

DINÂMICA CRÍTICA EM MODELOS DE MAGNETISMO

TESE DE DOUTORAMENTO

JOSÉ MIGUEL DO CARMO NUNES DA SILVA

1989

DINÂMICA CRÍTICA EM MODELOS DE MAGNETISMO

por

JOSÉ MIGUEL DO CARMO NUNES DA SILVA

Assistente da Faculdade de Ciências  
da  
Universidade do Porto

TESE DE DOUTORAMENTO

na especialidade de Física Teórica  
submetida à Universidade do Porto

1989

'  
a  
*Teresa Isabel*  
e  
*Raquel Sofia*

## AGRADECIMENTOS

É com prazer que faço público o meu reconhecimento, pelo trabalho de orientação nos últimos seis anos, ao Professor Doutor Eduardo J. S. Lage. Desse período, em que o Doutor Lage, muito me ensinou, assume particular destaque a segunda metade, que culminou na presente Tese, onde o seu conselho, colaboração e encorajamento sempre prontos eu gostaria de agradecer.

Um agradecimento especial vai para os elementos do Grupo de Física Teórica do C.F.U.P. que sempre me proporcionaram audiência crítica e interveniente em diversos Seminários que realizei.

Gostaria também de agradecer: ao Professor Doutor José Maria R. M. Araújo pelas muitas cartas de recomendação, e pela forma pronta como reconheceu a minha necessidade de estudo de assuntos de vanguarda no meu Estágio Teórico da Licenciatura em Física; ao Professor Doutor J.A.M.S. Duarte que me iniciou nas teorias de Percolação e dos Magnetes Diluídos; ao Professor Doutor Jorge Reis Lima pela indicação da ref. [73]; à Doutora Fátima Mota na companhia de quem, em incursões ao Bar da Faculdade, tomei muitas chávenas de revigorante café; e à Doutora Iveta Pimentel pela forma como me recebeu na minha estada em Oxford em Junho de 1987. Este último agradecimento é extensivo ao Professor Doutor Robin B. Stinchcombe (e esposa) bem como outro lhe é devido pelas muitas conversas que me proporcionou: Porto, Oxford, Trieste, Sevilha, Geilo e Fig. da Foz.

Por fim, um agradecimento é devido a duas instituições: ao I.N.I.C. pela concessão de bolsa de estudos a partir de Outubro de 1987; e à Universidade do Porto, por intermédio do Grupo de Física da Faculdade de Ciências, que apoiou essa concessão.

"Aterrei no aeroporto com um dia de atraso para a conferência (não consegui ir no primeiro dia) e dirigi-me para o sítio onde estavam os táxis. Disse ao expedidor: «Quero ir para a Universidade da Carolina do Norte.»

«Qual delas», disse ele, «a Universidade do Estado da Carolina do Norte, em Raleigh, ou a Universidade da Carolina do Norte em Chapel Hill?»

É escusado dizer que não fazia a mínima ideia. «Onde são as duas?», perguntei, pensando que deveriam ser próximas uma da outra.

«Uma delas fica para norte e a outra para sul, aproximadamente à mesma distância.»

Não tinha comigo nada que permitisse saber qual delas era e não ia mais ninguém para a conferência com um dia de atraso como eu.

Isso deu-me uma ideia. «Ouça», disse eu ao expedidor. «O encontro principal começou ontem, por isso devem ter passado ontem por aqui uma data de tipos que iam ao encontro. Vou descrever-lhos: deviam andar com a cabeça como que no ar e a conversar uns com os outros, sem ligarem para onde iam, dizendo uns aos outros coisas como 'Gé-miu-niu. Gé-miu-niu'.»

A cara dele iluminou-se: «Ah, sim», disse ele. «Quer dizer Chapel Hill!» Chamou o primeiro taxi da fila: «Leve este senhor à Universidade, em Chapel Hill.»

Richard P. Feynman

in "Está a brincar Sr. Feynman!"

## ÍNDICE

pág.	§
	CAP. I - PRÓLOGO
1	1 - Dos trabalhos anteriores
3	2 - Dos modelos
7	3 - Das técnicas
9	4 - Das perspectivas de pesquisa
	CAP. II - INTRODUÇÃO
12	1 - Renormalização e leis de escala
16	2 - Dinâmica crítica a $T_c = 0$
25	3 - Método de Achiam & Kosterlitz
	CAP. III - DINÂMICA NO LIMIAR DE PERCOLAÇÃO
28	1 - Introdução
32	2 - Dinâmica crítica em redes fractais
37	3 - Mecanismos de quebra de escalonamento em $p_c$
40	4 - Renormalização dinâmica no limiar de percolação
49	5 - Discussão

## CAP. IV - FACTORES DE NÃO-UNIVERSALIDADE A 1D

- 51 1 - Introdução
- 54 2 - Movimento aleatório de paredes de domínios
- 59 3 - Dinâmica anómala
- 62 4 - Método numérico de renormalização
- 67 5 - Caso com distribuição anómala das interacções
- 70 6 - Efeito do retardamento das interacções
- 73 7 - Discussão

## CAP. V - DINAMICA DE KAWASAKI

- 74 1 - Introdução
- 77 2 - Argumento do movimento de paredes de domínios
- 79 3 - Aplicação do método de renormalização
- 83 4 - Modos críticos e tempos de relaxação
- 88 5 - Discussão

## CAP. VI - EPILOGO

- 90 1 - Conclusões
- 94 2 - Problemas em aberto
- 96 3 - Desenvolvimentos futuros

## APÊNDICE I

- 97 - Estatística de valores extremos

## APÊNDICE II

- 100 - Geradores de números aleatórios

- 102 REFERÊNCIAS

## CAPÍTULO I

### PRÓLOGO

Neste capítulo tentaremos situar o trabalho apresentado nesta Tese. Procuraremos enquadrar os projectos levados a termo pelo autor nas obras por este já elaboradas, nos artigos de revisão e demais publicações vindos a lume até à data da sua execução.

Referência será feita às motivações de cariz científico que determinaram a escolha desses projectos bem como das técnicas e modelos usados. Serão também apresentadas as ideias estruturantes que presidiram à elaboração desta obra.

#### §1. Dos trabalhos anteriores

A presente Tese vem na continuação de essencialmente dois trabalhos anteriormente realizados pelo autor.

Num primeiro trabalho, uma monografia sobre "Ferromagnetes Diluidos" (realizado no âmbito do Estágio

Teórico da Licenciatura em Física) são abordados temas como as Singularidades de Griffiths, o modelo exacto de McCoy e Wu [23] e a aplicação das técnicas de Renormalização no Espaço Real. Acresce que poderemos sempre lançar mão à referência obrigatória que é o excelente artigo do Professor Robin B. Stinchcombe no volume 7 da série Phase Transitions and Critical Phenomena [1]. Fica assim explicado porque não nos deteremos em demasia na temática dos Ferromagnetes Diluídos.

O segundo trabalho é uma síntese teórica e um conjunto de problemas sobre Dinâmica Crítica apresentados às Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica. Aí são abordados temas como a Opalescência Crítica, o Factor de Estrutura Dinâmico para um fluido simples, as Leis de Escala em Dinâmica, técnicas de Renormalização Dinâmica em alguns sistemas simples, a Teoria Convencional e o Teorema de Flutuação Dissipação para um sistema regido por uma equação mestra. É claro que o que ficou dito não deve obnuilar a referência ao capítulo 15 do manual didáctico de Eugene Stanley (Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena [2]), aos artigos de revisão de Hohenberg e Halperin [3] e de Kyozi Kawasaki [4], ou aos "Proceedings" da Conferência da Universidade de Genebra (1979) [5]. Fica assim dada uma explicação sobre a ênfase (e extensão) posta no capítulo II desta Tese.

