas condições foram encontradas na produção e transporte de energia.

Contudo, os cientista como Lane, Emden, Kelvin, que cedo se deram conta deste facto encontraram uma condição implícita que os auxiliou na construção de estrutura estelar.

3.1 Relações Politrópicas

Efectivamente a condição que referi antes corresponde a certas condições físicas em que a pressão é explicitada como uma potência da densidade, ou seja:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \qquad (3.1\text{-}1),$$

em que n é o chamado índice politrópico e K a constante politrópica. Esferas de gás em equilíbrio hidrostático na qual a pressão e a densidade estejam relacionadas pela equação (3.1-1) em cada ponto do raio são chamadas de Politropos. De facto esta última forma da equação de estado pode verificar-se em vários exemplos, entre os quais o caso de gases degenerados.

Na situação em que uma estrela é suportada por degeneração completa não relativista, a pressão terá a seguinte relação com a densidade:

$$Pe = \frac{h^2}{20m_e^2 m_a \mu_e}\left(\frac{3}{\pi m_a \mu_e}\right)^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{5}{3}} = K\rho^{\frac{5}{3}} \qquad (3.1.2)$$

em que $K = 1.00036x10^{13}\ \mu_e^{-\frac{5}{3}}$ cgs, ou seja, temos que $P_e = K\rho^{5/3}$ em que $n = \frac{3}{2}$. Enquanto que para um limite relativista a equação de estado será:

$$P_e = \left(\frac{hc}{8ma\mu_e}\right)\left(\frac{3}{\pi m_a \mu_e}\right)^{\frac{1}{3}}\rho^{\frac{4}{3}} = K\rho^{\frac{4}{3}} \qquad (3.1.3)$$

com $K = 1.2435x1015\ \mu_e^{-\frac{4}{3}}$ cgs. Logo teremos novamente uma relação politrópica em que $n = 3$.

Nestas duas situações, a constante K pode ser calculada a partir de constantes naturais. Contudo poderá haver situações em que na relação (3.1.1) a constante K é um parâmetro livre, ou seja, o seu valor poderá variar de estrela para estrela. Sendo nestes casos a relação (3.1-1) puramente matemática sem corresponder a um comportamento termodinâmico real.

Consideremos, por exemplo a situação de um gás ideal e isotermico, $T = T_0$ e com peso médio molecular μ. Então a equação de estado nesta situação será $P = \frac{\Re}{\mu}T_0\rho$, em que $K = \frac{\Re}{\mu}T_0$ e o índice politrópico $n = \infty$. Nesta situação o leitor já deve se ter apercebido que K não é um parâmetro fixo pois dependerá de T_0 e μ, se utilizarmos esta relação politrópica num conjunto de equações de estrutura vemos que possuímos a liberdade para dar qualquer tipo de valor (positivo) a K. Outro exemplo ilustrativo deste facto será pois uma esfera de gás homogéneo em que se pode considerar um caso especial de relação politrópica[5]. Escrevendo a equação (3.1.1) da seguinte forma $\rho = K_1 P^{\frac{n}{n+1}}$ em que $n = 0$, ou seja, $K_1 = \rho$ = constante.

[5] Veja Stellar Structure and Evolution de R Kippenhahn A. Weigert pag.175

Por fim consideremos uma estrela em que o transporte de energia é apenas efectuado por convecção e onde a pressão da radiação é ignorada, estando o gás totalmente ionizado. Nestas circunstâncias o gradiente de temperatura será dado, com boa aproximação por $\nabla_{ad} = \frac{d \ln T}{d \ln P}$, ou seja, pode dizer-se que para toda a estrela $T \approx P^{2/5}$ e para um gás ideal com μ constante $T \cong P/\rho$ então $P^{2/5} \approx P/\rho$ ou seja $\rho \approx P^{3/5} \Leftrightarrow P \approx \rho^{5/3}$, temos novamente uma relação politrópica em que $n = 3/2$ e em que K não é um parâmetro fixo, variando de estrela para estrela.

Mais alguns exemplos poderiam ser apresentados de relações politrópicas, contudo não é objectivo deste capítulo fazer um estudo exaustivo dessas relações. Deste modo vamos dar início ao estudo do modelo politrópico em si.

3.2 Equação de Lane-Endem

Consideremos o sistema formado pelas equações (2.1-1), (2.2-1) e (3.1-1)

i) $\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho;$

ii) $\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho;$

iii) $p = k\rho^{1+\frac{1}{n}} = k\rho^{\gamma}.$

Derivando a equação (3.1-1) obtemos $\frac{dP}{dr} = K\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{d\rho}{dr}\rho^{\frac{1}{n}}$ e substituindo em (2.2-1) temos:

$$K\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho \Leftrightarrow Kn\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{d\rho^{\frac{1}{n}}}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\rho^{\frac{1}{n}}}{dr} = -\frac{G}{K(n+1)}\frac{m}{r^2} \Leftrightarrow$$

$$r^2\frac{d\rho^{\frac{1}{n}}}{dr} = -\frac{G}{k(n+1)}m \Leftrightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\rho^{\frac{1}{n}}}{dr}\right) = -\frac{G}{k(n+1)}\frac{dm}{dr}$$

temos assim a seguinte equação diferencial,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\rho^{\frac{1}{n}}}{dr}\right)=-\frac{G}{k(n+1)}4\pi r^2\rho \qquad (3.2\text{-}1).$$

Para que a sua resolução seja global efectuaremos as seguintes mudanças de variáveis, $\frac{\rho}{\rho_c}=w^n$ e $r=az$, retirando desta forma as dimensões físicas das quantidades envolvidas.

Temos, então, que (3.2-1) se poderá escrever desta forma:

$$\rho_c^{\frac{1}{n}}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dw}{dz}\right)=-\frac{G4\pi}{k(n+1)}a^2z^2\rho_c w^n$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dw}{dz}\right)=-\frac{G4\pi}{k(n+1)}a^2z^2\rho_c^{1+\frac{1}{n}}w^n \quad \frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dw}{dz}\right)=-\frac{G4\pi a^2\rho_c^{1+\frac{1}{n}}}{k(n+1)}z^2w^n.$$

Vamos agora escolher um valor de a de modo a que

$$\frac{G4\pi a^2\rho_c^{1+\frac{1}{n}}}{k(n+1)}=1\Leftrightarrow a=\left[\frac{k(n+1)}{G4\pi\rho_c^{1+\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.2\text{-}2).$$

Então obtemos

$$\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dw}{dz}\right)=z^2w^n\Leftrightarrow\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2dw}{dz}\right)-w^n=0 \qquad (3.2\text{-}3).$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem a que chamamos equação de Lane-Emden em homenagem aos cientistas que a obtiveram pela primeira vez.

3.3 Solução da equação de Lane-Emden

Na presente secção vamos discutir e apresentar algumas das soluções da equação (3.2-3), sendo algumas destas obtidas analiticamente e outras determinadas numericamente com recurso a meios computacionais.

Mas antes de dar início a tal tarefa, gostaria de referir algo que o leitor já deve ter notado. A resolução da equação de Lane-Emden requer a existência de condições fronteiras, que serão obtidas do seguinte modo. A equação (3.2-3) possui uma impossibilidade

matemática, que temos de superar, em $z = 0$,ou seja, $r = 0$. Como para $r = 0$ temos $\rho = \rho_c$, ou seja, $\frac{\rho}{\rho_c} = w^n = 1$ então para $z = 0$ teremos w(0) = 1 e logo pela equação (3.2-3) w'(0) = 0[6].

i) Solução da equação (3.2-3) para *n=0*.

Para *n=0* a equação (3.2-3) terá a seguinte configuração

$$\frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{dw}{dz}\right) = -z^2 \qquad (3.3\text{-}1)$$

integrando obtemos

$$z^2 \frac{dw}{dz} = -\frac{z^3}{3} + c \Leftrightarrow \frac{dw}{dz} = -\frac{z}{3} + \frac{c}{z^2},$$

voltando a integrar em ordem a z temos

$$w = -\frac{z^2}{6} - \frac{C}{z} + D \qquad (3.3\text{-}2).$$

Sendo a equação (3.3-1) uma equação diferencial de 2ª ordem, teremos de utilizar duas condições fronteiras para nos ser possível determinar a solução. Tal corresponde a encontrar o valor de C e D. Então vejamos $\begin{cases} w(0) = 1 \\ \frac{dw}{dz}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1 \\ C = 0 \end{cases}$ então a equação (3.3-2) poderá ser escrita como

$$w(z) = -\frac{z^2}{6} + 1 \qquad (3.3\text{-}3)$$

e em que terá a seguinte representação gráfica:

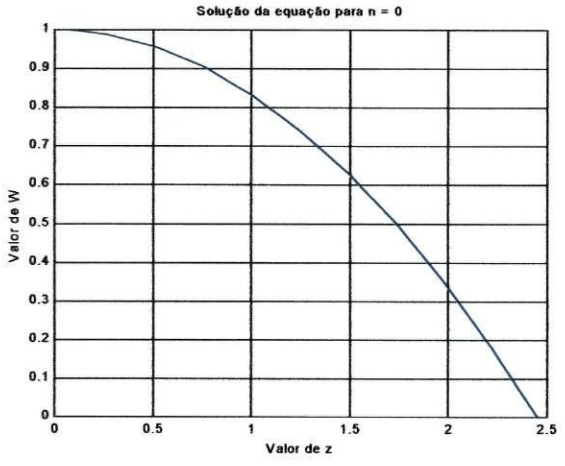


Fig. 3.3-1 Gráfico da solução para $n = 0$ da equação de Lane-Emden.

[6] Veja Stellar Structure and Evolution, R. Kippenhahn e A. Weigert, pag. 176

Será fácil constatar que esta solução apenas terá significado físico para o modelo se, e só se, $w(z) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{z^2}{6}+1 \geq 0 \Leftrightarrow -z^2 \geq -6 \Leftrightarrow z \leq \sqrt{6}$, pelo que $0 \leq z \leq \sqrt{6}$, ou seja, $z_0 = \sqrt{6}$, corresponde á superfície do modelo.

ii) Solução da equação (3.2-3) para *n*=1

Para n=1, a equação (3.2-3) terá uma nova apresentação:

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{dw}{dz}\right) = -w \qquad (3.3\text{-}4),$$

definindo $f = wz$ temos $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}\frac{df}{dz} - \frac{f}{z^2}$; então

$$z^2\frac{dw}{dz} = z\frac{df}{dz} - f \qquad (3.3\text{-}5).$$

Usando (3.3-4) em (3.3-5) obtemos $\frac{d}{dz}\left(z\frac{df}{dz} - f\right) = -fz$, de onde temos que

$$\frac{df}{dz} + z\frac{d^2f}{dz} - \frac{df}{dz} = -fz$$

$$\frac{d^2f}{dz} = -f \qquad (3.3\text{-}6)$$

a solução desta equação diferencial será $f = A\,\mathrm{sen}(z + B)$, ou seja, $w = \frac{A\,\mathrm{sen}(z+B)}{z}$.

Pelas condições fronteira $\begin{cases} w(0) = 1 \\ \frac{dw}{dz}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$ então

$$w(z) = \frac{sen(z)}{z} \qquad (3.3\text{-}7)$$

e a sua representação gráfica será:

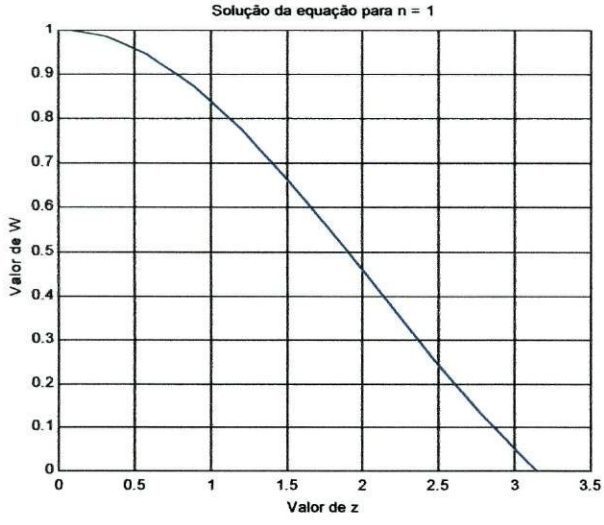


Fig. 3.3-2 Representação gráfica da solução da equação 2.2-2 para n=1.

Esta equação terá significado apenas se $z \in [0,\pi]$, ou seja, $z_1 = \pi$.

iii) A solução da equação de Lane-Emden, para *n*=5

Esta é a terceira solução que possui resolução analítica e que será:

$$w(z) = \frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.3\text{-}8).$$

Facilmente se verifica que esta função não intercepta o eixo dos zz Fig. (3.3-3). Logo será uma situação na qual o raio da estrela é infinito o que desde logo foge á realidade de uma estrela como o Sol. Pode-se mostrar que para $n \geq 5$ teremos sempre soluções da equação (3.2-3) em que o raio é infinito.

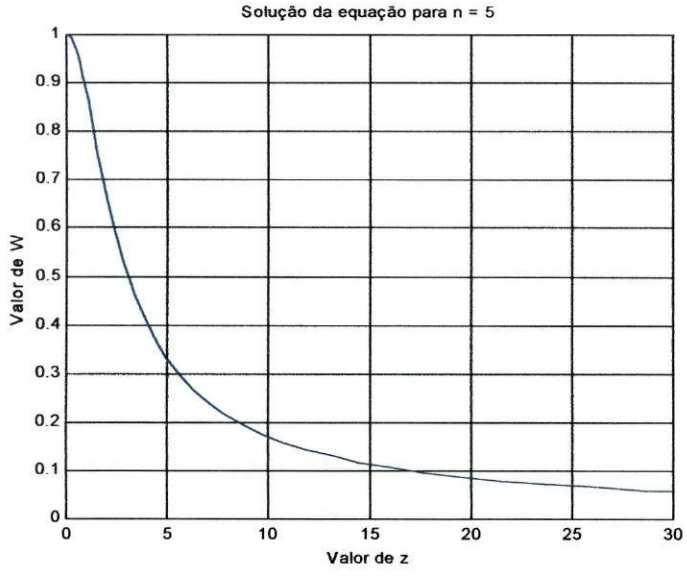
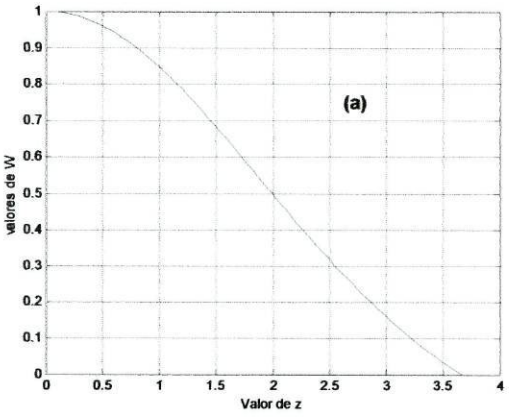
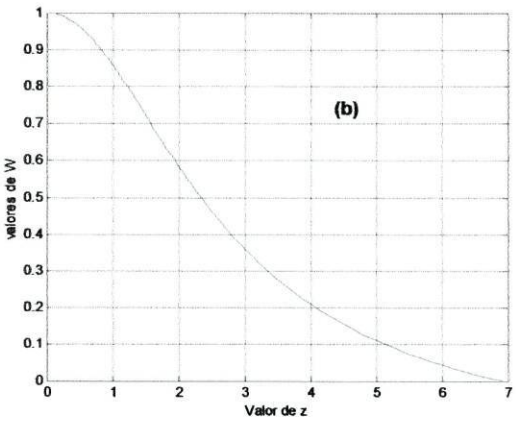


Fig. 3.3-3 Efectivamente para $n=5$ o valor de z_n é infinito.

Aparte das três soluções anteriores conhecidas, de resolução analítica, as soluções a seguir apresentadas, foram obtidas numericamente. Teve-se sempre em consideração que para $z = 0, w(0) = 1$, será uma das condições fronteira. A Fig.(3.3-4) ilustra graficamente as restantes soluções:





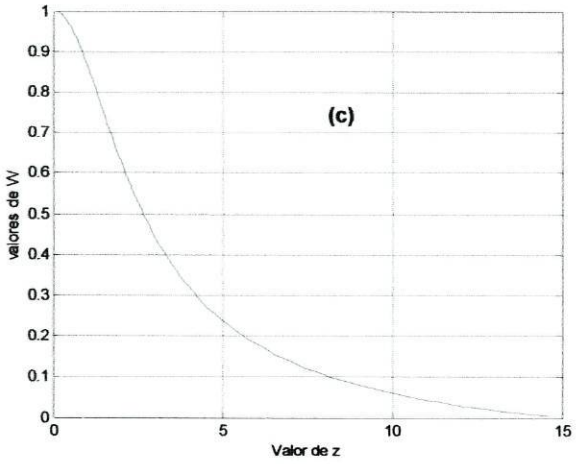


Fig. 3.3-4 Este conjunto de grafico representa mais algumas soluções da equação 3.2-3.

a) Solução para n =1.5
b) Solução para n = 3
c) Solução para n = 4

Para os valores de $n < 5$ a integração é efectuada até ao ponto de z onde $w(z)$ é 0, ou seja, $\rho = 0$. Estes valores correspondem à chamada Superfície Politrópica que denoto por z_n. A seguinte tabela dá-nos alguns valores de z_n e de certas quantidades em função de z_n que permitem construir o modelo de uma estrela como o Sol.

n	z_n	$\frac{dw}{dz}\Big\|_{z_n} = w'_{z_n}$	a_n	b_n	c_n
0	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	1	0.5	0.1194
1	π	-0.3186	3.2873	0.4996	0.3921
1.5	3.6540	-0.2036	5.9827	0.5377	0.7678
3	6.901	-0.0425	54.1329	0.8535	11.0305
4	14.9716	-0.0080	622.822	1.6672	247.8890
5	∞	---	----	-----	------

Tabela 3.3-1: valores numericamente determinados consoante o índice de n

Sendo: $a_n = -\frac{z_n}{3w'(z_n)}$, $b_n = -\frac{1}{(n+1)z_n w'(z_n)}$, $c_n = \frac{1}{4\pi(n+1)(w'(z_n))^2}$.

3.4 Aplicações ao Sol

Na presente secção apresento o modelo politrópico, que em minha opinião melhor se adapta à realidade do Sol, entre os valores de $n \leq 5$. Primeiramente deduzo algumas relações que permitem obter alguns resultados curiosos.

Então pela equação (3.1-1) podemos escrever que

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \, \mathrm{dr}$$

mas com o $\frac{\rho}{\rho_c} = w^n$, temos que

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_c w^n \, \mathrm{dr}$$

$$m(r) = \int_0^z 4\pi a^3 z^2 \rho_c w^n \, dz .$$

$$m(r) = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^z z^2 w^n \, \mathrm{dz}.$$

Pela integração da equação (2.2-2) obtemos:

$$m(r) = 4\pi a^3 \rho_c \left(-z^2 \frac{dw}{dz} \right)_r = 4\pi \rho_c \frac{r^3}{z^3} \left(-z^2 \frac{dw}{dz} \right)_r \Leftrightarrow$$

$$m(r) = 4\pi \rho_c r^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right)_r \qquad (3.4\text{-}1).$$

Esta equação permite determinar a variação da massa em função do raio.

De (3.4-1) e se r=R então sabendo que $r = az \Leftrightarrow \mathrm{R} = \mathrm{az_n}$, temos que

$$M = 4\pi \rho_c R^3 \left(-\frac{1}{z_n} \frac{dw}{dz} \right)_{z=z_n} = \frac{4\pi}{3} \rho_c R^3 a_n^{-1} \qquad (3.4\text{-}2)$$

que nos permite determinar o valor da densidade central consoante a massa total da estrela, o raio R e o valor de n, Tabela (3.3-1).

Introduzindo a ideia de densidade média $\overline{\rho}$, podemos obter outra relação não menos importante, que nos permite determinar a densidade central (ρ_c).

$$\overline{\rho}=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3M}{4\pi R^3}, \text{ logo, } \overline{\rho}=\frac{34\pi\rho_c R^3}{4\pi R^3}\left(-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_n}=3\rho_c\left(-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_n},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{\rho}}{\rho_c}=\left(-\frac{3}{z}\frac{dw}{dz}\right)_{z=z_n}=\frac{1}{a_n} \qquad (3.4\text{-}3).$$

Mas desta equação teremos

$$\rho_c=\overline{\rho}a_n=\frac{3M}{4\pi R^3}\left(-\frac{z_n}{3}\frac{1}{w'}\right)_{z=z_n}\Leftrightarrow$$

$$\rho_c=\frac{M}{4\pi R^3}\left(-\frac{z}{w'(z)}\right)_{z=z_n} \qquad (3.4\text{-}4).$$

Portanto, neste momento, podemos determinar a densidade média $(\overline{\rho})$ e a densidade central (ρ_c). Por outro lado sabendo que $R=az_n \Leftrightarrow a=\frac{R}{z_n}$ vamos encontrar uma expressão que nos permita achar o valor da constante politrópica k.

Como já vimos de (3.2-2) $a^2=\frac{k(n+1)}{G4\pi\rho_c^{1-\frac{1}{n}}}$, ou seja,

$$k(n+1)=a^2 4\pi G\rho_c^{\frac{1}{n}-1}$$

$$=\frac{R^2}{z_n}4\pi G\rho_c^{1-\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{R^2}{z_n}4\pi G\left(\frac{M}{4\pi R^3}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{z}{w'(z)}\right)^{\frac{n-1}{n}}_{z=z_n}$$

$$\Leftrightarrow k=\left[\frac{1}{n+1}\frac{R^2}{z}4\pi G\left(\frac{M}{4\pi R^3}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(-\frac{z}{w'(z)}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]_{z=z_n}$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{G}{n+1}\left[\frac{4\pi}{z^{n+1}(-w'(z))^{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}}_{z=z_n}\left(\frac{M^{n-1}}{R^{n-3}}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (3.4\text{-}5).$$

Vejamos como podemos agora determinar a pressão e a temperatura central. Como já é do conhecimento do leitor, a partir de $\frac{\rho}{\rho_c} = w^n$ obtemos

$$\rho(r) = \rho_c w^n \tag{3.4-6}$$

que nos dá a distribuição da densidade em função do raio.

Da equação (3.1-1) e usando (3.4-6) obtemos a equação que nos permite ter a distribuição da pressão em função de r;

$$P(r) = k\rho^{\frac{n+1}{n}} = k\rho_c^{\frac{n+1}{n}} w^{n+1} = \mathrm{P_c} w^{n+1} \tag{3.4-7}.$$

Já que $P_c = k\rho_c^{\frac{n+1}{n}}$, pois $r = 0 \Rightarrow z = 0$, ou seja, $w(0) = 1$. Assim,

$$P_c = \left[\frac{4\pi G}{n+1}\rho_c^{\frac{n+1}{n}} \frac{R^2}{z^2}\rho_c^{\frac{n+1}{n}}\right]_{z=z_0} = \frac{1}{(n+1)4\pi(-w'(z))}\frac{GM^2}{R^4}$$

$$\Leftrightarrow P_c = c_n \frac{GM^2}{R^4} \tag{3.4-8}.$$

Quanto à temperatura, também se poderá encontrar uma relação em que nos é fornecida a variação da temperatura em função do raio. Tendo em atenção a equação de estado dos gases ideais[7], temos que:

$$T(r) = \frac{\mu}{\Re}\frac{k\rho_c^{\frac{n+1}{n}} w^{n+1}}{\rho_c w^n} = \frac{\mu}{\Re} k \frac{\rho_c^{\frac{1}{n}}}{w^n} w^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$T(r) = \frac{\mu}{\Re} k\rho_c^{\frac{1}{n}} w(z) \tag{3.4-9}$$

logo desta última equação posso retirar a expressão que me dará a temperatura central pois

$$T_c = \frac{\mu_c}{\Re} k\rho_c^{\frac{1}{n}} w(0) = \frac{\mu_c}{\Re} k\rho_c^{\frac{1}{n}}$$

mas por (3.4-5)

$$T_c = \frac{\mu_c}{\Re}\frac{4\pi G}{n+1} a^2 \rho_c^{\frac{n-1}{n}} \rho_c^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\mu_c}{\Re}\frac{4\pi G}{n+1} a^2 \rho_c,$$

considerando (3.4-4) e o facto de $r = az$, temos

[7] $\Re$ Constante dos Gases Ideais; μ, Peso Molecular médio das partículas que constituem o gás e que no caso do Sol tem o valor de $\mu = 0{,}62$, (veja Introduction to Modern Astrophysics de W. Carroll; A. Ostlie pag. 383)

$$T_c = \frac{\mu_c}{\Re}\frac{4\pi G}{n+1}\left(\frac{R}{z}\right)^2_{z=z_n}\left(\frac{M}{4\pi R^3}\right)\left(-\frac{z}{w'}\right)_{z=z_n}$$

$$= \frac{\mu_c}{\Re}\frac{G}{n+1}\frac{M}{R^2}\left(\frac{1}{z}\right)_{z=z_n}\left(-\frac{1}{w'(z)}\right)_{z=z_n}$$

$$= \frac{\mu_c}{\Re}\frac{GM}{R^2}\left(-\frac{1}{(n+1)zw'(z)}\right)_{z=z_n}$$

$$T_c = \mu_c\frac{GM}{\Re R}b_n \qquad (3.4\text{-}10).$$

Por fim vou deduzir uma expressão que me permita obter a variação da luminosidade em função do raio da estrela. Consideremos então a equação (2.4-1) em que $\varepsilon(r) = \varepsilon_0\rho(r)\mathrm{T}^4$ e pela equação (2.4-9), temos então que (2.4-1) se pode reescrever do seguinte modo:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi\varepsilon_0 r^2\rho^2(r)\left(\frac{\mu}{\Re}k\rho_c^{\frac{1}{n}}w\right)^4$$

$$= 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\mu}{\Re}k\right)^4 r^2\rho^2(r)\rho_c^{\frac{4}{n}}w^4$$

$$= 4\pi\varepsilon_0\rho_c^{\frac{4}{n}}\left(\frac{\mu}{\Re}k\right)^4 r^2\rho^2(r)w^4,$$

considerando a equação (2.4-6) temos

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi\varepsilon_0\rho_c^{\frac{4}{n}}\left(\frac{\mu}{\Re}k\right)^4 r^2\left(\rho_c^2 w^{2n}\right)w^4$$

$$= 4\pi\varepsilon_0\rho_c^{\frac{4}{n}}\rho_c^2\left(\frac{\mu}{\Re}k\right)^4 r^2 w^{2n}w^4$$

$$= 4\pi\rho_c^{\frac{4+2n}{n}}\varepsilon_0\left(\frac{\mu}{\Re}k\right)^4 r^2 w^{2n+4},$$

ou seja,

$$\frac{dL}{dr} = \alpha\varepsilon_0 r^2 w^{2n+4} \qquad (3.4\text{-}11),$$

em que $\alpha = 4\pi\rho_c^{\frac{4+2n}{n}}(\frac{\mu}{\Re}k)^4$. Integrando (3.4-11) obtemos

$$L(r) = \alpha\varepsilon_0 \int_0^r r^2 w^{2n+4}(z)dr ,$$

sabendo que $r = az$ então $L(r) = \alpha\varepsilon_0 \int_0^z a^2 z^2 w^{2n+4}(z)adz$, ou seja,

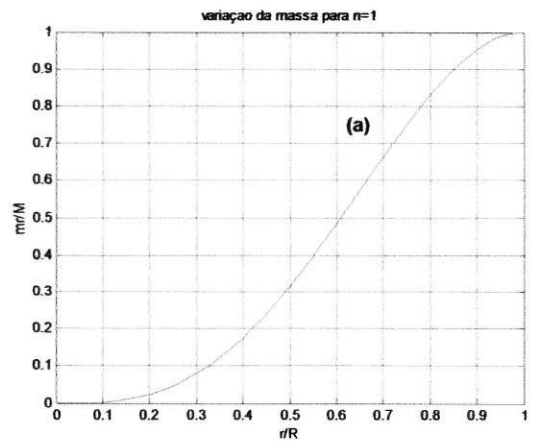
$$L(r) = \alpha\varepsilon_0 a^2 \int_0^z z^2 w^{2n+4} dz \qquad (3.4\text{-}12).$$

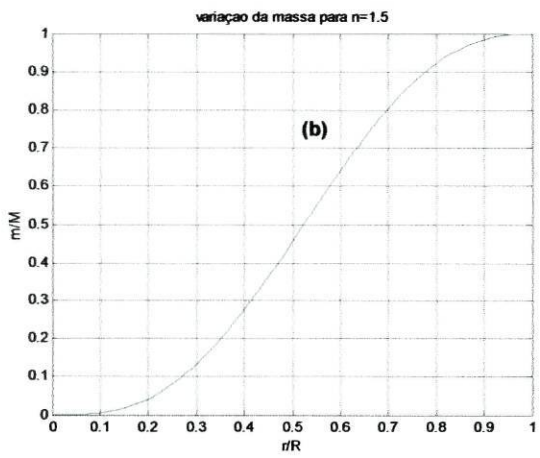
Perante as expressões anteriores, estamos finalmente em condições de apresentar alguns resultados práticos na tabela (3.4-1) e nos gráficos que se seguem. De notar que para os diversos resultados da tabela foram fixados os valores de M (massa) e do R (raio), que são respectivamente de 1.989×10^{33} g e 6.960×10^{10}cm, o que corresponde a $\overline{\rho}$=1.4084 gcm^{-3}

n	*a*	*K*	$\rho_c(gcm^{-3})$	$P_c(dyn/cm^2)$	*Tc (K)*
1	2.2154e+10	2.0579e+14	4.6298	4.4111e+15	7.1050e+6
1.5	1.9049e+10	4.9599e+15	8.4241	8.6374e+15	7.6461e+6
3	1.0092e+10	3.8386e+14	76.2395	1.2409e+17	1.2138e+7
4	4.6488e+09	5.8419e+14	877.1674	2.7888e+18	2.3709e+7

Tabela 3.4-1: Valores obtidos computacionalmente e tendo em atenção as relações anteriores.

Quanto à variação da massa, densidade, pressão e temperatura em função de *r*, obtivemos este conjunto de gráficos, Fig. (3.4-1,2,3,4,5,6).





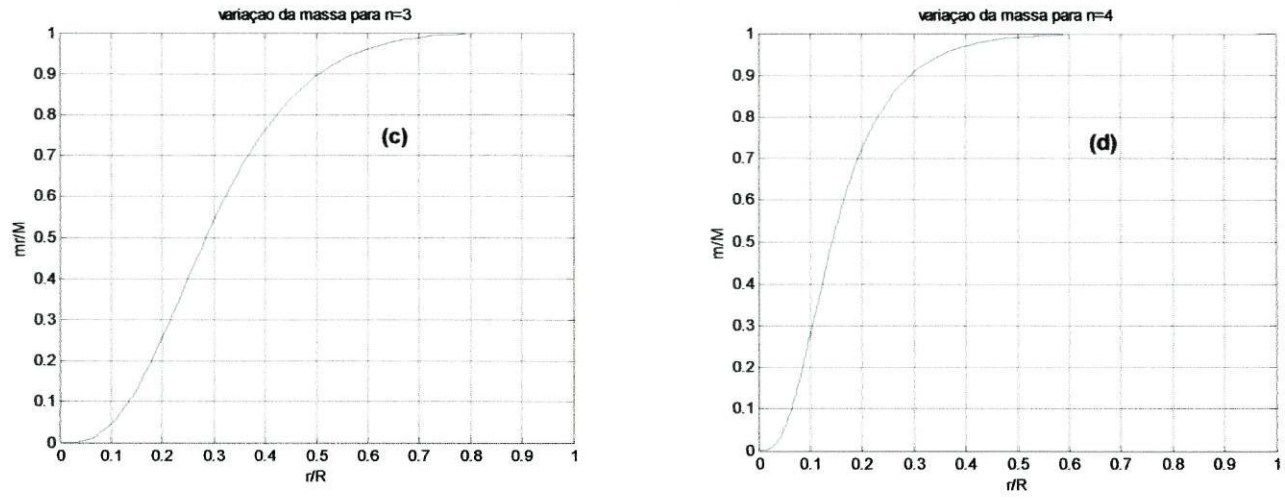


Fig. 3.4-1 Variações da massa em função de *r* para os diversos índices *n*, considerados.

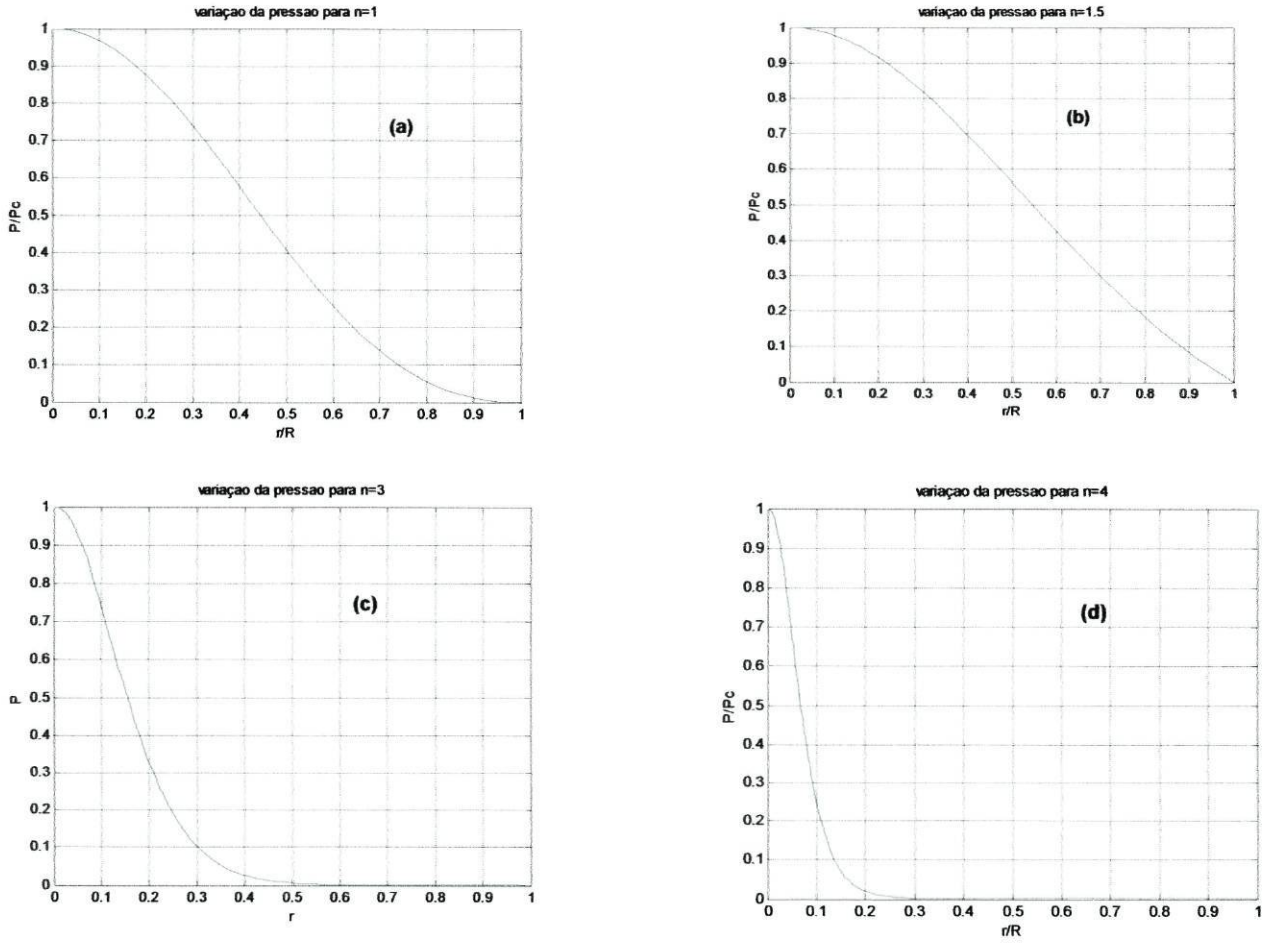


Fig. 3.4-2 Variação da pressão em função de r para os índices *n* =1, 1.5; 3 e 4.