## §2. Dos Modelos

O modelo de Ising, cuja história remonta aos finais do primeiro quartel deste século [6], é sem dúvida o protótipo dos sistemas físico-matemáticos utilizados no estudo, ou modelagem, dos fenómenos de transição de fase. Como sistema clássico, que é, não possui dinâmica intrínseca (ao contrário dos sistemas de spins quânticos) sendo esta introduzida postulando uma equação de evolução para a probabilidade, dependente do tempo, de cada configuração do sistema  $P(\langle \sigma \rangle, t)$  [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\langle \sigma \rangle, t) = -\mathcal{L} P(\langle \sigma \rangle, t) \quad (1.1)$$

Esta equação de balanço de probabilidade ou Equação Mestra (EM) impõe, na formulação de Glauber [7,8], a transição de quando muito um spin em cada instante com uma taxa de probabilidade

$$W_i(\sigma_i) = \frac{1}{2\tau_0} \left[ 1 - \sigma_i \operatorname{th}(\beta E_i) \right] \quad (1.2)$$

onde  $\beta = (k_B T)^{-1}$  e  $E_i$  refere as interações de  $\sigma_i$  no hamiltoniano de Ising

$$\mathcal{H} \equiv -J \sum_{\langle i j \rangle} \sigma_i \sigma_j \equiv -\frac{1}{2} \sum_i \sigma_i E_i$$

Desta forma

$$\mathcal{L} \equiv \sum_i (1 - \hat{p}_i) W_i(\sigma_i), \quad (1.3)$$

Conde  $\hat{p}_i$  é o operador de mudança de sinal de  $\sigma_i = \pm 1$  assegura a solução de equilíbrio pois

$$W_i(\sigma_i) P_{\text{eq}}(\langle \sigma \rangle, \sigma_i) = W_i(-\sigma_i) P_{\text{eq}}(\langle \sigma \rangle, -\sigma_i) \quad (1.4)$$

No entanto outras formas [4] para além de (1.2) existem que asseguram também a condição de reversibilidade microscópica (1.4).

Várias justificações têm sido avançadas para o modelo (1.1-3) partindo da premissa de que os spins de Ising estão acoplados a um sistema infinito de bosões ou de fermiões (o banho térmico) [9,10]. Quanto ao tempo intrínseco de relaxação microscópica  $\tau_0$  em (1.2) ele foi estimado em  $10^{-11}$  segundos em estudos experimentais de Relaxação Dielétrica no  $\text{NaNO}_2$  [11] ao qual o modelo de Glauber foi ajustado.

Outros tipos de dinâmica podem ser formulados para além da (1.2). K. Kawasaki [12] estabeleceu uma taxa de transição entre apenas spins vizinhos de sinal oposto de forma a conservar a magnetização total como seria de esperar num modelo de "gaz numa rede" [6]:

$$W_{ij}(\sigma_i, \sigma_j) = \frac{1}{2\tau_0} \frac{1 - \sigma_i \sigma_j}{2} \left[ 1 - \text{th} \beta(\sigma_i E_i^{(j)} + \sigma_j E_j^{(i)}) \right] \quad (1.5)$$

Cem  $E_i^{(j)}$  é excluída a interacção de  $\sigma_i$  com  $\sigma_j$ ,

ficando

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{\langle ij \rangle} (1 - \hat{p}_{ij}) W_{ij}(\sigma_i, \sigma_j)$$

onde  $\hat{p}_{ij}$  é o operador de troca de valores dos spins  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$ . Formulação mais elaborada é a de Kadanoff e Swift [13] que considera a dinâmica de mais graus de liberdade, introduzindo uma variável de quantidade de movimento, o que atesta as potencialidades deste tipo de formulação estocástica.

Uma das possíveis generalizações a spins com mais de dois estados é conseguido com recurso ao modelo de Potts [14] cujo hamiltoniano se escreve

$$\mathcal{H} \equiv -J \sum_{\langle ij \rangle} (\delta_{\sigma_i \sigma_j} - q^{-1}) \quad (1.6)$$

com  $\sigma_i = 0, 1, 2, \dots, q-1$ . A extensão da dinâmica de Glauber (1.2) ao modelo de Potts [15,48] pode ser expressa de forma geral pelas taxas de transição [79]

$$W_i(\sigma_i \rightarrow \sigma'_i) = \frac{1}{\tau_0} \frac{e^{-\beta[(1-\alpha)\mathcal{H}(\sigma'_i) - \alpha\mathcal{H}(\sigma_i)]}}{Z_i}, \quad (1.7)$$

onde  $Z_i$  pode ser escolhido de forma a normalizar (1.7)

$$\sum_{\sigma'_i} \tau_0 W_i(\sigma_i \rightarrow \sigma'_i) = 1, \quad (1.8)$$

e para  $q=2$  e  $\alpha=1/2$  reproduz (1.2). Definindo o operador

de salto do estado  $\sigma_i$  para  $\sigma'_i = \sigma_i + r$  (módulo  $q$ ) como sendo  $\hat{\psi}_i^{(r)}$ , temos

$$\mathcal{L} \equiv \sum_i \sum_r (1 - \hat{\psi}_i^{(r)}) w_i . \quad (1.9)$$

### §3. Das Técnicas

Se a 1D o modelo de Glauber tem solução exacta [8] com a passagem a dimensionalidades superiores torna-se necessário o recurso a aproximações, vindo logo em primeiro lugar as diversas variantes de aproximações de campo médio. Este tipo de aproximações de grande utilidade longe do ponto crítico permitem um estudo qualitativo junto do mesmo, mas encontram-se grandes dificuldades na sua implementação em sistemas com inhomogeneidades. O essencial sobre estas técnicas está dito por K. Kawasaki em [4].

Outra técnica é a Simulação de Monte Carlo em sistemas finitos, encontrando também algumas dificuldades no estudo da vizinhança do Ponto Crítico em consequência de a divergência do tempo de relaxação exigir elevados tempos de CPU. A fim de contornar esta dificuldade um dos expedientes usados é o de construir máquinas dedicadas como a recente "m-TIS" de N. Ito et al. [16].

A técnica por excelência para o estudo da criticalidade é a de renormalização. Em especial a renormalização no espaço real que permite a abordagem directa de sistemas com desordem; estando inventariado por M. Suzuki [5] uma panóplia de variantes com aplicação à dinâmica. Esses métodos vão desde a renormalização das equações de movimento para o valor médio dos spins e correlações de ordem superior, que utilizaremos no último capítulo, até ao método de G.F. Mazenko e colaboradores

[5] que pela sua complexidade não é adaptável ao tratamento de sistemas com desordem.

Deste panorama ressalta pela sua simplicidade o método de Achiam e Kosterlitz que descreveremos no capítulo II. Persistindo, como veremos, alguns problemas na sua fundamentação, ele vale não só pela facilidade com que permite tratar sistemas desordenados como pelos resultados que permite obter.

#### §4. Das Perspectivas de Pesquisa

No momento de partida para o trabalho que conduziu a esta Tese ainda persistia alguma controvérsia sobre a dinâmica de sistemas puros (sem inomogeneidades). Por exemplo, para o modelo de Glauber a 2D (interacções ferromagnéticas) só recentemente as Simulações de Monte Carlo [16,17,83,84] apontam para valores concordantes com  $z = 2,132 \pm 0,008$  confirmando a convicção de que a teoria convencional ( $z=2-\eta < 2$  [22]) é violada.

Para esses mesmos sistemas estava encerrado o ciclo de questões quanto à relevância da escolha das taxas. Nomeadamente o efeito da escolha de  $Z_i$  em (1.7) com o trabalho de Deker e Haake [18] e o efeito de se considerar as energias do estado inicial e/ou final (parâmetro  $\alpha$  em (1.7)) com o trabalho de Weir et al. [19].

Ainda no efeito da forma das taxas de transição sobre a dinâmica várias questões se colocavam. Os efeitos puramente dinâmicos que poderiam resultar de inomogeneidades nos tempos intrínsecos de transição  $\tau_0$  da equação (1.2), ou de efeitos de memória como o retardamento das interacções (ver capítulo V).