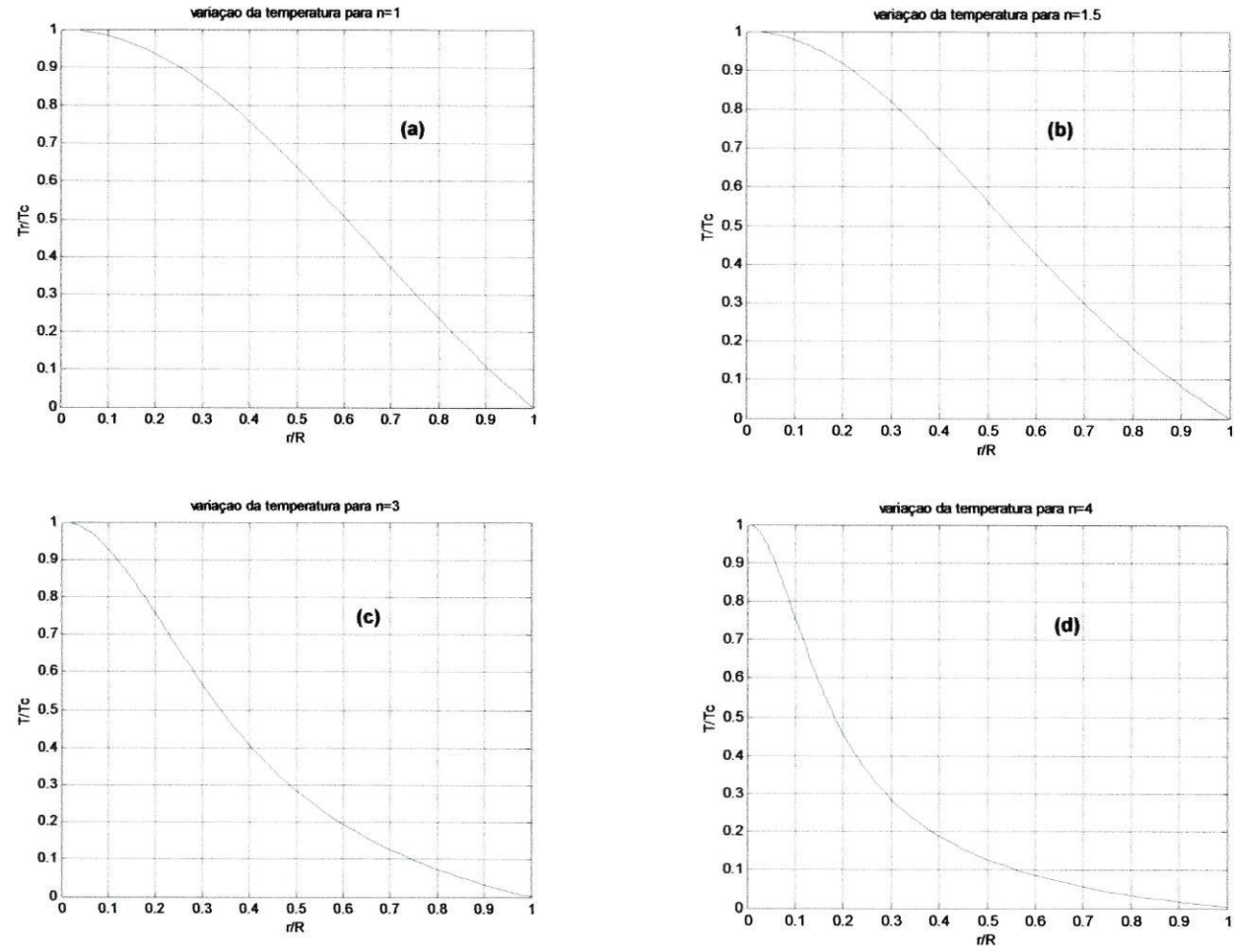
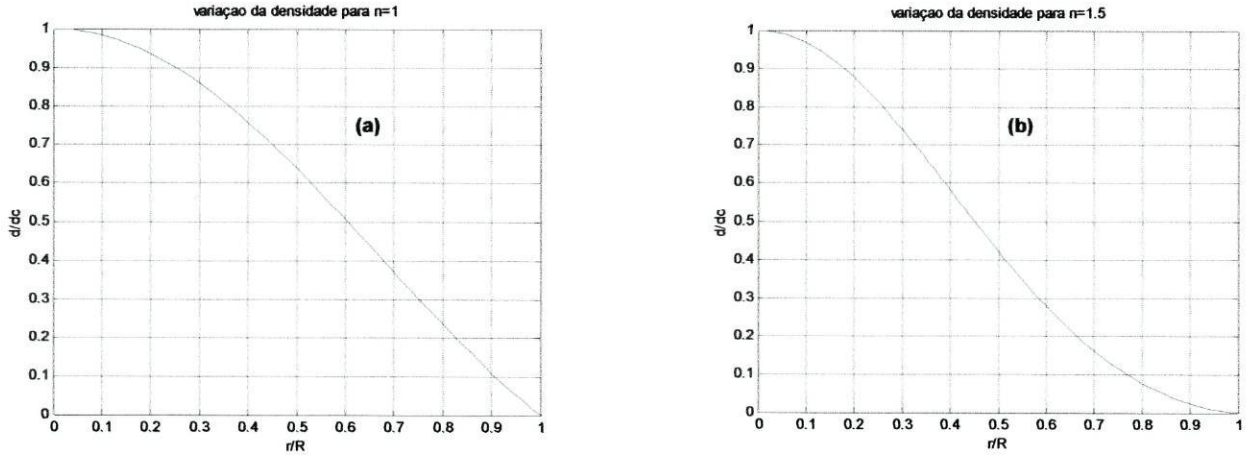


Fig. 3.4-3 Variação da temperatura em função de r para os diversos índices n



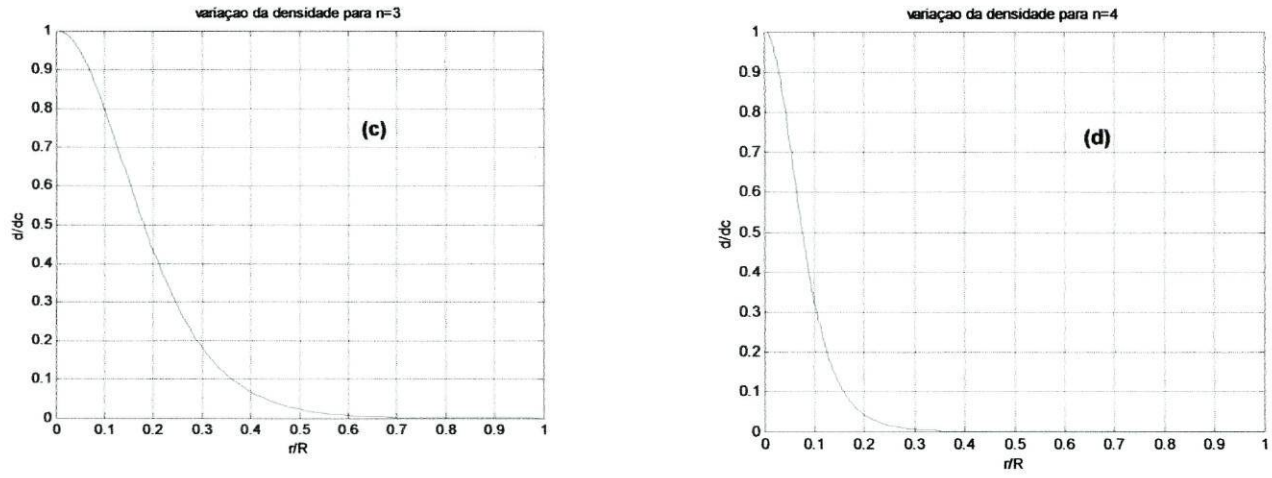


Fig. 3.4-4 Variação da densidade em função do raio para os diversos índices

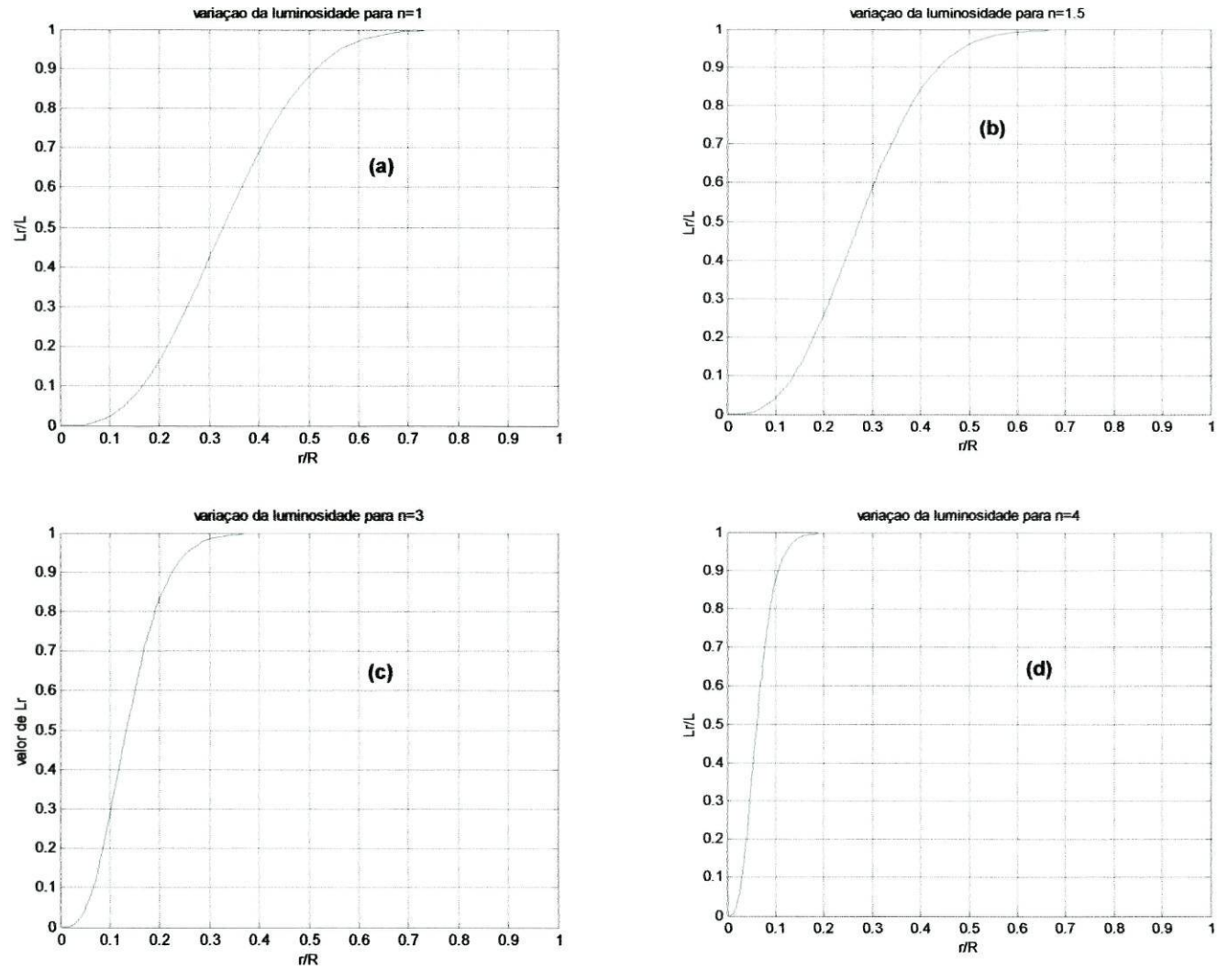


Fig. 3.4-5 Variação da luminosidade em função de r para os diversos índices *n*

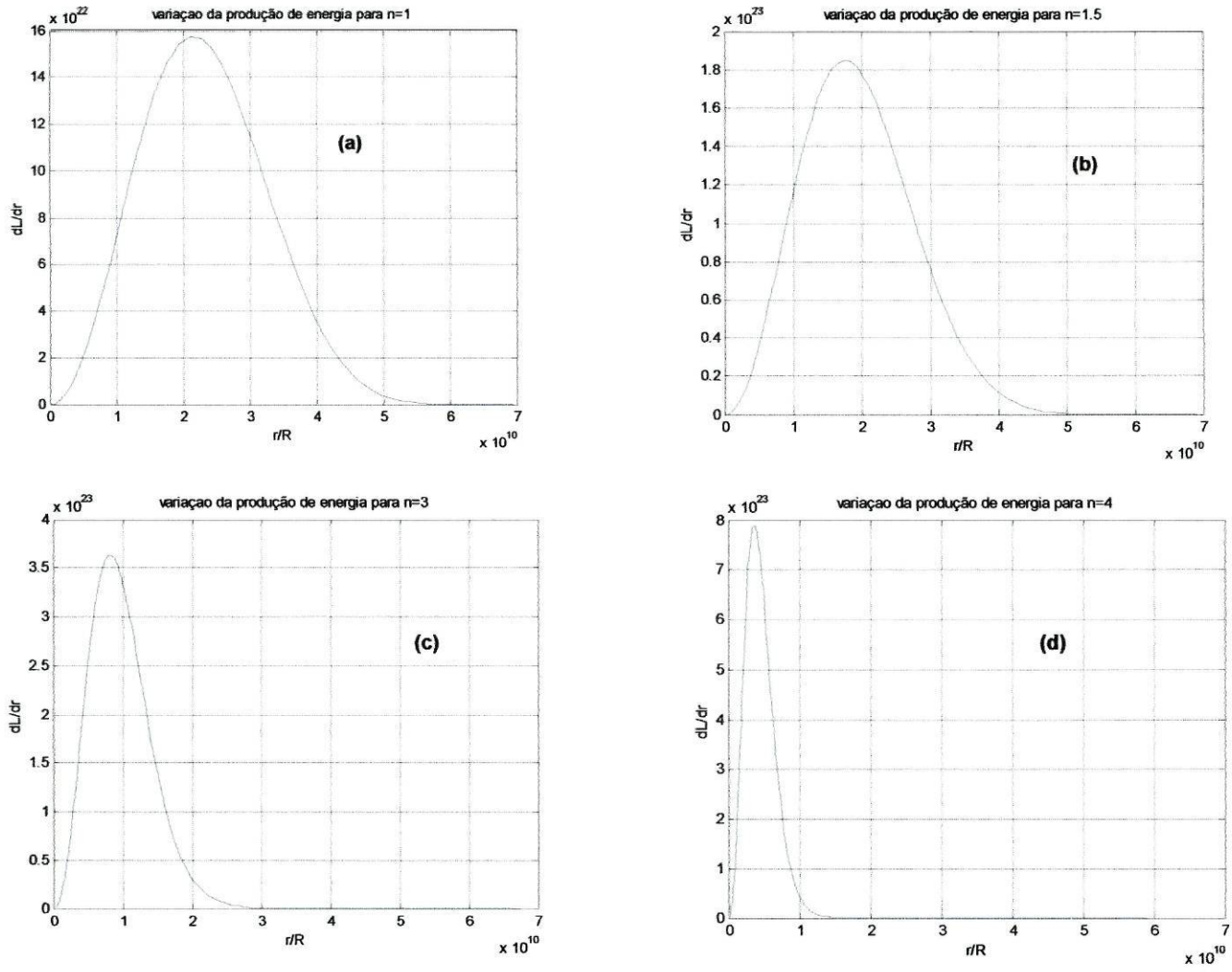


Fig. 3.4-6 Variação da produção de energia em função de *r* para os diversos índices *n*

Perante estes resultados e confrontando-os com resultados obtidos por outros modelos e outras estimativas[8] em que por exemplo $T_c \approx 1.6\times10^7$ k, $\rho_c \approx 100$ g/cm^3, posso afirmar que o modelo politrópico, para *n=3*, será aquele no qual se obtêm valores consideravelmente próximos. O leitor deverá já ter notado que na tabela anterior bem como nos gráficos, não se fez referência aos valores de índice *n=0*. Tal não se deve a qualquer esquecimento, mas sim, a que na análise do modelo para *n=0* requer uma especial atenção. Vejamos: se *n=0* e pela equação (3.4-6), concluo que $\rho(r) = \rho_c$, ou seja, que a densidade é constante em toda a "estrela". Quanto à sua variação de pressão em função de *r*, não podemos fazer uma aplicação

[8] Veja Stellar Structure and Evolution R. Kippeenhahn, A. Weigert $\oint 2$, Pag. 9

directa de $n=0$, na equação (3.4-7), na medida em que iria ter uma impossibilidade matemática pois $\frac{1}{0} \to \infty$. Então tenho de ir por outro processo.

Seja $\rho = \rho_c w^n \Leftrightarrow \rho^{\frac{1}{n}} = \rho_c^{\frac{1}{n}} w$, mas pela equação (3.1-1) podemos tirar que $P_c = k\rho_c^{1+\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \rho_c^{\frac{1}{n}} = \frac{P_c}{k\rho_c}$. Aplicando estes dois últimos resultados à equação (3.1-1) pode-se ter $P = k\rho^{1+\frac{1}{n}} = k\rho\rho^{\frac{1}{n}} = k\rho_c w^n \rho_c^{\frac{1}{n}} w \Leftrightarrow P = P_c w^{n+1}$. Logo desta última equação, para $n=0$ temos $P = P_c w$ e como já se deduziu na secção anterior a solução da equação de Lane-Emden para $n=0$ é $w = 1 - \frac{z^2}{6}$. Assim $P = P_c\left(1 - \frac{z^2}{6}\right)$. Mas como $r = az \Leftrightarrow z = \frac{r}{a}$, então

$$P = P_c\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right).$$

Note-se que $R = az_n \Leftrightarrow R = a\sqrt{6} \Leftrightarrow a = \frac{R}{\sqrt{6}}$,ou seja,

$$P = P_c\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = P_c\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right).$$

Temos que tentar "eliminar" o parâmetro P_c. Tendo em atenção a equação (2.1-1) e (2.2-2) e partindo do principio que ρ é constante, posso afirmar que $m(r) = \frac{4\pi r^3 \rho_c}{3}$ integrando (2.2-1). Concluo que $\rho_c = \frac{3M}{4\pi R^3}$ e que de (2.1-1) se tira a expressão de

$$P_c = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}.$$

Logo

$$P(r) = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \qquad (3.4\text{-}13).$$

Quanto à variação da temperatura ela pode ser obtida da seguinte forma:

$$T(r) = \frac{\mu}{\Re}\frac{P(r)}{\rho(r)} = \frac{\mu}{\Re}\frac{P(r)}{\rho_c} = \frac{\mu}{\Re}\frac{4\pi R^3}{3M}\frac{3MGM^2}{8\pi R^4}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$T(r)=\frac{\mu}{\Re}\frac{GM}{2R}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \qquad (3.4\text{-}14).$$

Estamos finalmente em condições de apresentar os resultados para $n=0$

n	a	$\overline{\rho}$	P_c	T_c
0	2.8414e+10	1.4084	1.3429e+15	7.1105e+6

Tabela 3.4-2: Valores obtidos computacionalmente e tendo atenção as relações anteriores.

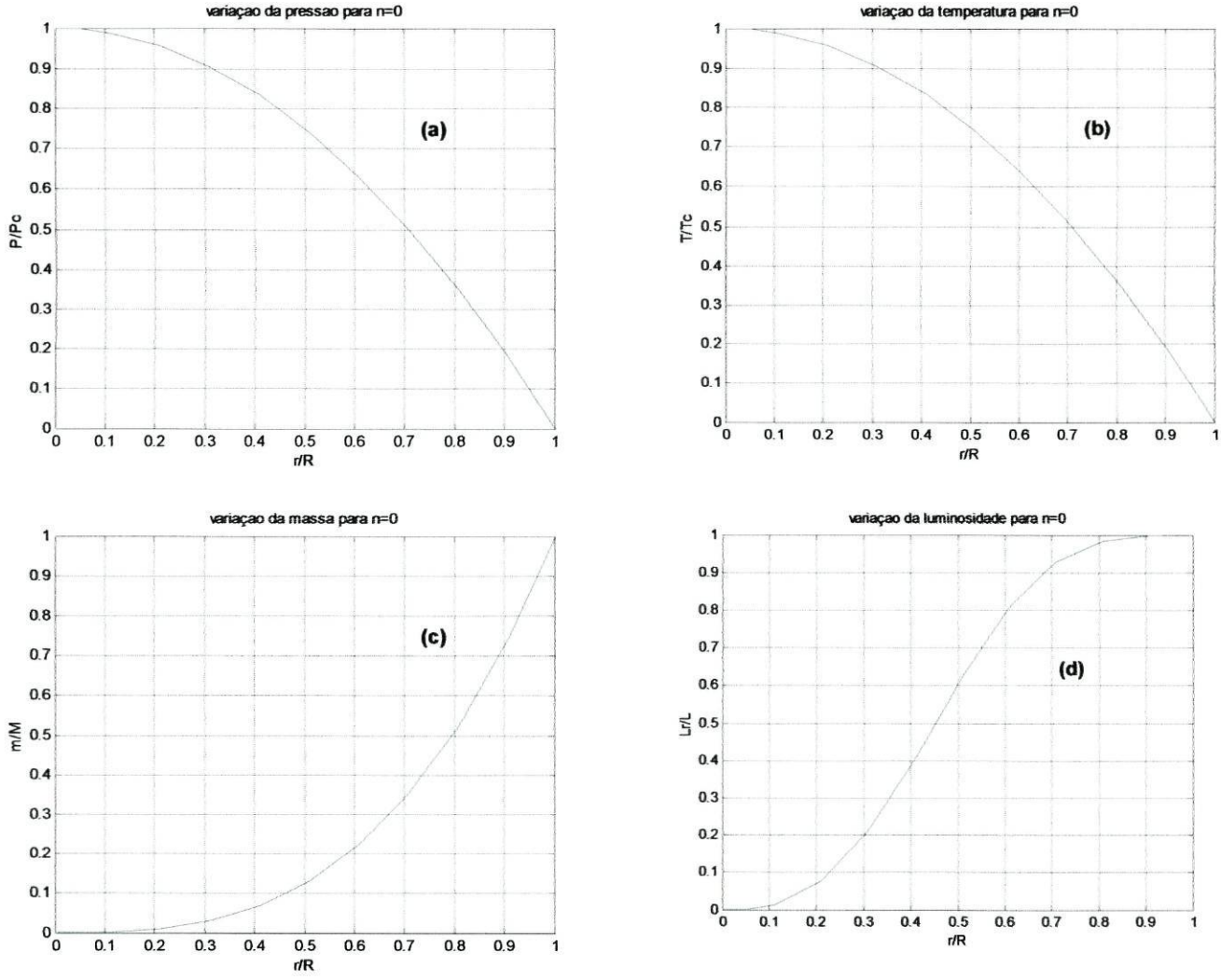


Fig. 3.4-7 Variação da pressão, massa, temperatura, densidade, Produção de energia e luminosidade para $n = 0$

Relativamente ao índice $n=0$, ele descreve uma situação de estrutura interna, muito simplificada. Se repararmos nos gráficos da variação da massa, bem como nos da temperatura, verificamos que são "iguais" aos que foram obtidos nas primeiras estimativas que se fizeram na Secção (2.3). Pode dizer-se que este índice não confere muita "credibilidade", ao objectivo primário que é o de nos aproximarmos o mais possível da realidade, mas confere-lhe a possibilidade de nos dar uma visão generalista do comportamento interior da estrela.

Quanto aos outros índices politrópicos a análise dos respectivos gráficos permite verificar que à medida que o índice n aumenta, começa a haver um contraste acentuado entre duas zonas do modelo.

Vejamos, por exemplo, o caso de $n = 3$, em que a pressão e densidade terão um processo de contínuo decrescimento até 57% do raio. No gráfico da massa Fig. (3.4-1c) constata-se uma tendência de contínuo crescimento até 57% do raio. Para $n = 4$, pois só a partir de 40% do raio é que a densidade e a pressão serão muito pequenas e a partir dessa percentagem é que a massa é constante parando o seu processo de crescimento contínuo. Em vez disso temos $n = 1$ e $n = 1.5$, em que estas distinções não são visíveis, pois os respectivos gráficos possuem um traçado mais uniforme. Deste modo, pode concluir-se que à medida que n aumenta começa-se a distinguir duas zonas às quais serei tentado chamar de "zona central" e "zona periférica". Mediante esta breve análise será interessante levantar a seguinte questão: – "Será que o modelo traduz algum processo de evolução da estrela?"

Esta questão pode ser analisado em duas vertentes; uma mais pedagógica que é evidente ao longo dos diversos gráficos, Fig. (3.4-1,2,3,4) uma " contracção do núcleo" e as respectivas consequências em termos das grandezas físicas como o aumento da densidade, pressão e temperatura, centrais, levando à ideia de que á medida que a estrela envelhece o seu núcleo terá tendência a contrair-se. Em termos científicos a análise é mais restritiva pois pela tabela (3.4-2) o índice $n = 3$ é o único que fornece valores de Tc, ρc e Pc mais aproximados da realidade[9] enquanto o índice 4 apesar de ter uma densidade e pressão mais elevada e ter uma curva mais "concentrada" em zonas centrais, os seus valores não correspondem á realidade de uma estrela como o Sol nem a nenhuma fase de evolução do mesmo, pois a temperatura central é insuficiente para iniciar o processo de queima de hélio em carbono.

Em suma e pela análise do modelo politrópico pode dizer-se que este é uma primeira abordagem do estudo de esferas de gás ou da modelação solar em que se podem fazer certos

[9] Veja Stellar Structure and Evolution de R. Kippenhahn e A. Weigert, pag.179

paralelismo com uma estrela como o nosso Sol. Porém na sua elaboração houve condições que não foram tidas em conta, tais como o transporte e produção de energia.

Em suma dizemos que deste modo o modelo não consegue satisfazer em pleno a ambição que tínhamos de produzir um modelo o mais realista possível.

"The origin of science is in the desire to
Know causes; and the origin of all false
Science and imposture is in the desire to accept
False causes rather than none; or, which
Is the same thing, in the unwillingness to
Acknowledge our own ignorance."
William Hazlitt

CAPÍTULO 4

MODELO RADIATIVO

Introdução

A construção de modelos baseados em procedimentos numéricos foi o objecto de estudo de muitos astrofísicos, por volta dos anos 50. Entre eles salientam-se Harn e Schwarzchild, que foram os pioneiros nessa área. Basicamente dois métodos foram desenvolvidos com o objectivo de se resolver o conjunto de equações ***Capítulo 2***. O trabalho mais antigo utiliza um esquema descrito por Schwarzchild no qual este efectua um conjunto de integrações directas das equações. Por volta dos anos 60 outro método surge e que veio superar o método de Schwarzchild, apresentado por L. Henyey que substitui as equações diferenciais por um conjunto de equações de diferenças finitas.

Ao contrário do modelo politrópico, que apenas é construído com base em duas equações de estrutura (equação de conservação da massa e a equação de equilíbrio hidrostático), o presente modelo vai utilizar as quatro equações desenvolvidas no ***Capítulo 2***, ou seja, condições de estrutura (2.1-1) e (2.2-1); condição de equilíbrio térmico (2.4-1) e por fim a condição de transporte radiativo de energia (2.5-15). Serão pois estas quatro equações diferenciais que vão permitir construir o nosso sistema de partida.

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho\frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon \qquad (4.1).$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dp}{dr}\frac{T}{P}\nabla_{rad}$$

De notar que a equação $\frac{dT}{dr} = \frac{dp}{dr}\frac{T}{P}\nabla_{rad}$, poderá ter outra "forma" que corresponde ao transporte convectivo, já desenvolvida na Secção (2.5) e que será utilizada mais adiante ***Capítulo 5***. A somar ao conjunto de equações (4.1), têm-se outras três relações explicitas que permitiram por um lado caracterizar com mais pormenor o comportamento do gás, que compõe o interior da estrela e por outro efectuar a ligação matemática entre as diversas equações do sistema (4.1). São estas as equações:

$$P = \frac{\Re}{\mu}\rho T$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^{\eta} \qquad (4.2)$$

$$k = k_0 \rho^{\alpha} T^{-\beta}$$

4.1 Condições Fronteira

Antes de dar início à resolução do sistema (4.1), gostaria de referir que o sistema (4.1), requer o conhecimento de quatro condições fronteiras, para que a sua resolução seja possível. Duas delas são obtidas na superfície e facilmente se podem deduzir, na medida em que como já se viu no ***Capítulo 3*** a temperatura e a pressão decrescem rapidamente na superfície, ou seja, $T(R) = P(R) = 0$. As outras duas condições serão obtidas no centro ($r = 0$), ou seja, temos que $m(0) = 0$ e logo se pode deduzir que a produção de energia será nula, ou seja, $L(0) = 0$. Desta forma temos um primeiro conjunto de condições fronteira que descrevemos deste modo:

$$m(0) = 0$$
$$P(R) = 0 \qquad (4.1\text{-}1)$$
$$L(0) = 0$$
$$T(R) = 0$$

Como já se deve ter reparado o facto de se terem apenas duas condições para cada "lado" da estrela, poderá trazer alguns problemas na resolução do sistema. Assim, se iniciarmos a integração do sistema a partir da superfície para o centro, verificamos que á medida que r se aproxima de zero as soluções começam a divergir pois r encontra-se em denominador em (2.2-1) e (2.5-15), ou seja, quanto mais nos aproximamos de zero a temperatura e a pressão assumem valores infinitos. Se por outro lado a integração for feita do centro para a superfície, propondo determinados valores para *P(0)* e *T(0)* volta-se a encontrar o mesmo problema, pois aí a temperatura e a pressão são nulas. Desta forma numa primeira análise não se consegue encontrar a solução do sistema (4.1). No entanto existe um método que permite solucionar este problema, método este que foi inicialmente utilizado por M. Schwarzschild e que passamos a desenvolver na secção seguinte.

4.2 Mudança de Variáveis

M. Schwarzschild descobriu que o trabalho computacional na resolução do sistema anterior seria bastante reduzido se fosse introduzido um conjunto de variáveis adimensionais que permitissem reescrever o sistema (4.1).

Com a introdução destas variáveis será possível obter o mesmo conhecimento relativamente à variação das quantidades físicas em função do raio da estrela, ou seja, não há perca de informação com esta mudança de variáveis. Desta forma e tendo em conta que estamos a trabalhar com estrelas homogéneas, ou seja, não se verifica variação de μ com o raio, podemos então apresentar as novas variáveis adimensionais:

$$x = \frac{r}{R}$$

$$y_1 = \frac{m}{M}$$

$$y_2 = \frac{P}{P_0} \qquad (4.2\text{-}1)$$

$$y_3 = \frac{L_r}{L}$$

$$y_4 = \frac{T}{T_0}$$

em que T_0 e P_0 serão escolhidos de modo a permitirem simplificar as equações do sistema (4.1), ou seja,

$$T_0 = \frac{\mu GM}{R\Re} \text{ e } P_0 = \frac{GM^2}{4\pi R^4}.$$

Deste modo poder-se-á deduzir um novo sistema de equações diferenciais, considerando o sistema (4.1) e as relações em (4.2-1).

Sabendo que $\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$ então $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ tendo em atenção por (4.2-1) que $r = Rx$, ou seja, $dr = Rdx$ então

$$dm = 4\pi x^2 R^2 \rho R dx \qquad (4.2\text{-}2)$$

como $y_1 = \frac{m}{M}$, logo $dm = \mathrm{M} dy_1$, aplicando (4.2-2) reescrevemos a equação (4.2-2) do seguinte modo

$$4\pi x^2 R^2 \rho R dx = \mathrm{M} dy_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{4\pi R^3}{\mathrm{M}} \rho x^2 \qquad (4.2\text{-}3).$$

Da equação de estado sabe-se que $\rho = \frac{\mu}{\Re}\frac{P}{\mathrm{T}}$, e como $y_2 = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}$ e $y_4 = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0}$,

então

$$\rho = \frac{\mu}{\Re}\frac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{T}_0}\frac{y_2}{y_4},$$

ou seja,

$$\rho = \frac{\mathrm{M}}{4\pi R^3}\frac{y_2}{y_4} \qquad (4.2\text{-}4)$$

substituindo a relação (4.2-4) em (4.2-3) terei finalmente

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_2}{y_4} x^2 \qquad (4.2\text{-}5).$$

Relativamente à equação $\frac{d\mathrm{P}}{dr} = -\rho\frac{Gm}{r^2}$, esta pode ser reescrita da seguinte forma, tendo em consideração que $y_1 = \frac{m}{\mathrm{M}}$; $r = Rx$ e $dr = Rdx$, ou seja,

$$dp = -\rho\frac{GMy_1}{Rx^2}dx \qquad (4.2\text{-}6)$$

mas da equação $y_2 = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}$ sabe-se que $dp = \mathrm{P}_0 dy_2$, então

$$-\rho \frac{GMy_1}{Rx^2} dx = \mathrm{P}_0 dy_2$$

$$-\frac{M}{4\pi R^3} \frac{y_2}{y_4} \frac{GMy_1}{Rx^2} dx = \frac{GM^2}{4\pi R^4} dy_2,$$

ou seja,

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_2 y_1}{y_4 x^2} \qquad (4.2\text{-}7).$$

De igual modo mas agora pegando na equação $\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon$ teremos que $dL = 4\pi r^2 \rho \varepsilon dr$, ou seja

$$dL = 4\pi R^2 x^2 \rho \varepsilon R dx \qquad (4.2\text{-}8)$$

sabendo que $y_3 = \frac{L_r}{L}$, então $dL_r = L dy_3$, logo e tendo em consideração (4.2-8) temos que

$$4\pi R^2 x^2 \rho \varepsilon R dx = L dy_3$$

$$4\pi R^3 \frac{\mathrm{M}}{4\pi R^3} x^2 \frac{y_2}{y_4} \varepsilon dx = L dy_3$$

mas considerando $\varepsilon = \varepsilon_0 \rho \mathrm{T}^\eta$,

$$\mathrm{M} x^2 \frac{y_2}{y_4} \varepsilon_0 \rho \mathrm{T}^\eta dx = L dy_3$$

$$\mathrm{M} \varepsilon_0 \frac{\mathrm{M}}{4\pi R^3} \frac{y_2^2}{y_4^2} x^2 \mathrm{T}^\eta dx = L dy_3;$$

tendo em atenção que $y_4 = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0}$ vem que

$$\frac{\mathrm{M}^2 \varepsilon_0}{4\pi R^3} \frac{y_2^2}{y_4^2} x^2 (\mathrm{T}_0 y_4)^\eta = L \frac{dy_3}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{M}^2 \varepsilon_0}{4\pi R^3} \mathrm{T}_0{}^\eta \frac{y_2^2 y_4^\eta}{y_4^2} x^2 = L \frac{dy_3}{dx},$$

ou seja, $\frac{dy_3}{dx} = \frac{\mathrm{M}^2 \varepsilon_0}{4\pi R^3 L} \mathrm{T}_0^\eta y_2^2 y_4^{\eta-2} x^2$ em que $\mathrm{T}_0 = \frac{\mu GM}{R\Re_g}$, então

$$\frac{dy_3}{dx} = D y_2^2 y_4^{\eta-2} x^2 \qquad (4.2\text{-}9)$$

em que a constante $D = \dfrac{\varepsilon_0 G^{\eta}}{4\pi\Re_g^{\eta}} \mu^{\eta} \dfrac{M^{\eta+2}}{LR^{\eta+3}}$.

Por fim temos a dedução da última equação que compõe o novo sistema. Sabendo que $\dfrac{dt}{dr} = \nabla \dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{P}} \dfrac{dP}{dr}$, ou seja, $\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{3}{16\pi ac} \dfrac{KL_r\rho}{r^2T^3}$. Considerando algumas das relações anteriores tais como $y_4 = \dfrac{T}{T_0}$; $y_2 = \dfrac{P}{P_0}$; $y_1 = \dfrac{m}{M}$; $\rho = \dfrac{M}{4\pi R^3}\dfrac{y_2}{y_4}$ e $K = K_0\rho^{\alpha}T^{-\beta}$ temos

$$dT = -\frac{3}{16\pi ac}\frac{KL_r\rho}{r^2T^3}dr$$

$$= -\frac{3}{16\pi ac}\frac{KL_r\rho}{x^2R\mathrm{T}^3}dx$$

$$= -\frac{3k_0L}{16\pi ac}\rho^{\alpha}\mathrm{T}^{-\beta}y_3\frac{\rho}{x^2R\mathrm{T}^3}dx$$

$$= -\frac{3k_0L}{16\pi ac}\left(\frac{M}{4\pi\Re^3}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{y_2}{y_4}\right)^{\alpha+1}(T_0y_4)^{-\beta-3}y_3\frac{1}{x^2}dx \qquad (4.2\text{-}10)$$

então pela relação $dT = T_0dy_4$ pode-se escrever que

$$-\frac{3K_oL}{16\pi ac}\left(\frac{M}{4\pi\Re^3}\right)^{\alpha+1}T_0^{-\beta-3}\frac{y_2^{\alpha+1}y_3}{y_4^{\alpha+\beta+4}x^2}dx = T_0dy_4$$

$$\frac{dy_4}{dx} = -\frac{3K_0L}{16\pi ac}\left(\frac{M}{4\pi R^3}\right)^{\alpha+1}T_0^{-\beta-4}\frac{y_2^{\alpha+1}y_3}{y_4^{\alpha+\beta+4}x^2},$$

ou seja,

$$\frac{dy_4}{dx} = -C\frac{y_3}{x^2}\frac{y_2^{\alpha+1}}{y_4^{\alpha+\beta+4}} \qquad (4.2\text{-}11)$$

em que a constante $C = \dfrac{3k_0L}{16\pi ac}\left(\dfrac{M}{4\pi R^3}\right)^{\alpha+1}\left(\dfrac{\mu GM}{R\Re_g}\right)^{-\beta-4}$.

Estamos então desta forma em condições de apresentar o novo sistema de equações de estrutura constituído pelas equações (4.2-5); (4.2-7); (4.2-9) e (4.2-11).

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_2}{y_4}x^2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_2y_1}{y_4x^2} \qquad (4.2\text{-}12)$$

$$\frac{dy_3}{dx} = Dy_2^2 y_3^{\eta-2} x^2$$

$$\frac{dy_4}{dx} = -C\frac{y_3}{x^2}\frac{y_2^{\alpha+1}}{y_4^{\alpha+\beta+4}}$$

Serão então estas novas equações diferenciais que constituírão o sistema que permitirá calcular o modelo de estrutura da estrela. De notar o surgimento no sistema anterior de duas constantes, C e D que dependem de α, β, η, k_0 e ε_0 pois estamos a trabalhar no caso do nosso Sol, em que R, M e L são fixos e conhecidos.

À semelhança do primeiro sistema teremos que definir um novo conjunto de condições fronteiras. Estas facilmente se obtém, tendo em consideração (4.2-1) e a Secção (4.1), dado $r = R$, logo $x = 1$ e ter-se-á $y_2 = y_4 = 0$ e $y_1 = y_3 = 1$, no centro ($x = 0$) ter-se-á $y_1 = y_3 = 0$ e também $y_2 = y_{2c}$; $y_4 = y_{4c}$ Deste modo para as quatro funções que desconhecemos temos seis condições a que deverão obedecer. Portanto a integração do sistema da superfície para o centro e vice-versa definirá uma possível solução estabelecendo um conjunto de valores C, y_{2c}, D e y_{4c}. Esta solução deverá estar em consonância com as condições fronteiras no centro.

Logo se conclui que para as soluções do sistema verificarem a totalidade das condições fronteiras, as constantes (C, y_{2c}, D, y_{4c}) terão que ser únicas, quer isto dizer que para α, β e η fixos este conjunto de constantes definirão uma única solução do sistema (4.2-12). Visto e resolvido o problema das condições fronteira, tem-se agora de criar um método numérico que possa encontrar este conjunto de constantes e desta forma a solução do sistema (4.2-12). Será essa então a tarefa da próxima secção.

4.3 Método Numérico

Antes de discutir em detalhe os resultados do modelo, apresento o método numérico que permitira resolver o sistema (4.2-12). Como antes já referi, Schwarzchild apresentou um algoritmo bastante engenhoso, que permite resolver o sistema anterior e o cujo método consiste em integrar as equações do sistema da superfície para o centro e vice-versa, sendo estas soluções dependentes de (C, y_{2c}, D, y_{4c}). O problema poder-se-á resumir a encontrar os valores correctos das constantes anteriores de modo a obter-se a solução do sistema mediante as condições fronteira.

Desta forma, o que se deve fazer será para um determinado ponto x_i encontrar as constantes de modo a que por exemplo y_2^{i0} seja igual a y_2^{i1}, ou seja, a solução y_2 deverá ser uma função continua em todo os valores de x. De notar que os índices $(i1)$ e $(i0)$ indicam a integração da superfície para o centro e do centro para a superfície respectivamente.

Então como se processa o desenvolvimento do algoritmo que permitirá obter as soluções? Devo contudo referir que a sua apresentação será feita por etapas, o mais detalhadamente possível, para melhor compreensão de como se processa este mecanismo numérico.

i) Desenvolvimento no centro e na superfície

Na integração a partir do centro, tal como a integração a partir da superfície, tem que se ter em conta que estas não se podem processar para $x = 0$ e $x = 1$, respectivamente, dado as equações de (4.2-12) não serem aplicáveis nestes pontos. Por conseguinte tem que se iniciar as referidas integrações a uma pequena distância dos pontos das condições fronteiras que tomei como $x = 0.001$ para o centro e $x = 0.999$ para a superfície.

De igual modo devem-se definir os valores, ou as equações que nos podem dar o valor das soluções nos pontos antes referidos. Sendo assim para o centro[10]:

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_c r^3$$

$$P = P_c - \frac{2}{3}\pi G\rho_c^2 r^2$$

$$L_r = \frac{4}{3}\pi\rho_c\varepsilon_c r^3 \qquad (4.3\text{-}1)$$

$$T = T_c - \frac{4}{15}\pi G\frac{T_c\rho_c^2}{P_c}r^2$$

em que ρ_c, T_c, P_c, ε_c representam a densidade, temperatura, pressão e emissidade no centro.