Quanto à dinâmica de Kawasaki a aplicação da renormalização e o estudo do efeito de inomogeneidades estava no essencial por ser feito tendo-se generalizado resultados conhecidos e reobtendo outros pelo método de renormalização (ver capítulo IV). É claro que tanto estes

como grande parte dos estudos atrás referidos se realizaram a 1D o que indicia o estado das coisas e as perspectivas que se abrem para estudos em dimensionalidades superiores.

Outra grande motivação do presente trabalho foi a experiência de G. Aeppli et al. (1984) [35] em magnetes com diluição no ponto percolativo. De facto o valor de  $z$  anormalmente elevado aí encontrado tinha já suscitado várias teorias e argumentos [80] restando o estudo da sua dependência em grandezas caracterizadoras do sistema como a sua dimensão e a das suas variáveis microscópicas (ver capítulo III).

\*

\* \*

Uma perspectiva unificadora enformou a execução do trabalho aqui apresentado bem como essa mesma apresentação: a Universalidade. Ela concretiza-se na constatação da existência de factores como a dimensionalidade, o número de estados dos spins ou o tipo de dinâmica (com ou sem conservação) que determinam iguais valores dos parâmetros caracterizadores do fenómeno crítico (expoentes críticos) estabelecendo classes ditas de Universalidade. Tais classes afirmam a irrelevância de factores microscópicos como a geometria da rede subjacente, forma particular da distribuição dos valores das interacções ou o detalhe da forma escolhida para as taxas de transição. Por oposição a essa regularidade há que procurar as situações em que ela é

quebrada pois, como veremos, ocorrem com frequência em dinâmica crítica (em especial quando  $T_c=0$ ).

## CAPÍTULO II

### INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordaremos os conceitos e técnicas de utilização comum aos capítulos subsequentes. Igualmente merecerão aqui tratamento separado os conceitos de maior relevância bem como aqueles que pelas suas particularidades poderiam motivar uma quebra na apresentação das matérias em cada um dos capítulos seguintes.

#### §1. Renormalização e Leis de Escala

A renormalização em dinâmica decorre de forma complementar ao caso estático. Para além do comprimento microscópico característico  $a$  que se transforma segundo um factor de escala  $b$ ,

$$a' = b a \quad (2.1)$$

temos a considerar um tempo microscópico característico

$\tau_0$  que suporemos transformar-se segundo um factor não linear em  $\underline{b}$ :

$$\tau'_0 = b^z \tau_0 \quad (2.2)$$

com  $z$  a determinar. Estas transformações permitem redefinir o sistema físico num outro formalmente idêntico.

Assim, se identificarmos o sistema por um conjunto  $\mathcal{K} = \langle K_\alpha \rangle$  de parâmetros, representando um ponto  $K$  no "espaço dos parâmetros", este transformar-se-á segundo

$$K' = \mathcal{R}_b K$$

onde  $\mathcal{R}_b \mathcal{R}_{b'} = \mathcal{R}_{bb'}$ , definindo um semigrupo dito Grupo de Renormalização (GR). Tudo o que é conhecido para o GR no caso estático continua a ser válido no caso dinâmico com apenas o complemento de ser necessário o reescalonamento do tempo:

- i)  $K' - K^* = \mathcal{R}_b^L (K - K^*)$ , na vizinhança de  $K^*$  (ponto fixo,  $K^* = \mathcal{R}_b^L K^*$ ), onde  $\mathcal{R}_b^L$  é a linearização de  $\mathcal{R}_b$ ;
- ii)  $K - K^* \equiv \sum r_i \bar{e}_i$ , em que  $\mathcal{R}_b^L \bar{e}_i = \rho_i(b) \bar{e}_i$  define equação de valores próprios  $\rho_i(b)$  para o vector próprio  $\bar{e}_i$  tal que  $\rho_i(b)\rho_i(b') = \rho_i(bb')$ ; ou seja,  $\rho_i(b) = b^{y_i}$  e  $r'_i = b^{y_i} r_i$ ;
- iii) um dos  $r'_i$ , por exemplo  $r'_1$ , terá que ser proporcional ao afastamento  $\varepsilon$  ao ponto crítico

( $\varepsilon = T - T_c$  ou  $\varepsilon = \exp(-\beta J)$ ) com  $y_1 = \nu^{-1}$  caso exista um único comprimento de correlação relevante

$$\xi = \xi_0 \varepsilon^{-\nu}. \quad (2.3)$$

Posto isto, consideremos a transformada de Fourier da variável  $\sigma(r, t)$  que se transforma segundo

$$\sigma(q, \omega) \rightarrow \sigma'(q', \omega') = b^x \sigma(qb, \omega b^z) \quad (2.4)$$

com  $x$  a determinar. Suponhamos ainda que o sistema caracterizado por  $\sigma$  é finito, ou semi-finito, com dimensão linear  $n$ . Definindo

$$S(q, \omega, K, n) \equiv \langle \sigma(q, \omega) \sigma(-q, -\omega) \rangle_{K, n} \quad (2.5)$$

temos

$$S(q, \omega, K, n) = b^{2x} S(qb, \omega b^z, K, nb^{-1}) \quad (2.6)$$

que na vizinhança do ponto fixo  $K^*$  toma a forma

$$S(q, \omega, K, n) = b^{2x} S(qb, \omega b^z, K^* \pm \xi^{-1} \left[ \frac{b}{\xi} \right]^{1/\nu} + \mathcal{O}(b^{y_2}), n/b) \quad (2.7)$$

pelo que se conclui, caso os termos de ordem  $b^{y_2}$  sejam ignoráveis, que existe uma frequência característica  $w_c$  tal que:

$$w_c(q, \xi, n) = b^{-z} w_c(qb, \xi b^{-1}, nb^{-1}) \quad (2.8)$$

Em particular para o sistema infinito, e fazendo  $b=\xi$  em (2.8), resulta a hipótese de escala dinâmica de Halperin e Hohenberg [20]

$$w_c \approx \xi^{-z} f(\xi q) \quad (2.9)$$

Para o sistema finito (ou semi-infinito) no ponto crítico fazendo  $b=n$  vem a lei de escala

$$w_c(n) \approx n^{-z} \quad (2.10)$$

estabelecida por M. Suzuki. [21].

§2. Dinâmica Crítica a  $T_c = 0$

Consideremos a equação mestra

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\langle \sigma \rangle, t) = -\mathcal{L} P(\langle \sigma \rangle, t) \quad (2.11)$$

e definamos a função de correlação

$$\begin{aligned} C_q(t) &\equiv \langle \sigma_{-q}(0) \sigma_q(t) \rangle \\ &= \text{tr}_{\langle \sigma' \rangle} P_{eq}(\langle \sigma' \rangle) \sigma'_{-q} [\text{tr}_{\langle \sigma \rangle} P(\langle \sigma \rangle, t) \sigma_q] \end{aligned} \quad (2.12)$$

com

$$\sigma_q = N^{-1/2} \sum_j e^{iq \cdot r_j} \sigma_j \quad (2.13)$$

$$P(t=0) = \mathbb{I}_{\sigma, \sigma'}$$

Sendo o operador  $\mathcal{L}$  semelhante a um operador hermitico ( $P_{eq}^{1/2} \mathcal{L} P_{eq}^{-1/2}$ ) com vectores próprios  $\phi_i$  com valores próprios  $\tau_i^{-1}$

$\therefore$

$$\begin{aligned} C_q(t) &= \langle \sigma_{-q} e^{-t\mathcal{L}} \sigma_q \rangle \\ &= \sum_i e^{-t/\tau_i} |\langle \sigma_q \phi_i \rangle|^2 \\ &\equiv C_q(0) \int_0^\infty e^{-t/\tau} y(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde a última equação define a densidade espectral de  $\mathcal{L}$ :