No entanto as relações anteriores poderam ser reescritas tendo em consideração as relações (4.2-1) obtendo destas então os valores y_1, y_2, y_3, y_4 perto do centro.

$$y_1 = \frac{y_{2c}x^3}{3y_{4c}}$$

[10] Veja Structure and evolution of the stars de Martin Schawarchild pag.114 e 115.

$$y_2 = y_{2c} - \frac{(y_{2c})^2}{3(y_{4c})^2}x^2$$

$$y_3 = D\frac{(y_{2c})^2(y_{4c})^{\eta-2}}{3}x^3 \qquad (4.3\text{-}2)$$

$$y_4 = y_{4c} - DC\frac{(y_{2c})^{\alpha+3}}{3(y_{4c})^{\alpha+\beta-\eta+6}}x^2$$

Relativamente à integração a partir da superfície, devemos ter em conta duas situações. Uma é de que tanto a massa m, como a luminosidade L_r, na superfície assumirão, à partida, um valor fixo, ou seja, tendo em atenção as condições fronteiras $y_1 = y_3 = 1$ em $x = 0.999$, estas funções não irão criar qualquer impossibilidade matemática. Outra é a de que y_2 e y_4, são funções que se encontram em denominador e deste modo irão criar alguns problemas matemáticos. Isto significa que teremos de efectuar algumas técnicas matemáticos, de modo a conseguir solucionar este problema. Tendo em consideração (4.2-12) temos:

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_1 y_2}{y_4 x^2}$$

$$\frac{dy_4}{dx} = -C\frac{y_3 y_2^{\alpha+1}}{y_4^{\alpha+\beta+4}x^2}$$

logo

$$\frac{dy_2}{dy_4} = \frac{y_1 y_2}{y_4 x^2}\frac{x^2 y_4^{\alpha+\beta+4}}{C y_3 y_2^{\alpha+1}} = \frac{y_1}{y_3}\frac{1}{C}\frac{y_4^{\alpha+\beta+3}}{y_2^{\alpha}} \qquad (4.3\text{-}3)$$

sabendo que $y_1 = y_3 = 1$, então

$$\frac{dy_2}{dy_4} = \frac{y_4^{\alpha+\beta+3}}{y_2^{\alpha} C} \qquad (4.3\text{-}4)$$

integrando a equação obtém-se

$$\frac{1}{\alpha+1}y_2^{\alpha+1} = \frac{1}{C}\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4}y_4^{\alpha+\beta+4},$$

ou seja,

$$y_2^{\alpha+1} = \frac{1}{C}\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4}y_4^{\alpha+\beta+4} \qquad (4.3\text{-}4)$$

substituindo esta ultima relação em $\frac{dy_4}{dx} = -C\frac{y_3 y_2^{\alpha+1}}{y_4^{\alpha+\beta+4}x^2}$ teremos

$$\frac{dy_4}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4} \tag{4.3-5}$$

então

$$\int_x^1 \frac{dy_4}{dx} = \int_x^1 -\frac{1}{x^2}\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4}$$

como $y_4(1) = 0$, logo

$$y_4 = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4}\left(\frac{1-x}{x}\right) \tag{4.3-6}$$

de igual forma se obtêm

$$y_2 = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4}\right)^{\frac{\alpha+\beta+5}{\alpha+1}} C^{-\frac{1}{\alpha+1}}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{\alpha+\beta+4}{\alpha+1}} \tag{4.3-7}.$$

Desta forma se obtém as relações que permitirão calcular o valor da temperatura e da pressão em $x = 0.999$

ii) Código Numérico

Temos agora todas as ferramentas para que se possa descrever o algoritmo numérico que irá construir os gráficos das diversas soluções. Com o objectivo de simplificar a escrita e para melhor compreensão do programa[11] observe-se:

$(f_1; f_2; f_3; f_4) = (y_1; y_2; y_3; y_4)$

$(C_1; C_2; C_3; C_4) = (C; y_{2c}; D; y_{4c})$

Para valores fixos de α, β e η atribuímos um primeiro conjunto de valores a C_{i0}, que na prática não correspondem a uma solução correcta. Assim iniciamos a integração do sistema (4.2-12) do centro para o exterior até ao ponto 0.2 onde se obtém f_{i0}. Deste modo processa-se em simultâneo a integração da superfície para o interior até $x = 0.2$, obtendo os valores de f_{i1} (rotina integ).

Relativamente à integração, utiliza-se o método de Runge-Kuta de ordem 4,5-função esta que já se encontra implantada no próprio Matlab. Portanto destas primeiras integrações obtemos dois conjuntos de valores (f_{10}; f_{20}; f_{30};f_{40}) e (f_{11}; f_{21}; f_{31}; f_{41}), que dependem do primeiro conjunto de constantes C_{i0}. Como os parâmetros não estão correctos este conjunto de valores não coincidem (não são da solução pretendida). Em seguida tentarmos encontrar, ou melhor, ajustar essas mesmas constantes de modo a que as soluções f_{i0} e f_{i1}, sejam iguais em $x = 0.2$. Para tal começamos por definir o erro cometido na primeira integração como:

[11] Veja anexo A2

$$er(i) = \frac{f_{i0} - f_{i1}}{f_{i0} + f_{i1}} \qquad (4.3\text{-}8).$$

No prosseguimento do objectivo anterior, iniciamos a rotina que permitirá incrementar as constantes C_{i0}, (rotina const). Esta subrotina permite-nos estimar numéricamente a sensibilidade dos erros *er(i)* aos parâmetros estimando a correcção a fazer. Assim temos:

$$C_{i1} = (1 + \xi \times \delta_{jk}) C_{i0} \qquad (4.3\text{-}9)$$

em que ξ =1 ×10-4 e $\delta_{ji} = \begin{cases} 1 \text{ se } j = i \\ 0 \text{ se } j \neq i \end{cases}$ esta rotina possibilitará construir a seguinte matriz:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} & C_{11} & C_{11} \\ C_{21} & C_{21} & C_{21} & C_{21} \\ C_{31} & C_{31} & C_{31} & C_{31} \\ C_{41} & C_{41} & C_{41} & C_{41} \end{bmatrix} \qquad (M\ 4.3\text{-}1).$$

Após o incremento das diversas constantes determinamos um novo conjunto de valores que definimos como sendo $^{j}f_{i0}$ e $^{j}f_{i1}$, os quais não são mais do que o resultado das novas integrações no ponto x = 0.2, mas para as diferentes constantes C_{k1}. Novamente se define o erro cometido nessas novas integrações por:

$$^{j}er(i) = \frac{^{j}f_{i0} - ^{j}f_{i1}}{^{j}f_{i0} + ^{j}f_{i1}} \qquad (4.3\text{-}10).$$

Estamos então em condições de podermos construir a matriz que dará as correcções das constantes, por forma a ter-se as soluções pretendidas

$$D_{ij} = \frac{^{j}er(i) - er(i)}{\xi C_{j0}}\ ;\ \text{i,j =1,2,3,4} \qquad (4.3\text{-}11)$$

por conseguinte as correcções efectuadas nas constantes são determinadas pela resolução do sistema

$$D_{ij} \cdot \Delta C_j = -er(i) \qquad (4.3\text{-}12).$$

De referir que na resolução do sistema (4.3-12) utilizei um método de triangulação, pré-definido no Matlab (rotina sistema)[12]. Quanto às novas constantes serão obtidas da seguinte relação

$$C_i = C_{i0} + \Delta C_j \qquad (4.3\text{-}13).$$

Assim deste modo chegamos quase ao final do processo faltando apenas referir que ele entrará em ciclo repetitivo até que se verifica a condição | er(i) | < 1×10^{-5}. Por cada vez que o processo anterior ocorre uma correcção é produzida, melhorando iterativamente a solução encontrada, desta forma permite que se encontre a solução do sistema, que é continua no ponto escolhido. Tal é considerado feito quando o erro relativo da descontinuidade é inferior a 10^{-5}.

4.4 Aplicações

Nesta secção faremos uma breve análise de alguns resultados que se obtiveram da resolução do sistema (4.2-12) e verificar-se-á também se este modelo representa uma melhoria quando comparado com modelos já elaborados neste trabalho.

Desta forma apresentamos primeiro uma tabela (4.4-1) que nos dá um conjunto de valores para a temperatura, pressão e densidade central e também para as constantes C e D, mediante a variação de η em torno de 4. Contudo refiro alguns aspectos que tive em consideração:

i) Consideramos $\alpha = 1$ e $\beta = 3.5$, ou seja, trabalhou-se unicamente com gases perfeitos totalmente ionizados cuja opacidade é dominada pelas transições livre-livre.

ii) O segundo aspecto refere-se ao facto de se considerar $\mu = 0.62$, quer isto dizer, usou-se para fracção de hidrogénio em massa, X = 0.7 e a fracção de hélio Y=0.29.

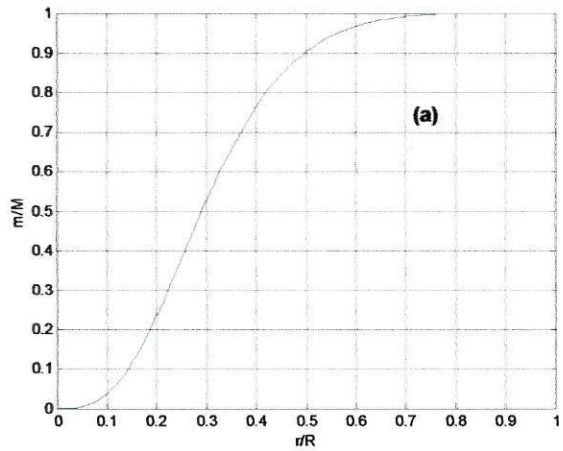
iii) Por fim a justificação pela qual apenas estudei em torno de $\eta = 4$, deve-se ao facto de como é sabido este valor refere-se à produção de energia por meio das cadeias PP que é o que ocorre na nossa estrela.

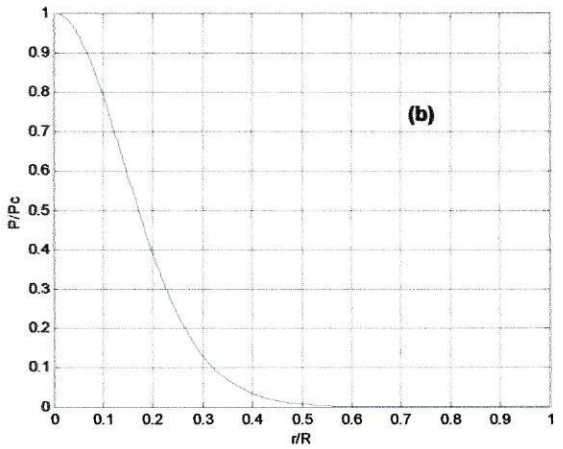
[12] Veja Anexo A4

η	Pc	Tc	ρc	C	D
3.5	1.0644e17	1.2686e10	6.2563e01	1.1933e-06	8.7906e-02
4	1.0404e17	1.2698e07	6.1096e01	1.1705e-06	1.0550e-01
4.5	1.0191e17	1.2714e07	5.9769e01	1.1506e-06	1.2572e-01
5	1.000e17	1.2734e07	5.8559e01	1.133e-06	1.4883e-01
5.5	9.8309e16	1.2758e07	5.7458e01	1.1174e-06	1.7498e-01
6	9.6769e16	1.2785e07	5.6440e01	1.1035e-06	2.0450e-01

Tabela 4.4-1: Valores de Pc, Tc, ρ_c, C e D obtidos para diferentes η (*rotina Modelo_rad*)

Relativamente ao que resultou para este modelo em termos de gráficos das diferentes quantidades físicas, considerando diferentes valores de η, não se verifica diferenças significativas. Por esse motivo apresenta-se apenas os gráficos que se obteve para η = 4 Fig. (4.4-1), como exemplo. Quanto aos outros, o leitor facilmente os pode obter tendo em atenção o código que os produziu e a tabela (4.4-1). Assim vejamos então como variam as diversas grandezas físicas em termos do raio da estrela.





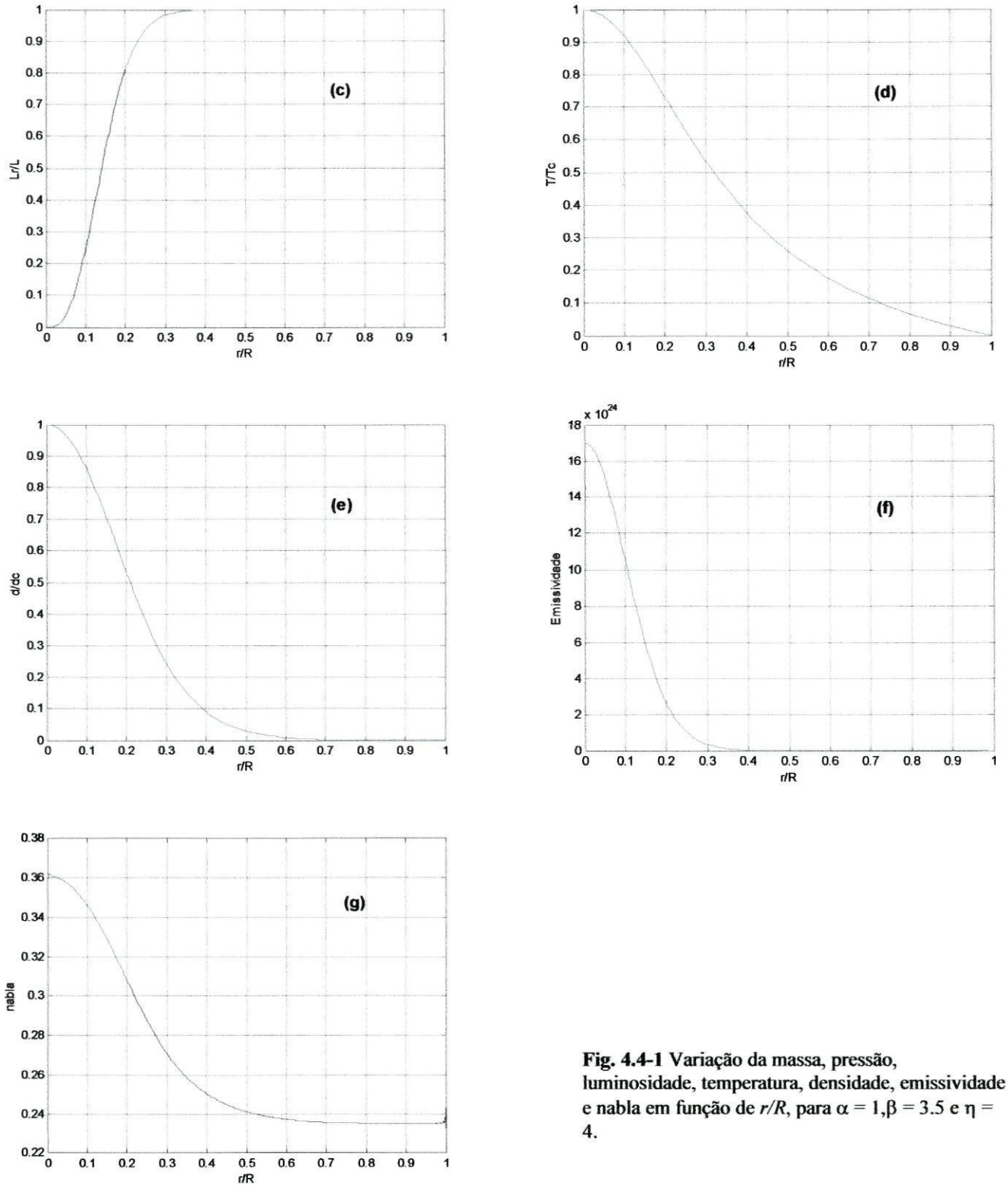


Fig. 4.4-1 Variação da massa, pressão, luminosidade, temperatura, densidade, emissividade e nabla em função de r/R, para $\alpha = 1, \beta = 3.5$ e $\eta = 4$.

Numa primeira análise deste conjunto de gráficos verifica-se que a grande contribuição para a luminosidade, na estrela, ocorre aproximadamente por volta de 1/10 do raio solar, como se pode constatar pela curva da luminosidade Fig. (4.4-1c). À primeira vista

este resultado poderia ser um pouco inesperado, na medida em que a equação de conservação de massa (3.1-1)

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

ou seja

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr = \rho dV$$

nos indica que uma quantidade de massa compreendida entre um determinado raio aumenta com o raio só porque o volume dessa camada esférica aumenta com o raio. No entanto este aumento não depende apenas do aumento do volume mas também da densidade de matéria que existe nesse referido volume. Consequentemente mesmo que o grosso da quantidade de energia libertada por grama de material decresce do centro para a superfície, a maior contribuição para a luminosidade total ocorre não no centro mas sim numa camada que contém uma quantidade significativa de massa.

As figuras (4.4-1e) e (4.4-1b), mostram-nos o quanto rapidamente a densidade, bem como a pressão varia com o raio da estrela. Esta variação é forçada na estrutura da estrela pela equação de equilíbrio hidrostático e também pela equação dos gases ideais. Quanto à figura (4.4-1a) que nos mostra a variação da massa no interior da estrela, verificamos que cerca de 90% da massa da estrela está localizada a mais de metade raio.

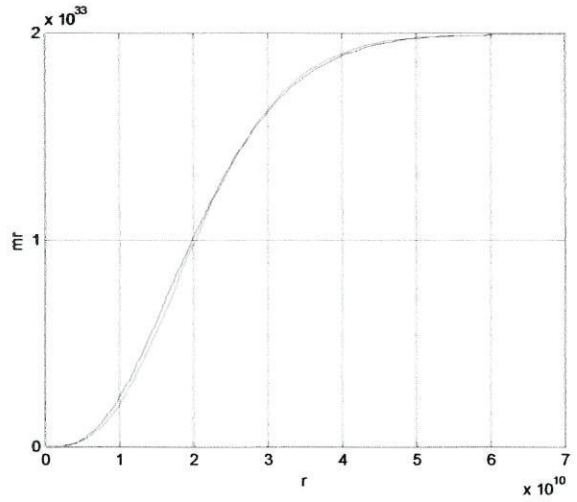
Depois desta breve analise será então interesante fazer algumas comparações possíveis com os modelos anteriores e constatar se efectivamente este modelo nos revela algo de novo. É pois a tarefa da secção seguinte.

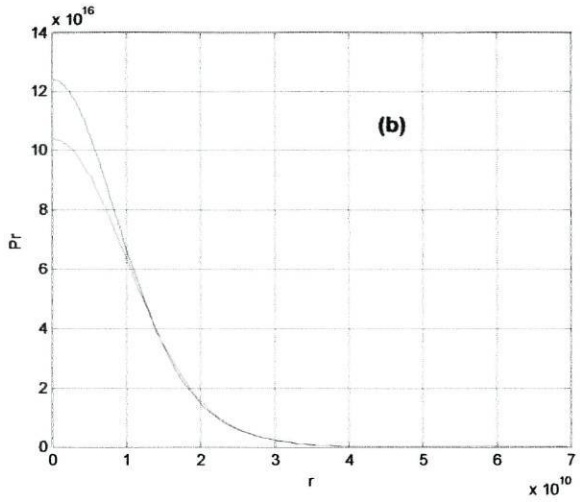
4.5 Politropos versus Modelo Raditivo

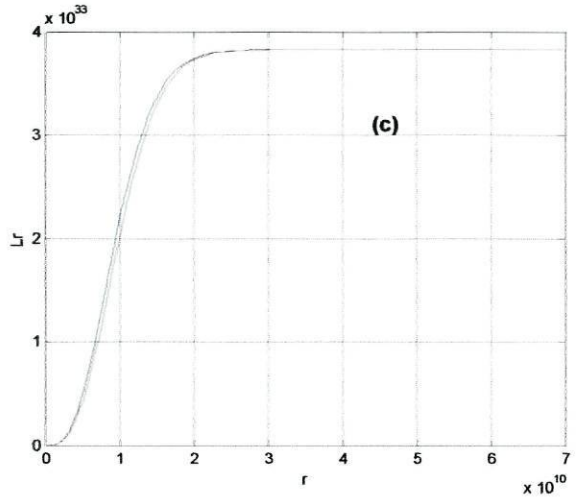
A comparação entre os dois modelos poderá ser abordada de diferentes formas. A mais simples será comparar as tabelas (3.4-1) e (4.4-1) na qual se podem ver duas situações distintas. Uma é o facto das temperaturas centrais (Tc), tanto no modelo radiativo como no modelo politrópico de índice 3, estarem muito próximas, sendo esta última ligeiramente mais baixa, apesar da ordem de grandeza ser a mesma. Outra situação diz respeito ao facto de o politropo $n = 3$ produzir pressões e densidades centrais mais elevadas do que o modelo radiativo para $\eta = 4$, por exemplo, embora a ordem de grandeza dos valores ser a mesma. No

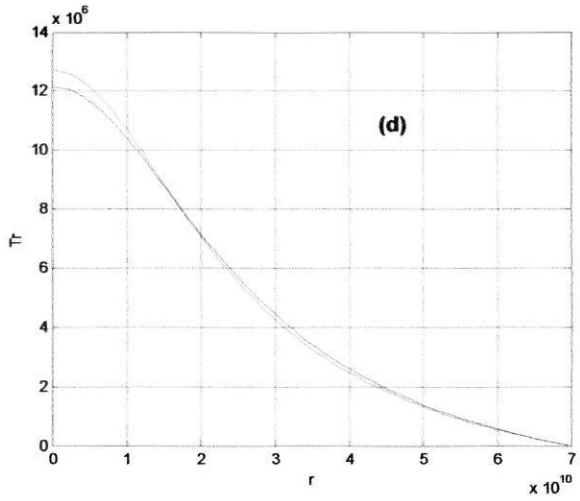
entanto será curioso verificar que para η mais pequenos o modelo radiativo produz pressões e densidades mais próximas do politropo $n = 3$.

Outra comparação que pode ser feita é a gráfica, com o objectivo de vermos que diferenças, existem em termos da variação das grandezas físicas entre os dois modelos. Temos assim o seguinte conjunto de gráficos nos quais se pode observar a vermelho o traçado do modelo radiativo e a azul o modelo politrópico ($n = 3$).









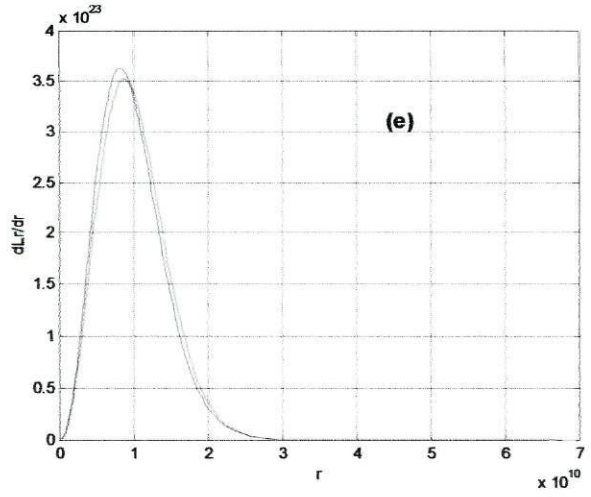


Fig. 4.5-1 Conjunto de gráficos que fornece uma comparação entre o modelo politrópico ($n = 3$) e o modelo radiativo $\eta = 4$.
▬ (Modelo Politrópico); ▬ (Modelo Radiativo).

Pelos gráficos é possível verificar pelo traçado da variação da massa Fig. (4.5-1a) bem como da luminosidade Fig. (4.5-1c), que estas grandezas não são muito diferentes, de modelo para modelo apesar de se ter obtido o valor da luminosidade L no politropo por ajustamento de ε_0, ao contrário do modelo radiativo no qual a obtemos directamente da resolução do sistema (4.1).

Quanto à temperatura e pressão Fig. (4.5-1b) e Fig. (4.5-1d) existe uma ligeira diferença que se prende, como é obvio, com o facto de a temperatura central ser ligeiramente mais elevada no modelo radiativo, ao contrário da pressão que é mais baixa no referido modelo em comparação com o politrópico. Mas no que diz respeito ao gráfico da produção de energia Fig. (4.5-1e) nota-se algumas diferenças mas nada de "significativo". O gráfico mostra que em ambos os modelos a produção de energia é feita aproximadamente a 1/10 do raio da estrela. Constata-se que no modelo radiativo a produção de energia tem um máximo mais baixo do que o modelo politrópico.

Todas estas conclusões podem ser mais precisas se calcularmos as diferenças relativas entre o modelo politropo e o radiativo para as diversas grandezas e as representarmos graficamente. Desta forma obtemos um novo conjunto de gráficos, que passamos a mostrar:

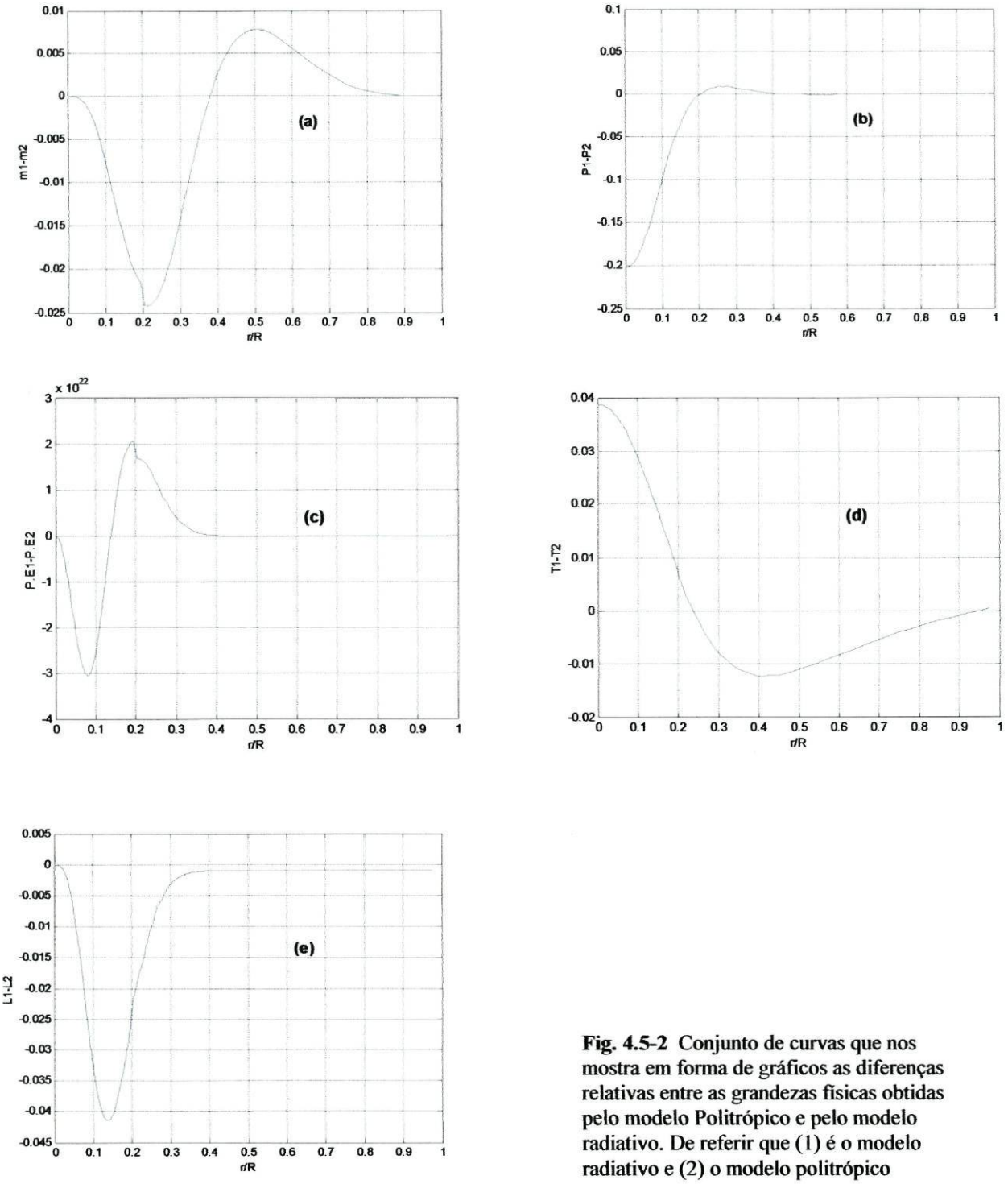


Fig. 4.5-2 Conjunto de curvas que nos mostra em forma de gráficos as diferenças relativas entre as grandezas físicas obtidas pelo modelo Politrópico e pelo modelo radiativo. De referir que (1) é o modelo radiativo e (2) o modelo politrópico

Efectivamente, este conjunto de gráficos vem, de acordo com o que se previa, dar mais profundidade à discussão anterior pois se os analisarmos com alguma atenção, vemos que em termos de massa as diferença efectivamente não eram elevadas, sendo no máximo de 2.5% Fig. (4.5-2a). No que diz respeito à pressão as diferenças apenas são significativas no

centro, ou seja, num intervalo entre 0 e 0.4, de igual modo se pode ver que as diferenças na temperatura são mais pequenas mas contudo mais "extensas" a todo o raio da estrela A maior diferença que existe é de 4% no máximo.

Relativamente à luminosidade temos aqui algo a referir. As diferenças das luminosidade vem ilustrar a suspeita que se tinha, apesar de na Fig. (4.5-1c) não se notarem.

Pela Fig. (4.5-2e) nota-se que a diferença entre os dois modelos em termos de luminosidade é no máximo de 4% e estando esta situado num intervalo entre 0 e 0.4. Verifica-se também que existe uma diferença constante e inferior a 0.5% a partir de 0.4 *r/R* o que se deve, a meu ver ao facto de se ter aproximado a luminosidade por constantes ajustes de ε_0. Quanto à produção de energia verifica-se que existe diferenças num intervalo compreendido entre 0 e 0.4 r/R inferior a 3×10^{22}.

Em jeito de conclusão gostaria de relembrar ao leitor um facto que me parece importante. Toda a análise anterior foi elaborada para $\eta = 4$, apenas por se referir ao caso de cadeia PP que corresponde à cadeia de produção energética de uma estrela como o nosso Sol e para o politrópico $n = 3$, porque foi como se concluiu no ***Capítulo 3*** ser o índice que melhor se aproximava da realidade da nossa estrela. No entanto é possível usar outras opções, bastando para tal utilizar o código Modelo1[13] .

Quanto às causas das semelhanças entre os modelos e qual dos dois é mais "fiável"? Pode-se dizer, que após uma breve reflexão sobre o assunto as semelhanças prendem-se essencialmente em dois aspectos:

i) Primeiro diz respeito ao facto de ter utilizado em ambos os modelos a equação dos gases ideais $P = \frac{\mu}{\Re}\rho T$ para caracterizar o gás que constitui a estrela.

ii) O segundo factor a meu ver, prende-se com o facto de que toda a estrutura da estrela é condicionada em termos globais pelas equações de conservação de massa e principalmente pela equação de equilíbrio hidrostático. Não quero com isto dizer que as outras duas equações não são importantes, mas sim que estas são relações que forneceram uma outra gama de informação, importantes sim, mas não essenciais para o condicionamento da estrutura da estrela. Serão sim em última análise consequência do efeito "equilíbrio hidrostático".

[13] Veja Anexo A2

No que diz respeito ao anseio do leitor em saber qual é o melhor, só posso dizer que a mudança de um modelo para outro não é "radical", apenas que o modelo radiativo tem a vantagem sobre o politrópico por poder fornecer, com mais precisão, um conjunto de informações, que no modelo politrópico são obtidas por ajustes.

Deste modo e com objectivo de uma maior aproximação da realidade de uma estrela como o Sol será curioso estudar um modelo no qual o transporte convectivo e radiativo se conjuguem e ver como se comportam os gráficos das grandezas físicas mediante a introdução do transporte convectivo. É a tarefa do próximo capítulo.

"Twinkle; twinkle, little star,
How I wonder what you are,
Up above the world so high,
Like a diamond in the sky."
Jane Taylor

CAPÍTULO 5

MODELO RADIATIVO/CONVECTIVO

Introdução

Na discussão precedente ficou claro que a formulação dos modelos, em termos de equação de estrutura, ignoraram por completo o efeito da convecção. Contudo como é sabido, grande parte das estrelas da sequência principal tal como o nosso Sol possuem significativas regiões nas quais o transporte de energia é efectuado por convecção. Será então legítimo levantar a seguinte questão – "Como se poderá então "calcular" a estrutura da estrela tendo em atenção esta nova característica?". A resposta será obtida calculando um modelo estelar na qual a convecção esteja incluída e testada em cada ponto da estrela. Através de uma condição de convecção que nos permita ver para que conjunto de pontos a convecção assume papel preponderante no transporte de energia. Desta forma se a referida condição não for satisfeita isto significa que a convecção não ocorre e logo a estrutura da estrela apenas dependerá do transporte radiativo. Todavia se a referida condição for obedecida em qualquer ponto então teremos que deste modo reformular as equações de estrutura por forma a que a estrutura da estrela esteja de acordo com o transporte convectivo.

Em traços gerais será pois deste modo que se irá construir o presente modelo, no qual se tentará conjugar o transporte convectivo com o transporte radiativo.

5.1 Algumas considerações matemáticas

Antes de apresentarmos os resultados obtidos parece-me importante ilustrar em termos matemáticos quais as equações intervenientes na construção do presente modelo. Por conseguinte, e tendo em atenção o que já foi referido no ***Capítulo 2*** acerca da convecção e partindo do principio que a estrela é constituída por um gás totalmente ionizado, na qual o μ não sofre alteração com o raio, temos que $\nabla = \frac{P}{T}\frac{dT}{dP}$, em que $\nabla = \nabla_{ad} = 0.4$, para uma zona convectiva (eficiente). Então à semelhança do que já fizemos para outras equações de estrutura, vamos também aqui traduzir ∇ através do novo conjunto de variáveis (4.2-1). Considerando que $P = P_0 y_2$ e $T = T_0 y_4$, ou seja, $dT = T_0 dy_4$ e $dP = P_0 dy_2$. Então, em geral

$$\nabla = \frac{P}{T}\frac{dT}{dP}$$

logo

$$\nabla(x) = \frac{P_0 y_2}{T_0 y_4}\frac{T_0 dy_4}{P_0 dy_2} \tag{5.1-1}$$

ou seja

$$\nabla(x) = \frac{y_2}{y_4}\frac{dy_4}{dy_2}$$

então

$$\nabla(x) = \frac{y_2}{y_4}\frac{\frac{dy_4}{dx}}{\frac{dy_2}{dx}} \tag{5.1-2}$$

mas pelas equações (4.2-7) e (4.2-11), tem-se que

$$\nabla_{rad}(x) = \frac{y_2}{y_4}\frac{-C\frac{y_3}{x^2}\frac{y_2^{\alpha+1}}{y_4^{\alpha+\beta+4}}}{-\frac{y_2 y_1}{y_4 x^2}} \tag{5.1-3}$$

consequentemente

$$\nabla_{rad}(x) = C\frac{y_3}{y_1}\frac{y_2^{\alpha+1}}{y_4^{\alpha+\beta+4}} \tag{5.1-4}$$

Esta equação, traduzida desta forma, poderá definir a condição pela qual a convecção ocorre. Será interessante ver agora qual a expressão que descreve $\nabla_{rad}(x)$ no centro e na superfície. Sendo assim, consideremos $x = 0$, e tem-se:

$$\nabla_{rad}(0) = C\frac{y_{3c}}{y_{1c}}\frac{y_{2c}^{\alpha+1}}{y_{4c}^{\alpha+\beta+4}} \tag{5.1-5}$$

considerando as equações (4.3-2) tem-se

$$\nabla_{rad}(0) = C.D\frac{y_{2c}^{2}y_{4c}^{\eta-2}}{3}x^{3}\frac{3y_{4c}}{y_{2c}x^{3}}\frac{y_{2c}^{\alpha+1}}{y_{4c}^{\alpha+\beta+4}}$$

ou seja

$$\nabla_{rad}(0) = CD\frac{y_{2c}^{\alpha+2}}{y_{4c}^{\alpha+\beta-\eta+5}} \tag{5.1-6}.$$

Esta equação permitirá criar uma condição que estabelece a existência de convecção ou não no centro.

Relativamente à superfície, ou seja, para $x = 1$ a equação (5.1-4) pode traduzir-se da seguinte forma:

$$\nabla_{rad}(1) = C\frac{y_{3s}}{y_{1s}}\frac{y_{2s}^{\alpha+1}}{y_{4s}^{\alpha+\beta+4}} \tag{5.1-7}$$

considerando as equações (4.3-6) e (4.3-7) e sabendo que para $x = 1$ temos $y_1 = y_3 = 1$, então para x próximo de 1

$$\nabla_{rad}(x) = C\left[\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4}\right)^{\frac{\alpha+\beta+5}{\alpha+1}}C^{-\frac{1}{\alpha+1}}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{\alpha+\beta+4}{\alpha+1}}\right]^{\alpha+1}\left[\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4}\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]^{-\alpha-\beta-4},$$

ou seja,

$$\nabla_{rad}(x) = C\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4}\right)^{\alpha+\beta+5}C^{-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha+\beta+4}\left(\frac{\alpha+\beta+4}{\alpha+1}\right)^{\alpha+\beta+4}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta+\alpha+4}$$

então

$$\nabla_{rad}(1) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+4} \tag{5.1-8}.$$

Fazendo o ponto da situação, pode-se dizer que já possuímos um primeiro conjunto de "resultados" que nos dará a possibilidade de mais tarde atingir o objectivo de construir o

modelo convectivo/ radiativo. No que respeite às equações de estrutura deste modelo, o leitor já se deve ter questionado se serão estas as mesmas tanto para o transporte convectivo como para o transporte radiativo: A resposta é obvia, não. Haverá algumas alterações, nomeadamente na equação que possibilita estudar a variação do gradiente de temperatura.

Da definição $\nabla = \frac{P}{T}\frac{dT}{dP}$ tira-se que

$$\frac{dT}{dr} = \nabla \frac{dP}{dr}\frac{T}{P} \tag{5.1-9}$$

efectuando a habitual mudança de variáveis obtemos então

$$\frac{T_0 dy_4}{Rdx} = \nabla \frac{P_0 dy_2}{Rdx}\frac{T_0 y_4}{P_0 y_2},$$

ou seja,

$$\frac{dy_4}{dx} = \nabla \frac{dy_2}{dx}\frac{y_4}{y_2},$$

como já fiz referência antes, $\nabla=\nabla_{ad} = 0.4$, visto estarem em consideração estrelas constituídas por gases totalmente ionizados. Então

$$\frac{dy_4}{dx} = 0.4\frac{dy_2}{dx}\frac{y_4}{y_2}$$

considerando a equação (4.2-7) têm-se finalmente que

$$\frac{dy_4}{dx} = -0.4\frac{y_1}{x^2} \tag{5.1-10}$$

será pois esta equação que nos possibilita traduzir o gradiente de temperatura em meios convectivos. No que diz respeito às restantes equações de estrutura elas mantêm-se inalteradas, podendo então apresentar-se um novo conjunto de equações de estrutura:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= \frac{y_2}{y_4}x^2 \\
\frac{dy_2}{dx} &= -\frac{y_2 y_1}{y_4 x^2} \\
\frac{dy_3}{dx} &= D y_2^2 y_3^{\eta-2} x^2 \\
\frac{dy_4}{dx} &= -C\frac{y_3}{x^2}\frac{y_2^{\alpha+1}}{y_4^{\alpha+\beta+4}} \qquad \text{(transporte radiativo)}
\end{aligned} \tag{5.1-11}$$

$$\frac{dy_4}{dx} = -0.4\frac{y_1}{x^2} \qquad \text{(transporte convectivo).}$$

Temos então todas as equações de estrutura que nos permite descrever em termos matemáticos, uma estrela que possua transporte convectivo e radiativo. Relativamente ao desenvolvimento das equações de estrutura no centro e da superfície, de referir que em termos gerais, as equações que permitem esse desenvolvimento serão semelhantes às que obtivemos para o modelo radiativo. Contudo haverá algumas novas condições a ter em consideração.

Por conseguinte, considere-se que a equação que fornece essa primeira integração está definida como sendo[14]:

$$T = Tc - \frac{4}{15}\pi G\frac{Tc\rho_c^2}{Pc}r^2 \qquad (5.1\text{-}12)$$

considerando a equação dos gases ideais $P = \frac{\Re}{\mu}\rho T$, tem-se

$$T = Tc - \frac{4}{15}\pi G\left(\frac{\mu}{\Re}\right)^2\frac{Pc}{Tc}r^2$$

efectuando a mudança de variáveis

$$T_0 y_4 = T_0 y_{4c} - \frac{4}{15}\pi G\left(\frac{\mu}{\Re}\right)^2\frac{P_0 y_{2c}}{T_0 y_{4c}}R^2x^2$$

como $P_0 = \frac{GM^2}{4\pi R^4}$ e $T_0 = \frac{\mu GM}{R\Re}$, então

$$T_0 y_4 = \frac{\mu GM}{R\Re}y_{4c} - \frac{1}{15}\frac{\mu GM}{R\Re}\frac{y_{2c}}{y_{4c}}x^2$$

$$T_0 y_4 = \frac{\mu GM}{R\Re}\left(y_{4c} - \frac{1}{15}\frac{y_{2c}}{y_{4c}}x^2\right)$$

ou seja

$$y_4 = y_{4c} - \frac{1}{15}\frac{y_{2c}}{y_{4c}}x^2 \qquad (5.1\text{-}13).$$

Relativamente ao desenvolvimento na superfície consideremos a equação (5.1-10) e sabendo que para x próximo de 1 $y_1 = 1$ então temos:

[14] Veja "Structure and evolution of the stars", Martin Schwarzschild, pag. 114

$$\frac{dy_4}{dx} = -\frac{2}{5x^2} \tag{5.1-14}$$

logo

$$\int_x^1 \frac{dy_4}{dx} = \int_x^1 -\frac{2}{5x^2},$$

ou seja,

$$y_4(1) - y_4(x) = \frac{2}{5}(1 - \frac{1}{x})$$

mas como para x proximo de 1 $y_4 = 0$ então

$$y_4 = \frac{2}{5}(\frac{1-x}{x}) \tag{5.1-15}.$$

Sabendo que a convecção ocorre quando $\nabla=\nabla_{ad} = 0.4$ então

$$\nabla = \frac{d \ln y_4}{d \ln y_2} = \frac{2}{5}$$

ou seja

$$y_4 = y_2^{\frac{2}{5}} \tag{5.1-16}$$

então

$$y_2 = \left(\frac{2}{5}\left(\frac{1-x}{x}\right)\right)^{\frac{5}{2}} \tag{5.1-17}.$$

Em suma pode-se então estruturar o conjunto de equações intervenientes no desenvolvimento no centro e na superfície, para um meio convectivo ou radiativo através do de um diagrama possibilitando desta forma uma primeira visualização por parte do leitor, da intervenção das mesmas no modelo que se pretende construir Fig. (5.1-1).