$y(\tau) (\geq 0)$ . Definindo [24] o tempo característico  $\tau_q$

$$\tau_q = \frac{1}{C_q(0)} \int_0^{\infty} C_q(t) dt \quad (2.15)$$

e a taxa de relaxação inicial

$$\nu_q = - \left. \frac{\partial}{\partial t} \text{Ln } C_q(t) \right|_{t=0} \quad (2.16)$$

vem de (2.14-16)

$$\tau_q \nu_q = \int_0^{\infty} \tau y(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \tau^{-1} y(\tau) d\tau \geq 1$$

pela desigualdade de Schwarz; isto é,

$$\tau_q \geq \nu_q^{-1} \quad (2.17)$$

No entretanto o Teorema de Flutuação-Dissipação diz-nos que

$$C_q(\omega) = \frac{2k_B T}{\omega} \text{Im } \chi_q(\omega) \quad , \quad (2.18)$$

ligando a transformada de Fourier da correlação à susceptibilidade  $\chi_q(\omega)$ , ou

$$C_q(t=0) = k_B T \chi_q(\omega=0) \quad (2.19)$$

Por outro lado [24,25]

$$-\frac{\partial}{\partial t} \langle \sigma_i(0) \sigma_j(t) \rangle \Big|_{t=0} = \langle \sigma_i \mathcal{L} \sigma_j \rangle \equiv$$

$$\equiv R_{ij} = \begin{cases} 2 \langle W_i(\sigma_i) \rangle \delta_{ij}, & \text{Din. Glauber} \\ \delta_{ij} \sum_{k_j} \langle W_{jk_j} \rangle - \sum_{k_j} \delta_{ik_j} \langle W_{ij} \rangle, & \text{Din. Kawasaki} \end{cases}$$

onde  $k_j$  refere um vizinho de  $j$ . Então

$$k_B T \chi_q \nu_q = -\frac{\partial}{\partial t} C_q(t) \Big|_{t=0} = R_q \quad (2.20)$$

isto é,

$$\tau_q \geq k_B T \chi_q / R_q \quad (2.21)$$

Este resultado traduz a bem conhecida aproximação de L. Van Hove [22] (teoria convencional) segundo a qual, no modo crítico  $q_c$ , o coeficiente cinético  $R_q$  é suposto não ser singular resultando o amortecimento crítico puramente da susceptibilidade

$$\chi_{q_c} \approx \xi^\gamma$$

com  $\gamma = 2 - \eta$ , dando  $z = 2 - \eta$  caso não haja conservação e  $z = 4 - \eta$  no caso com conservação pois  $R_q \approx q^z$ .

A  $T_c = 0$  a suposição de  $R_q$  não se anular no  $q_c$  é frequentemente violada. Logo a 1D, no caso homogéneo, temos

$$R_q \approx \begin{cases} 2 \tau_0^{-1} e^{-2K} , & \text{Din. Glauber} \\ 4 \tau_0^{-1} e^{-4K} (1 - \cos q) , & \text{Din. Kawasaki} \end{cases}$$

e

$$k_B T \chi_q = \frac{1 - |Z|^2}{|1 - Z|^2} , \quad Z = e^{iq} \text{th } K$$

$$\approx \xi^{2-\eta} / (1 + (q\xi)^2) , \quad \eta = 1.$$

Assim resulta para a dinâmica de Glauber

$$z \geq 3 - \eta = 2$$

e para a de Kawasaki

$$z \geq 6 - \eta = 5$$

por oposição ao previsto pela Teoria Convencional:  $z = 1$  e 3, respectivamente.

No caso com uma distribuição periódica de interações  $\langle J_1, J_2 \rangle$  tem-se para a dinâmica de Kawasaki

$$R_q \approx 4 \tau_0^{-1} e^{-2(K_1 + K_2)} (1 - \cos q)$$

que é responsável por comportamento não-universal confirmado pelo GR (capítulo V).

\*  
\*   \*  
\*

Outro problema surge se, ao contrário do que foi suposto em (2.2), o tempo é um parâmetro marginal ( $b^{-z} \equiv 0$  no ponto fixo). Tal ocorre em consequência de  $T_c = 0$  em certos sistemas desordenados e requer o estudo das relações de recorrência do GR não no ponto fixo mas na sua vizinhança por iteração para a região de altas

temperaturas ( $\xi \approx 1$ ).

Suponhamos por exemplo que

$$\tau(ba) = \alpha \xi^\beta \tau(a) \quad (2.22)$$

em vez de (2.2), com

$$\xi = \xi_0 e^{-\nu}$$

Notemos que  $\xi_0$  é uma amplitude não obtível por renormalização o que equivale a não ser possível fixar o valor de  $\alpha$  em (2.22).

Como o tempo macroscópico característico  $t(a, \xi)$  vale

$$t(a, \xi) \equiv F(a, \xi) \tau(a)$$

∴

$$\begin{aligned} t(a, \xi) &= t(ba, \xi/b) \\ &= F(ba, \xi/b) \alpha \xi^\beta \tau(a) \end{aligned}$$

i. é,

$$\text{Ln} \frac{F(a, \xi)}{F(ba, \xi/b)} = \text{Ln} \frac{\tau(ba)}{\tau(a)} = \text{Ln} \alpha + \beta \text{Ln} \xi$$

De onde

$$\text{Ln} \frac{\tau(b^n a)}{\tau(b^{n-1} a)} \frac{\tau(b^{n-1} a)}{\tau(b^{n-2} a)} \dots \frac{\tau(ba)}{\tau(a)} = \text{Ln} \frac{F(a, \xi)}{F(ab^n, \xi b^{-n})}$$

ou, se  $b^n \approx \xi$ ,

$$\text{Ln} \frac{F(a, \xi)}{F(\xi a, 1)} = \frac{\text{Ln} \xi}{\text{Ln} b} \sum_{m=1}^n \text{Ln} \frac{\tau(b^m a)}{\tau(b^{m-1} a)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{Ln } \alpha}{\text{Ln } b} \text{Ln } \xi + \beta \sum_{m=1}^{\frac{\text{Ln } \xi}{\text{Ln } b}} \text{Ln } \xi_{m-1} \\
&= \frac{\beta}{2} \frac{\text{Ln } \alpha}{\text{Ln } b} \text{Ln}^2 \xi + \left( \frac{\beta}{2} + \frac{\text{Ln } \alpha}{\text{Ln } b} \right) \text{Ln } \xi
\end{aligned}$$

i. é,

$$\text{Ln } \tau(\xi a) = \text{Ln } \tau(a) + A \text{Ln}^2 \xi + B \text{Ln } \xi$$

ou

$$\tau(\xi a) = \xi^{z(\xi)} \tau(a)$$

com

$$\begin{aligned}
z(\xi) &= A \text{Ln } \xi + B & (2.23) \\
&\approx \frac{2AJ\nu}{T}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\beta}{2} \frac{\text{Ln } \alpha}{\text{Ln } b} \\
B &= \frac{\beta}{2} + \frac{\text{Ln } \alpha}{\text{Ln } b} & (2.24)
\end{aligned}$$

Tem-se pois nesta situação marginal uma quebra da hipótese de escala restrita [20] com um valor do expoente crítico dependente da temperatura.

\*  
\* \* \*

A distinção entre a natureza anómala da dinâmica a  $T_c=0$  e a natureza canónica da dinâmica a  $T_c \neq 0$  é bem posta em evidência na teoria de escala seguinte [40,34].

Consideremos um sistema sujeito a um processo de dilatação de escala por um factor  $b$ . Seja  $J$  o valor da interacção original ( $K = \beta J$ ) e  $J_n$  o valor típico da interacção entre blocos originados na  $n$ -ésima etapa desse processo de dilatações sucessivas. Na região de fortes acoplamentos tem-se a forma geral

$$K_{n+1} = K_n F(K_n) \quad (2.25)$$

com

$$F(K) = b^a - \mu K^{-1}$$

em virtude de  $K = \infty$  ser ponto fixo (e ser a forma obtida no caso da renormalização de Migdal-Kadanoff).