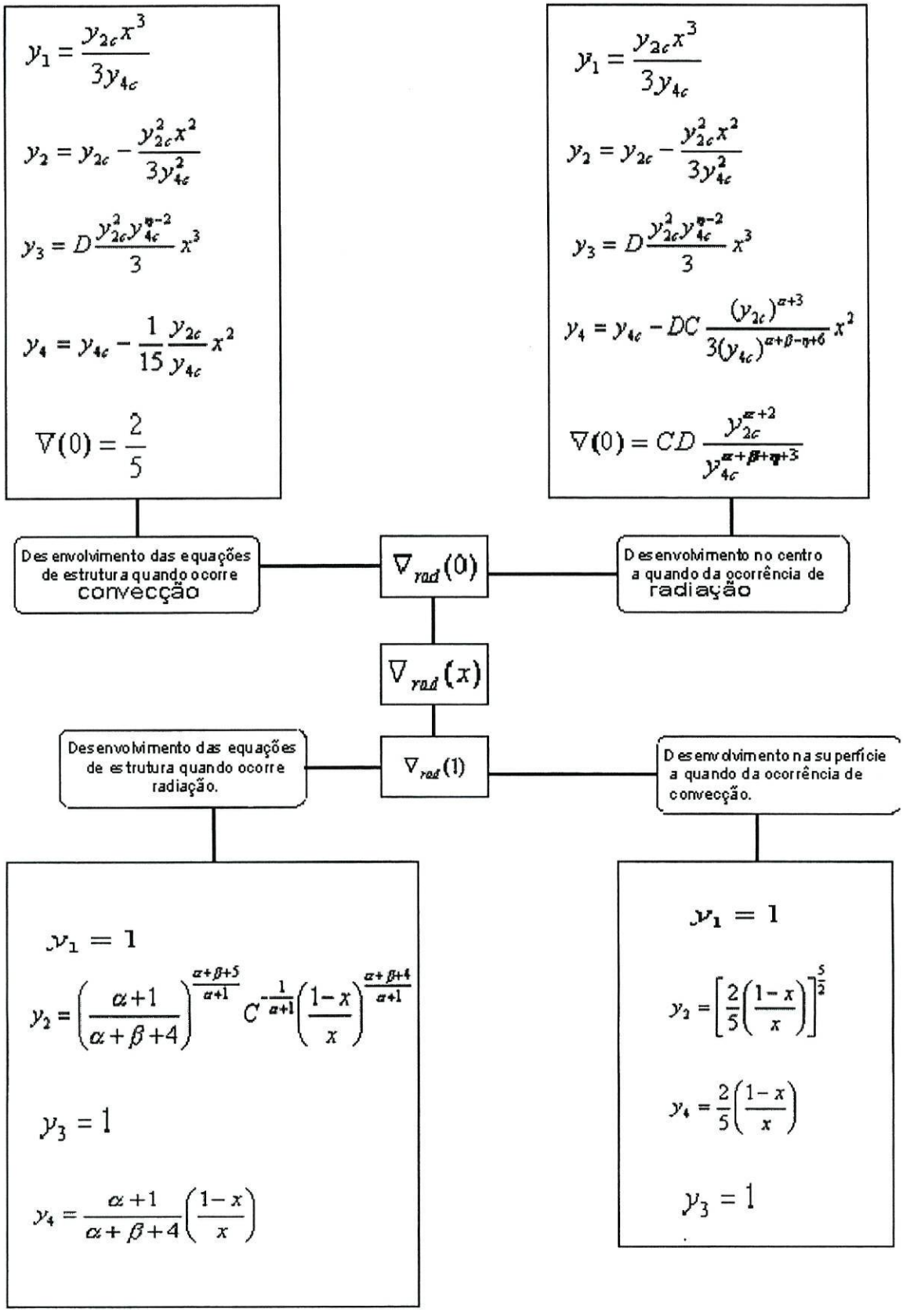


Fig. 5.1-1 Diagrama, que esquematiza todas as equações intervenientes no desenvolvimento das equações de estrutura no centro e na superfície.

Depois desta pequena apresentação das novas equações intervenientes no modelo, estamos agora em condição de explicar, melhor dizendo apresentar alguns resultados. Será esta a tarefa desenvolvida na secção seguinte.

5.2 Modelo Convectivo - alguns resultados

Já se referiu no início deste capítulo que a arquitectura do presente modelo, na qual a convecção é tida em consideração, é suportada por uma condição que permita, durante a integração das equações de estrutura estabelecer quais os pontos em que a estrela è convectiva ou radiativa. A condição é obtida de $\nabla_{rad}(x)$; se esta quantidade é for superior a 0.4, o modelo ira efectua a integração do sistema de equações de estrutura, considerando localmente o transporte convectivo, caso contrário as equações de estrutura usadas são de uma estrela com transporte radiativo. Em suma o cálculo de $\nabla_{rad}(x)$ irá permitir a escolha das equações de estrutura relevantes em cada ponto da estrela. O diagrama seguinte, dá ao leitor uma melhor compreensão da ideia anteriormente exposta Fig. (5.2-1).

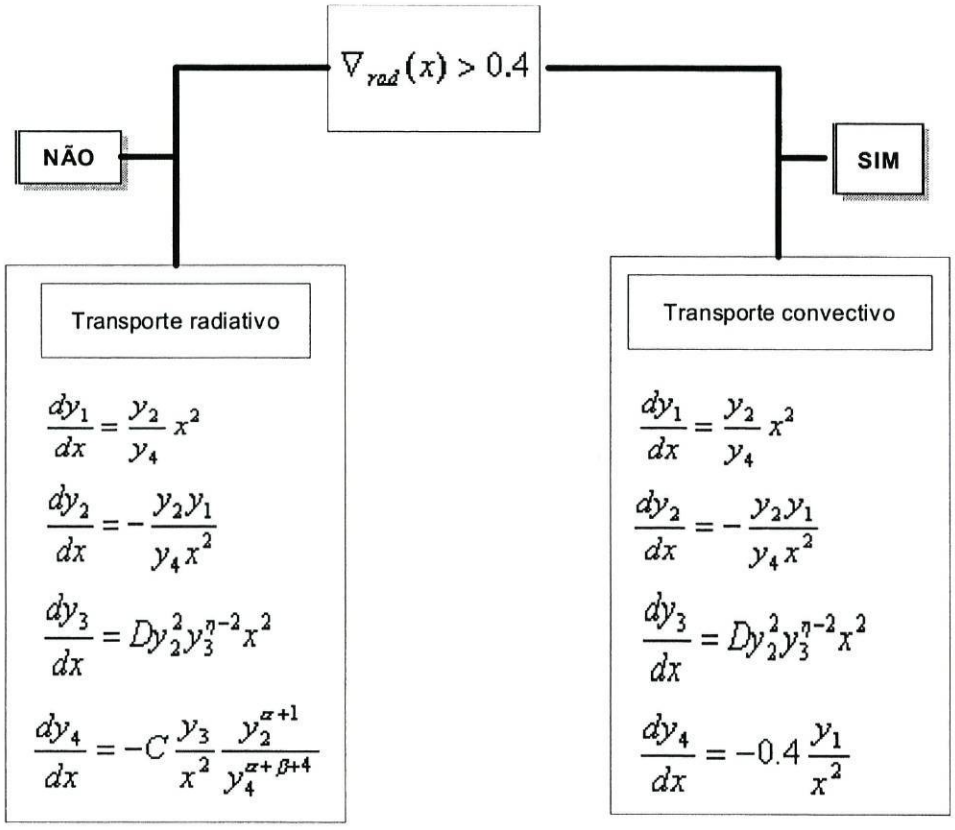


Fig. 5.2-1 A condição $\nabla_{rad}(x) > 0.4$ condiciona se o transporte é radiativo ou convectivo

Reforçando a ideia anterior, pode-se dizer que este método possibilita determinar em que zonas da estrela qual o transporte de energia (convectivo ou radiativo) que é mais eficiente. De referir que neste modelo se continuaram a usar as mesmas condições fronteiras que se consideraram e estudaram no modelo radiativo, salvaguardando contudo algumas diferenças que posteriormente se discutirão.

Iremos agora expor alguns resultados do modelo. Porém estes resultados são enunciados em duas secções por forma a que o leitor fique elucidado de como foi a evolução do estudo e dos resultados obtidos.

5.2.1 Convecção no Centro

A quando da elaboração do modelo colocou-se a possibilidade de este não se limitar apenas à tentativa de retratar uma estrela como o nosso Sol, mas que permitisse ainda obter uma imagem em termos de estrutura de estrelas cujo núcleo fosse convectivo. Como tal, o primeiro passo para atingir esta ideia foi considerar-se então que o desenvolvimento no centro ou seja, a primeira integração das equações de estrutura tivessem em conta o facto de se poder ter convecção no centro.

Consequentemente a primeira etapa que o programa (Conv_cent)[15] efectua mediante a introdução dos valores de (C, y_{2c}, D, y_{4c}) é verificar se em x =0 a estrela usa transporte convectivo ou radiativo, ou seja, testar o valor de $\nabla_{rad}(0)$. Se este for superior a 0.4 (transporte convectivo) então o desenvolvimento no centro é definido pelo seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{y_{2c}x^3}{3y_{4c}} \\
y_2 &= y_{2c} - \frac{y_{2c}^2 x^2}{3y_{4c}^2} \\
y_3 &= D\frac{y_{2c}^2 y_{4c}^{\eta-2}}{3}x^3 \\
y_4 &= y_{4c} - \frac{1}{15}\frac{y_{2c}}{y_{4c}}x^2
\end{aligned}
\qquad (5.2\text{-}1).
$$

Caso contrario, ter-se-á um transporte radiativo e logo o sistema que é utilizado é o que é descrito em (4.3-2) e ilustrado na Fig. (5.1-1). Quanto ao desenvolvimento na

[15] Veja anexo A5

superfície, como se espera que a estrela seja radiativa então as equações intervenientes são as mesmas do modelo radiativo. No que diz respeito ao método numérico, no seu todo, nada há a referir pois ele é idêntico ao que foi utilizado no capítulo anterior. Será agora interessante, antes mesmo de apresentar alguns resultados, fazer uma pequena alusão a como é em termos genéricos a estrutura interna e evolução das estrelas que possuem um núcleo convectivo para que se possa posteriormente, e mediante esta breve descrição, fazer um confronto entre os resultados do modelo e as informações já adquiridas através da observação bem como da simulação de outros modelos teóricos.

i) Estrelas de grande Massa

A história de uma estrela pode ser considerada uma inesgotável batalha da estrela contra a força gravítica desde que a estrela inicia a sua contracção até se transformar numa estrutura mais compacta e esférica. As estrelas de massa semelhante ao sol estabelecem um compromisso permanente com a gravidade no fim das suas vidas, como compactas anãs brancas, com um diâmetro semelhante ao da Terra e uma densidade da ordem de 1 ton/cm3. Pelo contrário, as estrelas mais massivas perdem essa batalha de uma forma espectacular.

Visto ser a massa um dos principais factores determinantes da história da vida de uma estrela, seria interessante ver, em termos gerais, como é que este factor influencia a estrutura e evolução das mesmas.

i) As estrelas cuja massa está entre 0.01 M_Θ e 0.085 M_Θ, são objectos que nunca virão a ser suficientemente quentes no seu núcleo para conseguirem a ignição das cadeias PP. A energia potencial exercida pela força gravítica faz com que o seu núcleo atinga uma temperatura de cerca de 2 milhões Kelvin, calor este suficiente para que se dê talvez algumas reacções nucleares mas nunca o suficiente para estabelecer uma cadeia estável para a fusão do hidrogénio. Estes objectos chamados de anãs castanhas possuem atmosferas com temperaturas inferiores a 2000 K. A sua radiação situa-se na sua maior parte no infra-vermelho, sendo bastante difíceis de descobrir. Recentemente, uma pesquisa próxima de infra-vermelho tem revelado um grande número de novos objectos que têm sido classificados de L-estrelas.

ii) Os objectos com massas entre 0.085 M_Θ e 0.4M_Θ, são estrelas com uma vida longa mas nunca terão uma temperatura suficiente para iniciar um processo de tripla-

alfa[16]. Serão estrelas que não terão a fase de queima do hélio na fase de gigante vermelha.

iii) Estrelas que estão $0.4\ M_{\Theta} < M < 1.2\ M_{\Theta}$, são estrelas semelhantes ao nosso Sol, cuja queima de hidrogénio em hélio pela via das cadeias PP, é possível bem como a queima do hélio em carbono pelo processo de Tripla-alfa, seguindo um caminho no diagrama de H-R semelhante ao que é ilustrado na Fig. (5.2-2)

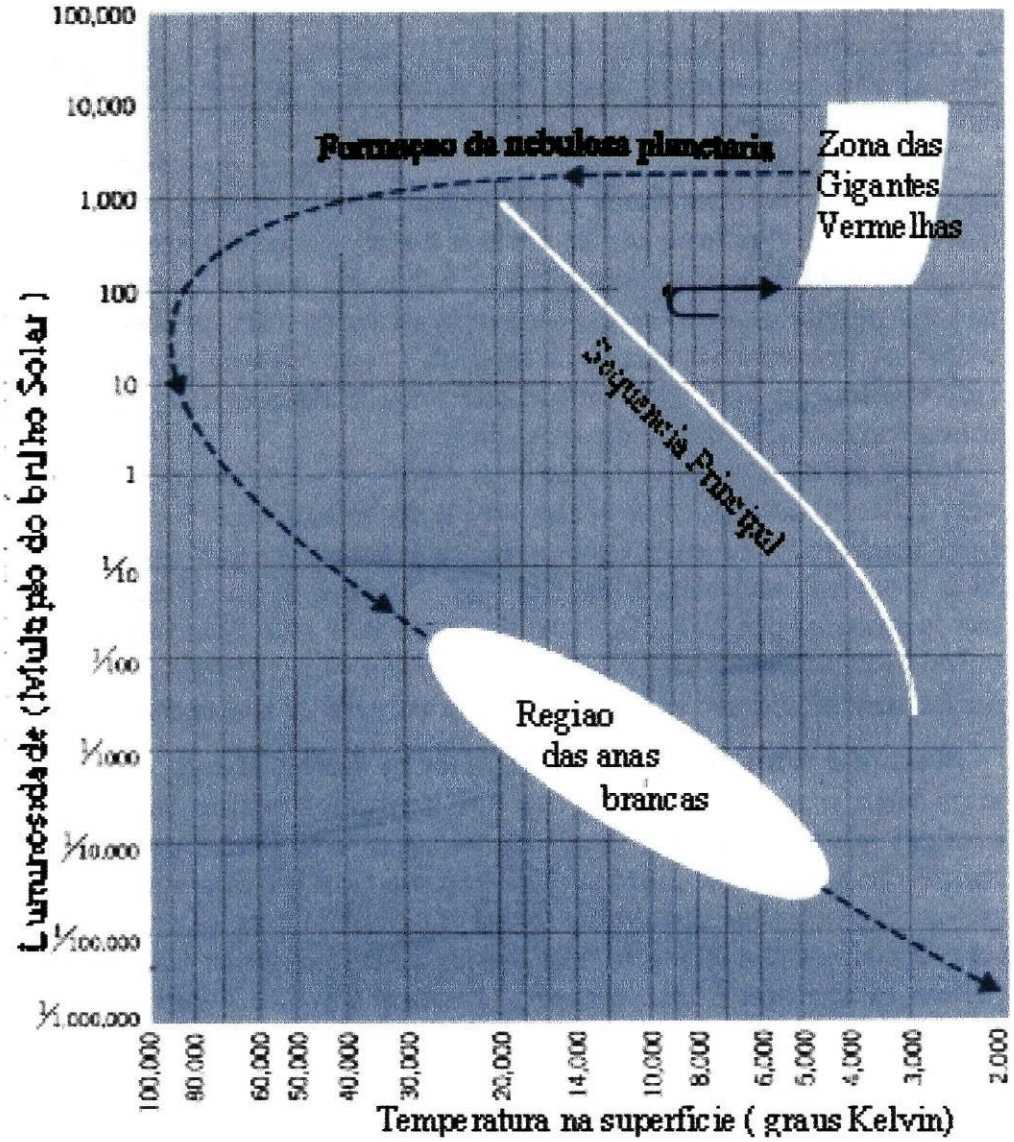


Fig. 5.2-2 A figura mostra-nos o local onde as estrelas se distribuem consoante a fase de evolução

[16] Mecanismo pela qual o hélio se transforma em carbono.

iv) Estrelas com massas superiores a 1.2 M_Θ, são estrelas que alcançam elevadas temperaturas, que lhes permitem produzir hélio por via do ciclo CNO.

v) Estrelas com massas superiores a 8 M_Θ possuem um largo número de ciclos nucleares. Os seus núcleos são bastante massivos, os quais só podem ser suportados por electrões degenerados. Estas estrelas terminam geralmente a sua vidas numa explosão cabalística a que chamamos de *supernova.*

Será agora curioso ver em que local do diagrama H-R estes diferentes tipos de estrelas estarão situadas quando estão na fase da sua vida mais longa Fig. (5.2-3).

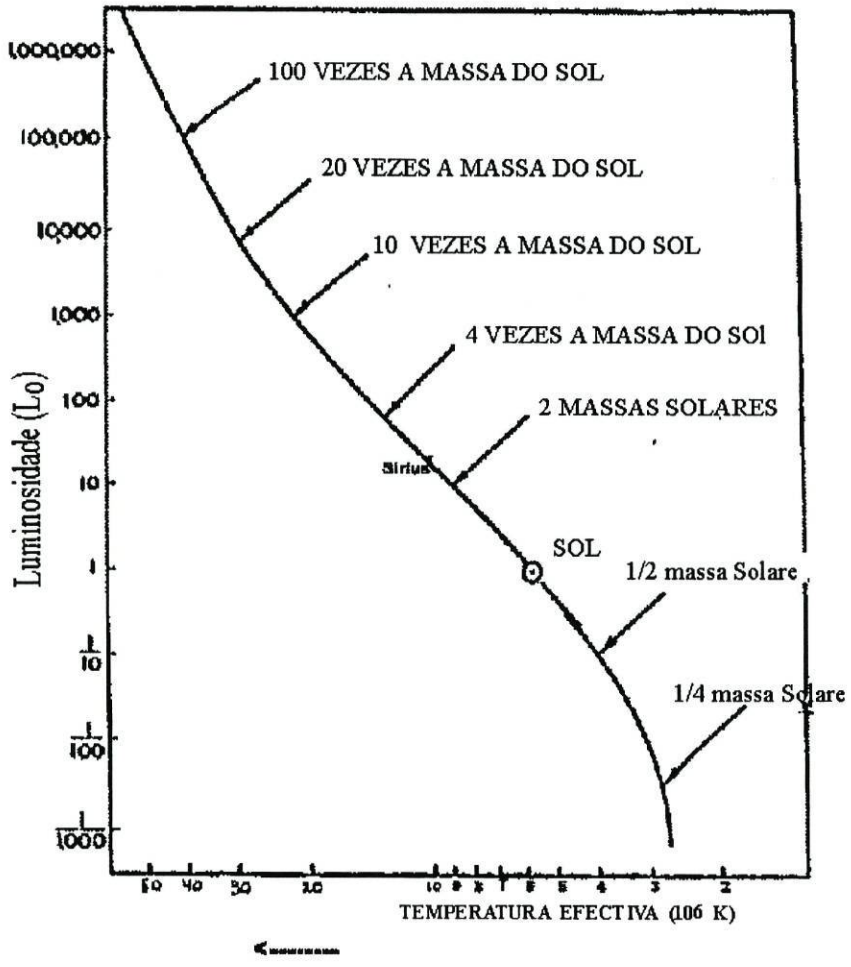


Fig. 5.2-3 A figura mostra-nos como a massa da estrela está relacionada com a posição da mesma na Sequência Principal.

Ora temos estado a distinguir algumas das características evolutivas entre estrelas mais massivas e estrelas menos massivas. Como já referi as estrelas mais massivas vivem

muito mais rapidamente do que as estrelas com massas iguais ou inferiores à massa do Sol, podendo mesmo dizer-se que estas estrela seguem a regra de "Live fast and die young...". Desta forma e tendo em atenção as equações de estrutura, ***Capítulo 2***, é possível determinar, com razoável aproximação, através da massa, pressão e temperatura que a luminosidade de uma estrela é proporcional à massa, ou seja, esta relação massa- luminosidade pode-se, em termos gerais, aplicar na sequência principal.

$$L \propto M^{3,5} \tag{5.2-2}$$

Considerando que o combustível disponível é efectivamente a massa da estrela a sua vida será aproximadamente proporcional a $1/M^{2,5}$. Uma estrela com 10 massas solares espera-se que passe por o ciclo de vida na sequência principal 300 vezes mais rapidamente que o Sol. Estas estrelas exigem elevadas temperaturas centrais por forma a equilibrar a gravidade, o que significa que as estrelas de grande massa produzem hélio através de um ciclo CNO, em vez dos ciclos PP, o que faz com que tenham núcleos convectivos. Este facto ocorre porque a taxa de produção de energia se altera muito rapidamente com o raio e por conseguinte a radiação não é um meio eficiente de transporte de energia por forma a conseguir libertar a energia produzida no núcleo. Ao contrário, como veremos mais adiante, na queima do hidrogénio pelo ciclos PP, a radiação já é capaz de transportar a energia do centro e logo a convecção desaparece.

Por conseguinte estas estrelas de grande massa terão a capacidade de iniciar todos os processos de fusão até ao ferro como se pode constatar na Fig. (5.2-4).

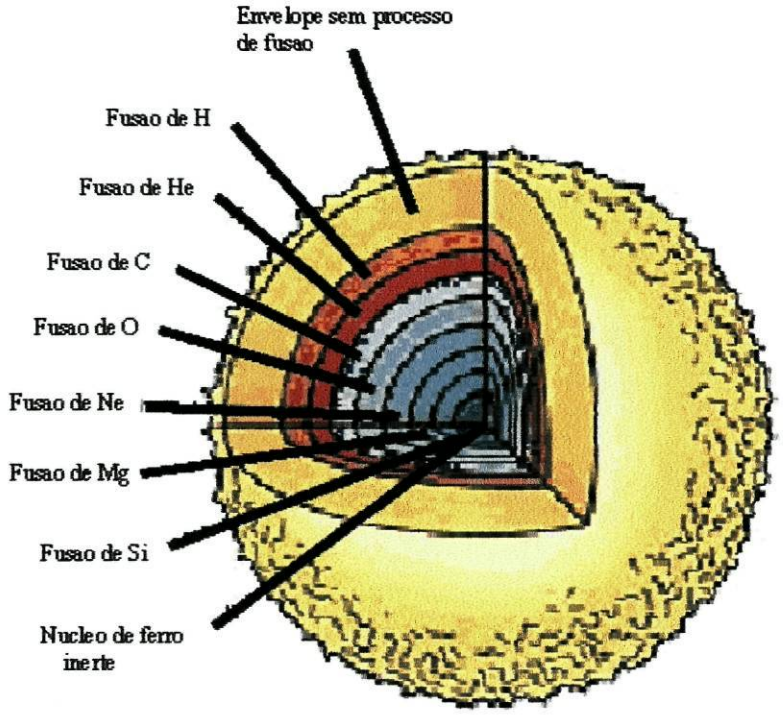
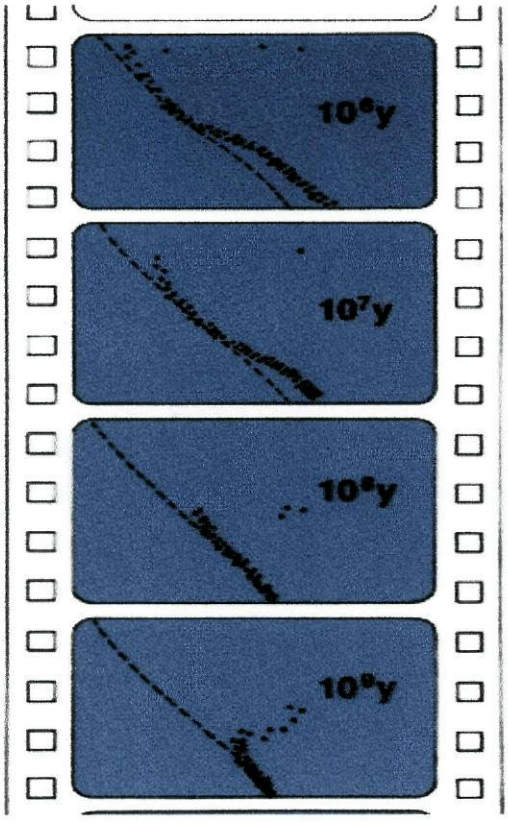


Fig. 5.2-4 Estrutura em anéis de uma super gigante vermelha. De notar que este diagrama não se encontra à escala, pois o envelope da fusão de H terá um raio aproximadamente de 10^{-2} R_Θ enquanto o raio da estrela é da ordem de 10^3 R_Θ

Quanto à morte deste tipo de estrelas, podem-se seguir dois caminhos; um será evoluir até ao estágio de anã branca que só ocorre se o núcleo não exceder $1.4M_{\Theta}$, outro, será ter um fim numa enorme explosão, tornando-se eventualmente numa estrela de neutrões ou num buraco negro. Contudo este fim só é possível se o núcleo da estrela exceder $1.4M_{\Theta}$. Acredita-se que apenas as estrelas com massas inferiores a $8M_{\Theta}$ conseguirão chegar ao estágio de anã branca. O seguinte diagrama Fig. (5.2-5) vem confirmar o que se referiu antes ou seja, que as estrelas de grande massa efectivamente possuem uma passagem pelo universo muito curta.Vejamos; considerando um conjunto de estrelas de diferentes massas que nascem ao mesmos tempo:



- Por volta de 1 milhão de anos a maioria das estrelas de grande massa já se encontram na sequência principal, vivendo a sua fase de queima do hidrogénio. Comparativamente pode-se ver pelo 1° slide que as estrelas tipo o Sol ainda se encontram na fase de Pré sequência principal.
- Aos 10 milhões de anos, observe-se que as estrelas com cerca de 1 M_{Θ}, iniciam o processo de fusão nuclear enquanto as estrelas de grande massa com cerca de 20 M_{Θ}, se encontram em movimento para fora da sequência principal.
- Com 100 milhões de anos a maior parte das estrelas mais leves já se encontram na sequência principal. Mas as estrelas com massa superiores a 5 massas solares estão agora a movimentarem-se para fora da mesma.
- Por volta de um bilião de anos as estrelas com massas entre 2 e 3 M_{Θ}, movimentam-se para fora da sequência principal. Estas estrelas estão mesmo a esgotar o hidrogénio e deslocam-se para a fase das gigantes vermelhas.

Fig. 5.2-5 Filme que mostra o desenvolvimento no diagrama H-R de um conjunto de estrelas formadas numa determinada época.

ii) Diagramas do modelo com conveção no centro

Antes de iniciar a apresentação dos gráficos que nos permite visualizar a variação das grandezas físicas em função do raio, gostaria de referir que á semelhança dos modelos anteriores, os resultados consideram uma estrela numa idade em que $\mu = 0.62$ e sendo esta quantidade independente do raio. Igualmente se considerou que $\alpha = 1$ e $\beta = 3.5$. Um primeiro conjunto de resultados obtidos são apresentados na tabela (5.2-1), que nos fornece os valores C, D, y_{2c}, e y_{4c} bem como o valor de $\nabla_{rad}(0)$ no centro consoante o aumento do valore de η.

η	y_{2c}	y_{4c}	C	D	$\nabla_{rad}(0)$
3.5	1.1889e+002	8.9221e-001	1.1933e-006	8.7910e-002	3.4948e-001
4	1.1622e+002	8.9303e-001	1.1705e-006	1.0549e-001	3.6110e-001
5.5	1.0981e+002	8.9727e-001	1.1174e-006	1.7500e-001	3.9943e-001
6	1.0810e+002	8.9855e-001	1.1036e-006	2.0453e-001	4.1461e-001
10	1.0130e+002	8.9832e-001	1.0466e-006	5.9012e-001	6.0853e-001
12	1.0021e+002	8.9783e-001	1.0371e-006	9.2152e-001	7.3466e-001
14	9.9645e+001	8.9755e-001	1.0322e-006	1.3916e+000	8.7383e-001
15	9.9472e+001	8.9747e-001	1.0307e-006	1.6936e+000	9.4765e-001
16	9.9335e+001	8.9740e-001	1.0295e-006	2.0508e+000	1.0239e+000

Tabela 5.2-1 A tabela dá a variação de C, D, y_{2c}, y_{4c}, e $\nabla_{rad}(0)$ em função de η

Desta tabela verifica-se que à medida que η vai aumentando a convecção no centro vai-se tornando mais relevante, conforme se pode ver pela coluna de $\nabla_{rad}(0)$, cujo valor vai aumentando.

Assim o leitor pode também mediante os valores y_{2c} e y_{4c} e tendo em conta T_0 e P_0 para uma determinada massa, constatar que a temperatura central aumenta consoante o aumento do valor de η chegando mesmo a ter temperaturas centrais que são suficientes para se dar a produção de hélio pelo ciclo CNO. Este exercício de cálculo e estas conclusões podem facilmente ser confrontadas com outros resultados Fig. (5.2-6), confirmando-se o descrito acima.

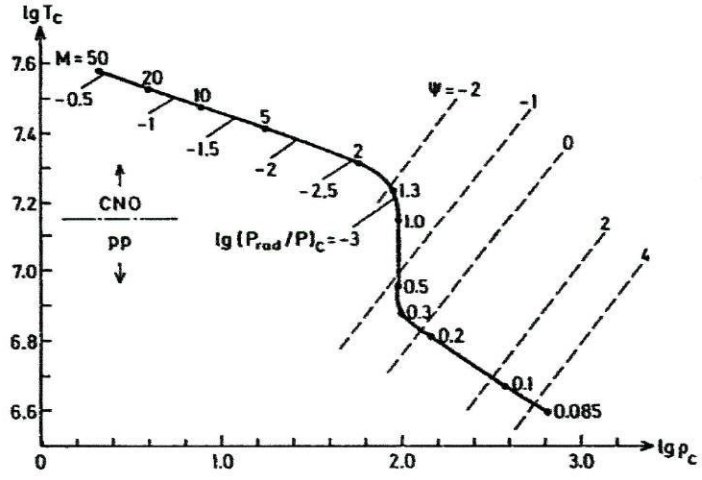
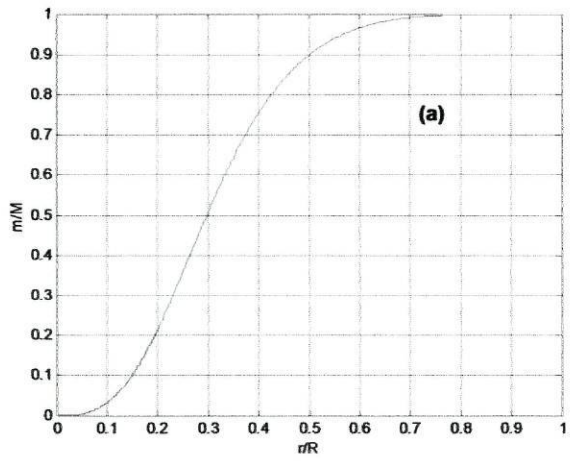
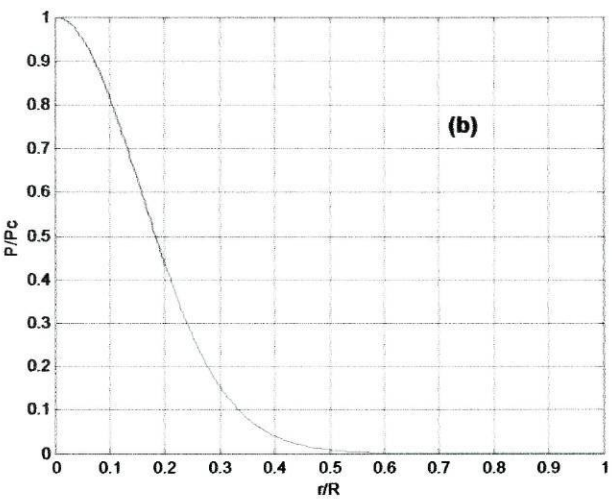


Fig. 5.2-6 A linha sólida dá-nos a Tc (K) em função da ρc (g cm-3) para a mesma idade. Os pontos fornecem a posição para certos modelos de estrelas entre $50M_{\Theta}$ e $0.085M_{\Theta}$. A linha a tracejado à esquerda dá a fronteira entre o domínio do ciclo CNO e o domínio das cadeias PP. (*Stellar Structure and Evolution*, R. Kippenhahn e A. Weigert, pag. 221)

Embora a tabela (5.2-1) possa fornecer alguma informação, esta é insuficiente para que o leitor compreenda a estrutura interna de uma estrela com convecção no centro, ou que tenha uma ideia de como será a sua estrutura em termos de variação de massa, pressão, temperatura e luminosidade, entre outras. Para tal apresenta-se um exemplo de uma estrela com 20 M_{Θ} e com um raio de cerca de 8 R_{Θ}. Vejamos então como se processa as referidas variações das grandezas físicas em função do raio Fig. (5.2-7).





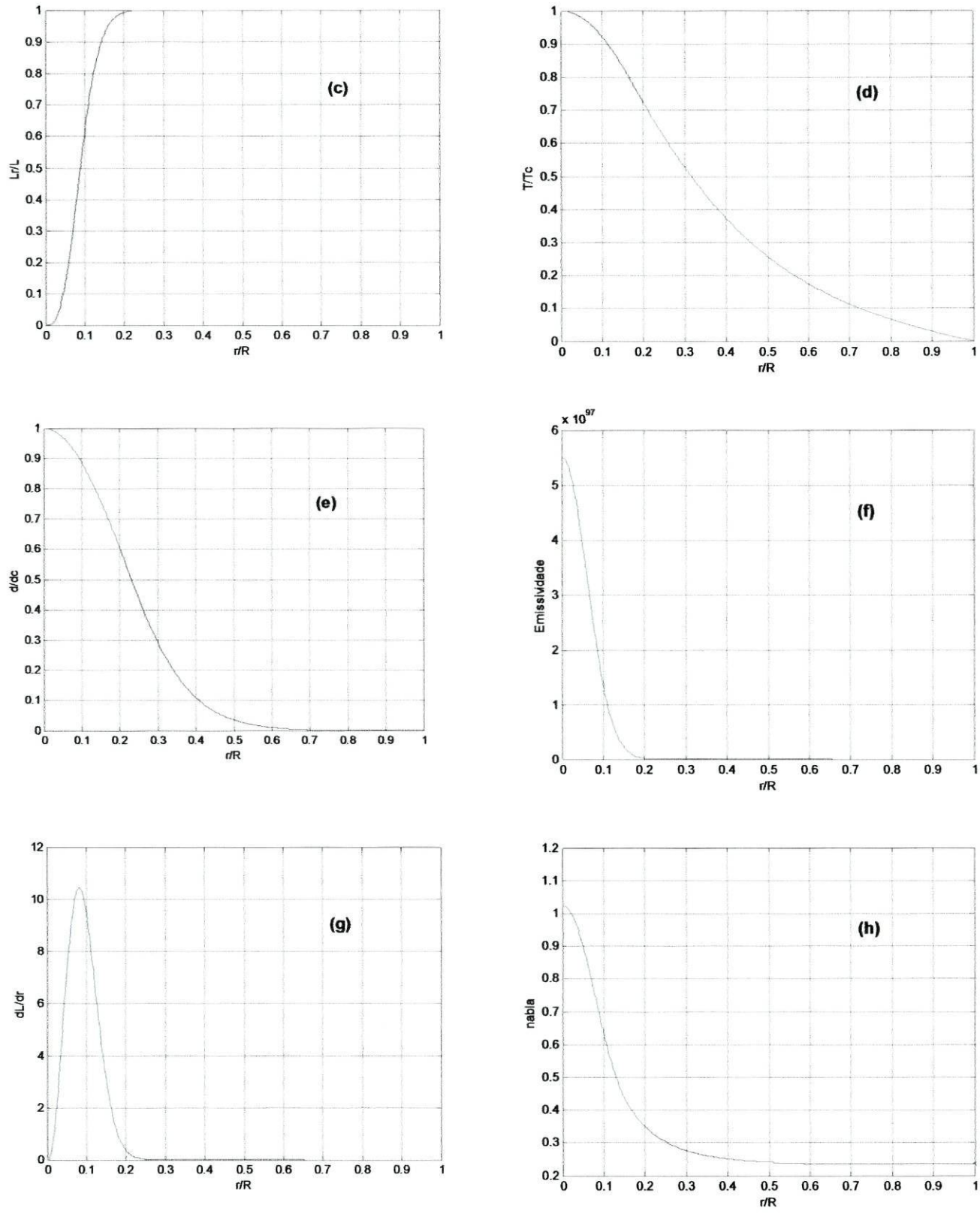


Fig. 5.2-7 Variação da massa, pressão, luminosidade, temperatura, densidade, emissividade, produção de energia e $\nabla(x)$, para uma estrela de $20M_{\Theta}$ com η=16, α=1 e β=3.5

Será agora importante que o leitor menos experiente nesta área faça uma breve análise dos gráficos e estabeleça a comparação dos mesmos com o modelo anterior, para que possa ver algumas diferenças que à primeira vista não serão muito evidentes, na medida em que o conjunto de gráficos, Fig. (5.2-7), possui traçados, à excepção da curva de $\nabla_{rad}(x)$, muito semelhantes aos que foram discutidos e apresentados no modelo radiativo.

Efectivamente, pode-se constatar que quanto à temperatura central, a estrela com as características antes referidas, possui elevadas temperaturas centrais, comparativamente a uma estrela de massa semelhante à do nosso Sol. tabela (5.2-2).

η	Pc	Tc	ρc	$\nabla_{rad}(0)$	Massa	Raio
4	1.0404e+17	1.2698e+07	6.1096e+01	3.6110e-01	1.9898e+33	6.9599e+10
16	1.0834e+16	3.3715e+07	2.3963e+00	1.0239e+00	3.9780e+34	5.2684e+11

Tabela 5.2-2 Comparação em termos de pressão central, Temperatura central, densidade central e $\nabla_{rad}(0)$, de estrelas com $20M_\Theta$ e $1M_\Theta$.