Notando por  $V_n$  a energia típica necessária para inverter a magnetização de um bloco ( $V_0 = 0$  e  $v_n = \beta V_n$ ) ela diferirá da correspondente energia  $V_{n-1}$ , para um bloco mais pequeno, apenas da interacção entre blocos:

$$V_{n+1} = V_n + K_n. \quad (2.26)$$

Estas barreiras de energia determinam o tempo de relaxação dos blocos e particularmente o tempo de relaxação do sistema que será dado pela energia típica de inversão de um bloco de tamanho  $\xi$  (pela lei de Arrhenius):

$$\tau \approx e^{V_\xi}. \quad (2.27)$$

Iterando (2.25) vem

$$K_n = b^{na} K_0 - \mu \frac{1-b^{na}}{1-b^a} \quad (2.28)$$

que para  $b^n \approx \xi$  é tal que  $K_n \approx 0$ ; isto é,

$$\xi^a K \approx \mu \frac{1-\xi^a}{1-b^a}. \quad (2.29)$$

Resulta assim de (2.29) três situações:

i)  $a \rightarrow 0$ ; (2.29) escreve-se

$$\xi \approx e^{K \frac{\mu}{\ln b}} \quad (2.30)$$

Na vizinhança de  $T_c = 0$  (2.28) tem-se  $K_n = K$  pelo que de (2.26) vem

$$v_\xi \approx K \frac{\ln \xi}{\ln b} \approx \frac{1}{T^2}. \quad (2.31)$$

Assim, este caso descreve, como resulta de (2.27,30 e 31), a situação anómala com  $z \approx \frac{1}{T}$  e que encontraremos no capítulo III.

ii)  $a < 0$ ; fazendo  $\nu = |a|^{-1}$  resulta de (2.29)

$$\xi \approx \left[ \frac{J}{T} \right]^\nu \quad (2.32)$$

Na vizinhança de  $T_c = 0$  (2.28) vale  $K_n \approx b^{na} K$  pelo que de (2) vem

$$v_\xi \approx \xi^{1/\nu}. \quad (2.33)$$

Assim, este caso descreve, como resulta de (2.27,32 e 33), a situação anómala com  $z \approx \beta / \ln \beta$  que encontraremos no capítulo IV.

iii)  $a > 0$ ; neste caso (2.29) tem uma solução para  $\xi$  que é singular em  $K = K_c = \mu / (b^a - 1)$  com

$$\xi \approx (T - T_c)^{-\nu} \quad (2.34)$$

Na vizinhança de  $K_c$  (2.28) toma a forma

$$K_n - K_c = b^{na} (K - K_c)$$

pelo que de (2.26) vem

$$v_\xi \approx K_c \frac{\text{Ln } \xi}{\text{Ln } b} . \quad (2.35)$$

Assim, este caso descreve, como resulta de (2.27,34 e 35), a dinâmica a temperatura crítica finita onde é válida a hipótese de escala restrita com  $z$  constante:

$$\tau \approx \xi^z .$$

No entanto esta teoria não cobre todas as situações pois assenta apenas na variabilidade do comportamento da estática do sistema expressa em (2.25). De facto, o comportamento anómalo pode ser induzido estritamente pela dinâmica, como veremos no capítulo IV.

### §3. Método de Achiam e Kosterlitz

A descrição das transições de fase de segunda ordem, no equilíbrio, ao ser feita por uma equação mestra da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = -\mathcal{L} P(t) \quad (2.36)$$

subentende que  $P(t)$  é, de facto, uma probabilidade condicionada  $P(\langle \sigma \rangle, t | \langle \sigma' \rangle)$  tal que

$$P_{eq}(\langle \sigma \rangle) = \sum_{\langle \sigma' \rangle} P(\langle \sigma \rangle, t | \langle \sigma' \rangle) P_{eq}(\langle \sigma' \rangle) \quad (2.37)$$

Assim ao eliminarmos graus de liberdade no sistema, por um processo de renormalização, passando de uma configuração  $\langle \sigma \rangle$  a outra  $\langle \mu \rangle$  tal é expresso pelo operador  $\mathcal{R}$ :

$$P'_{eq}(\langle \mu \rangle) = \sum_{\langle \sigma \rangle} \mathcal{R}(\langle \mu \rangle, \langle \sigma \rangle) P_{eq}(\langle \sigma \rangle) \quad (2.38)$$

com  $\sum_{\langle \mu \rangle} \mathcal{R}(\langle \mu \rangle, \langle \sigma \rangle) = 1$ . Ao passarmos à dinâmica teremos que introduzir [18] um outro operador  $\hat{\mathcal{R}}$  que exprima a transformação da configuração inicial  $\langle \sigma' \rangle$  em  $\langle \mu' \rangle$ :

$$\begin{aligned} P'(\langle \mu \rangle, t | \langle \mu' \rangle) &= \\ &= \sum_{\langle \sigma \rangle} \sum_{\langle \sigma' \rangle} \mathcal{R}(\langle \mu \rangle, \langle \sigma \rangle) P(\langle \sigma \rangle, t | \langle \sigma' \rangle) \hat{\mathcal{R}}(\langle \sigma' \rangle, \langle \mu' \rangle) \quad (2.39) \end{aligned}$$

Daqui resulta pondo  $t=0$  que

$$\mathcal{R} \hat{\mathcal{R}} = \mathbb{I}_\mu \quad (2.40)$$

Achiam e Kosterlitz [33,26] libertam-se da necessidade de considerar explicitamente  $\hat{\mathcal{R}}$  supondo que no limite assintótico  $t \rightarrow \infty$  o sistema perde memória da configuração inicial, e fazem

$$P(\langle \sigma \rangle, t | \langle \sigma' \rangle) \simeq P_{eq}(\langle \sigma \rangle) \phi(\langle \sigma \rangle, t) \quad (2.41)$$

com  $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$ . Em seguida consideram a expansão de

$$\phi(t) = 1 + \sum_{\alpha} h_{\alpha}(t) \theta_{\alpha}(\langle \sigma \rangle), \quad (2.42)$$

com  $\theta_1 = \sum_i \sigma_i$ ,  $\theta_2 = \sum(\sigma_i \sigma_j - \langle \sigma_i \sigma_j \rangle)$ , etc, truncando-a de modo a que a forma resultante para (2.41) seja invariante sob a renormalização de (2.36). Tal truncatura é feita na suposição de o parâmetro que decai mais lentamente ser o parâmetro de ordem  $Q_1$ .

Posto isto, (2.36) escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{eq} \bar{\theta} \cdot \bar{h} = \mathcal{L} P_{eq} \bar{\theta} \cdot \bar{h} \quad (2.43)$$

Aplicando  $\mathcal{R}$  a (2.43) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} P'_{eq} \bar{\theta} \cdot \bar{h}'_e = \mathcal{L}' P'_{eq} \bar{\theta} \cdot \bar{h}'_d$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} P'_{eq} \bar{\theta} \cdot \Lambda(\xi) \bar{h} = -\mathcal{L}' P'_{eq} \bar{\theta} \cdot \Lambda(\xi) \bar{h} \quad (2.44)$$

com  $\bar{h}'_e \equiv \Lambda \bar{h}$  e  $\bar{h}'_d \equiv \Omega \bar{h}$ . Após  $n$  renormalizações (2.44) fica

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{eq}^{(n)} \bar{\theta} \cdot \Lambda^{(n)}(\xi) \bar{h} = -\mathcal{L}^{(n)} P_{eq}^{(n)} \bar{\theta} \cdot \Omega^{(n)}(\xi) \bar{h} \quad (2.45)$$

com

$$\begin{aligned} \Lambda^{(n)}(\xi) &= \Lambda(\xi) \Lambda(\xi b^{-1}) \dots \Lambda(\xi b^{-(n-1)}) \\ \Omega^{(n)}(\xi) &= \Omega(\xi) \Omega(\xi b^{-1}) \dots \Omega(\xi b^{-(n-1)}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Se para  $b^n \approx \xi$  o sistema for renormalizado para a região de altas temperaturas,  $P_{eq}^{(n)} \approx 1$ , e fazendo

$$\mathcal{L}^{(n)} \bar{\theta} \equiv \bar{\theta} L \quad (2.47)$$

tem-se

$$\Lambda^{(n)} \frac{d\bar{h}}{dt} = -L \Omega^{(n)} \bar{h} \quad (2.48)$$

pelo que o tempo de relaxação é o maior valor próprio de [85]

$$(L \Omega^{(n)})^{-1} \Lambda^{(n)}. \quad (2.49)$$

Caso o sistema em causa permita obter igual forma para  $\bar{h}'$  ( $= \Lambda \bar{h} = \Omega \bar{h}$ ) nos membros direito e esquerdo de (2.43) após primeira iteração, então

$$\frac{\partial}{\partial t} P'_{eq} \bar{\theta} \cdot \bar{h}' = -\tilde{\mathcal{L}} P'_{eq} \bar{\theta} \cdot \bar{h}' \quad (2.50)$$

com  $\tilde{\mathcal{L}} = b^z \mathcal{L}'$ .