Estas temperaturas possibilitam como já se referiu a produção de energia por via do ciclo CNO, podendo-se também ver, numa primeira analise que entre este conjunto de gráficos e os que foram apresentados na Secção 4.4, relativamente às densidades centrais se constata que em ambas as situações a curva apresenta um crescimento apreciável no sentido do centro, que chega a ter um valor de 61.96, para uma estrela de $1M_\Theta$. Numa estrela de $20M_\Theta$, a densidade é inferior, cerca de 2.5, ou seja, um decréscimo de 90%. Este facto mostra-nos que existe para uma estrela de $1M_\Theta$, uma maior concentração de massa ao contrário da estrela do nosso presente exemplo.

Pela figura (4.4-1a), pode-se constatar que cerca de 30% do raio contém perto de 60% da massa e os outros 70% isto é 98% do volume, apenas contêm 40% da massa contrariamente à "nossa" estrela que em 30% do raio só contem 50% da massa. Relativamente à temperatura Fig. (4.4-1d) e Fig. (5.2-7d), esta também vai aumentando em direcção ao centro. No caso de estrelas com cerca de $1M_\Theta$, temos temperaturas centrais da ordem de 1.2×10^7 K. Em contrapartida, uma estrela de $20M_\Theta$ apresenta temperaturas centrais de 3.3×10^7 K. Este comportamento é necessariamente reflectido pela emissividade, na produção de Hélio, pois a dependência de ε na temperatura juntamente com o gradiente de temperatura, produz um rápido decrescimento de ε a partir do centro. Pode-se ver pelo gráfico da emissividade que

no caso de $1M_{\odot}$ esta decresce bastante, chegando a decrescer a uma taxa média de 10^{25}, a partir do centro até 60% do raio. Este facto é particularmente visível na luminosidade Fig. (4.4-1c); 90% é gerada até cerca de 30% do raio. No caso da estrela de $20M_{\odot}$ com uma Tc = 3.3×10^{7} K, como a energia é produzida por via CNO Fig. (5.2-6), e devido à elevada dependência de ε da temperatura, há uma maior concentração da luminosidade junto ao centro Fig. (5.2-7c). Verifica-se que nesta estrela 90% da luminosidade é gerada em cerca de 20% do raio, ou seja, em 20% da massa Fig. (5.2-7c,a).

Conclui-se assim que apesar das semelhanças dos traçados dos dois modelos, existem algumas características que significativamente diferem entre estrelas com massas diferentes. Vindo então ao encontro do que foi discutido no item anterior, na qual a massa é de facto um "parâmetro" importante na vida da estrela, como este fosse o seu "código genético".

Depois desta breve análise vamos então estudar agora o modelo para uma situação de convecção na superfície que completará o estudo das potencialidade do presente modelo.

5.2.2 Convecção na superfície

À semelhança do que se fez na subsecção anterior, será de igual modo interessante fazer uma pequena abordagem, como são e de como se processa a evolução das estrelas que possuem a característica estrutural de terem um núcleo radiativo e um envelope convectivo na superfície.

De acordo com a discussão anterior, dividiu-se as estrelas em duas categorias; as de grande massa e as de pequena massa. Assim e na linha do raciocinio seguido vai sequencialmente fazer uma descrição de como se processa a evolução das estrelas de pequena massa, na qual se pode incluir o nosso Sol.

i) Estrelas de pequena massa.

Define-se estrela de pequena massa, por estrelas que tenham uma massa mais pequena ou igual a $1.1M_{\odot}$. Estas estrelas utilizam para a fusão do hidrogénio em hélio, as cadeias PP, que possuem comparativamente às estrelas de grande massa, uma fraca dependência da temperatura. Como a energia produzida não é suficientemente concentrada no centro da estrela, por forma a induzir a convecção, o núcleo da estrela não é "misturado" e as reacções nucleares só podem ocorrer com o combustível localmente disponível. Quanto à sua temperatura esta é mais elevada no centro e por isso a taxa de "combustão" é mais elevada formando aí um gradiente de concentração de hidrogénio na região central da estrela. À

medida que a estrela vai queimando o Hidrogénio o centro da mesma vai ficando desprovido de hidrogénio. No entanto imediatamente fora do centro a temperatura é ligeiramente mais baixa e ainda haverá algum hidrogénio por queimar. As reacções continuam não numa esfera, mas sim num envelope tal como mostra a figura Fig. (5.2-8).

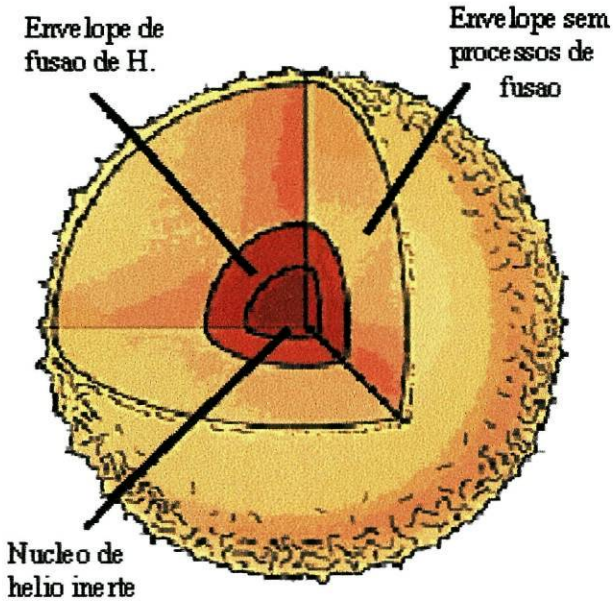


Fig. 5.2-8 Estrutura de uma estrela de pequena massa ($M > 1.4M_{\Theta}$), na fase de sub-gigante e gigante vermelha.

A continuação da combustão nuclear no dito anel esférico, significa que a estrela não terá de se contrair toda mas apenas na região central onde não existe produção de energia. Não obstante haver energia que continua a ser libertada pela estrela o que vai implica uma adição de energia suplementar. O centro começa desta forma a contrair-se libertando energia potencial da gravidade e tornando-se mais quente. Por causa do núcleo se tornar mais quente, o aumento de temperatura vai influenciar a fusão de hidrogénio que continua a ocorrer no envelope exterior aumentando assim a taxa de fusão do mesmo. Este calor sobe através das diversas camadas da estrela causando a expansão da mesma e consequentemente a expansão do raio. Sabendo que

$$L_s = 4\pi r_s^2 \rho T_{eff}^4 \qquad (5.2\text{-}3)$$

então como a luminosidade que um envelope convectivo pode transportar é aproximadamente constante para uma estrela com uma determinada massa, vemos que descresse a temperatura efectiva da estrela, causando uma aparência vermelha. Na evolução de uma estrela,

imediatamente após a sequência principal, esta move-se numa posição mais ou menos horizontal para a direita na zona das sub-gigantes, no diagrama H-R Fig. (5.2-9).

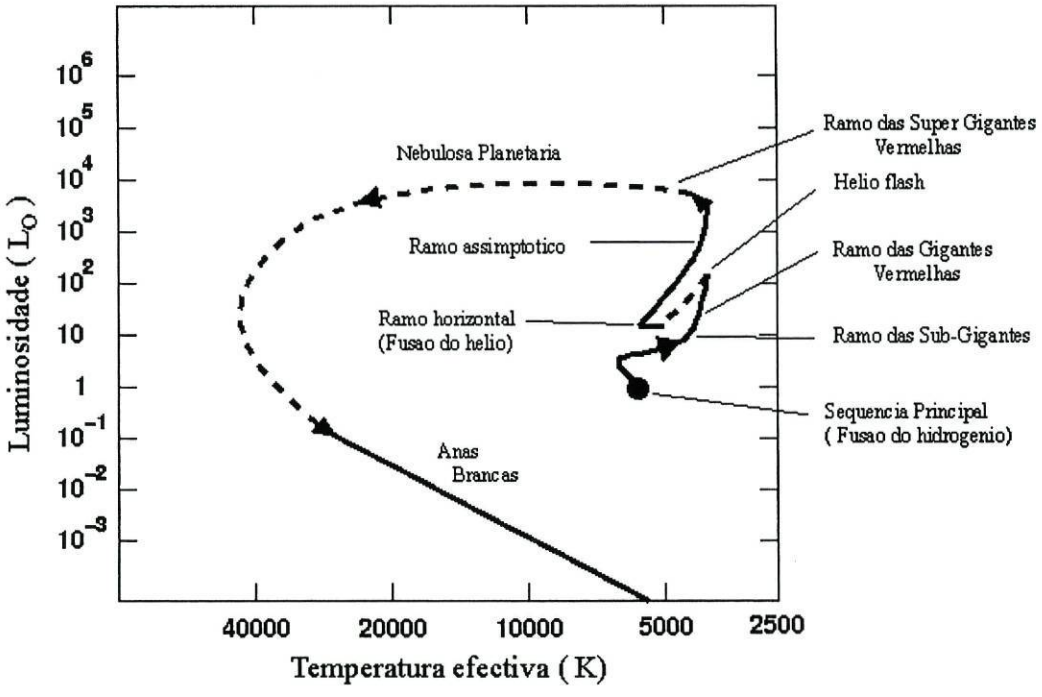


Fig. 5.2-9 Evolução completa das estrelas de pequena massa desde a S.P. até anã branca.

À medida que a estrela se expande, a temperatura efectiva diminui. Contudo esta não pode diminuir indefinidamente. Quando a temperatura de outras camadas da estrela decresce até um certo nível então estas tornam-se convectivas, o que possibilita uma maior luminosidade a ser transportada para o exterior forçando a evolução da estrela de pequena massa no diagrama H-R a ter um trajecto quase vertical até a região das gigantes Fig. (5.2-9). Enquanto isto o hélio no núcleo continua a ser contraído até se tornar degenerado. O aumento da gravidade na fronteira do núcleo e o envelope resultado na contracção do núcleo, aumenta a densidade do hidrogénio nesse envelope.

Este aumento da taxa da queima de hidrogénio nesse envelope "envia" a estrela para a região das gigantes vermelhas. A queima do hidrogénio que se verifica no envelope permite aquecer o núcleo degenerado até atingir o ponto em que a fusão do hélio em carbono é possível pelo processo tripla – alfa. A fusão e consequentemente o aquecimento do núcleo aumenta a pressão no núcleo, permitindo a manutenção da temperatura suficientemente alta para que as reacções nucleares se mantenham. À medida que o núcleo aquece a taxa de fusão

do hélio aumenta, aumentando a temperatura no centro, o que conduz a uma reacção termonuclear rápida do hélio Fig. (5.2-9).

Após o termino do hélio flash dá-se a expansão do núcleo, que reduz a gravidade na fronteira entre o núcleo e o envelope de hidrogénio, o que diminui o envelope. Desta forma embora a estrela tenha duas fontes de energia nuclear, uma no núcleo com a fusão do hélio e outra no envelope com a fusão do hidrogénio, a camada na qual o hidrogénio é consumido torna-se cada vez mais fraca, que faz com que a estrela produza menos luminosidade do que produzia antes. Esta baixa de luminosidade faz com que a estrela não possa continuar no estado de gigante vermelha, reduzindo assim as suas dimensões deslocando-se para a região do ramo horizontal Fig. (5.2-9).

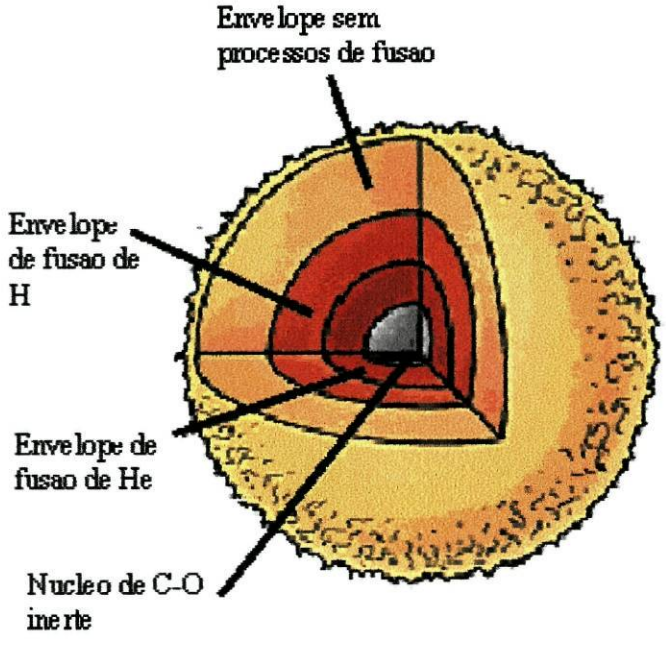


Fig. 5.2-10 Estrutura de uma estrela de pequena massa, no ramo assimptótico das gigante.

A história do estado de fusão do hélio é muito semelhante ao estado da fusão do hidrogénio. Quando o núcleo de hélio é esgotado é estabelecido um novo envelope, agora de fusão de hélio, que se situará entre o núcleo de carbono –oxigénio inerte e a camada de hidrogénio em fusão Fig. (5.2-10) evoluindo a estrela desta forma para o ramo assimptótico das gigantes Fig. (5.2-9). A estrela torna-se cada vez mais instável e começa a libertar massa através de um forte vento. Esta acentuada perda de massa leva à expanção do envelope como uma nuvem em torno da estrela, esta fase chama-se nebulosa planetária Fig. (5.2-11).



Fig. 5.2-11 Nubelosa de Helix. (Observatory Anglo-Australian)

Nesta fase já o núcleo degenerado de carbono –oxigénio, não produz energia ficando então uma pequena estrela no centro da nuvem, em lento arrefecimento. Quando finalmente é queimado o hidrogénio e o hélio a estrela desce pelo diagrama H-R até ao estágio final de anã branca. A figura Fig. (5.2-12) sumaria de uma forma mais pictural toda a evolução de uma estrela desde a sequência principal até ao estádio de anã branca.

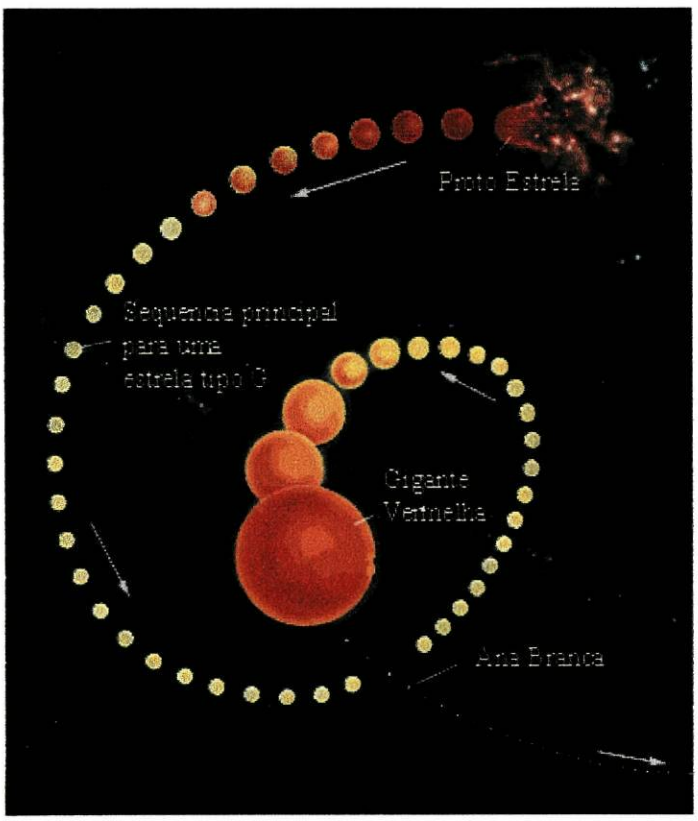


Fig. 5.2-12 Representação pictoral do ciclo de vida completo de uma estrela de pequena massa.

Após esta breve descrição evolutiva das estrela de pequenas massas, será interessante verificar os resultados obtidos do modelo em termos da estrutura interna das mesmas.

ii) Diagramas do modelo com convecção no centro.

Como o leitor já reparou tenho vindo a referir várias vezes que as estrelas de pequena massa têm a propriedade de possuírem uma região de transporte convectivo perto da superfície, visto que as temperaturas efectivas na superfície decrescem com a massa Fig. (5.2-13)

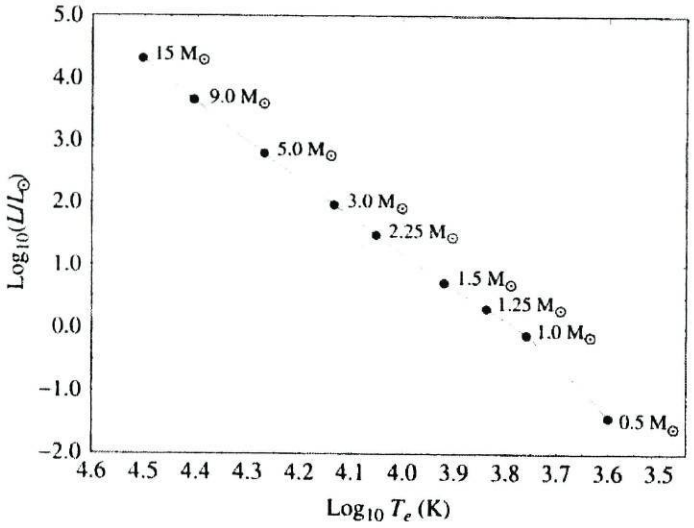


Fig. 5.2-13 Localização dos modelos estelares no diagrama H-R. Os modelos são calculados usando as equações de estrutura . (*Introdution to Modern Astrophysics*, B. W. Carroll e Dale A. Ostlie, pag 372)

e a opacidade aumenta. Este crescimento da opacidade permite que a convecção seja mais eficiente do que a radiação perto da superfície. Desta forma e tendo em atenção a necessidade de termos uma convecção na superfície, teremos que ter um valor η pequeno, ou seja, um valor que esteja em torno de 4 pois só ai é que se tem cadeias PP. Em segundo lugar, escolher-se α e β de modo que permita obter a convecção na superfície. A obtenção de α e β é tirada da equação (5.2-8) impondo a condição de que esta seja superior a 0.

Por conseguinte executou-se a rotina Procura[17] que permite obter os seguintes resultados, que são traduzidos através da Fig. (5.2-14) e da tabela (5.2-1).

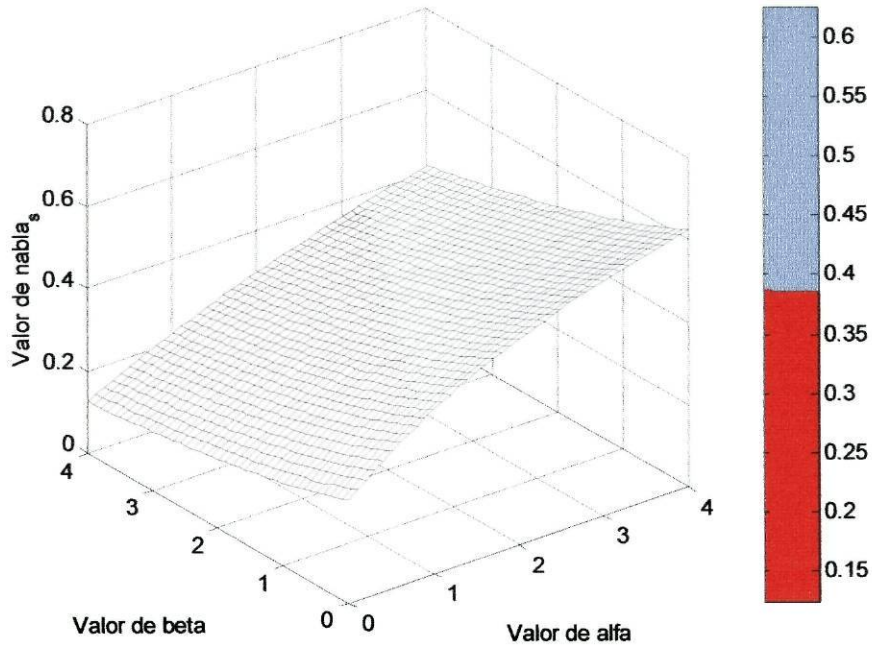


Fig. 5.2-14 Variação de $\nabla_{rad}(1)$ em função de $\alpha \in [0;4]$ e $\beta \in [0;4]$. Rotina *procura.*

Este gráfico mostra a variação do valor de $\nabla_{rad}(x)$ na superfície em função de α e β e dá-nos também uma ideia da região $(\alpha;\beta)$ na qual $\nabla_{rad}(1) \geq 0.4$. De forma a determinar com mais clareza quais os valores de α e β para os quais $\nabla_{rad}(1)$ é superior a 0.4, tem-se a seguinte tabela (5.2-1):

α	1	1.2	1.5	1.6	1.6	1.6	2	2	2	2	2	2	2.5
β	0	0	0	0	0.4	0.8	0	0.4	0.5	0.8	1	1.2	1.5

Tabela 5.2-1 Valores de α e β obtidos pela rotina (Procura) para os quais $\nabla_{rad}(1) > 0.4$

[17] Veja Anexo A6

Desta forma e sabendo quais os valores de α e β em que existe convecção na superfície, vamos ajustar os valores de α e β que trabalhamos em modelos anteriores. Utilizando as constantes (C, y_{2c}, D, y_{4c}) já obtidas para α=1 e β=3.5, no modelo radiativo, fixa-se o valor de α e tenta-se procurar o valor de β fazendo decrescer sucessivamente β até ao valor de 0, pois com α=1 e β=0, terei convecção na superfície. De referir que as equações que permitem o desenvolvimento da equação de estrutura na superfície são as que estão referidas na Fig. (5.1-1). No que diz respeito ao método numérico que permite determinar os valores de (C, y_{2c}, D, y_{4c}) ele continua a ser o mesmo que foi descrito na Secção 4.3. Porém, quanto ao algoritmo pelo qual se efectuam as sucessivas iterações de β facilmente se pode descrever pelo seguinte diagrama Fig. (5.2-15).

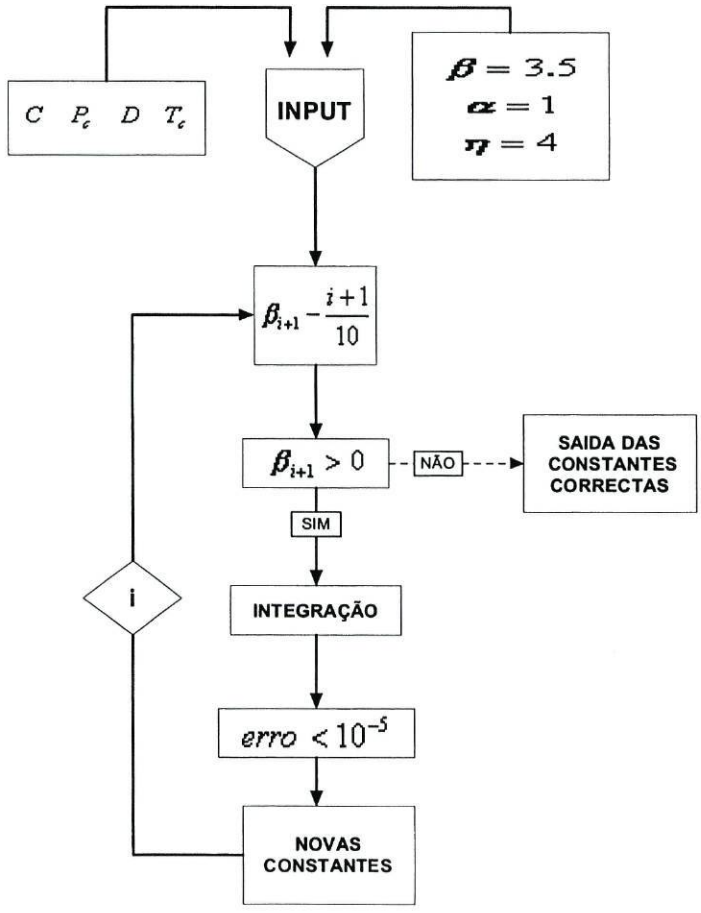


Fig. 5.2-15 Diagrama do algoritmo que permite obter o valor de β correcto para uma convecção junto à superfície.

É pois desta forma que a rotina Procura, permite saber os valores de α e β para os quais $\nabla_{rad}(1)$ seja superior a 0.4. Os resultados que se obtiveram não foram muito satisfatórios

na medida em que apenas se conseguiu obter um α=1 e β=2.7, ou seja, o método numérico não possibilitou a convergência de erros na integração das equações de estrutura, na medida em que não foi possível fazer descer o valor de β abaixo de 2.7. Desta forma, com α=1 e β=2.7 não se obtém convecção na superfície, pois $\nabla_{rad}(1) < 0.4$. Então os recursos deste modelo e a forma como se interlaçou as equações, ***Capítulo 4***, não permite ir além de uma convecção no centro. As hipóteses que se colocam para que o modelo não possibilite atingir este propósito são algumas e que passo a apresentar.

Uma seria a de se ter trabalhado com condições fronteiras na superfície não muito realistas, ou seja, em vez de considerar T(1) =P(1) = 0, considerar T(1) = Teff e P(1) =P_s/P_0, valores estes que são conhecidos a partir das observações. Contudo esta hipótese, embora tenha sido brevemente considerada na rotina (modconv)[18], não foi possivel conseguir uma melhoria significativa face aos resultados anteriores Tabela (5.2-2).

β	C	Y_{2c}	D	Y_{4c}
3.5	1.1705e-6	1.1622e2	1.0549e-1	8.9303e-1
3.4	1.2504e-6	1.0413e2	1.2539e-1	8.7405e-1
3.3	1.3425e-6	9.3516e1	1.4844e-1	8.5603e-1
3.2	1.4485e-6	8.4171e1	1.750e-1	2.0556e-1
3.1	1.5702e-6	7.5923e1	2.0556e-1	8.2262e-1
3	1.7100e-6	6.8623e1	2.4054e-1	8.0712e-1
2.9	1.8705e-6	6.2146e1	2.8049e-1	7.9235e-1
2.8	2.0548e-6	5.6386e1	3.2597e-1	7.7827e-1
2.7	2.2104e-6	7.2578e1	2.0533e-1	8.3427e-1

Tabela 5.2-2 Resultados obtidos das sucessivas iterações de β, sendo α=1.

Uma outra hipótese que a meu ver justifica o fracasso, se assim se pode chamar, é o facto de se ter considerado a opacidade de toda a estrela traduzida por uma única equação $K = k_0 \rho^{\alpha} T^{-\beta}$. Esta consideração veio a revelar-se errónea, pois a opacidade do material que compõe a estrela, não poderá ser expressa exacta e unicamente por esta relação, antes deverá

[18] Veja Anexo A7

ser calculada explicitamente, para varias composições, densidades, temperaturas e pressões. Outra forma será obter uma relação que pudesse considerar os valores da opacidade já determinados Fig. (5.2-16)

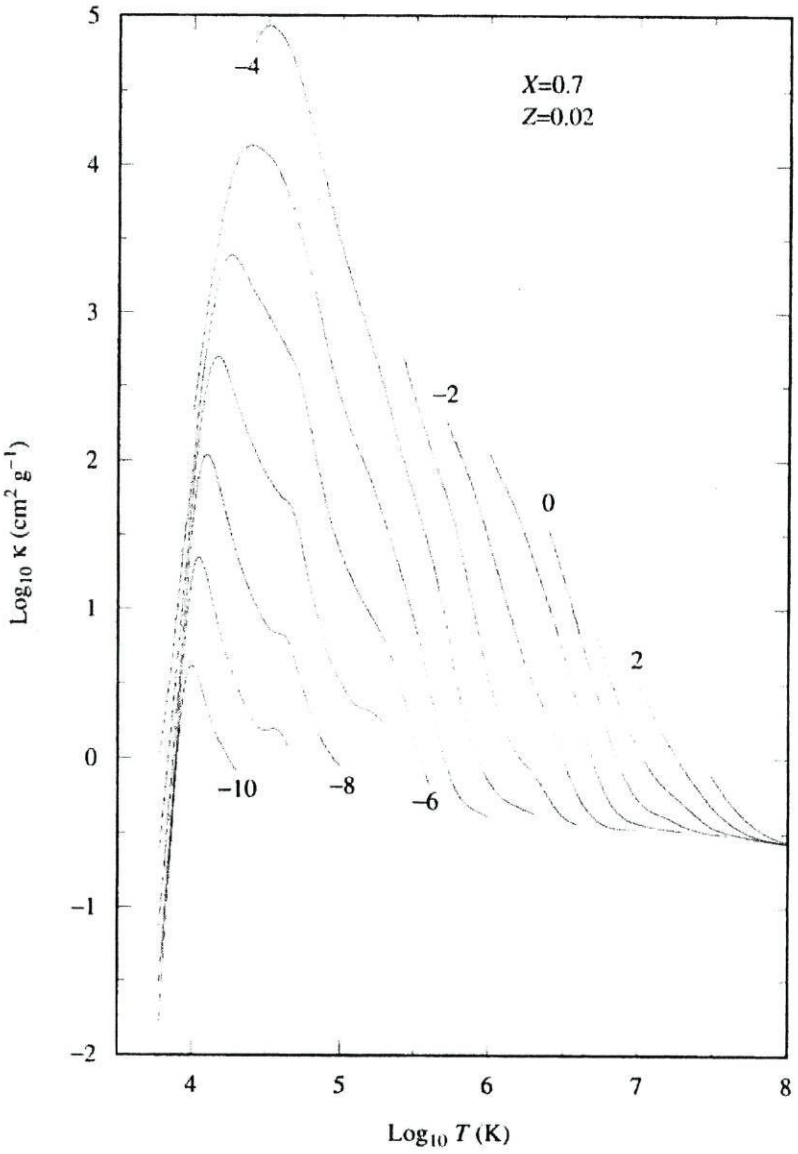


Fig. 5.2-16 Opacidades médias de Rosseland. As curvas estão etiquetadas com os valores da densidade ($\log_{10} \rho$). (*Introdution to Modern Astrophysics*, B. W. Carroll e Dale A. Ostlie, pag 275).

ou seja, apresentar uma relação que englobasse todos os tipos de opacidade. Teríamos então:

$$K = K_{bl} + K_{ll} + K_{es} \qquad (5.2\text{-}2)$$

em que K_{bl} representa a opacidade obtida da absorção ligado-livre, K_{ll} opacidade obtida da absorção livre-livre e K_{es} opacidade obtida da absorção do espalhamento. Poder-se-ia ainda considerar que

$$\begin{aligned} K_{bl} &= 4.34\times10^{25} Z(1+X)\rho T^{-3.5} \\ K_{ll} &= 3.68\times10^{22} (1-Z)(1+X)\rho T^{-3.5} \\ K_{es} &= 0.2(1+X) \end{aligned} \qquad (5.2\text{-}3).$$

Desta forma ter-se-ia uma opacidade total da estrela, que engloba o tipo de opacidade que está mais próximo do que na realidade ocorre em termos de opacidade. Finalmente outra hipótese seria, mantendo a mesma linha de raciocino em termos da construção das equações de estrutura, a introdução de novas constantes que estariam relacionadas com o fenómeno da convecção[19]. Assim termino este capítulo, talvez com um pequeno sabor a amargo por não se ter obtido o objectivo de criar um modelo matemático que traduza em termos gerais e o mais realista possível a nossa estrela. Contudo não é de considerar que o modelo tal como é concebido esteja longe da realidade de qualquer corpo estelar do Universo. Pois como já vimos e confrontamos ele permite com relativa tranquilidade dar uma imagem da estrutura de certo tipo de estrelas. Por conseguinte será então interessante, e é objectivo do seguinte capítulo, ver de que forma é que se pode enquadrar tudo o que temos vindo a falar e a concluir, no ensino da Astronomia e nomeadamente na Matemática.

[19] Bibliografia "Structure and evolution of the stars" Martin Schwarzschild pag. 104-105

" A cultura científica
resulta precisamente da
síntese dos dois termos
complementares: a teoria e a prática"
Sebastião e Silva "Guia para
a utilização do compêndio de
Matemática"

CAPÍTULO 6

MATEMÁTICA E A ASTRONOMIA

Introdução

Os modelos matemáticos podem ter diversas formas mas com frequência consistem basicamente numa equação ou num sistema de equações ou num sistema de inequações. Se tivermos diversas variáveis actuando por uma equação matricial, sendo necessário considerar taxas de variação de algumas variáveis teremos então um modelo descrito por equações diferenciais. Assim, um modelo matemático é uma estrutura matemática que está a descrever as características de um fenómeno em estudo. Aos processos activos de idealizar um modelo matemático chama-se modelação matemática.

6.1 O porque da modelação no ensino das ciências

Durante as ultimas décadas as aplicações e a modelação matemática alem de terem atraído considerável atenção na comunidade internacional ligada à educação das ciências, ganharam posições bem visíveis na maioria dos currículos e nomeadamente nos currículos de matemática um pouco por todo o mundo. Naturalmente as razões para isto variam com o lugar e o nível educacional. No entanto algumas razões parecem ser comuns a muitos lugares.

Primeiro de tudo é um traço característico do desenvolvimento nos últimos vinte anos o facto de se dar uma formação em Matemática e em Astronomia a uma porção cada vez maior de alunos de cada nível etário.

Pode-se dizer que a matemática, bem como a astronomia tornaram-se disciplinas para todos. Isto acontece principalmente porque a competência matemática adquiro uma importância crescente para o exercício do estudo da astronomia, Física, bem como o exercício de um largo espectro de actividades da sociedade e consequentemente para a preparação dos jovens para o trabalho e a cidadania. A associação da matemática com estas finalidades verificou-se através da aplicação da matemática a problemas e situações extra- matemática o que ocorre por meio de modelos matemáticos.

Ainda que a matemática seja ensinada à grande maioria dos alunos, não resulta dai automaticamente que o currículo deva incluir aplicações e modelação. Esta ideia vem de uma questão que se pode colocar "Não é verdade que o poder da matemática ao lidar com situações extra-matemáticas, que é o caso dos capítulos anteriores, reside precisamente na sua abstracção e generalização mais do que em ligações com casos específicos e circunstancias particulares e que ligações demasiadas estreitas a tais situações de aplicação pode mesmo por vezes impedir a activação eficiente e transparente da matemática?". Na realidade há alguma verdade neste facto, no entanto é esta a segunda principal razão para que se incluírem aplicações e modelação no currículo – experiências de todo o lado têm demonstrado que para a utilização eficiente e reflectida da matemática em situações extra- matemática, não é suficiente saber-se apenas matemática pura. Para se ser capaz de praticar e analisar de modo competente aplicações da matemática e construção de modelos em áreas como a astronomia, é preciso que haja aprendizagem e portanto ensino.

Em terceiro lugar, um argumento muito comum para se trabalhar com aplicações e modelação na matemática escolar consiste no facto de estas aplicações servirem para motivar e apoiar a aquisição e compreensão por parte dos estudantes de conceitos, métodos e resultados matemáticos. Basicamente pode-se dizer que este um argumento terá uma natureza táctica e não estratégica, uma vez que utiliza as aplicações e a modelação como veiculo para atingirem objectivos que podem nada ter a ver com a substancia das aplicações e da modelação. Mas não há mal nenhum num argumento táctico desde que se reconheça a sua natureza táctica.

Dando validade a estas três razões, para incluírem aplicações no currículo de matemática, apesar destas nada revelarem onde se deve colocar a nossa ênfase. Não será aqui

que o farei apenas vou por agora limitar-me a apresentar aspectos que me parecem importante na reflexão acerca do papel das aplicações e da modelação na matemática.

Uma das tarefas mais importantes para uma educação matemática que pretenda servir as nessecidades da generalidade dos estudantes é o de tornar visível o papel da matemática no mundo e nomeadamente na astronomia. Apesar da importância largamente reconhecida do papel que desempenha no mundo, a matemática é ainda em grande medida bastante invisível para a maioria das pessoas e nomeadamente no ensino da astronomia e em particular na compreensão e descrição da estrutura das estrelas. Tornar a matemática visível nessas áreas tem duas implicações:

i) Deve-se demonstrar que a matemática desempenha de facto um papel essencial na astronomia e logo na astrofísica, mostrando deste modo onde se pode encontrar matemática fora desta.

ii) Devemos demonstrar as razões porque é a matemática é capaz desempenhar este papel.

No fundo se queremos tornar visível o significado da matemática para se compreender e lidar com outras ciências e o mundo é crucial que se trabalhe no ensino da matemática em diversas ocasiões com casos autênticos de aplicações e modelação. Quando me refiro a um caso autentico de aplicação e modelação quero dizer que ele pertence a uma disciplina ou actividade existente fora da matemática e que compreende objectos, fenómenos, questões e problemas que tem interesse apenas para as pessoas ligadas a essa disciplina. De facto se todas as situações envolvendo aplicações e modelação que os estudantes encontram não são autênticos, é muito natural que eles fiquem com a impressão que tais situações servem apenas para disfarçar aquilo que é essencialmente matemática pura com uma roupagem pseudo-realista. Isto leva rapidamente a que se encarem as actividades de aplicações e modelação como um tipo de jogo e ficando a ideia de que a matemática escolar não terá qualquer aplicação com a realidade exterior à escola. Ao chegar a este ponto a conclusão de que a matemática escolar é inútil será uma certeza.

Efectivamente o aluno deve de vez enquanto ter a oportunidade de trabalhar com relativa profundidade todo um processo de modelação o qual inclui as seguintes componentes:

i) clarificar o objectivo de aplicar um modelo matemático ao contexto dado.

ii) Especificar os aspectos a considerar e as questões a responder, tal como as condições subjacentes.

iii) Realizar o processo de matematização, isto é, traduzir os elementos e as relações mais importantes da situação extra-matemática para um meio matemático.

iv) Interpretar os resultados em termos da situação extra- matemática.

v) Avaliar o modelo.

No entanto todo este raciocínio, poderá ser contra argumentado com a ideia de que em principio é possível que o estudante também adquira o conhecimento de uma determinada aplicação e modelação através de um ensino meramente expositivo pelo professor, ou através da leitura de manuais como receptores passivos de conhecimento. Contudo tal como ler os mais esplendidos livros sobre ciclismo não faz de cada um de nós um ciclista, ouvir exposições ou ler excelentes manuais não chega para tornar cada um de nós um produto criativo ou um analista competente de aplicações e modelações matemáticas.

Então para este fim é necessário se tornar uma "peça", um interveniente em trabalhos com aplicações de modo a que seja independente e activo pelo menos uma vez Por conseguinte, e tendo em atenção o que já foi referido antes, bem como, na necessidade de preencher uma lacuna que a meu ver existe, no ensino da astronomia e matemática e que tenho constatado da minha experiência como professor. É sabido que o ensino é peça estruturante de uma sociedade que se diga desenvolvida, contudo ele tem evoluído ao longo dos tempos e actualmente talvez viva uma das suas maiores crises. Pois os valores da sociedade mudaram, a informação chega a todo lado, com enorme rapidez e os fenómenos são cada vez mais massificados e por vezes a escola não vai ao encontro dos alunos. É neste contexto que o professor se tem de inserir, em que ensinar é muitas vezes sentido como um peso, uma complexa estrutura burocrática e em que se perde por vezes o verdadeiro prazer de ensinar.

Sendo as turmas cada vez mais heterogéneas, logo existem nelas diferentes interesses e diferentes projectos na qual o professor terá de servir. Contudo o professor na ancia de querer satisfazer os interesses de todos os alunos por vezes se esquece de despertar o espirito mais aguçado e atento. Deste modo, e à medida que ia elaborando este capítulo, pensei em construir um programa que tivesse por objectivo ser um complemento cientifico, de determinados conteúdos que se possam leccionar em disciplinas como Matemática, Física etc. Mas acima de tudo ser uma forma diferente de mostrar a astronomia.

Este programa tenta não só de ir ao encontro do aluno mais curioso, do aluno que quer ir para alem daquilo que é capaz de compreender, mas também procura responder à questão que constantemente me foi solicitada nos clubes de Astronomia na qual participei "... mas professor como é que eles sabem que é assim se nunca lá foram...". Deste modo e tendo em atenção, tudo o que foi discutido nos capítulos anteriores este programa pode ser uma ferramenta de apoio didáctico e uma forma de mostrar aos alunos o quanto a ciência depende da matemática e o quanto ela é importante para a compreensão dos fenómenos e objectos do universo.