### CAPÍTULO III

## DINÂMICA NO LIMIAR DE PERCOLAÇÃO

Uma nova solicitação se pôs no estudo da dinâmica crítica com a obtenção experimental de um  $z$  anormalmente elevado para um antiferromagnete de Ising bidimensional, diluído no ponto de percolação.

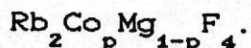
Este capítulo abordará desde essa motivação experimental até às diversas teorias e simulações que poem em evidência a dependência de  $z$  na temperatura. Especial referência será feita a alguns estudos de renormalização que confirmam essa quebra de escalonamento no modelo de Ising e no de Potts.

#### §1. Introdução

O  $\text{Rb}_2\text{CoF}_4$  puro é uma das melhores concretizações de um modelo de Ising bidimensional [35,36] com interações dominantes entre os íões  $\text{Co}^{2+}$  primeiros vizinhos, num arranjo quadrangular,  $T_N = 103\text{K}$ , e expoentes críticos estáticos preditos por Onsager [2]. Quanto à dinâmica é

medido  $z = 1,7$  muito próximo do predito pela teoria convencional  $z = 2 - \eta \approx 1,67$ .

Introduzindo impurezas não magnéticas  $Mg^{2+}$  em substituição do  $Co^{2+}$  obtém-se um antiferromagnete diluído [1] com uma concentração  $p$  de iões magnéticos:



G. Aeppli et al. [35] estudaram este antiferromagnete diluído por intermédio de difusão inelástica de neutrões para  $p = 0,58$  muito próximo do limiar de percolação ( $p_c = 0,593$  para a rede quadrada) tendo obtido  $z = 2,4^{+0,2}_{-0,1}$  superior em cerca de 30% ao valor do sistema puro.

Exigências experimentais [36] impediram a análise a mais baixas temperaturas ( $T \geq 45K$  em [36]) e a constatação das predições teóricas subsequentes [37-39] de que

$$\ln \tau \approx \frac{a}{T^2} + \frac{b}{T}, \quad T \approx T_c(p=p_c) = 0 \quad (3.1)$$

com  $a \neq 0$ . Uma resenha destas predições será feita no §3.

Aeppli et al. [35] apresentam um argumento que justifica o valor de  $z = 2,4$  encontrado na gama de temperaturas experimentada. Esse argumento é baseado no facto de a natureza fractal do aglomerado infinito (AI), junto a  $p_c$ , determinar, através da difusão anormal de paredes de domínios, um reescalonamento nesses tempos de difusão. Esquecem, contudo, a natureza de muito baixas temperaturas ( $T_c = 0$ ) do fenómeno com a existência de

"energias de activação" divergentes. Sobre isto e o papel dos fractais elaboraremos no §2.

No §4 apresentaremos a confirmação de (3.1) por via do Grupo de Renormalização para o modelo de Ising para várias dimensões bem como a dependência de  $a$  e  $b$ , em (3.1), no número de estados  $q$  para o modelo de Potts a 2D.

Concluiremos esta introdução com uma breve generalização aos sistemas diluidos da hipótese de escala dinâmica e a sua verificação a 1D.

Num ferromagnete diluido existem dois comprimentos de correlação característicos em competição [1]: o térmico  $\xi_T$  que vale

$$\xi_T = \xi_0 (e^{2K})^{\nu_T} \quad (3.2)$$

e o percolativo

$$\xi_p = (\Delta p)^{-\nu_p} \quad (3.3)$$

Para os modelos de Ising e de Potts  $\nu_p = \nu_T$  (em  $p=p_c$ ) [1], sendo a 1D  $\nu_T = 1$ .

Com base nestes comprimentos de correlação podemos definir um comprimento de correlação estático  $\xi$  tal que a função de correlação

$$C(r) \approx \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}} \quad (3.4)$$

(com  $\eta = 1$  para  $d=1$ ) tendo-se [1]

$$\xi^{-1} \simeq \xi_T^{-1} + \xi_p^{-1} \quad (3.5)$$

que é exacto a 1D. Ou mais exactamente, junto do ponto bicrítico ( $T_c = 0, p = p_c$ )

$$\xi = \xi_p X\left(\frac{\xi_T}{\xi_p}\right) \quad (3.6)$$

com  $X(y) = x_0(1 + \dots)$  ,  $y \ll 1$

e  $X(y) = x_\infty y^{-1} + \dots$  se  $y \gg 1$ .

Assim a hipótese de escala restrita escreve-se

$$w_c(q, \xi, \frac{\xi_T}{\xi_p}) = q^2 f(q\xi, \frac{\xi_T}{\xi_p}) \quad (3.7)$$

que para  $d = 1$  [74] toma a forma ( $\lambda = \xi_T/\xi_p$ )

$$w_c \approx \xi^{-2} [1 + (q\xi)^2] \quad , \quad \lambda \ll 1 \quad (3.8)$$

e

$$w_c \approx \xi^{-2} \lambda \frac{\lambda^2 + (q\xi)^2}{3\lambda^2 + (q\xi)^2} \quad , \quad \lambda \gg 1 \quad (3.9)$$

Neste capítulo no entanto restringiremos o estudo ao caso  $\lambda \ll 1$  idealmente  $\xi_p = \infty$  ou  $p = p_c$ .

## §2. Dinâmica crítica em redes fractais

Tal como foi apontado por G. Aeppli et al. [35] deve-se antes de mais à estrutura fractal do AI, no ponto de percolação, o valor anómalo de  $z$  encontrado experimentalmente. De facto o tempo de difusão  $t_{AI}$  no AI obedece a uma lei anómala [72]

$$t_{AI} \approx l^{2+\theta} ,$$

com  $\theta \approx 0,8$  a 2D, para percorrer uma distância  $l$  medida macroscopicamente. Ora

$$l^2 = \frac{t_{AI}}{l^\theta} = t$$

representa o correspondente tempo de difusão numa rede euclidiana pelo que os processos de difusão no AI, numa escala de comprimento  $l$ , são  $l^\theta$  vezes mais lentos. Supondo, com G. Aeppli et al. [35], que é válida a teoria convencional, vem

$$w_c \approx \frac{\Gamma_{AI}}{\chi} \tag{3.10}$$

onde  $\chi \approx \xi^{2-\eta}$  é a susceptibilidade ( $\eta \approx 0,33$  em  $p = p_c$  a 2D [81]). O coeficiente cinético  $\Gamma_{AI}$  descreve processos mais lentos que os da rede euclidiana diferindo dos deste caso ( $\Gamma$ ) por um factor de escala:

$$\xi^{-\theta} = \frac{\Gamma_{AI}}{\Gamma} .$$

Ignorando outro possível comportamento singular tem-se

$$w_c \approx \Gamma \xi^{-z} \quad (3.11)$$

com  $z = 2 + \theta - \eta \approx 2,47$ , em 2D, compatível com o valor experimental encontrado [35]. Contudo só um estudo, de raiz microscópica, dos processos de difusão em jogo podem assegurar a existência desse outro comportamento singular oriundo do facto de  $T_c = 0$ .