6.2 Programa "Modelos Estelares"

Este programa a que se chamou "Modelos Estelares" é um programa elaborado utilizando os recursos disponíveis no Matlab. Caracteriza-se por possuir uma visualização gráfica agradável ao utilizador e possui um conjunto de botões que permitem uma interface com o utilizador muito simples. Em termos gerais podemos descreve-lo como tendo duas partes. Uma será a janela principal Fig. (6.2-1) que possibilita uma ligação a diferentes tipos de modelos elaborados e estudados anteriormente.

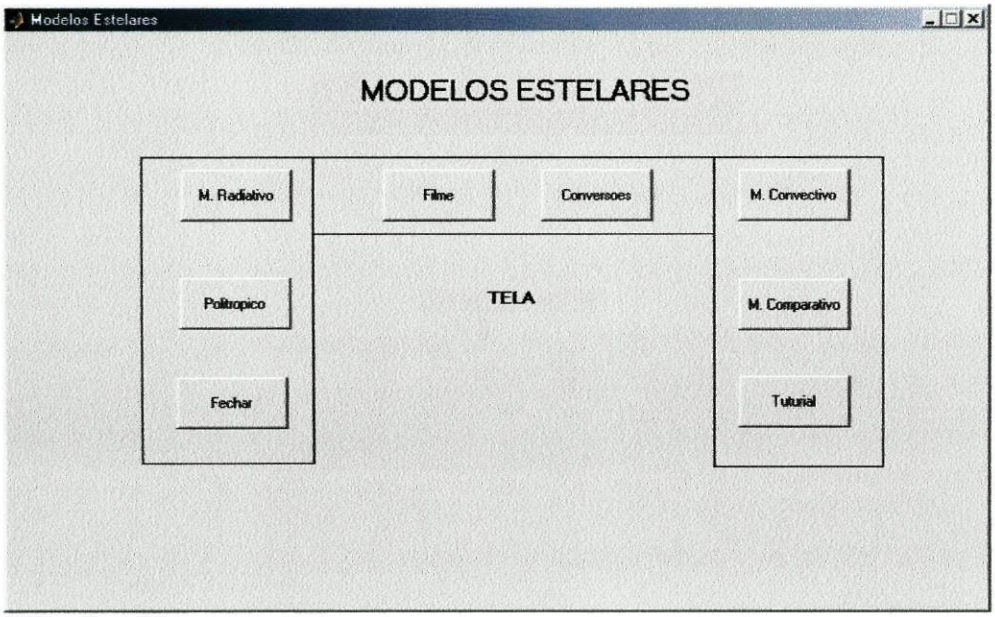


Fig. 6.2-1 "Tela" de apresentação do programa *Modelos Estelares*

Cada botão da primeira janela permite direccionar o utilizador para os diferentes modelos, na qual podem visualizar e estudá-los de duas formas: por gráficos ou por um conjunto de tabelas de valores Fig. (6.2-2).

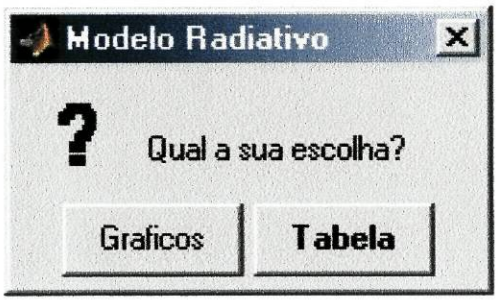


Fig. 6.2-2 Menu de escolha (*Modelos Estelares*)

Na opção de gráficos podem-se ver os gráficos obtidos nos diferentes modelos e que já apresentei em capítulos anteriores, através destes o professor não só mostra o modo como variam as diferentes quantidades físicas em função do raio da estrela, bem como estes possuem também uma pequena nota explicativa da sua importância na estrutura da própria estrela Fig. (6.2-3). Estes mesmos gráficos poderão ser utilizados como um meio didáctico para introduzir alguns conceitos programáticos de matemática e física que adiante se vai ver com mais detalhe.

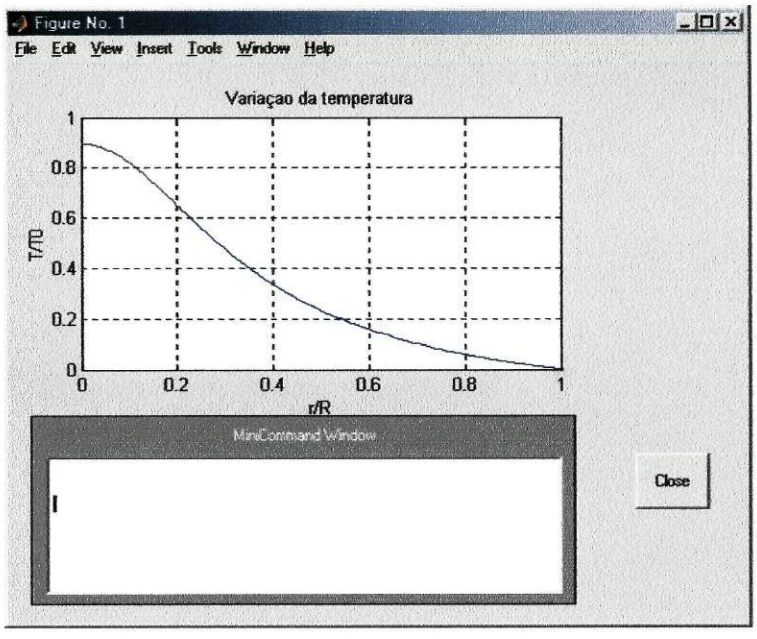


Fig. 6.2-3 Exemplo de uma representação gráfica apresentada pelo programa *Modelos Estelares*

Quanto à opção "Tabelas" Fig. (6.2-4) pode-se visualizar numa nova janela com um conjunto de tabelas que são a tradução numérica dos gráficos antes referidos. Estas também fornecem informação quanto ao valores da densidade, temperatura e pressão central.

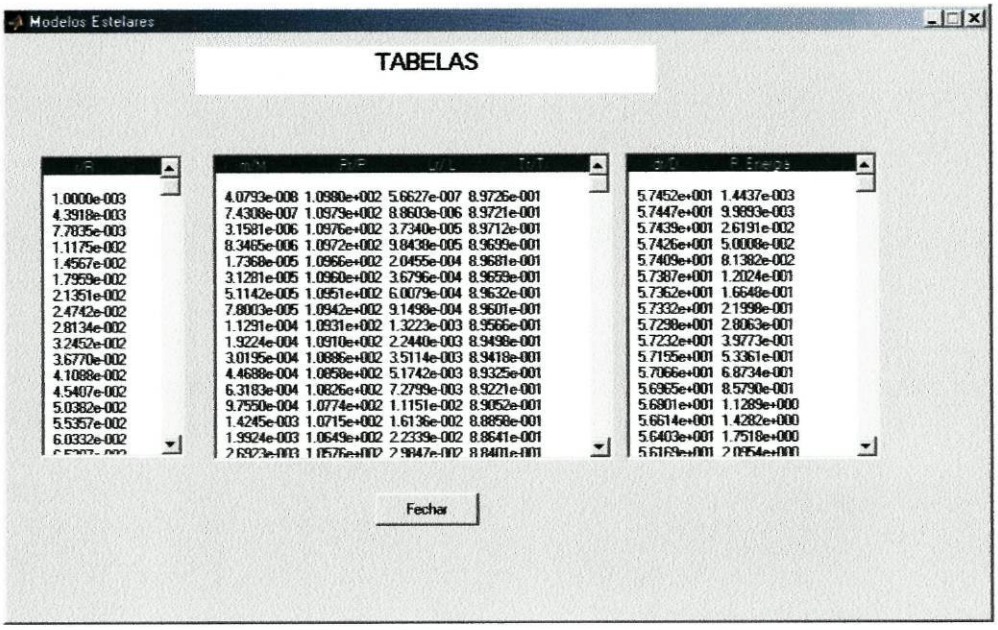


Fig. 6.2-4 Conjunto de tabelas das diversa grandezas físicas (*Modelos Estelares*)

A vantagem desta apresentação centra-se no facto de se poder manipular os valores numéricos obtidos servindo para posteriores aplicações didácticas de certos conteúdos programáticos Secção 6.3.

A outra parte do programa consiste na possiblidade de apresentar imagens na forma de slides, possibilitando desta forma que em simultâneo se possa dar por exemplo, explicações relativamente à evolução estelar. Desta forma e acompanhando com a explicação "técnica" dos diversos modelos pode-se leccionar uma aula de astronomia em que junta o "lúdico" ao puramente científico Fig. (6.2-5).

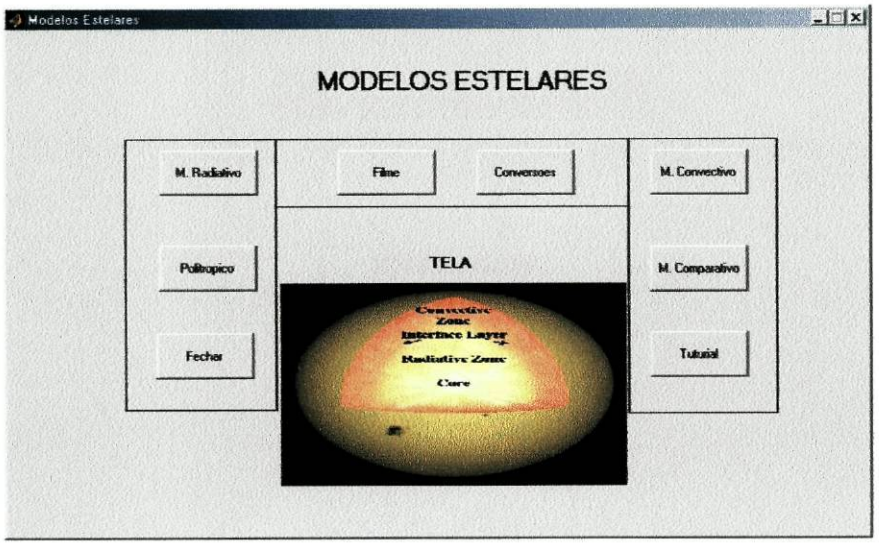


Fig. 6.2-5 Apresentação de slides didácticos relativos à estrutura de uma estrela (*Modelos Estelares*)

Tal componente permite que o programa possa ser utilizado no ensino de alunos que estejam no 7º e 8º anos em que os conceitos em termos matemáticos, nomeadamente na física e astronomia, são muitos rudimentares. O programa possui nesta primeira versão um complemento que consiste, num conjunto de informações de interesse para o aluno, que é um conversor de unidades o que por vezes pode ser bastante útil para a compreensão das unidades utilizadas Fig. (6.2-6).

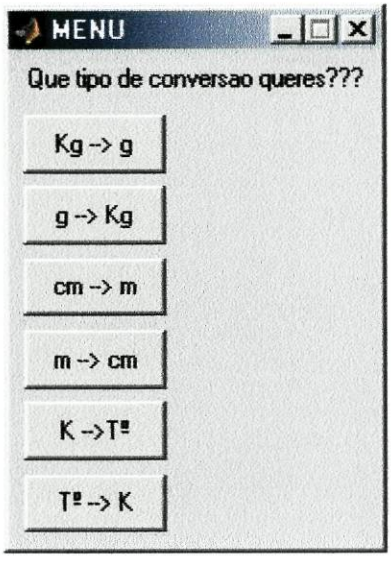


Fig. 6.2-6 Menu de escolha do tipo de conversão que o utilizador deseja. (*Modelos Estelares*)

Este, programa possui mais potencialidades que o professor, bem como o aluno, poderão explorar. Contudo a versão que é aqui apresentada é uma versão mais simples a qual estará sempre sujeita a sucessivas alterações consoante as necessidades solicitadas pelos utilizadores.

No entanto devo referir que este programa possui a necessidade de o utilizador ter o Matlab, como base, na medida em que o programa apenas consegue funcionar com o apoio do Matlab. Desta forma e não sendo objectivo deste capítulo dar uma descrição exaustiva de como funciona o programa, pois ele está equipado com um toturial, que pode dar informação sobre o seu funcionamento. Relativamente ás suas potencialidade na sala de aula estas podem ser exploradas pelo professor bem como pelo aluno. Não obstante, antes de terminar seria interessante talvez apresentar uma "árvore" de como o programa se encontra estruturado em termos de ficheiros[20], para melhor compreensão da inter-ligação que existe entre os mesmos Fig. (6.2-7).

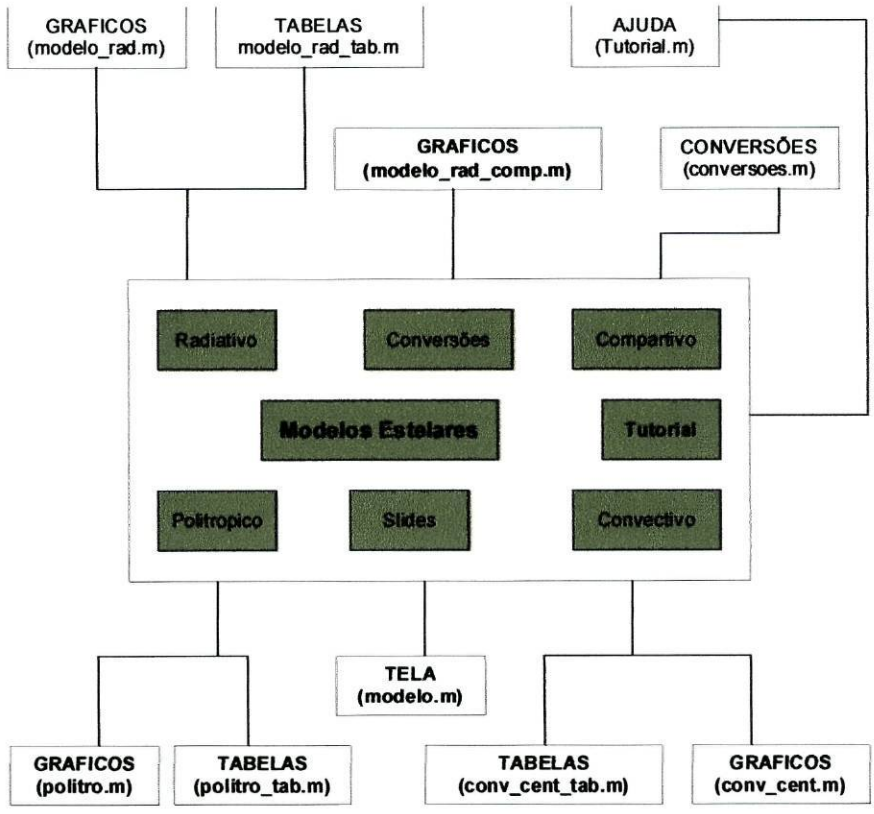


Fig. 6.2-7 Diagrama descritivo dos principais ficheiros intervenientes no programa Modelos Estelares

Estamos agora em condições de fornecer alguns exemplos práticos de como se poderá aplicar o programa "Modelos Estelares" no leccionamento de determinados conteúdos programáticos do ensino secundário e básico.

6.3 Algumas aplicações

No seguimento do que antes foi dito, vou agora apresentar alguns exemplos nos quais os modelos, antes estudados numa perspectiva mais científica, poderão encaixar nos conteúdos programáticos de matemática, de física, bem como no ensino de astronomia. Embora esta última área, não seja ainda uma disciplina por inteiro sendo apenas leccionada numa secção programática de físico-química no 8º ano , ou então é leccionada em clubes de astronomia, onde o aspecto da avaliação é mais atenuado.

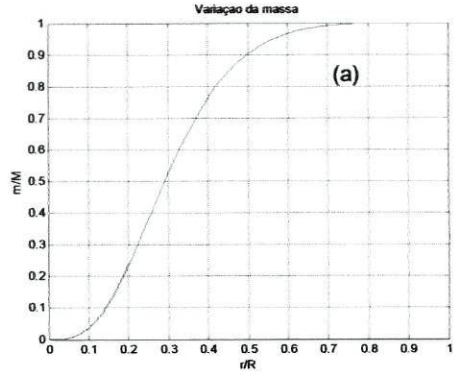
De referir antes de mais nada, que não pretendo explorar ao máximo cada exemplo que apresentar, na medida em que essa tarefa, cabe ao professor e ao aluno consoante a

[20] Veja Anexo A8.

realidade de cada turma e cada escola. Vou assim desta forma dar algumas pistas orientadoras, algumas possibilidades que se poderão explorar. Relativamente aos conteúdos programáticos do 11° ano, temos um capítulo chamado - introdução ao cálculo diferencial, no qual é abordada a noção de taxa de variação: calcula a taxa de medida de variação. Estas mesmas poderão ser iniciadas através de actividades como esta:

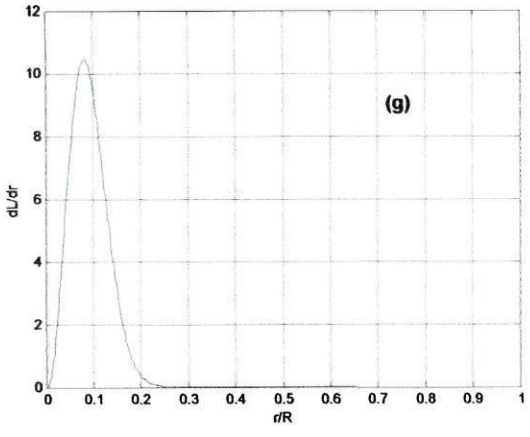
A variação da massa de uma estrela

O gráfico mostra a variação de m/M em função de r/R.



- Qual será a taxa de variação média da "massa"?
- Para que valores de r/R se pode considerar que a massa termina de crescer?
- Como justificas que a partir do raio relativo que antes calculas-te a massa termina de crescer?

Variação da produção de energia numa estrela



- Para que intervalos de r/R a taxa média de variação se anula?
- Para que intervalos a taxa média de variação será positiva?
- Para que intervalos a taxa média será negativa?
- Haverá algum intervalo onde a taxa média de variação seja positiva e a função não seja monótona?

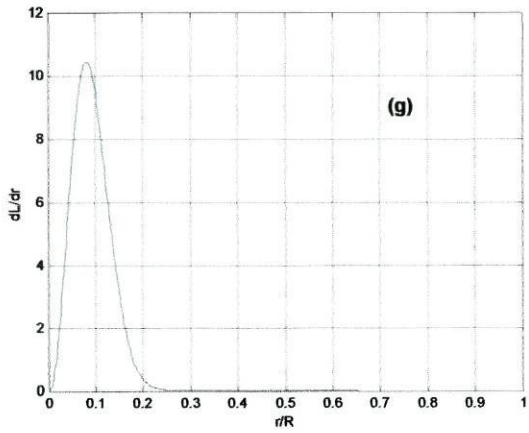
Com este exemplo de actividade os alunos devem observar a relação existente entre taxa de variação média e a monotonia da função. Deve-se salientar o facto de por exemplo uma taxa de variação média nula pode não corresponder a um intervalo onde a função se anula. O professor deverá sempre que possível ligar estes factos à realidade, questionando os alunos sobre a possibilidade ou a veracidade deste gráfico com a realidade fazendo desta forma uma ponte entre a Matemática e outras áreas do conhecimento nomeadamente a astronomia bem como a Física. Outra actividade que se pode desenvolver diz respeito à interpretação gráfica da taxa de variação bem como na definição de derivada e sua determinação.

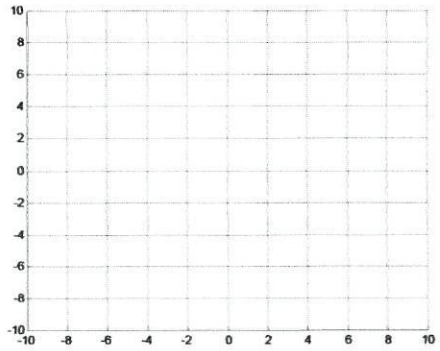
Indo ao programa "Modelos estelares", considere a tabela e o gráfico da luminosidade de um modelo politrópico.

- Determine a produção de energia média nos primeiros 6.959×10^{7} cm do raio.
- Qual será a produção de energia para r = 2.87×10^{10} cm.
- Em que valor de r a produção de energia será máxima?
- Em que intervalo é que a taxa de variação média da luminosidade é positiva e quando é negativa?
- Faça um possível esboço do gráfico da função derivada

Nesta actividade pode-se introduzir a noção intuitiva de derivada e noção geométrica da taxa de variação. Começando por determinar a produção de energia a 30% de r os alunos devem ser conduzidos a determinar outras produções de energias médias agora para intervalos cada vez mais pequenos em que o limite inferior do intervalo se vai aproximando de r = 2.87×10^{10} cm. Para cada intervalo os alunos podem representar a recta que passa nos pontos cujas abcissas são os extremos do intervalos, percebendo que as rectas secantes tendem para a tangente ao gráfico no ponto de abcissa 2.87×10^{10}. Nesta altura deve-se relacionar a produção de energia média em cada intervalo com o declive da recta tangente à curva nesse ponto.

É necessário discutir a diferença entre recta tangente à curva num ponto e recta que intersecta a curva nesse ponto.





- Traça tangentes ao gráfico em diferentes pontos.
- Determine o seu declive e faça um esboço da função derivada.

Esta actividade poderá contribuir para que os alunos clarifiquem a interpretação geométrica do conceito de derivada bem como o seu conceito físico como taxa de variação instantânea. A representação da função derivada ajudará os alunos a relacionar a monotonia com o sinal da derivada, bem como os máximos e os mínimos com os zeros da derivada.

Continuando, no mundo das aplicações no ensino mas agora relacionado com outra faixa etária (8º ano de escolaridade), algumas sugestões poderão ser interessantes. Sabendo que no 8ºano de escolaridade é introduzido o conceito de função, o professor poderá apresentar alguns gráficos como exemplos concretos de correspondências que poderão levar à discussão e clarificação do conceito de função e de toda a nomenclatura a ela subjacente.

Mediante a utilização do programa "Modelos Estelares ", o professor pode apresentar as funções de diversas formas tais como gráficos, tabelas e mesmo na linguagem corrente, levando deste modo o aluno a familiarizar-se com a terminologia adequada. É verdade e já foi dito e provado que efectivamente funções que estejam ligadas à Física bem como à astronomia, o que é o caso, ajudam a compreender a amplitude do conceito.

Seguindo este princípio o professor poderá solicitar ao aluno a interpretação, bem como a construção de tabelas que ilustrem a variação de uma determinada grandeza, como por exemplo a variação da temperatura ou qualquer outra.

Nos clubes de astronomia, como nas disciplinas, pode o programa ser usado para que se construam tabelas de densidade e temperatura centrais, para estrelas de diferentes massas, permitindo então a construção de gráficos densidade *versus* temperatura central. Estes gráficos poderão servir para identificar a partir de que massa é que uma estrela terá a produção por cadeias PP ou por cadeias CNO. Esta actividade vem em pleno ao encontro dos novos programas da disciplina de Física-Química, na qual se pretendem leccionar alguns aspectos relativos a reacções nucleares. Esta actividade nos clubes de Astronomia vem dar, a meu ver, um carácter mais cientifico e exacto à Astronomia não deixando desta forma passar a ideia de que os resultados apenas são obtidos da "mera" observação por telescópio.

No mesmo âmbito ou ambiente poder-se-ão também elaborar gráficos temperatura/densidade, que podem fornecer importantes informações relativamente ao comportamento dos gases ideais.

Muitas outras aplicações se poderiam aqui descrever de todo o trabalho realizado nos capítulos anteriores. No entanto, acho que fica aqui provado que a sua utilidade no ensino da Matemática, Físico-Química e Astronomia é inesgotável. É evidente que o professor não terá interessados se pretender explicar e mostrar como se obtiveram as equações que possibilitaram a construção dos modelos. Não é esse o objectivo, o aluno mais interessado poderá ficar com uma ideia da sua existência mas a sua compreensão será uma tarefa para outro nível que não é o secundário ou o básico. Em suma, os resultados que se obtiveram provaram ser sim um trampolim para outros conceitos e para uma fundamentação cientifica de certos aspectos que conhecem na Astronomia mas não percebem.

CONCLUSÃO

Tendo chegado ao fim deste trabalho chegou a altura de se fazer uma reflexão acerca de tudo o que foi dito anteriormente e de tudo o que se poderá fazer no futuro. Quando pensei elaborar este trabalho tinha dois objectivos em mente. O de mostrar ao meus alunos, e não só, o papel que a Matemática possui nas ciências, bem como fornecer a ideia, esta menos conhecida, de que muito do que se sabe em astronomia e em particular da estrutura interna das estrelas não é resultado da "mera" observação mas sim de uma construção matemática. Penso que este objectivo foi atingido.

O segundo objectivo consistiu em retratar a forma como evoluiu o conhecimento da estrutura interna das estrelas, bem como evoluiram as sucessivas construções matemáticas e quais os obstáculos que tiveram que enfrentar. Passo a passo fui construindo modelos mais complexos, aos quais introduzi mais relações e mais física. Efectivamente, o trabalho retrata implicitamente o lado contínuo do conhecimento. Há matemáticos que defendem que todas as equações que se possam criar para "traduzir" a natureza possuem inerentemente um grau de instabilidade para que se possa prever ou "traduzir" a natureza. No meu ponto de vista, e depois da condução deste trabalho, não concordo com a ideia de que as equações sejam instáveis; serão sim, incompletas. Poder-se-á assim dizer que são instáveis, porque a informação que lhes fornecemos é incompleta.

De facto, foi o que aconteceu nos diversos modelos matemáticos que se foram elaborando. Houve informação que não foi tida em consideração, como por exemplo a variação da composição química ao longo do raio ou as diferentes opacidades existentes.

Estes e outros "fenómenos" que não foram tidos em conta mas jogam um papel importante na estrutura da estrela. Será pois a introdução destes "parâmetros" o passo seguinte. É pois desta forma que o trabalho deixa "portas abertas" para a sua continuação. Contudo, neste momento levanta-se uma questão "será que os modelos anteriores estão desfasados da realidade e serão meros exercícios intelectuais?". Na minha opinião pode-se dizer que são modelos incompletos, que não retratam efectivamente o que se sabe acerca do Sol, por exemplo. Contudo, é legitimo também acreditar que estes modelos poderão sim "traduzir" uma estrela qualquer do Universo em um determinado instante da sua vida.

Termino então desta forma não com o sabor amargo de pensar possuir a verdade absoluta mas sim o sabor "doce" de saber que ainda mais se poderá fazer para que se possa

talvez um dia atingir o pleno conhecimento dos objectos que mais fascinaram a humanidade ao longo dos tempos, as Estrelas.

ANEXO A1

Tabela de Constantes Físicas e Astronómicas

Constantes Astronómicas		
Massa Solar	$1\ M_\Theta$	$= 1.989 \times 10^{33}$ g
Luminosidade Solar	$1\ L_\Theta$	$= 3.826 \times 10^{33}$ ergs s-1
Raio Solar	$1\ R_\Theta$	$= 6.9599 \times 10^{10}$ cm
Temperatura efectiva	$T_{eff\Theta}$	$= 5770$ K
Ano Luz	1 al	$= 9.4605 \times 10^{17}$ cm
Unidade Astronómica	1 UA	$= 1.4960 \times 10^{13}$ cm
Parsec	1 pc	$= 3.0857 \times 10^{18}$ cm
Dia sideral		$= 23^h\ 56^m\ 04.09054^s$
Dia Solar		$= 86400$ s
Ano Sideral		$= 3.155815 \times 10^7$ s

Constantes Físicas		
Constante Gravitacional	G	$= 6.67259 \times 10^{-8}$ dyne cm^2 g^{-2}
Velocidade da Luz	c	$= 2.99792458 \times 10^{10}$ cm s^{-1}
Constante de Planck's	h	$= 6.6260755 \times 10^{-27}$ erg s
Constante de Boltzmann's	k	$= 1.380658 \times 10^{-16}$ erg K^{-1}
Constante Sefan-Boltzmann	σ	$= 5.67051 \times 10^{-5}$ erg cm^{-2} s^{-1} K^{-4}
Constante de radiação	a	$= 7.56591 \times 10^{-15}$ erg cm^{-3} K^{-4}
Constante dos gases	$\Re$	$= 8.314510 \times 10^7$ ergs mole^{-1} K^{-1}
Massa do Protão	m_p	$= 1.6726231 \times 10^{-24}$ g
Massa do Neutrão	m_n	$= 1.674929 \times 10^{-24}$ g
Massa do electrão	m_e	$= 9.1093897 \times 10^{-28}$ g
Massa do hidrogénio	m_H	$= 1.673534 \times 10^{-24}$ g

ANEXO A2

Código do programa Modelo1

O Programa (**Modelo1**) elaborado em matlab e apresentado neste anexo tem como propósito efectuar a comparação entre o modelo Politrópico e o modelo solar – radiativo bem como mostrar os resultados obtidos por ambos. Este programa permite uma interface, na qual o utilizador poderá visualizar apenas um dos modelos de cada vez e efectuar se o desejar algumas comparações entre eles. Relativamente aos parâmetros de entrada que o utilizador deverá colocar, será o índice politrópico no caso de ser este o modelo a visualizar ou o valor de η no caso do modelo radiativo.

Quanto à sua estrutura, o programa apoia-se basicamente em dois programas que são eles o **Politro** (Anexo A3) e o **Modelo_rad** (Anexo A4).

```
%-------------------------------------------------------------------------%
%   Esta rotina permite apresentar os resultados obtidos                  %
% no modelo politropico e no modelo radiativo.                            %
%   Permite tambem efectuar a comparaçao em termos                        %
%    graficos dos dois modelos                                            %
%------------------------------ ----------------------------------------%

%-----------------------------------------%
%                                         %
%Tabela de Constantes Fisicas             %
%                                         %
%-----------------------------------------%

Cg=8.314510e+7;    %constantes dos gases ideais
niu=0.62;          %peso medio molecular dos elementos que compoe o gas
M=1.989e33;        % massa solar
R=6.9599e10;       % raio solar
G=6.67259e-8;      %Constante gravitacional
L=3.83e33;         %luminosidade
c=2.9979e10;       %velocidade da luz
ar=(4*5.67e-5)/c; %constante da radiação

P0=(G*M^2)/(4*pi*R^4);
T0=(niu*G*M)/(Cg*R);

global P1 P2 P3 N

A=menu('Qual o modelo que pertende visualizar?','Politropico','Radiativo');
if A==1
close
N=input('Qual o indice politropico (n)    ');

s1=politro(N);
```

```
end

if A==2
    close
    P1=input('valor de n: ');
end

B=menu('deseja continuar a visualizar outro Modelo??','Sim','Nao');
if B==2
   break
   close
end

close;

prompt={'Intruduza o valor de Eta:','Introduza o valor alfa:','Introduza o
valor de beta:'};
dlgTitle='Introduçao dos valos';
def={'5.5','1','3.5'};

   lineNo=1;
   AddOpts.Resize='on';
   AddOpts.WindowStyle='normal';
   AddOpts.Interpreter='none';
   resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle,lineNo,def,AddOpts);


a=str2num(resposta{1,1})
b=str2num(resposta{2,1})
c=str2num(resposta{3,1})

P1=a%input('valor de n: ');
P2=b;
P3=c;

if P1==5.5
    K01=1.1e-6;
    K02=109.7;
    K03=0.176;
    K04=0.897;
end

if (P1==3.5 | P1==4.5 | P1==4 | P1==5)
     K01=1.6e-6;
    K02=67;
    K03=2e-1;
    K04=0.8;
end

if P1==6
    K01=1.0e-6;
    K02=110;
    K03=0.2;
    K04=0.9;
end

disp('Aguarde um momento.....')
s2=modelo_rad(K01,K02,K03,K04);

close;
```

```
C=menu('Deseja vizualizar o teste comparativo entre modelos','sim','nao');
if C==2
    disp('Xau ate a proxima......')
   break
   close
end

D=menu('Que termos comparativos?','Por Grafico!','Por Diferenças');

switch D
case  1

%Comparaçao grafica na variaçao da massa
plot(s1(:,1),s1(:,2),s2(1:221,1),s2(1:221,2),'r',s2(222:270,1),s2(222:270,2
),'r')
xlabel('r');
ylabel('mr');
grid on
pause

%Comparaçao grafica na variaçao da pressao
plot(s1(:,1),s1(:,3),s2(1:221,1),s2(1:221,3),'r',s2(222:270,1),s2(222:270,3
),'r')
xlabel('r');
ylabel('Pr');
grid on
pause

%Comparaçao grafica na variaçao da Produçao de energia
plot(s1(:,1),s1(:,4),s2(1:221,1),s2(1:221,4),'r',s2(222:270,1),s2(222:270,4
),'r')
xlabel('r');
ylabel('dLr/dr');
grid on
pause

%Comparaçao grafica na variaçao da temperatura
plot(s1(:,1),s1(:,5),s2(1:221,1),s2(1:221,5),'r',s2(222:270,1),s2(222:270,5
),'r')
xlabel('r');
ylabel('Tr');
grid on
pause

%Comparaçao grafica na variaçao da Luminosidade
plot(s1(:,1),s1(:,6),s2(1:221,1),s2(1:221,6),'r',s2(222:270,1),s2(222:270,6
),'r')
xlabel('r');
ylabel('Lr');
grid on
case 2

% ------------------------------------------------------------------%
%                                                                   %
% Nesta parte do programa efectua-se as  diferenças                 %
%entre o Modelo politropico e o Modelo radiativo                    %
%                                                                   %
% ------------------------------------------------------------------%

   inter_m=interp1(s2(1:269,1),s2(1:269,2),s1(:,1),'linear');
   inter_p=interp1(s2(1:269,1),s2(1:269,3),s1(:,1),'linear');
```

```
   inter_Lp=interp1(s2(1:269,1),s2(1:269,4),s1(:,1),'linear');
   inter_t=interp1(s2(1:269,1),s2(1:269,5),s1(:,1),'linear');
  inter_L=interp1(s2(1:269,1),s2(1:269,6),s1(:,1),'linear');

   dif_m=(inter_m-s1(:,2))/M;
   dif_p=(inter_p-s1(:,3))/1e17;
   dif_Lp=(inter_Lp-s1(:,4))/1e22;
   dif_t=(inter_t-s1(:,5))/T0;
   dif_L=(inter_L-s1(:,6))/L;
   pause

%-------------------------------------%
% Graficos das diferenças   %
%-------------------------------------%

   plot(s1(:,1)/R,dif_m)
   xlabel('r/R');
   ylabel('m1-m2')
   grid on
   pause

   plot(s1(:,1)/R,dif_p)
   xlabel('r/R');
   ylabel('P1-P2')
   grid on

   pause
   plot(s1(:,1)/R,dif_Lp)
   xlabel('r/R');
   ylabel('P.E1-P.E2')
   grid on
   pause

   plot(s1(:,1)/R,dif_t)
   xlabel('r/R');
   ylabel('T1-T2')
   grid on
   pause

   plot(s1(:,1)/R,dif_L)
   xlabel('r/R');
   ylabel('L1-L2')
   grid on

end

E= menu('deseja visualizar novamente outro modelo','Sim','Nao');
if E==1
    clc
    close
    run modelo1
else
    break
    close
end
```

ANEXO A3

Código do programa Politro

O programa **Politro**, também elaborado no Matlab, permite calcular os resultados que foram apresentados no ***capítulo 3***. Este programa efectua a integração da equação de Lane-Emden (function Poli_sist) para diversos índices e em seguida, os gráficos da variação das grandezas físicas em função do raio, bem como o gráfico da solução da equação de Lane-Emden. Todos os resultados que são obtidos no programa apenas se podem visualizar mediante a "activação" do programa **Modelo1** (Anexo A2).

Por fim refira-se que a integração da equação de Lane-Emden , foi feita através de uma função pré definida no Matlab (ode45), que é uma função que faz a integração de sistemas de equações diferenciais pelo método de Runge-Kuta. Todas fórmulas, que foram usadas para efectuar os cálculos estarão descritas e deduzidas no ***capítulo 3***.

```
%----------------------------------------%
%                                        %
%      MODELO POLITROPICO                %
%                                        %
%   Filipe Manuel Freire Fernandes       %
%   Mestrado em Ensino da Astronomia     %
%               2001                     %
%----------------------------------------%

%----------------------------------------%
%Entrada do indice Politropico           %
%Saida da variaçao das grandezas         %
%fisicas consuante o indice escolhido    %
%----------------------------------------%

function poli=politro(N)

%-------------------------------%
%tabela de constantes Fisicas   %
%-------------------------------%

Cg=8.314510e+7;    %constantes dos gases ideais
niu=0.62;          %peso medio molecular dos elementos que compoe o gas
M=1.989e33;        % massa solar
R=6.9599e10;       % raio solar
G=6.67259e-8;      %Constante gravitacional
LS=3.83e+33;     %luminosidade

if N==5
     % Soluçao da equaçao de Lane-Emden para n=5
   [t,p]= ode45('poli_sist',[0.001 30],[1 0]);
   plot(t,p(:,1));
   grid;
   xlabel ('Valor de z');
```

```
   ylabel('valores de W')
   title('Soluçao da equaçao para n= 5');
   poli=[0 0 0 0 ];
end

if N==0
    % Soluçao da equaçao de Lane-Emden para n=0
   [t,p]= ode23('poli_sist',[0.01 sqrt(6)],[1 0]);
   plot(t,p(:,1));
   grid;
   xlabel ('Valor de z');
   ylabel('valores de W')
   title('Soluçao da equaçao para n= 0');

   aux=[t p(:,1)];
   size(p(:,1))
   aux(length(aux),1);
   aux1=[t p(:,2)];
   a=-(aux(length(aux),1))/(3*aux1(length(aux1),2));
   b=-1/(aux(length(aux),1)*aux1(length(aux1),2));
   c=1/(4*pi*aux1(length(aux1),2).^2);
   dc=(M/(4*pi*R^3))*(3*a)
   Pc=c*((G*M^2)/R^4)
   Tc=b*niu*((G*M)/(Cg*R))
   h=R/sqrt(6);
   r=h.*t;

   %variaçao da pressao
   pr=((3*G*M^2)/(8*pi*R^4))*(1-(r/R).^2);
   plot(r,pr);
   grid;
   title('variaçao da pressao para n=0');
   xlabel('valor de r');
   ylabel('valor de P');
   pause;

   %variaçao da temperatura
   tr=(niu/Cg)*((G*M)/2*R)*(1-(r/R).^2);
   plot(r,tr);
   grid;
   title('variaçao da temperatura para n=0');
   xlabel('valor de r');
   ylabel('valor de T');
   pause;

   %variaçao da massa
   mr=4*pi*dc*(h^3)*(-p(:,2).*t.^2);
   plot(r,mr);
   grid;
   title('variaçao da massa para n=0');
   xlabel('valor de r');
   ylabel('valor de m');
   pause

   %variaçao da produç~ao de energia
   E0=4.85e-27;
   dL=4*pi*E0*(r.^2).*dc^2.*(tr).^4;
   plot(r,dL);

   grid on;
   title('variaçao da produçao de energia para n = 0');
```

```
   xlabel('valor de r');
   ylabel('valor de dL/dr');

     pause
   %variaçao da luminosidade


for i=1:(length(dL)-1)
       A(i,1)=((r(i+1,1)-r(i,1))*(dL(i+1,1)+dL(i,1)))/2;
end
L=[0;A(:,1)];
Lr=cumsum(L)
    plot(r/R,Lr/LS)
    axis([0 1 0 1])
    grid on;
    title('variaçao da luminosidade para n=0');
    xlabel('r/R');
    ylabel('Lr/L');
   poli=[r mr pr  dL tr Lr];

else

switch N

case 1
   % Soluçao da equaçao de Lane-Emden para n=1
   options=odeset('RelTol',1e-6);
   [t,p]= ode45('poli_sist',[0.001 pi],[1 0],options);
   plot(t,p(:,1));
   grid;
   xlabel ('Valor de z');
   ylabel('valores de W')
   title('Soluçao da equaçao para n= 1');
   aux=[t p(:,1)];
   size(p(:,1));
   aux(length(aux),1);
   aux1=[t p(:,2)];
   a=-(aux(length(aux),1))/(3*aux1(length(aux1),2));
   b=-1/(2*aux(length(aux),1)*aux1(length(aux1),2));
   c=1/(4*pi*2*aux1(length(aux1),2).^2);
   dc=(M/(4*pi*R^3))*(3*a)
   Pc=c*((G*M^2)/R^4)
   Tc=b*niu*((G*M)/(Cg*R))
   h=R/(aux(length(aux),1));
   K=(2*G*R^2)/pi
   r=h.*t;
   pause;

   %variação da pressão
   pr=K*(dc^2)*(p(:,1).^2);
   plot(r/R,pr/Pc);
   grid;
   title('variaçao da pressao para n=1');
   xlabel('r/R');
   ylabel('P/Pc');
   pause;

   %variaçao da temperatura
   tr=((niu*K)/Cg)*dc*p(:,1);
   plot(r/R,tr/Tc);
   grid;
```

```
   title('variaçao da temperatura para n=1');
   xlabel('r/R');
   ylabel('T/Tc');
   pause;

   %variaçao da massa
   mr=4*pi*dc*(h^3)*(-p(:,2).*t.^2);
   plot(r/R,mr/M);
   grid;
   title('variaçao da massa para n=1');
   xlabel('r/R');
   ylabel('m/M');
   pause;

   %variaçao da densidade
   dr=dc*p(:,1);
   plot(r,dr);
   grid;
   title('variaçao da densidade para n=1');
   xlabel('r/R');
   ylabel('d/dc');
   pause;

   %variaçao da produçao de energia
   E0=1.31e-27;
   alfa=4*pi*E0*(dc^6)*((niu*K)/Cg)^4;
   y=alfa*(r.^2).*(p(:,1).^6);
   plot(r,y)
   grid;
   title('variaçao da produção de energia para n=1');
   xlabel('r/R');
   ylabel('dL/dr');
   pause

   %variaçao da luminosidade

   for i=1:(length(y)-1)
      A(i,1)=((r(i+1,1)-r(i,1))*(y(i+1,1)+y(i,1)))/2;
   end

   L=[0;A(:,1)];
   Lr=cumsum(L)
   plot(r/R,Lr/LS)
   grid on;
   title('variaçao da luminosidade para n=1');
   xlabel('r/R');
   ylabel('Lr/L');
case 1.5
   % Soluçao da equaçao de Lane-Emden para n=1.5
   options=odeset('RelTol',1e-6);
   [t,p]=ode23('poli_sist',[0.001 3.65375],[1 0],options);
   plot(t,p(:,1));
    grid;
   xlabel ('Valor de z');
   ylabel('valores de W')
   title('Soluçao da equaçao para n= 1.5');
   aux=[t p(:,1)];
   size(p(:,1));
   aux(length(aux),1);
   aux1=[t p(:,2)];
   a=-(aux(length(aux),1))/(3*aux1(length(aux1),2));
```

```
b=-1/(2.5*aux(length(aux),1)*aux1(length(aux1),2));
c=1/(4*pi*2.5*aux1(length(aux1),2)^2);
dc=(M/(4*pi*R^3))*(3*a)
Pc=c*((G*M^2)/R^4)
Tc=b*niu*((G*M)/(Cg*R))
h=R/(aux(length(aux),1));
K=(4*pi*G*(h^2)*(dc^(1/3)))/(5/2);
r=h.*t;
pause;

%variação da pressao
pr=K*(dc^(5/3))*sqrt(p(:,1).^2);
plot(r/R,pr/Pc);
grid;
title('variaçao da pressao para n=1.5');
xlabel('r/R');
ylabel('P/Pc');
pause;

%variaçao da temperatura
tr=((niu*K)/Cg)*(dc^(1/N))*p(:,1);
plot(r/R,tr/Tc);
grid;
title('variaçao da temperatura para n=1.5');
xlabel('r/R');
ylabel('T/Tc');
pause;

%variaçao da massa
mr=4*pi*dc*(h^3)*(-p(:,2).*t.^2);
plot(r/R,mr/M);
grid;
title('variaçao da massa para n=1.5');
xlabel('r/R');
ylabel('m/M');
pause;

%variaçao da densidade
dr=dc*sqrt(p(:,1).^3);
plot(r/R,dr/dc);
grid;
title('variaçao da densidade para n=1.5');
xlabel('r/R');
ylabel('d/dc');
pause;

%variaçao da produçao de energia
E0=5.3e-28;
alfa=4*pi*E0*(dc^(14/3))*((niu*K)/Cg)^4;
y=alfa*(r.^2).*(p(:,1).^7);
plot(r,y)
grid;
title('variaçao da produção de energia para n=1.5');
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
pause

%variação da luminosidade

for i=1:(length(y)-1)
   A(i,1)=((r(i+1,1)-r(i,1))*(y(i+1,1)+y(i,1)))/2;
```

```
    end

    L=[0;A(:,1)];
    Lr=cumsum(L)
    plot(r/R,Lr/LS)
    grid on;
    title('variaçao da luminosidade para n=1.5');
    xlabel('r/R');
    ylabel('Lr/L');

case 3
    % Soluçao da equaçao de Lane-Emden para n=3
    options=odeset('RelTol',1e-6);
    [t,p]= ode45('poli_sist',[0.001 6.89685],[1 0],options);
    plot(t,p(:,1));
     grid;
    xlabel ('Valor de z');
    ylabel('valores de W')
    title('Soluçao da equaçao para n= 3');
    aux=[t p(:,1)];
    size(p(:,1));
    aux(length(aux),1);
    aux1=[t p(:,2)];
    a=-(aux(length(aux),1))/(3*aux1(length(aux1),2));
    b=-1/(4*aux(length(aux),1)*aux1(length(aux1),2));
    c=1/(4*pi*4*aux1(length(aux1),2)^2);
    dc=(M/(4*pi*R^3))*(3*a)
    Pc=c*((G*M^2)/R^4)
    Tc=b*niu*((G*M)/(Cg*R))
    h=R/(aux(length(aux),1));
    K=(4*pi*G*(h^2)*(dc^(2/3)))/4;
    r=h.*t;
    pause;

    %variação da pressão
    pr=K*(dc^(4/3))*(p(:,1).^4);
    plot(r/R,pr/Pc);
    grid;
    title('variaçao da pressao para n=3');
    xlabel('r/R');
    ylabel('P/Pc');
    pause;

    %variaçao da temperatura
    tr=((niu*K)/Cg)*(dc^(1/3))*p(:,1);
    plot(r/R,tr/Tc);
    grid;
    title('variaçao da temperatura para n=3');
    xlabel('r/R');
    ylabel('T/Tc');
    pause;

    %variaçao da massa
    mr=4*pi*dc*(h^3)*(-p(:,2).*t.^2);
    plot(r/R,mr/M);
    grid;
    title('variaçao da massa para n=3');
    xlabel('r/R');
    ylabel('m/M');
    pause;
```

```
   %variaçao da densidade
   dr=dc*(p(:,1).^3);
   plot(r/R,dr/dc);
   grid;
   title('variaçao da densidade para n=3');
   xlabel('r/R');
   ylabel('d/dc');
   pause;

   %variaçao da produçao de energia
   E0=9.75e-30;
   alfa=4*pi*E0*(dc^(10/3))*((niu*K)/Cg)^4;
   y=alfa*(r.^2).*(p(:,1).^10);
   plot(r,y)
   grid on;
   title('variaçao da produção de energia para n=3');
   xlabel('r/R');
   ylabel('dL/dr');
   pause

   %variação da luminosidade

   for i=1:(length(y)-1)
      A(i,1)=((r(i+1,1)-r(i,1))*(y(i+1,1)+y(i,1)))/2;
   end

   L=[0;A(:,1)];
   Lr=cumsum(L);
   plot(r/R,Lr/LS)
   grid on;
   title('variaçao da luminosidade para n=3');
   xlabel('r/R');
   ylabel('Lr/L');

case 4
    % Soluçao da equaçao de Lane-Emden para n=4
   options=odeset('RelTol',1e-6);
   [t,p]= ode45('poli_sist',[0.001 14.57155],[1 0],options);
   plot(t,p(:,1));
   grid;
   xlabel ('Valor de z');
   ylabel('valores de W')
   title('Soluçao da equaçao para n= 4');
   aux=[t p(:,1)];
   size(p(:,1));
   aux(length(aux),1);
   aux1=[t p(:,2)];
   a=-(aux(length(aux),1))/(3*aux1(length(aux1),2));
   b=-1/(5*aux(length(aux),1)*aux1(length(aux1),2));
   c=1/(4*pi*5*aux1(length(aux1),2)^2);
   dc=(M/(4*pi*R^3))*(3*a)
   Pc=c*((G*M^2)/R^4)
   Tc=b*niu*((G*M)/(Cg*R))
   h=R/(aux(length(aux),1));
   K=(4*pi*G*(h^2)*(dc^(3/4)))/5;
   r=h.*t;
   pause;

   %variação da pressão
   pr=K*(dc^(5/4))*(p(:,1).^5);
   plot(r/R,pr/Pc);
```

```
grid;
title('variaçao da pressao para n=4');
xlabel('r/R');
ylabel('P/Pc');
pause;

%variaçao da temperatura
tr=((niu*K)/Cg)*(dc^(1/4))*p(:,1);
plot(r/R,tr/Tc);
grid;
title('variaçao da temperatura para n=4');
xlabel('r/R');
ylabel('T/Tc');
pause;

%variaçao da massa
mr=4*pi*dc*(h^3)*(-p(:,2).*t.^2);
plot(r/R,mr/M);
grid;
title('variaçao da massa para n=4');
xlabel('r/R');
ylabel('m/M');
pause;

%variaçao da densidade
dr=dc*(p(:,1).^4);
plot(r/R,dr/dc);
grid;
title('variaçao da densidade para n=4');
xlabel('r/R');
ylabel('d/dc');
pause;

%variaçao da produçao de energia
E0=7.64e-32;
alfa=4*pi*E0*(dc^3)*((niu*K)/Cg)^4;
y=alfa*(r.^2).*(p(:,1).^12);
size(y)
plot(r,y)
grid;
title('variaçao da produção de energia para n=4');
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
pause;

%variação da luminosidade
for i=1:(length(y)-1)
   A(i,1)=((r(i+1,1)-r(i,1))*(y(i+1,1)+y(i,1)))/2;
end

L=[0;A(:,1)];
Lr=cumsum(L)
plot(r/R,Lr/LS)
grid on;
title('variaçao da luminosidade para n=4');
xlabel('r/R');
ylabel('Lr/L');
end
```

ANEXO A4

Codigo do programa Modelo_rad

O programa **Modelo_rad** possibilita determinar em termos de gráfico a estrutura da estrela cujo transporte de energia é unicamente feito por radiação. Baseado nas equações que foram obtidas no ***capítulo 4***, o programa calcula a variação da massa, pressão, luminosidade, temperatura, densidade e produção de energia em função de *r/R*. Este programa para executar tal tarefa apoia-se essencialmente em duas rotinas:

1. Função ciclo: Função esta que faz os acertos das constantes inicialmente introduzidas, por forma a que o sistema tenha um erro na sua resolução numérica inferior a 3×10^{-5}.
2. Função ode45, que permite no final integrar o sistema de equações (function sistema), através do método de Runge-Kutta, após se ter determinado as constantes C, y_{2c}, D, y_{4c} "correctas".

De referir por fim que o algoritmo numérico que o programa utiliza encontra-se descrito no ***capítulo 4*** e que este apenas possiblita a visualização dos resultados a quando da activação do programa **Modelo1** (Anexo A2).

```
%-------------------------------------------------------------%
%                                                             %
%                 MODELO SOLAR RADIATIVO                      %
%                                                             %
%                                                             %
%              Filipe Manuel Freire Fernandes                 %
%              Mestrado em ensino da Astronomia               %
%                           2001                              %
%-------------------------------------------------------------%

%-------------------------------------------------------------------------%
% Esta rotina permite obter as variaçoes das grandezas Fisicas            %
% Imput: Uma aproximaçao das constantes C; Pc; D ; Tc                     %
% Output: Graficos das grandezas Fisicas                                  %
%        Variaçao do erro ao longo da integraçao do sistema               %
%        Constantes C; Pc; D; Tc correctas                                %
%        Valores das funçoes Y1; Y2; Y3; Y4; e da produçao de energia     %
%-------------------------------------------------------------------------%

function rad=modelo_rad(K01,K02,K03,K04)
%-------------------------------------------------%
%                                                 %
```

```
%           Tabela de Constantes Fisicas                %
%                                                       %
%-------------------------------------------------------%

Cg=8.314510e+7; %constantes dos g´ases ideais
niu=0.62;          %peso medio molecular dos elementos que compoe o gas
M=1.989e33;        % massa solar
R=6.9599e10;     % raio solar
G=6.67259e-8;      %Constante gravitacional
L=3.826e33;        %luminosidade
c=2.9979e10;       %velocidade da luz
ar=(4*5.67e-5)/c;%constante da radiação

global P1 P2 P3

%-----------------------------------------------------------------------%
%                                                                       %
%Ivocar a rotina ciclo                                                  %
%Parametros de entrada: Constantes D; Pc; D; Tc                         %
%Parametros de saida: Constantes C; Pc; D; Tc e erros cometidos         %
%                                                                       %
%-----------------------------------------------------------------------%

H=ciclo(K01,K02,K03,K04);
contador=0;
while  (abs(H(1,1))>1e-5  |    abs(H(2,1))>1e-5  |    abs(H(3,1))>1e-5  |
abs(H(4,1))>1e-5)

    H=ciclo(H(1,2),H(2,2),H(3,2),H(4,2))
    [H(1,1); H(2,1); H(3,1); H(4,1)];
   contador=contador+1;
end

%-------------------------------------------------------%
%                                                       %
%       Saida de alguns resultados                      %
%       Determinação T; P e densidades centrais         %
%                                                       %
%-------------------------------------------------------%

P0=(G*M^2)/(4*pi*R^4);
T0=(niu*G*M)/(Cg*R);
Pc=H(2,2)*P0;
Tc=H(4,2)*T0;
dc=(niu/Cg)*(Pc/Tc);
Rc=[Pc Tc dc H(1,2) H(3,2)]

%-----------------------------------------------------------------%
%                                                                 %
%       Integração do sistema                                     %
%       Integração do centro para a superficie                    %
%       Integração da superficie para o centro                    %
%       Grafico da variações das diversas grandezas fisicas       %
%                                                                 %
%-----------------------------------------------------------------%

C01=H(1,2); %constante C
C02=H(2,2); %constante Pc
C03=H(3,2); %constante D
C04=H(4,2); %constante Tc
global T1 T2;
```

```
T1=C01;
T2=C03;

% Valores no centro
x=1e-3;
m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);                          %valor de m0
p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);               %Valor de p0
l0=((C03*(C02^2)*(C04^2))/3).*x.^3;                %Valor de l0
t0=C04-((C01*C03.*C02.^4)./3.*C04.^(17/2)).*x.^2;%Valor de t0

%integraçao do centro para a superficie
[t,y]= ode45('sistema',[x 0.200],[m0 p0 l0 t0]);

%valores na superficie
x=0.999;
m1=1;
p1=(((8.5/2)*C01)^-(1/2))*((1-x)/x)^(17/4);
l1=1;
t1=(1/4.25)*((1-x)/x);

%integraçao da superficie para o centro
[j,z]= ode45('sistema',[0.999 0.200],[m1 p1 l1 t1]);

%-------------------------------------------------%
%                                                 %
% Gráficos da variações das quantidades Fisicas   %
%                                                 %
%-------------------------------------------------%

%variação da massa
plot(j,z(:,1),t,y(:,1),'b')
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('m/M');

pause

%variação da pressão
plot(j,z(:,2)/H(2,2),t,y(:,2)/H(2,2),'b')
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('P/Pc');

pause

%variação da luminosidade
plot(j,z(:,3),t,y(:,3))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('Lr/L');

pause

%variação da temperatura
plot(j,z(:,4)/H(4,2),t,y(:,4)/H(4,2),'b')
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('T/Tc');

pause
```

```
%variação da densidade
den_c=(M/(4*pi*R^3))*(H(2,2)/H(4,2));
den2=(M/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=(M/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));
pause
plot(t,den1/den_c,j,den2/den_c,'b')
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('d/dc');
pause

%variação produção de energia
pause
e1=H(3,2)*((y(:,2)).^2).*((y(:,4)).^(P1-2)).*(t.^2);
e2=H(3,2)*((z(:,2)).^2).*((z(:,4)).^(P1-2)).*(j.^2);
plot(t,e1,j,e2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
pause

%variaçao da emissividade
E0=1.07e-5;
E1=E0*(T0^P1)*den1.*(y(:,4)).^P1;
E2=E0*(T0^P1)*den2.*(z(:,4)).^P1;
plot(t,E1,j,E2,'b')
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('Emissividade');

pause
rad=[j*R  z(:,1)*M  z(:,2)*P0  e2*(L/R)  z(:,4)*T0  z(:,3)*L;t*R  y(:,1)*M
y(:,2)*P0 e1*(L/R)  y(:,4)*T0 y(:,3)*L];
```

- **Ciclo.m**

```
%-------------------------------------------------------------%
%                                                             %
%   Funçao que permite ajustar as constantes do Sistema       %
%   e o erro cometido nas sucessivas integraçoes              %
%                                                             %
%-------------------------------------------------------------%

function A=ciclo(K01,K02,K03,K04)
format short e;

K0=[K01;K02;K03;K04];

y=integ(K01,K02,K03,K04);

for i=1:4
   er_0(i,1)=(y(i,1)-y(i,2))/(y(i,1)+y(i,2));
end
er_0=er_0(1:4,1);

D=const(K01,K02,K03,K04);

for j=1:4
```

```
   for i=1:4
      C(i)=D(i,j);
   end
   global R1 R3 ;
   R1=C(1);
   R3=C(3);
    a(1:4,j)=integ0(C(1),C(2),C(3),C(4));

end

F0=[a(1:4,1) a(1:4,2) a(1:4,3) a(1:4,4)];

for j=1:4
   for i=1:4
      C(i)=D(i,j);
   end
   global R1 R3;
   R1=C(1);
   R3=C(3);
   b(1:4,j)=integ1(C(1),C(2),C(3),C(4));
end

F1=[b(1:4,1) b(1:4,2) b(1:4,3) b(1:4,4)];

for j=1:4
   for i=1:4
      er_1(i,j)=(F0(i,j)-F1(i,j))/(F0(i,j)+F1(i,j));
   end
end
er_1=er_1(1:4,1:4);

%sistema

for j=1:4
   for i=1:4
      G(i,j)=(er_1(i,j)-er_0(i,1))/(0.001*K0(j,1));
   end
end
S=G(1:4,1:4);

%resolução do sistema
[L,U,P]=lu(S);
X=U\(L\(P'*(-er_0)));
cond(X);

beta =abs((X(:,1)./K0(:)));
alfa=max(beta);
alfa1=max(X(:,1)./K0(:));

if alfa1 < 0.01
   for i=1:4
      C1(i,1)=K0(i)+X(i,1);
   end
else
    for i=1:4
      C1(i,1)=K0(i)+(0.01*X(i,1))/alfa;
   end

end

K1=C1(1:4,1);
```

```
A=[er_0 K1];
```

Sistema.m

```
% Sistema de equaçoes

function dy = sistema(t,y)

global T1 T2 P1 P2 P3
C=T1; %valor de C
D=T2; %Valor de D
N=P1;
alfa=P2;
beta=P3;

%y(1) é a massa;
%y(2) é a pressão;
%y(3) é a luminosidade;
%y(4) é a temperatura;
%D é a constante C03;
%C é a constante C01;

dy = [ (y(2)/y(4))*(t^2);

   -(y(2)/y(4))*(y(1)/t^2);

   D*(y(2)^2)*(y(4)^(N-2))*(t^2);

   -C*(y(2)^(alfa+1))*(y(3)/t^2)*(1/y(4)^(alfa+beta+4))];
```

ANEXO A5

Código do programa Conv_cent

O programa **Conv_cent** possibilita determinar em termos de gráfico a estrutura da estrela cujo transporte de energia não é unicamente feito por radiação. Pois baseado nas equações que foram obtidas no ***capítulo 5***, ele calcula a variação da massa, pressão, luminosidade, temperatura, densidade e produção de energia em função de *r/R*. Este programa para executar tal tarefa apoia-se essencialmente em duas rotinas:

i) Função ciclo: Função esta que faz os acertos das constantes inicialmente introduzidas, por forma a que o sistema tenha um erro na sua resolução numérica inferior a 1×10^{-5}.

ii) Função ode45, que permite no final integrar o sistema de equações (function sistema), através do método de Runge-Kutta, após se ter determinado as constantes C, y_{2c}, D, y_{4c} "correctas".

De referir por fim que o algoritmo numérico que o programa utiliza encontra-se descrito no ***capítulo 4***.

```
%-------------------------------------------------------------%
%                                                             %
%                MODELO SOLAR RADIATIVO/CONVECTIVO            %
%                 (Convecçao no centro)                       %
%                                                             %
%              Filipe Manuel Freire Fernandes                 %
%              Mestrado em ensino da Astronomia               %
%                           2001                              %
%-------------------------------------------------------------%

%---------------------------%
%                           %
%tabela de constantes       %
%                           %
%---------------------------%
Cg=8.314510e+7;    %constantes dos g´ases ideais
niu=0.62;          %peso medio molecular dos elementos que compoe o gas
MS=1.989e33;       % massa solar
RS=6.9599e10;      % raio solar
G=6.67259e-8;      %Constante gravitacional
LS=3.826e33;       %luminosidade
c=2.9979e10;       %velocidade da luz
```

```
ar=(4*5.67e-5)/c; %constante da radiação

global P1 P2 P3

%----------------------------------%
%Introduçao do valore n e da massa %
%para o estudo dos graficos        %
%----------------------------------%
    P2=1;
    P3=3.5;
    P1= input('valor de n:    ');
    M=input('massas solares:  ');

if P1==3.5 | P1==4 | P1 == 4.5 | P1==5
    K01=1.6e-6;
    K02=67;
    K03=2e-1;
    K04=0.8;
end

switch P1
case 12
    K01=0.9e-6;
    K02=130;
    K03=0.3;
    K04=1;
case 14
    K01=0.8e-6;
    K02=140;
    K03=0.4;
    K04=1;
case 10
    K01=0.9-6;
    K02=120;
    K03=0.25;
    K04=1;
case 15
    K01=1.0306e-6;
    K02=9.9472e1;
    K03=1.693e0;
    K04=8.9756e-1;
case 16
    K01=1.0296e-6;
    K02=9.9348e1;
    K03=2.0497e0;
    K04=8.9753e-1;
end

H=ciclo(K01,K02,K03,K04);
contador=0;
while (abs(H(1,1))>1e-5 |abs(H(2,1))>1e-5 |abs(H(3,1))>1e-5
|abs(H(4,1))>1e-5)

    H=ciclo(H(1,2),H(2,2),H(3,2),H(4,2))

   contador=contador+1
end


%----------------------------------------%
%Saida de alguns resultados              %
```

```
%Determinação T; P e densidades centrais  %
%  entre outros                           %
%                                         %
%-----------------------------------------%

R=(M^((P1+P2-P3-1)/(3*P2-P3+P1+3)))*RS;
nabla_0=H(1,2)*H(3,2)*(H(2,2)^(P2+2)/H(4,2)^(P3+P2-P1+5));
P0=(G*(M*MS)^2)/(4*pi*R^4);
T0=(niu*G*M*MS)/(Cg*R);
K=((P1+2)*(3*P2-P3)-(P2-P3-3)*(P1+3))/(3*P2-P3+P1+3);
L=(M^K)*LS;
Pc=H(2,2)*P0;
Tc=H(4,2)*T0;
dc=(niu/Cg)*(Pc/Tc);
Rc=[Pc Tc dc H(1,2) H(2,2) H(3,2) H(4,2) nabla_0 M*MS R L]

%-----------------------------------------------------%
%                                                     %
%Integração do sistema                                %
%Integração do centro para a superficie               %
%Integração da superficie para o centro               %
%Grafico da variações das diversas grandezas fisicas  %
%                                                     %
%-----------------------------------------------------%
C01=H(1,2); %constante C
C02=H(2,2); %constante Pc
C03=H(3,2); %constante D
C04=H(4,2); %constante Tc
global T1 T2;
T1=C01;
T2=C03;
x=1e-3;
nabla_0=C01*C03*((C02^(P2+2))/(C04^(P2+P3-P1+5)));
if nabla_0 < 0.4

m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);

p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);
l0=((C03.*(C02.^2)*(C04.^(P1-2)))/3).*x.^3;
t0=C04-((C01*C03.*C02.^(P2+3))./3.*C04.^(P2+P3-P1+6)).*x.^2;

else
    m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);

    p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);
    l0=((C03.*(C02.^2)*(C04.^(P1-2)))/3).*x.^3;
    t0=C04-(1/15)*(C02/C04)*(x^2);
end

options = odeset('RelTol',1e-6);
[t,y]= ode45('sistema',[x 0.200],[m0 p0 l0 t0],options);

%valores na superficie

x=0.999;
m1=1;
p1=(((P2+1)/(P2+P3+4))^((P2+P3+5)/(P2+1)))*(C01^(-1/(P2+1)))*((1-
x)/x)^((P2+P3+4)/(P2+1));
l1=1;
t1=((P2+1)/(P2+P3+4))*((1-x)/x);
```

```
options = odeset('RelTol',1e-6);
[j,z]= ode45('sistema',[0.999 0.200],[m1 p1 l1 t1],options);

%----------------------------------------%
%                                        %
% Gráficos da variações das quantidades  %
%                Fisicas                 %
%                                        %
%----------------------------------------%

%variação da massa
plot(j,z(:,1),t,y(:,1))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('m/M');
pause

%variação da pressão
plot(j,z(:,2)/(Pc/P0),t,y(:,2)/(Pc/P0))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('P/Pc');
pause

%variação da luminosidade
plot(j,z(:,3),t,y(:,3))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('Lr/L');
pause

%variação da temperatura
plot(j,z(:,4)/(Tc/T0),t,y(:,4)/(Tc/T0))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('T/Tc');

%variação da densidade
den2=((M*MS)/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=((M*MS)/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));
pause
plot(t,den1/dc,j,den2/dc)
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('d/dc');

%variaçao da emissividade
if P1 <= 6
    E0=1.07e-5;
else
    E0=8.24e-24;
end
pause
E1=E0*(T0^P1)*den1.*(y(:,4)).^P1;
E2=E0*(T0^P1)*den2.*(z(:,4)).^P1;
plot(t,E1,j,E2)
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('Emissividade');

%variação produção de energia
```

```
pause
e1=H(3,2)*((y(:,2)).^2).*((y(:,4)).^(P1-2)).*(t.^2);
e2=H(3,2)*((z(:,2)).^2).*((z(:,4)).^(P1-2)).*(j.^2);
plot(t,e1,j,e2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
pause

%variação do teta
teta1=H(1,2)*(y(:,3)./y(:,1)).*((y(:,2).^(P2+1))./(y(:,4).^(P2+P3+4)));
teta2=H(1,2)*(z(:,3)./z(:,1)).*((z(:,2).^(P2+1))./(z(:,4).^(P2+P3+4)));
[j,teta2];
[t,teta1];
plot(t,teta1,j,teta2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('nabla');
pause
close
```

Sistema.m

```
function dy = sistema(t,y)

global T1 T2 P1 P2 P3
C=T1; %valor de C
D=T2; %Valor de D
N=P1;
alfa=P2;
beta=P3;
%y(1) é a massa;
%y(2) é a pressão;
%y(3) é a luminosidade;
%y(4) é a temperatura;
%D é a constante C03;
%C é a constante C01;

teta=C*(y(3)/y(1))*((y(2)^(P2+1))/(y(4)^(P2+P3+4)));

if (teta < 0.4 )


dy = [ (y(2)/y(4))*(t^2);            %equação da massa
   -(y(2)/y(4))*(y(1)/t^2);          % equação pressão
   D*(y(2)^2)*(y(4)^(N-2))*(t^2);    %equação da luminusidade
   -C*(y(2)^(alfa+1))*(y(3)/t^2)*(1/y(4)^(alfa+beta+4))];   %equação
temperatura

else

   dy = [ (y(2)/y(4))*(t^2);              %equação da massa
   -(y(2)/y(4))*(y(1)/t^2);               % equação pressão
   D*(y(2)^2)*(y(4)^(N-2))*(t^2);         %equação da luminusidade
   -0.4*(y(1)/(t^2))];                    %equação temperatura
end
```

ANEXO A6

Código do programa Procura

A rotina Procura possibilita determinar os valores de $\alpha \in [0;2]$ e $\beta \in [0;4]$, por forma a que $\nabla_{rad}(1)$ seja superior a 0.4. De notar que os resultados são apresentados na forma de uma matriz ou de um gráfico $\nabla(\alpha;\beta)$. Esta mesma rotina permite efectuar as iterações explicadas na Sub-secção (5.2.), Fig. (5.2-15).

```
%-------------------------------------
% Rotina que permite determina
%para que valores de alfa e beta
% nabla_1 e' superior a 0.4
%-------------------------------------
A=menu('Que deseja procurar??','nabla_1','Procura do valor de beta');
if A==1
i=1;
for alfa=0:0.3:2
    for beta=0:0.3:4
        D=(alfa+1)/(alfa+beta+4);
        if D >= 0.4

        a(i,1)=alfa;
        b(i,2)=beta;
        i=i+1;

        end

    end

end

 [a(1:i-1,1) b(1:i-1,2)]
pause

stem(a(1:i-1,1),b(1:i-1,2),'--sr','fill');
    xlabel('Valor de alfa')
    ylabel('Valor de Beta')

pause
grid on
x=0:0.1:4;
y=0:0.1:4;
[x,y]=meshgrid(x,y);
z=(x+1)./(x+y+4);
mesh(x,y,z)
title('Variaçao de nabla na superficie');
xlabel('Valor de alfa');
ylabel('Valor de beta');
zlabel('Valor de nabla_s')
colormap(hsv(2));
```

```
colorbar
else
%-------------------------------------------------------------------------
% rotina de procura dos melhores valores para alfa e beta
%-------------------------------------------------------------------------

global P1 P2 P3


    P1=4
    P2=input('valor de alfa: ');

     K01=1.1705e-6;
     K02=1.1622e2;
     K03=1.0549e-1;
     K04=8.9303e-1;


for P3 = 3.5:-0.1:0
     P3
     H=ciclo(K01,K02,K03,K04);
     contador=0;
while(abs(H(1,1))>1e-5|abs(H(2,1))>1e-5|abs(H(3,1))>1e-5|abs(H(4,1))>1e-5)

   H=ciclo(H(1,2),H(2,2),H(3,2),H(4,2))
   contador=contador+1
end

K01=H(1,2)
K02=H(2,2)
K03=H(3,2)
K04=H(4,2)
pause
end
end
```

ANEXO A7

Código do programa Mod_conv

O programa **Mod_conv** pretende determinar em termos de gráfico a estrutura da estrela cujo transporte de energia é efectuado por radiação e por convecção, cujo este ultimo se situa mais na superfície. Pois baseado nas equações que foram obtidas no ***capítulo 5***, bem como nos resultados obtidos na rotina **Procura** (Anexo A6) ele calcula a variação da massa, pressão, luminosidade, temperatura, densidade e produção de energia em função de *r/R*. Este programa para executar tal tarefa apoia-se essencialmente em duas rotinas:

i) Função ciclo: Função esta que faz os acertos das constantes inicialmente introduzidas, por forma a que o sistema tenha um erro na sua resolução numérica inferior a 1×10^{-5}.

ii) Função ode45, que permite no final integrar o sistema de equações (function sistema), através do método de Runge-Kutta, após se ter determinado as constantes C, y_{2c}, D, y_{4c} "correctas".

De referir por fim que o algoritmo numérico que o programa utiliza encontra-se descrito no ***capítulo 4***.

```
%-------------------------------------------------
%
%tabela de constantes
%
%-------------------------------------------------
Cg=8.314510e+7;          %constantes dos g´ases ideais
niu=0.62;                %peso médio molecular dos elementos que compõe o
gás
M=1.989e33;                          % massa solar
R=6.9599e10;                         % raio solar
G=6.67259e-8;                        %Constante gravitacional
L=3.826e33;                          %luminosidade
c=2.9979e10;                         %velocidade da luz
ar=(4*5.67e-5)/c;              %constante da radiação
P0=(G*M^2)/(4*pi*R^4);
T0=(niu*G*M)/(Cg*R);

global P1 P2 P3
```

```
%-----------------------------------------
%Introdução dos valores antes determinados
%para o estudo dos gráficos
%-------------------------------------------------
    P1= 4;
    P2= input('valor de alfa: ');
    P3=input('Valor de beta:  ');
    K01=input('valor de C:    ');
    K02=input('Valor de Pc:   ');
    K03=input('Valor de D:    ');
    K04=input('Valor de Tc:    ');


 H=ciclo(K01,K02,K03,K04);
contador=0;
while (abs(H(1,1))>1e-5 |  abs(H(2,1))>1e-5 |  abs(H(3,1))>1e-5 |
abs(H(4,1))>1e-5)

    H=ciclo(H(1,2),H(2,2),H(3,2),H(4,2))
    [H(1,1); H(2,1); H(3,1); H(4,1)];
   contador=contador+1
end

%Saída de alguns resultados
%Determinação T; P e densidades centrais
%Determinação de E0 e K0
%
%
%-----------------------------------------------

Pc=H(2,2)*P0;
Tc=H(4,2)*T0;
dc=(niu/Cg)*(Pc/Tc);
Rc=[Pc Tc dc K0 E0]
%-----------------------------------------------
%
%Integração do sistema
%Integração do centro para a superfície
%Integração da superfície para o centro
%Gráfico da variações das diversas grandezas físicas
%
%-----------------------------------------------
C01=H(1,2); %constante C
C02=H(2,2); %constante Pc
C03=H(3,2); %constante D
C04=H(4,2); %constante Tc
global T1 T2;
T1=C01;
T2=C03;
x=1e-3;
disp('integração do centro para a superfície')

m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);                          %valor de m0
p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);               %Valor de p0
l0=((C03*(C02^2)*(C04^2))/3).*x.^3;                %Valor de l0
t0=C04-((C01*C03.*C02.^4)./3.*C04.^(17/2)).*x.^2;     %Valor de t0
options = odeset('RelTol',1e-6);
[t,y]= ode45('sistema',[x 0.200],[m0 p0 l0 t0],options);

disp('integração da superfície para a superfície')
```

```
%valores na superfície

x=0.999;
m1=1;
p1=(0.4*((1-x)/x))^(5/2);
l1=1;
t1=0.4*((1-x)/x);

options = odeset('RelTol',1e-6);
[j,z]= ode45('sistema',[0.999 0.200],[m1 p1 l1 t1],options);

%---------------------------------------
%
% Gráficos da variações das quantidades
% Físicas
%
%---------------------------------------

plot(j,z(:,1),t,y(:,1))%variação da massa
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('m');
title('Variação da massa')
pause

plot(j,z(:,2),t,y(:,2)) %variação da pressão
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('P');
title('Variação da pressão')
pause

plot(j,z(:,3),t,y(:,3)) %variação da luminosidade
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('L');
title('Variação da luminosidade')
pause

plot(j,z(:,4),t,y(:,4)) %variação da temperatura
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('T');
title('Variação da temperatura')

%variação da densidade
den2=(M/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=(M/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));
pause
plot(t,den1,j,den2)
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('d');
title('Variação da densidade')

%variação da emissividade
pause
E1=E0*den1.*(y(:,4)).^P1;
E2=E0*den2.*(z(:,4)).^P1;
plot(t,E1,j,E2)
grid on;
```

```
xlabel('r/R');
ylabel('Emissividade');
title('Variação da emissividade')

%variação produção de energia
pause
e1=H(3,2)*((y(:,2)).^2).*((y(:,4)).^(P1-2)).*(t.^2);
e2=H(3,2)*((z(:,2)).^2).*((z(:,4)).^(P1-2)).*(j.^2);
plot(t,e1,j,e2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
title('Variação da produção de energia')

%variação do teta
zoom on
teta1=H(1,2)*(y(:,3)./y(:,1)).*((y(:,2).^(P2+1))./(y(:,4).^(P2+P3+4)));
teta2=H(1,2)*(z(:,3)./z(:,1)).*((z(:,2).^(P2+1))./(z(:,4).^(P2+P3+4)));
pause
[j,teta2];
pause
[t,teta1];
pause
plot(t,teta1,j,teta2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('Teta');
```

ANEXO A8

Código do programa Modelos Estelares

No presente anexo são apresentados os códigos de diversos ficheiros que permitem o funcionamento do programa *Modelos Estelares*. Alguns dos códigos são semelhantes ao apresentados em anexos anteriores, tendo apenas a alteração de possuírem comandos extras para melhorar a interface gráfica com o utilizador. De referir que neste anexo não são apresentados todos os códigos intervenientes no programa apenas os que me parecerão mais importantes e os menos extensos.

- **Modelo.m**

```
function varargout = modelo(varargin)

if nargin == 0  % LAUNCH GUI

    path(path,'f:\work\modelo\lab\musica')
    x=wavread('m2.wav');
    wavplay(x,44100);
    path(path,'f:\work\modelo\lab\modelo estelar')
      fig = openfig(mfilename,'reuse');
      % Use system color scheme for figure:
      set(fig,'Color',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));

      % Generate a structure of handles to pass to callbacks, and store it.
      handles = guihandles(fig);
      guidata(fig, handles);

      if nargout > 0
            varargout{1} = fig;

      end

elseif ischar(varargin{1}) % INVOKE NAMED SUBFUNCTION OR CALLBACK

      try
            [varargout{1:nargout}] = feval(varargin{:}); % FEVAL switchyard
      catch
            disp(lasterr);
      end


end

% --------------------------------------------------------------------
function varargout = radiativo_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
```

```
prompt={'Intruduza o valor de Eta:'};
dlgTitle='Introduçao de valores';

resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
a=str2num(resposta{1,1});

if  (a == 5.5 | a == 3.5 | a == 4 | a == 4.5 | a == 5 | a == 6)

    msgbox('iniciar processo de integraçao')
    waitforbuttonpress;
    close
else
    caixa_erro= errordlg('valor incorrectamente introduzido','Mensagem de
erro');
    waitforbuttonpress;
    close
    prompt={'Introduza o valor de Eta:'};
    dlgTitle='Introdução de valores';

    resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
    a=str2num(resposta{1,1});

end

global P1 P2 P3

caixa_1=questdlg('Qual a sua escolha?', ...
                        'Modelo Radiativo', ...
                        'Graficos','Tabela','Tabela');


   switch caixa_1

     case 'Graficos'

        P1=a;
        P2=1;
        P3=3.5;

if P1==5.5

    K01=1.1175e-6;
    K02=1.0981e+2;
    K03=1.7500e-1;
    K04=8.9725e-1;
end

close

if (P1 >=3.5 & P1<=5)
    K01=1.6e-6;
    K02=67;
    K03=2e-1;
    K04=0.8;
end

if P1==6
    K01=1.0e-6;
    K02=110;
    K03=0.2;
    K04=0.9;
```

```
end

 S=modelo_rad(K01,K02,K03,K04);

case 'Tabela'

      tab=modelo_rad_tab(a);

end

% --------------------------------------------------------------------
function varargout = politropico_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
global N
prompt={'Introduza o valor de n:'};
dlgTitle='Introdução de valores';

resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
N=str2num(resposta{1,1});

if  (N == 5 | N == 0 | N == 1 | N == 1.5 | N == 3 | N == 4)

    msgbox('iniciar processo de integração')
    waitforbuttonpress;
    close

else
caixa_erro= errordlg('valor incorrectamente introduzido','Mensagem de
erro','non-modal');
waitforbuttonpress;
close
prompt={'Introduza o valor de n:'};
dlgTitle='Introdução de valores';
resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
N=str2num(resposta{1,1});
end

   caixa_2=questdlg('Qual a sua escolha?', ...
                    'Modelo Politropo', ...
                    'Graficos','Tabela','Tabela');

   switch caixa_2
     case 'Graficos'

 S=politro(N);

     case 'Tabela'
         tab=politro_tab(N);

   end
% --------------------------------------------------------------------
function varargout = conversoes_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

prompt={'Intruduza o valor que quer converter :'};
dlgTitle='Introduçao de valores';
resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
Valor=str2num(resposta{1,1});

if isempty(Valor)==1

caixa_erro= errordlg('valor incorrectamente introduzido...','Mensagem de
erro');
```

```
    waitforbuttonpress
    close
    prompt={'Intruduza o valor que quer converter :'};
dlgTitle='Introduçao de valores';
resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
Valor=str2num(resposta{1,1});
end

conversoes(Valor);

% --------------------------------------------------------------------
function varargout = conveccao_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

path(path,'f:\work\modelo\lab\conveçao')

prompt={'Intruduza o valor de eta:','Valor da Massa em massas solares'};
dlgTitle='Introduçao de valores';

resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
eta=str2num(resposta{1,1});
M=str2num(resposta{2,1});

if (eta <=5 & M >1.8)& (isempty(eta)==1 & isempty(M)==1)

    caixa_erro= errordlg('valore incorrectamente introduzido','Mensagem de
erro','non-modal');
    waitforbuttonpress;
    close
    prompt={'Intruduza o valor de eta:','Valor da Massa em massas
solares'};
    dlgTitle='Introduçao de valores';
    resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
    eta=str2num(resposta{1,1});
    M=str2num(resposta{2,1});
end

caixa_3=questdlg('Qual a sua escolha?', ...
                        'Modelo Convectivo', ...
                        'Graficos','Tabela','Tabela');

   switch caixa_3
     case 'Graficos'

 conv_cent(eta,M);

case 'Tabela'
         conv=conv_cent_tab(eta,M);

   end
path(path,'f:\work\modelo\lab\Modelo estelar')
% --------------------------------------------------------------------
function varargout = compara_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

prompt={'Intruduza o valor de eta:','Valor de n'};
dlgTitle='Introduçao de valores';

resposta=inputdlg(prompt,dlgTitle);
eta=str2num(resposta{1,1});
N=str2num(resposta{2,1});

compara(eta,N);
```

```
%--------------------------------------------------------------------

function varargout = filme_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

 path(path,'f:\work\modelo\lab\imagens')
x1=imread('ANNULAR.jpg');
x2=imread('cutaway.jpg');
x3=imread('SUNDOGS.jpg');

slid={x1 x2 x3};

for i=1:3
    x=slid{1,i};
    pause(1)
handles.axes1=axes('Parent',handles.figure1,'box','on','Tag','axes1',...
    'XLimMode','manual','YLimMode','manual','YTick',[],...
    'XTick',[],'position', [0.32 0.1 0.4 0.4]);
axes(handles.axes1);
image(x,'Parent',handles.axes1);
axis(handles.axes1,'off')
pause(3)
end

path(path,'f:\work\modelo\lab\modelos estelar')

% --------------------------------------------------------------------
function varargout = help_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
helpwin('tutorial')

% --------------------------------------------------------------------
function varargout = fechar_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

fechar=questdlg('Tem a certeza?', ...
                        'Confirmar..', ...
                        'Sim','Nao','Nao');

     switch fechar
     case 'Sim'

      closereq
     case 'Nao',

     msgbox('Boa escolha..eh!eh!', 'Confirmado')

   end
```

- **convercoes.m**

```
function y=conversoes(V)

valor=V;
A=menu('Que tipo de conversao queres???','Kg --> g','g --> Kg','cm -->
m','m --> cm','K -->T°','T° --> K');

switch A
case 1

[Kg]=valor*1000;
```

```
pltmat(Kg,'gramas',[0.2 0.9 0.8],30);
case 2
    [g]=valor/1000;
    pltmat(g,'Kilogramas',[0.2 0.9 0.8],30);
case 3
    [cm]=valor*100;
    pltmat(cm,'centimetros',[0.2 0.9 0.8],30);
case 4
    [m]=valor/100;
    pltmat(m,'metros',[0.2 0.9 0.8],30);
case 5
    [K]=valor+273.15;
    pltmat(K,'graus Kelvin ',[0.2 0.9 0.8],30);

case 6
    [T]=valor-273.15;
    pltmat(T,'grau celsios ',[0.2 0.9 0.8],30);
end
```

- **conv_cent.m**

```
function conv=conv_cent(eta,massa)

%---------------------------%
%                           %
%tabela de constantes       %
%                           %
%---------------------------%
Cg=8.314510e+7;    %constantes dos g´ases ideais
niu=0.62;          %peso medio molecular dos elementos que compoe o gas
MS=1.989e33;       % massa solar
RS=6.9599e10;      % raio solar
G=6.67259e-8;      %Constante gravitacional
LS=3.826e33;       %luminosidade
c=2.9979e10;       %velocidade da luz
ar=(4*5.67e-5)/c; %constante da radiação

global P1 P2 P3

%----------------------------------%
%Introduçao do valore n e da massa %
%para o estudo dos graficos        %
%----------------------------------%
    P2=1;
    P3=3.5;
    P1=eta;
    M=massa;


if P1==3.5 | P1==4 | P1 == 4.5 | P1==5
    K01=1.6e-6;
    K02=67;
    K03=2e-1;
    K04=0.8;
end
switch P1
case 12
    K01=0.9e-6;
    K02=130;
```

```
    K03=0.3;
    K04=1;
case 14
    K01=0.8e-6;
    K02=140;
    K03=0.4;
    K04=1;
case 10
    K01=0.9-6;
    K02=120;
    K03=0.25;
    K04=1;
case 15
    K01=1.0306e-6;
    K02=9.9472e1;
    K03=1.693e0;
    K04=8.9756e-1;
case 16
    K01=1.0296e-6;
    K02=9.9348e1;
    K03=2.0497e0;
    K04=8.9753e-1;
end

bar=waitbar(0.0001,'Teste a sua paciencia...zzzzzzzz.....');
setptr(bar,'watch')
H=ciclo(K01,K02,K03,K04);
contador=0;
while (abs(H(1,1))>1e-5 |  abs(H(2,1))>1e-5 |  abs(H(3,1))>1e-5 |
abs(H(4,1))>1e-5)

    H=ciclo(H(1,2),H(2,2),H(3,2),H(4,2))

   contador=contador+1;
end
for i=1:0.1:50
     waitbar(i/50,bar);
 end
 close(bar);
 pause(1)

%-----------------------------------------%
%Saida de alguns resultados               %
%Determinação T; P e densidades centrais  %
%  entre outros                           %
%                                         %
%-----------------------------------------%

R=(M^((P1+P2-P3-1)/(3*P2-P3+P1+3)))*RS;
nabla_0=H(1,2)*H(3,2)*(H(2,2)^(P2+2)/H(4,2)^(P3+P2-P1+5));
P0=(G*(M*MS)^2)/(4*pi*R^4);
T0=(niu*G*M*MS)/(Cg*R);
K=((P1+2)*(3*P2-P3)-(P2-P3-3)*(P1+3))/(3*P2-P3+P1+3);
L=(M^K)*LS;
Pc=H(2,2)*P0;
Tc=H(4,2)*T0;
dc=(niu/Cg)*(Pc/Tc);

%-------------------------------------------------%
%                                                 %
%Integração do sistema                            %
```

```
%Integração do centro para a superficie                    %
%Integração da superficie para o centro                    %
%Grafico da variações das diversas grandezas fisicas       %
%                                                          %
%----------------------------------------------------------%
C01=H(1,2); %constante C
C02=H(2,2); %constante Pc
C03=H(3,2); %constante D
C04=H(4,2); %constante Tc
global T1 T2;
T1=C01;
T2=C03;
x=1e-3;
nabla_0=C01*C03*((C02^(P2+2))/(C04^(P2+P3-P1+5)));
if nabla_0 < 0.4

m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);

p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);
l0=((C03.*(C02.^2)*(C04.^(P1-2)))/3).*x.^3;
t0=C04-((C01*C03.*C02.^(P2+3))./3.*C04.^(P2+P3-P1+6)).*x.^2;

else
    m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);

    p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);
    l0=((C03.*(C02.^2)*(C04.^(P1-2)))/3).*x.^3;
    t0=C04-(1/15)*(C02/C04)*(x^2);
end
m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);                                  %valor de m0
p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);                       %Valor de p0
l0=((C03*(C02^2)*(C04^2))/3).*x.^3;                        %Valor de l0
t0=C04-((C01*C03.*C02.^4)./3.*C04.^(17/2)).*x.^2;     %Valor de t0
options = odeset('RelTol',1e-6);
[t,y]= ode45('sistema',[x 0.200],[m0 p0 l0 t0],options);

%valores na superficie

x=0.999;
m1=1;
p1=(((P2+1)/(P2+P3+4))^((P2+P3+5)/(P2+1)))*(C01^(-1/(P2+1)))*((1-
x)/x)^((P2+P3+4)/(P2+1));
l1=1;
t1=((P2+1)/(P2+P3+4))*((1-x)/x);

options = odeset('RelTol',1e-6);
[j,z]= ode45('sistema',[0.999 0.200],[m1 p1 l1 t1],options);

%------------------------------------------%
%                                          %
% Gráficos da variações das quantidades    %
%                Fisicas                   %
%                                          %
%------------------------------------------%

A=menu('Escolha                    a                    quantidade
Fisica','Massa','Pressao','Luminosidade','Temperatura','Densidade','Emissiv
idade','P. de Energia','Nabla','Sequencia')

switch A
case 1
```

```
%variação da massa
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
plot(j,z(:,1),t,y(:,1))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('m');
title('Variaçao da massa')

promptStr=str2mat(' ',' % Press the buttons at the right to see', ...
        ' % examples of XY plots in MATLAB');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmPos=[0.05-0.02 0.05-0.02 ...
        0.7+2*0.02 0.3+2*0.02];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','MiniCommand Window');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'String',promptStr);

   %The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');
case 2
%variação da pressão
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
plot(j,z(:,2),t,y(:,2))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('P');
title('Variaçao da pressao')

promptStr=str2mat(' ',' % Press the buttons at the right to see', ...
        ' % examples of XY plots in MATLAB');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmPos=[0.05-0.02 0.05-0.02 ...
        0.7+2*0.02 0.3+2*0.02];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
```

```
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','MiniCommand Window');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'String',promptStr);

   %The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');
case 3
%variação da luminosidade
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
plot(j,z(:,3),t,y(:,3))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('L');
title('Variaçao da luminosidade')

promptStr=str2mat(' ',' % Press the buttons at the right to see', ...
        ' % examples of XY plots in MATLAB');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmPos=[0.05-0.02 0.05-0.02 ...
        0.7+2*0.02 0.3+2*0.02];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','MiniCommand Window');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
```

```
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'String',promptStr);

   %The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');
case 4
%variação da temperatura
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
plot(j,z(:,4),t,y(:,4))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('T');
title('Variaçao da temperatura')

promptStr=str2mat(' ',' % Press the buttons at the right to see', ...
        ' % examples of XY plots in MATLAB');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmPos=[0.05-0.02 0.05-0.02 ...
        0.7+2*0.02 0.3+2*0.02];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','MiniCommand Window');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'String',promptStr);


   %The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
```

```
        'Callback','close(gcf)');
case 5
%variação da densidade
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
den2=((M*MS)/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=((M*MS)/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));
pause
plot(t,den1,j,den2)
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('d');
title('Variaçao da densidade')

promptStr=str2mat(' ',' % Press the buttons at the right to see', ...
        ' % examples of XY plots in MATLAB');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmPos=[0.05-0.02 0.05-0.02 ...
        0.7+2*0.02 0.3+2*0.02];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','MiniCommand Window');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'String',promptStr);


   %The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');
case 6
%variaçao da emissividade
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
if P1 <= 6
    E0=1.07e-5;
else
    E0=8.24e-24;
end
den2=((M*MS)/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=((M*MS)/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));
```

```
E1=E0*(T0^P1)*den1.*(y(:,4)).^P1;
E2=E0*(T0^P1)*den2.*(z(:,4)).^P1;
plot(t,E1,j,E2)
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('Emissividade');
title('Variaçao da emissividade')

promptStr=str2mat(' ',' % Press the buttons at the right to see', ...
        ' % examples of XY plots in MATLAB');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmPos=[0.05-0.02 0.05-0.02 ...
        0.7+2*0.02 0.3+2*0.02];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','MiniCommand Window');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'String',promptStr);

   %The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');
case 7
%variação produção de energia
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
e1=H(3,2)*((y(:,2)).^2).*((y(:,4)).^(P1-2)).*(t.^2);
e2=H(3,2)*((z(:,2)).^2).*((z(:,4)).^(P1-2)).*(j.^2);
plot(t,e1,j,e2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
title('Variaçao da produçao de energia')

promptStr=str2mat(' ',' % Press the buttons at the right to see', ...
        ' % examples of XY plots in MATLAB');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmPos=[0.05-0.02 0.05-0.02 ...
        0.7+2*0.02 0.3+2*0.02];
```

```
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','MiniCommand Window');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'String',promptStr);


   %The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');
case 8
%variação do teta
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
teta1=H(1,2)*(y(:,3)./y(:,1)).*((y(:,2).^(P2+1))./(y(:,4).^(P2+P3+4)));
teta2=H(1,2)*(z(:,3)./z(:,1)).*((z(:,2).^(P2+1))./(z(:,4).^(P2+P3+4)));
[j,teta2];
[t,teta1];
plot(t,teta1,j,teta2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('nabla');
title('Variaçao do nabla em funçao do raio')

promptStr=str2mat(' ',' % Press the buttons at the right to see', ...
        ' % examples of XY plots in MATLAB');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmPos=[0.05-0.02 0.05-0.02 ...
        0.7+2*0.02 0.3+2*0.02];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
```

```
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','MiniCommand Window');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'String',promptStr);

   %The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');
case 9

%variação da massa
plot(j,z(:,1),t,y(:,1))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('m');
title('Variaçao da massa')

pause
%variação da pressão
plot(j,z(:,2),t,y(:,2))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('P');
title('Variaçao da pressao')
pause

%variação da luminosidade
plot(j,z(:,3),t,y(:,3))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('L');
title('Variaçao da luminosidade')
pause

%variação da temperatura
plot(j,z(:,4),t,y(:,4))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('T');
title('Variaçao da temperatura')
pause

%variação da densidade
den2=((M*MS)/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=((M*MS)/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));
pause
plot(t,den1,j,den2)
```

```
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('d');
title('Variaçao da densidade')

pause

%variaçao da emissividade
if P1 <= 6
    E0=1.07e-5;
else
    E0=8.24e-24;
end
E1=E0*(T0^P1)*den1.*(y(:,4)).^P1;
E2=E0*(T0^P1)*den2.*(z(:,4)).^P1;
plot(t,E1,j,E2)
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('Emissividade');
title('Variaçao da emissividade')
pause

%variação produção de energia

e1=H(3,2)*((y(:,2)).^2).*((y(:,4)).^(P1-2)).*(t.^2);
e2=H(3,2)*((z(:,2)).^2).*((z(:,4)).^(P1-2)).*(j.^2);
plot(t,e1,j,e2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
title('Variaçao da produçao de energia')
pause

%variação do teta
teta1=H(1,2)*(y(:,3)./y(:,1)).*((y(:,2).^(P2+1))./(y(:,4).^(P2+P3+4)));
teta2=H(1,2)*(z(:,3)./z(:,1)).*((z(:,2).^(P2+1))./(z(:,4).^(P2+P3+4)));
[j,teta2];
[t,teta1];
plot(t,teta1,j,teta2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('nabla');
title('Variaçao do nabla em funçao do raio')
pause
clf
close
end
```

- **conv_cent_tab.m**

```
function conv=conv_cent_tab(eta,massa)

%---------------------------%
%                           %
%tabela de constantes       %
%                           %
%---------------------------%
Cg=8.314510e+7;    %constantes dos g´ases ideais
niu=0.62;          %peso medio molecular dos elementos que compoe o gas
```

```
MS=1.989e33;       % massa solar
RS=6.9599e10;      % raio solar
G=6.67259e-8;      %Constante gravitacional
LS=3.826e33;       %luminosidade
c=2.9979e10;       %velocidade da luz
ar=(4*5.67e-5)/c; %constante da radiação

global P1 P2 P3

%----------------------------------%
%Introduçao do valore n e da massa %
%para o estudo dos graficos        %
%----------------------------------%
    P2=1;
    P3=3.5;
    P1=eta;
    M=massa;

if P1==3.5 | P1==4 | P1 == 4.5 | P1==5
    K01=1.6e-6;
    K02=67;
    K03=2e-1;
    K04=0.8;
end

switch P1
case 12
    K01=0.9e-6;
    K02=130;
    K03=0.3;
    K04=1;
case 14
    K01=0.8e-6;
    K02=140;
    K03=0.4;
    K04=1;
case 10
    K01=0.9-6;
    K02=120;
    K03=0.25;
    K04=1;
case 15
    K01=1.0306e-6;
    K02=9.9472e1;
    K03=1.693e0;
    K04=8.9756e-1;
case 16
    K01=1.0296e-6;
    K02=9.9348e1;
    K03=2.0497e0;
    K04=8.9753e-1;
end

bar=waitbar(0.0001,'wait please.....');
H=ciclo(K01,K02,K03,K04);
contador=0;
while     (abs(H(1,1))>1e-5     |abs(H(2,1))>1e-5     |abs(H(3,1))>1e-5     |
abs(H(4,1))>1e-5)

    H=ciclo(H(1,2),H(2,2),H(3,2),H(4,2));
```

```
   contador=contador+1;
end
for i=1:0.1:50
     waitbar(i/50,bar);
 end
 close(bar);
 pause(1)


%----------------------------------------%
%Saida de alguns resultados              %
%Determinação T; P e densidades centrais %
%  entre outros                          %
%                                        %
%----------------------------------------%

R=(M^((P1+P2-P3-1)/(3*P2-P3+P1+3)))*RS;
nabla_0=H(1,2)*H(3,2)*(H(2,2)^(P2+2)/H(4,2)^(P3+P2-P1+5));
P0=(G*(M*MS)^2)/(4*pi*R^4);
T0=(niu*G*M*MS)/(Cg*R);
K=((P1+2)*(3*P2-P3)-(P2-P3-3)*(P1+3))/(3*P2-P3+P1+3);
L=(M^K)*LS;
Pc=H(2,2)*P0;
Tc=H(4,2)*T0;
dc=(niu/Cg)*(Pc/Tc);
Rc=[Pc Tc dc; M*MS R L];
pltmat(Rc,'Valores centrais',[0.2 0.9 0.8],15);
```

- **Modelo_rad.m**

```
function rad=modelo_rad(K01,K02,K03,K04)
%-----------------------------------------------------%
%                                                     %
%           Tabela de Constantes Fisicas              %
%                                                     %
%-----------------------------------------------------%

Cg=8.314510e+7; %constantes dos g´ases ideais
niu=0.62;         %peso medio molecular dos elementos que compoe o gas
M=1.989e33;       % massa solar
R=6.9599e10;    % raio solar
G=6.67259e-8;     %Constante gravitacional
L=3.826e33;       %luminosidade
c=2.9979e10;      %velocidade da luz
ar=(4*5.67e-5)/c;%constante da radiação

global P1 P2 P3

%---------------------------------------------------------------------%
%                                                                     %
%Ivocar a rotina ciclo                                                %
%Parametros de entrada: Constantes D; Pc; D; Tc                       %
%Parametros de saida: Constantes C; Pc; D; Tc e erros cometidos       %
%                                                                     %
%---------------------------------------------------------------------%
echo off
```

```
bar=waitbar(0,' Teste a tua paciencia.....zzzzzzzzzz');
setptr(bar,'watch')
H=ciclo(K01,K02,K03,K04);
contador=0;
while (abs(H(1,1))>1e-5 |  abs(H(2,1))>1e-5 |  abs(H(3,1))>1e-5 |
abs(H(4,1))>1e-5)

    H=ciclo(H(1,2),H(2,2),H(3,2),H(4,2));
    contador=contador+1;
end

for i=1:0.1:50
     waitbar(i/50,bar);
 end
 close(bar);
 pause(1)

%-------------------------------------------------------%
%                                                       %
%       Saida de alguns resultados                      %
%       Determinação T; P e densidades centrais         %
%                                                       %
%-------------------------------------------------------%

P0=(G*M^2)/(4*pi*R^4);
T0=(niu*G*M)/(Cg*R);
Pc=H(2,2)*P0;
Tc=H(4,2)*T0;
dc=(niu/Cg)*(Pc/Tc);

%-------------------------------------------------------------%
%                                                             %
%       Integração do sistema                                 %
%       Integração do centro para a superficie                %
%       Integração da superficie para o centro                %
%       Grafico da variações das diversas grandezas fisicas   %
%                                                             %
%-------------------------------------------------------------%

C01=H(1,2); %constante C
C02=H(2,2); %constante Pc
C03=H(3,2); %constante D
C04=H(4,2); %constante Tc
global T1 T2;
T1=C01;
T2=C03;

% Valores no centro
x=1e-3;
m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);                                  %valor de m0
p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);                  %Valor de p0
l0=((C03*(C02^2)*(C04^2))/3).*x.^3;                   %Valor de l0
t0=C04-((C01*C03.*C02.^4)./3.*C04.^(17/2)).*x.^2;%Valor de t0

%integraçao do centro para a superficie
[t,y]= ode45('sistema',[x 0.200],[m0 p0 l0 t0]);

%valores na superficie
x=0.999;
m1=1;
p1=(((8.5/2)*C01)^-(1/2))*((1-x)/x)^(17/4);
```

```
l1=1;
t1=(1/4.25)*((1-x)/x);

%integraçao da superficie para o centro
[j,z]= ode45('sistema',[0.999 0.200],[m1 p1 l1 t1]);
%-------------------------------------------------%
%                                                 %
% Gráficos da variações das quantidades Fisicas   %
%                                                 %
%-------------------------------------------------%

A=menu('Qual                    a                    quantidade
Fisica','Massa','Pressao','Luminosidade','Temperatura','Densidade','P.   de
Energia','Sequencia');

switch A
case 1

%variação da massa
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
plot(j,z(:,1),t,y(:,1))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('m/M');
title('Variaçao da massa')

 promptStr=str2mat(' ',' % Variaçao da massa em funçao do raio relativo',
...
        ' para uma estrela unicamente radiativa');
    % First, the MiniCommand Window frame
    frmBorder=0.02;
    frmPos=[0.05-frmBorder 0.05-frmBorder ...
        0.7+2*frmBorder 0.3+2*frmBorder];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','Janela de Ajuda');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'Callback','graf2d(''eval'')', ...
        'String',promptStr);

% The CLOSE button
    uicontrol( ...
```

```
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');
case 2
%variação da pressão
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
plot(j,z(:,2),t,y(:,2))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('P/P0');
title('Variaçao da pressao')

promptStr=str2mat(' ',' Variaçao da pressao em funçao', ...
        ' do raio relativo');
    % First, the Janela de Ajuda frame
    frmBorder=0.02;
    frmPos=[0.05-frmBorder 0.05-frmBorder ...
        0.7+2*frmBorder 0.3+2*frmBorder];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','Janela de Ajuda');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'Callback','graf2d(''eval'')', ...
        'String',promptStr);

% The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');

case 3
%variação da luminosidade
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
plot(j,z(:,3),t,y(:,3))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('Lr/L');
```

```
title('Variaçao da luminosidade')

promptStr=str2mat(' ',' variaçao da luminosidade em funçao do ', ...
        ' raio relativo. De referir que a luminosidade e',...
        'a energia total emitida pela estrela por unidade',...
        'de tempo');
    % First, the Janela de Ajuda frame
    frmBorder=0.02;
    frmPos=[0.05-frmBorder 0.05-frmBorder ...
        0.7+2*frmBorder 0.3+2*frmBorder];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','Janela de Ajuda');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'Callback','graf2d(''eval'')', ...
        'String',promptStr);

% The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');

case 4
%variação da temperatura
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
plot(j,z(:,4),t,y(:,4))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('T/T0');
title('Variaçao da temperatura')

promptStr=str2mat(' ',' variaçao da temperatura em funçao ', ...
        ' do raio relativo para uma estrela',...
        'cujo o transporte e unicamente radiativo');
    % First, the Janela de Ajuda frame
    frmBorder=0.02;
    frmPos=[0.05-frmBorder 0.05-frmBorder ...
        0.7+2*frmBorder 0.3+2*frmBorder];
    uicontrol( ...
```

```
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','Janela de Ajuda');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'Callback','graf2d(''eval'')', ...
        'String',promptStr);

% The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');

case 5
%variação da densidade
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
den2=(M/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=(M/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));
plot(t,den1,j,den2)
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('dr/d');
title('Variaçao da densidade')

promptStr=str2mat(' ',' Variaçao da densidade em funçao', ...
        ' do raio relativo');
    % First, the Janela de Ajuda frame
    frmBorder=0.02;
    frmPos=[0.05-frmBorder 0.05-frmBorder ...
        0.7+2*frmBorder 0.3+2*frmBorder];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
```

```
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','Janela de Ajuda');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'Callback','graf2d(''eval'')', ...
        'String',promptStr);

% The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');

case 6
%variação produção de energia
axes('Position',[0.10 0.45 0.65 0.45]);
e1=H(3,2)*((y(:,2)).^2).*((y(:,4)).^(P1-2)).*(t.^2);
e2=H(3,2)*((z(:,2)).^2).*((z(:,4)).^(P1-2)).*(j.^2);
plot(t,e1,j,e2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
title('Variaçao da produçao de energia')

promptStr=str2mat(' ',' Este grafico fornece a variaçao', ...
        ' da produçao de energia em funçao',...
        'do raio relativo. De rederir que este modelo',...
        'confirma o facto de a energia ser produzida no centro');
    % First, the Janela de Ajuda frame
    frmBorder=0.02;
    frmPos=[0.05-frmBorder 0.05-frmBorder ...
        0.7+2*frmBorder 0.3+2*frmBorder];
    uicontrol( ...
        'Style','frame', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',frmPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50]);
    % Then the text label
    labelPos=[0.05 0.3 0.7 0.05];
    uicontrol( ...
        'Style','text', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',labelPos, ...
        'BackgroundColor',[0.50 0.50 0.50], ...
        'ForegroundColor',[1 1 1], ...
        'String','Janela de Ajuda');
    % Then the editable text field
    mcwPos=[0.05 0.05 0.7 0.245];
    mcwHndl=uicontrol( ...
        'Style','edit', ...
        'HorizontalAlignment','left', ...
```

```
        'Units','normalized', ...
        'Max',10, ...
        'BackgroundColor',[1 1 1], ...
        'Position',mcwPos, ...
        'Callback','graf2d(''eval'')', ...
        'String',promptStr);

% The CLOSE button
    uicontrol( ...
        'Style','push', ...
        'Units','normalized', ...
        'Position',[0.85 0.2 0.1 0.1], ...
        'String','Close', ...
        'Callback','close(gcf)');

case 7

    %variação da massa

plot(j,z(:,1),t,y(:,1))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('m/M');
title('Variaçao da massa')
pause

%variação da pressão

plot(j,z(:,2),t,y(:,2))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('P/P0');
title('Variaçao da pressao')

pause

%variação da luminosidade

plot(j,z(:,3),t,y(:,3))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('Lr/L');
title('Variaçao da luminosidade')

pause

%variação da temperatura

plot(j,z(:,4),t,y(:,4))
grid on;
xlabel('r/R');
ylabel('T/T0');
title('Variaçao da temperatura')
pause

%variação da densidade

den2=(M/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=(M/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));
plot(t,den1,j,den2)
grid on;
```

```
xlabel('r/R');
ylabel('dr/d');
title('Variaçao da densidade')
pause

%variação produção de energia
e1=H(3,2)*((y(:,2)).^2).*((y(:,4)).^(P1-2)).*(t.^2);
e2=H(3,2)*((z(:,2)).^2).*((z(:,4)).^(P1-2)).*(j.^2);
plot(t,e1,j,e2)
grid on
xlabel('r/R');
ylabel('dL/dr');
title('Variaçao da produçao de energia')
pause
clf
close
end
```

- **modelo_rad_tab.m**

```
function tab=modelo_rad_tab(eta)

A=menu('Que tipo de tabela deseja','Tabelas descritivas','Tabelas
centrais')

if A==1

switch eta

 case 3.5
     run tabela1
 case 4
     run tabela2
 case 4.5
     run tabela3
 case 5
     run tabela4
 case 5.5
     run tabela5
 case 6
     run tabela6
 end

end

if A==2


    run tc_rad

end
```

- **modelo_rad_comp.m**

```
function rad=modelo_rad_comp(K01,K02,K03,K04)
```

```
%-------------------------------------------------%
%                                                 %
%          Tabela de Constantes Fisicas           %
%                                                 %
%-------------------------------------------------%

Cg=8.314510e+7; %constantes dos g´ases ideais
niu=0.62;         %peso medio molecular dos elementos que compoe o gas
M=1.989e33;       % massa solar
R=6.9599e10;    % raio solar
G=6.67259e-8;     %Constante gravitacional
L=3.826e33;       %luminosidade
c=2.9979e10;      %velocidade da luz
ar=(4*5.67e-5)/c;%constante da radiação

global P1 P2 P3

%-----------------------------------------------------------------%
%                                                                 %
%Ivocar a rotina ciclo                                            %
%Parametros de entrada: Constantes D; Pc; D; Tc                   %
%Parametros de saida: Constantes C; Pc; D; Tc e erros cometidos   %
%                                                                 %
%-----------------------------------------------------------------%
echo off

bar=waitbar(0,'Teste a sua paciencia...zzzzzzz.....');
setptr(bar,'watch')
H=ciclo(K01,K02,K03,K04);
contador=0;
while (abs(H(1,1))>1e-5 |  abs(H(2,1))>1e-5 |  abs(H(3,1))>1e-5 |
abs(H(4,1))>1e-5)

    H=ciclo(H(1,2),H(2,2),H(3,2),H(4,2));

   contador=contador+1;
end

for i=1:0.1:50
     waitbar(i/50,bar);
 end
 close(bar);
 pause(1)

%-------------------------------------------------%
%                                                 %
%       Saida de alguns resultados                %
%       Determinação T; P e densidades centrais   %
%                                                 %
%-------------------------------------------------%

P0=(G*M^2)/(4*pi*R^4);
T0=(niu*G*M)/(Cg*R);
Pc=H(2,2)*P0;
Tc=H(4,2)*T0;
dc=(niu/Cg)*(Pc/Tc);

%-----------------------------------------------------------%
%                                                           %
%       Integração do sistema                               %
%       Integração do centro para a superficie              %
```

```
%       Integração da superficie para o centro                  %
%       Grafico da variações das diversas grandezas fisicas     %
%                                                               %
%---------------------------------------------------------------%

C01=H(1,2); %constante C
C02=H(2,2); %constante Pc
C03=H(3,2); %constante D
C04=H(4,2); %constante Tc
global T1 T2;
T1=C01;
T2=C03;

% Valores no centro
x=1e-3;
m0=(C02.*x.^3)./(3.*C04);                       %valor de m0
p0=C02-((C02.^2/(3.*C04.^2)).*x.^2);            %Valor de p0
l0=((C03*(C02^2)*(C04^2))/3).*x.^3;             %Valor de l0
t0=C04-((C01*C03.*C02.^4)./3.*C04.^(17/2)).*x.^2;%Valor de t0

%integraçao do centro para a superficie
[t,y]= ode45('sistema',[x 0.200],[m0 p0 l0 t0]);

%valores na superficie
x=0.999;
m1=1;
p1=(((8.5/2)*C01)^-(1/2))*((1-x)/x)^(17/4);
l1=1;
t1=(1/4.25)*((1-x)/x);

%integraçao da superficie para o centro
[j,z]= ode45('sistema',[0.999 0.200],[m1 p1 l1 t1]);

den2=(M/(4*pi*R^3))*(z(:,2)./(z(:,4)));
den1=(M/(4*pi*R^3))*(y(:,2)./y(:,4));

e1=H(3,2)*((y(:,2)).^2).*((y(:,4)).^(P1-2)).*(t.^2);
e2=H(3,2)*((z(:,2)).^2).*((z(:,4)).^(P1-2)).*(j.^2);

rad=[j*R z(:,1)*M z(:,2)*P0 e2*(L/R) z(:,4)*T0 z(:,3)*L;t*R y(:,1)*M
y(:,2)*P0 e1*(L/R)  y(:,4)*T0 y(:,3)*L];
```

REFERÊNCIAS

1) S. Chandrasekhar, *An Introduction to the study of stellar structure* , Dover Publicatons (1967).
2) V. Kourganoff, *Geophysic and Astrophysics Monographs Introduction to Advanced Astrophysic*, D. Reidel Publishing Campany (1980).
3) Harold Ziriw, *Astrophysics of the Sun*, Cambridge University Press (1988).
4) C. P. Sonett, M. S. Giampapa and M. S. Matthews, *The Sun in Time*, The University of Arizon Tucson (1991).
5) Arthur S. Eddington, *The internal constitution of the stars*, Cambridge Science Classics (1988).
6) William K. Rose, *Advanced Stellar Astrophysics*, Cambridge University Press (1998).
7) Donald D. Clayton, *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, The University of Chicago Press, (1983).
8) Bradley W. Carroll and Dale A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Addison-Wesley Publishing Company, (1996).
9) Martin Schwarzschild, *Structure and Evolution of the Stars*, Dover Publications Inc. (1965).
10) R. Kippenhahn and A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag, (1990).
11) Erika Bohn Vitense, *Introduction to Stellar Astrophysics*, Vol. 1, Cambridge University Press, (1989).
12) Erika Bohn Vitense, *Introduction to Stellar Astrophysics*, Vol. 3, Cambridge University Press, (1989).
13) Darren Red Fern and Colin Campbell, *The Matlab 5 Handbook*, Springer (1997).
14) G. Lindfiel and J. Penny, *Numerical methods using Matlab*, Ellis Horwood (1995).
15) Duane Hanselman and Bruce Littlefield, *Matlab 5 Guia do Usuário*, Makron Books, (1999).
16) Eva Pärt-Enander, Anders Sjöberg, Bo Melin and Pernilla Isaksson, *The Matlab Handbook*, Addison Wesley, (1997).
17) Mogens Niss, *O Papel das Aplicações e da Modelação na Matemática escolar*, Educação e Matemática nº23 (1992).

18) Jaime Carvalho e Silva, *As Aplicações da Matemática a Vida Quotidiana na Sala de Aula,* Educação e Matemática nº23 (1992).

19) João Pedro da Ponte, *A Modelação no Processo de Aprendizagem*, Educação e Matemática nº23 (1992).

20) Heitor Pina, *Métodos Numéricos*, McGRAW-HILL, (1995).

21) Márcia A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*,MAKRON books, (1995).

22) Steven C. Chapra and Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, (1998).

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1-1 Retirada de astro.if.ufrgs.br/estrelas/node9.htm. 12
Fig. 1.1-2 Retirada de astro.if.ufrgs.br/estrelas/node9.htm 13
Fig. 1.1-3 Retirada de astro.if.ufrgs.br/estrelas/node10.htm. 14
Fig. 2-1 Equilíbrio hidrostático 18
Fig. 2.1-1 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_masscons.html 19
Fig. 2.2-1 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_hydrostatic.html. 20
Fig. 2.3-1a Gráfico elaborado no Matlab. 23
Fig. 2.3-2b Gráfico elaborado no Matlab. 23
Fig. 2.3-1c Gráfico elaborado no Matlab. 24
Fig. 2.4-1 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_production.html. 26
Fig. 2.4-2 Retirada de Stellar Structure and Evolution, R. Kippenhahn e A. Weigert, pag. 154 27
Fig. 2.4-3 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_fusion3.html. 28
Fig. 2.4-4 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_fusion3.html. 28
Fig. 2.4-5 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_fusion3.html. 29
Fig. 2.5-1 Retirada de www.nasa.gov/. 32
Fig. 2.5-2 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_convection.html. 33
Fig. 2.5-3 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_opacity.html. 38
Fig. 2.5-4 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_opacity_form.html 41
Fig. 3.3-1 Solução da equação de Lane-Endem elaborado no Matlab. Rotina Politro.m. 46
Fig. 3.3-2 Solução da equação de Lane-Endem elaborado no Matlab. Rotina Politro.m. 47
Fig. 3.3-3 Solução da equação de Lane-Endem elaborado no Matlab. Rotina Politro.m 48
Fig. 3.3-4 Solução da equação de Lane-Endem elaborado no Matlab. Rotina Politro.m. 49
Fig. 3.4-1 Grafico elaborados no Matlab, rotina Politro.m. 55
Fig. 3.4-2 Grafico elaborados no Matlab, rotina Politro.m 55
Fig. 3.4-3 Grafico elaborados no Matlab, rotina Politro.m 56
Fig. 3.4-4 Grafico elaborados no Matlab, rotina Politro.m 57
Fig. 3.4-5 Grafico elaborados no Matlab, rotina Politro.m 57
Fig. 3.4-6 Grafico elaborados no Matlab, rotina Politro.m 58
Fig. 3.4-7 Grafico elaborados no Matlab, rotina Politro.m 60
Fig. 4.4-1 Grafico elaborados no Matlab, rotina Modelo_rad.m 76
Fig. 4.5-1 Grafico elaborados no Matlab, rotina Modelo1.m 79
Fig. 4.5-2 Grafico elaborados no Matlab, rotina Modelo1.m 80
Fig. 5.1-1 Diagrama de conjunto de equações 89
Fig. 5.2-1 Diagrama de conjunto de equações 90
Fig. 5.2-2 Adaptada de casswww.ucsd.edu/physics/ph7/SteII.html 93

Fig. 5.2-3 Adaptada de casswww.ucsd.edu/physics/ph7/SteII.html 94
Fig. 5.2-4 Adaptada de zebu.uoregon.edu/~js/ast122/lectures/lec17.html 95
Fig. 5.2-5 Adaptada de casswww.ucsd.edu/physics/ph7/SteII.html 96
Fig 5.2-6 Retirado de de Stellar Structure and Evolution, R. Kippenhahn e A. Weigert, pag. 211 98
Fig. 5.2-7 Graficos elaborados no Matlab, rotina Conv_cent.m 99
Fig. 5.2-8 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_lowmass.html 102
Fig. 5.2-9 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_lowmass.html 103
Fig. 5.2-10 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_lowmass.html 104
Fig. 5.2-11 Retirada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_lowmass.html 105
Fig. 5.2-12 Adaptada de www.shef.ac.uk/~phys/people/vdhillon/teaching/phy213/phy213_lowmass.html 105
Fig. 5.2-13 Retirada de *Introdution to Modern Astrophysics*, B. W. Carroll e Dale A. Ostlie, pag. 372. 106
Fig. 5.2-14 Elaborada no Matelab, rotina procura.m 107
Fig. 5.2-15 Diagrama de algoritmo da rotina procura.m 108
Fig. 5.2-16 Retirado de *Introdution to Modern Astrophysics*, B. W. Carroll e Dale A. Ostlie, pag. 275 110
Fig. 6.2-1 Tela de apresentação do programa *Modelos estelares*. 116
Fig. 6.2-2 Menus do programa *Modelos estelares* 117
Fig. 6.2-3 Janela do programa *Modelos estelares* 117
Fig. 6.2-4 Janela do programa *Modelos estelares* 118
Fig. 6.2-5 Janela do programa *Modelos estelares* 118
Fig. 6.2-6 Menus do programa *Modelos estelares* 119
Fig. 6.2-7 Diagrama do conjunto de ficheiro do programa *Modelos Estelares*. 120


MODELOS ESTELARES
DISSERTAÇÃO DE
MESTRADO
FILIPE FERNANDES