Numa primeira aproximação ao problema pode ser usada uma rede fractal determinística (obtida por uma regra de construção) tal que  $T_c = 0$  (para análise da importância desta condição veja-se o §2 do capítulo II). Vários cálculos e simulações de Monte Carlo em fractais determinísticos conduziram ao comportamento  $z \sim 1/T$  no ponto percolativo [39,41-43].

Outra aproximação ao problema é a de Henley [37] que parte de uma representação esquemática do AI segundo a qual este se assemelha (modelo dos "fios e pérolas" [44]) a linhas (de ligações) interrompidas por "pérolas" multiplamente conectadas e "pontas soltas" que se estendem destas. As "pérolas" e as "pontas soltas" sendo feitas por cadeias decoradas com iguais motivos de modo auto-semelhante.

Sendo  $\tau(L, \xi)$  o tempo típico para a relaxação de um pedaço  $\mathcal{P}$  do AI de dimensão linear  $L$

∴

$$\tau(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \tau(L, \xi) \quad (3.12)$$

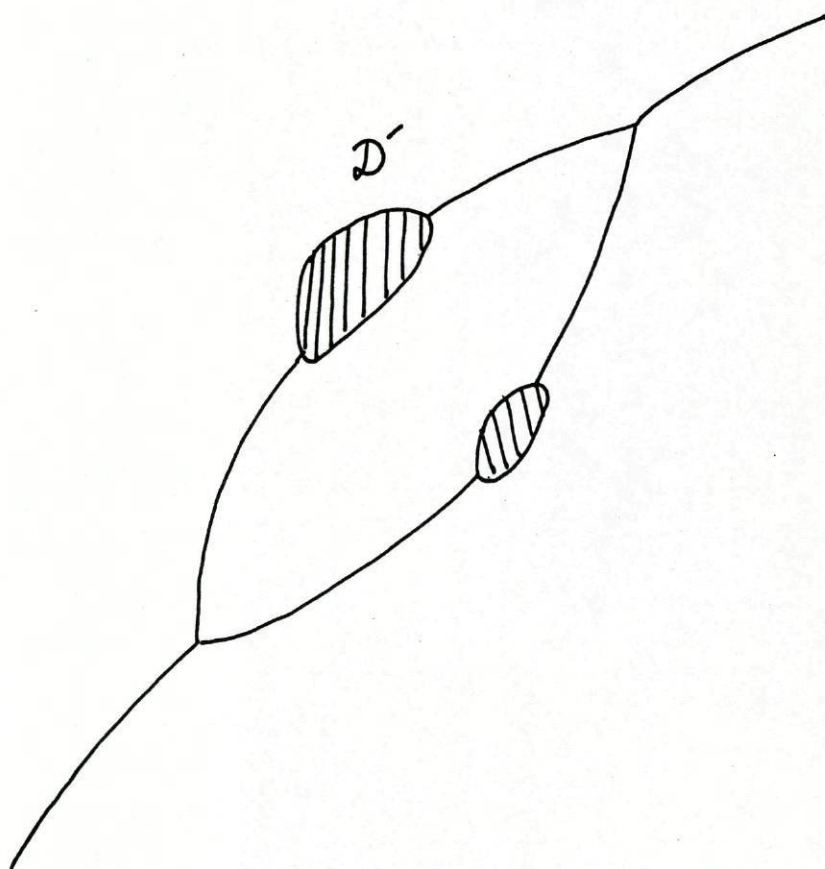


Fig. 1 - Representação esquemática da pérola  $\mathcal{D}$  e da sua sub-pérola  $\mathcal{D}'$ .

Seja  $L \ll \xi$

$$\therefore \tau(L, \xi) \approx \tau_0 e^{E_{\max}(L)/T} \quad (3.13)$$

onde  $E_{\max}(L)$  é a maior barreira de energia no caminho mais fácil para uma inversão da magnetização de  $\mathcal{P}$ . Ora esta inversão corresponde ao movimento de uma parede separando spins de sinal oposto e que nas secções de  $\mathcal{P}$  puramente unidimensionais executam um movimento aleatório rápido com um tempo  $\tau_0$  por etapa.

Os nodos onde concorrem  $n > 2$  ligações ao serem atravessados custam energia (de activação) facto que vai dominar a dinâmica: cada decoração  $\mathcal{D}$  exigirá uma energia máxima  $E_{\max}(\mathcal{D})$ . No caso de duas sub-cadeias em paralelo decoradas cada com uma pérola sendo uma delas  $\mathcal{D}'$  a mais difícil de atravessar (fig. 1):

$$E_{\max}(\mathcal{D}) = E_{\max}(\mathcal{D}') + 2J \quad (3.14)$$

Como a distribuição dos tamanhos de "pérolas" é invariante por uma mudança de escala  $L \rightarrow L' = b^{-1}L$  [45] vem, fixando  $b$  na razão típica entre o tamanho de uma pérola e o da sua maior sub-pérola,

$$E_{\max}(L) = E_{\max}(Lb^{-1}) + 2J$$

e logo

$$\frac{E_{\max}(L)}{2J} \approx D \ln L + C \quad (L \rightarrow \infty) \quad (3.15)$$

com  $D = 1/\ln b$ .

Pelo presente argumento  $D$  é universal dependendo apenas de  $b$ , isto é: da dimensionalidade da rede.

Assim (3.13) vem

$$\begin{aligned}\tau(L, \xi) &\approx (e^C L)^{2DJ/T} \tau_0 \\ &\approx L^{z(T)}\end{aligned}$$

com  $z \sim 1/T$  e conseqüente quebra da hipótese de escala restrita.

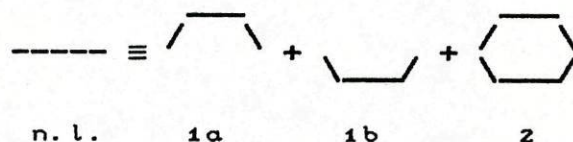
Equação (3.15) é verificada numericamente no modelo de Glauber [40] com:  $C \simeq 0$  e  $D \simeq d_f$  (a dimensão fractal do AI) a 2 e 3 D.

### §3. Mecanismos da quebra de escalonamento em $P_c$

No ponto percolativo [39] os processos de relaxação ou inversão da magnetização a  $T \simeq 0$  consistem na propagação das paredes desses domínios. Nas zonas de cadeias lineares de ligações esta propagação faz-se por simples difusão sob a forma de caminho aleatório com um tempo  $\tau_0$  por etapa. Nos nodos onde concorrem  $m + 2$  ligações ocupadas, a passagem da parede só se fará à custa de uma energia de activação  $2Jm$ , o que faz com que este processo de activação ocorra com uma frequência

$$w \equiv c \tau_0^{-1} (e^{-2K})^m. \quad (3.16)$$

Consideremos um caso com  $m=1$ ; a rede hexagonal. O AI é auto-semelhante pelo que o processo anterior de activação ocorre em todas as escalas de comprimento em consequência das sucessivas ramificações dentro das ramificações. Assim e para uma dilatação de escala  $b = 2$  uma nova ligação (n.l.) fica definida à custa de três situações:



A situação 1 ocorre com probabilidade

$$p' = 2p^3(1-p^3) + p^6 \quad (3.17)$$

pelo que caso haja conexão do tipo 1 esta ocorre com probabilidade

$$Q_1 = 2p^3(1-p^3)/p, \quad (3.18)$$

e a situação do tipo 2, com ramificação, terá probabilidade

$$Q_2 = p^6/p, \quad (3.19)$$

Assim a simples difusão numa ligação renormalizada leva um tempo médio

$$\tau_1 = \tau_0 3^3 \quad (3.20)$$

enquanto que os processos de ramificação com difusão subsequente levam

$$\tau_2 = 9c\tau_0 (e^{2K})^m \quad (3.21)$$

A nova ligação de comprimento  $a' = b a$  será atravessada com um tempo médio

$$\begin{aligned} \tau'_0 &= Q_1 \tau_1 + Q_2 \tau_2 \\ &\simeq Q_2 \tau_2, \quad \text{se } T \gg 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Isto é,

$$\tau'_0 = \alpha \xi^{m/\nu} \tau_0 \quad (3.23)$$

que deveremos comparar com (2.22) vindo  $z$  dependente da temperatura com a forma

$$z = A \operatorname{Ln} \xi + B .$$

e

$$A^{-1} = \frac{2\nu \operatorname{Ln} b}{m}$$

$$B = \frac{m}{2\nu} + \frac{\operatorname{Ln} \alpha}{\operatorname{Ln} b} .$$

#### §4. Renormalização dinâmica no limiar de percolação

A simplicidade do método de Achiam e Kosterlitz [33], em especial quando a perturbação linear no parâmetro de ordem

$$P(\langle \sigma \rangle, t) \simeq P_{eq}(\langle \sigma \rangle) [1 + \sum_i h_i \sigma_i] \quad (3.24)$$

é invariante sob o GR, permite a sua extensão a sistemas com desordem se para tanto se introduzirem algumas aproximações adicionais. Estas são simples aplicações de procedimentos já usados na renormalização estática. Tal é o caso da técnica de "deslocação de interações" de Migdal e Kadanof aplicada à renormalização dinâmica de sistemas puros por vários autores [46-49]; e o método perturbativo [50,51] reminescente dos métodos de renormalização aproximada, por "dizimação", da estática.

##### A) Modelo de Potts a 2D

No caso dos  $q$  estados do modelo de Potts, para a rede quadrada, escolhe-se por simplicidade as taxas de transição com forma não normalizada e apenas dependentes do estado inicial:

$$W_{\sigma_i \rightarrow \sigma'_i} = w_i M_i(\sigma_i) \quad , \quad (3.25)$$

$$M_i(\sigma_i) = \exp[-H_i(\sigma_i)]$$

com  $H_i = \sum_j K_{ij} (\delta_{\sigma_i \sigma_j} - q^{-1})$  expressando a interação do spin  $\sigma_i$  com os seus vizinhos.

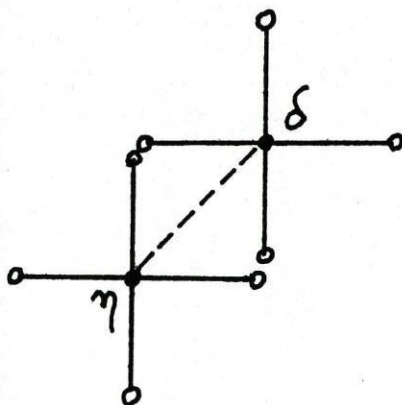


Fig. 2 - Os spins dizimados são representados, de forma superabundante, conforme a cruzeta a partir da qual são identificados. A tracejada é representada a interacção renormalizada sendo  $b = \sqrt{2}$ .

Tem-se então para a EM:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\langle \sigma \rangle, t) = - \sum_i \sum_{\langle \sigma' \rangle} w_i [1 - q \delta_{\sigma_i, \sigma'_i}] \prod_{j \neq i} \delta_{\sigma_j, \sigma'_j} M_i(\sigma'_i) P(\langle \sigma' \rangle, t) \quad (3.26)$$

Introduzindo a aproximação de Achiam e Kosterlitz equivalente a (3.24)

$$P(\langle \sigma \rangle, t) \simeq P_{eq}(\langle \sigma \rangle) [1 + \sum_i h_i(t) (\delta_{\sigma_i, \sigma} - q^{-1})] \quad (3.27)$$

tem-se para (3.26)

$$\frac{\partial}{\partial t} P = \sum_j h_j w_j [1 - q \delta_{\sigma_j, \sigma}] M_j(\sigma_j) \frac{e^{\sum_{\mu} H_{\mu}(\sigma)}}{Z} \frac{1}{\eta, \delta} \Delta_{\eta \delta} \quad (3.28)$$

onde os índices gregos  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\delta$  e  $\nu$  referem os spins da sub-rede que não será dizimada [51]. Neste caso  $\Delta_{\eta \delta}$  assegura a identidade desses spins quando referidos alternativamente a partir de spins diferentes  $\eta$  e  $\delta$  (fig. 2).

Tomando o traço parcial sobre uma das sub-redes quadradas tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} P' = - \sum_{\mu} h_{\mu} w_{\mu} [1 - q \delta_{\sigma_{\mu}, \sigma}] \frac{\prod_{\eta \neq \mu} Z_{\eta}}{Z} \langle \prod_{\substack{\eta, \delta \\ \neq \mu}} \Delta_{\eta \delta} \rangle_{\mu} \quad (3.29)$$

Aqui

$$Z_\eta = \sum_{\sigma_\eta} e^{H_\eta(\sigma_\eta)}$$

e  $\langle \rangle_\mu$  refere a média com peso  $e^{\sum_{\eta \neq \mu} H_\eta}$ .

Na aproximação de mais baixa ordem

$$\langle \prod_{\eta, \delta} \Delta_{\eta\delta} \rangle_\mu \approx \prod_{\eta, \delta} \langle \Delta_{\eta\delta} \rangle_\mu \quad (3.30)$$

com

$$\langle \Delta_{\eta\delta} \rangle_\mu = e^{g_{\eta\delta} + K_{\eta\delta} (\delta_{\sigma_\eta, \sigma_\delta})^{-q-1}}$$

(a definir mais abaixo) reobtem-se equação formalmente idêntica à de partida (3.28) com novas taxas intrínsecas

$$w'_\mu = w_\mu \frac{h_\mu}{h'_\mu} \frac{e^{-\sum_\nu g_{\mu\nu}}}{Z_\mu} \quad (3.31)$$

É da renormalização do membro esquerdo de (3.28) que resulta  $h'_\mu$  obtendo-se

$$h'_\mu = h_\mu - \sum_{\nu=1}^4 \sum_{i=1}^2 \frac{h_i}{4} t_{\mu i} \left[ 1 - 2 \frac{1-t_{\nu i}}{1-t_{\mu i} t_{\nu i}} \right] \quad (3.32)$$

com

$$t_{\mu i} = \frac{e^{K_{\mu i} - 1}}{e^{K_{\mu i} + q - 1}}$$

Deste mesmo cálculo resultam as constantes de acoplamento renormalizadas:

$$t_{\mu\nu} = \frac{t_{\mu 1} t_{\nu 1} + t_{\mu 2} t_{\nu 2} + (q-2)t_{\mu 1} t_{\nu 1} t_{\mu 2} t_{\nu 2}}{1 + (q-1)t_{\mu 1} t_{\nu 1} t_{\mu 2} t_{\nu 2}} \quad (3.33)$$

Até aqui

$$e^{g_{\mu\nu}} = \prod_{i=1}^z \frac{1}{q} (1 - t_{\mu i} t_{\nu i}).$$

Fazendo

$$\tau_{\mu} \equiv 1/w_{\mu}$$

temos para o valor médio de  $\tau'_{\mu}$

$$\tau' = 2 \tau (p_c(1-p_c)^2)^4 \left[ \frac{\xi^{(q-1)/\nu}}{q} \right]^{4/q} \quad (3.34)$$

onde se colheu a parcela mais divergente [53] e  $\xi$  é o comprimento de correlação térmico

$$\xi^{1/\nu} = -1/\text{Ln } t.$$

Comparando (3.34) com (3.23) tem-se ( $b=\sqrt{2}$ )

$$z = A \text{Ln } \xi + B$$

com

$$A^{-1} = \frac{\nu}{2} \frac{q}{q-1} \text{Ln } b, \quad (3.35)$$

que generaliza ao modelo de Potts o resultado de [50].

B) Modelo de Ising em dimensão arbitrária

Pretende-se neste estudo observar a dependência na dimensionalidade  $d$  do coeficiente  $A$  da expressão anómala do expoente crítico dinâmico. Tal como em A), mas para o modelo de Ising, não usaremos taxas de transição

normalizadas por simplicidade. De resto tal renormalização apenas introduzirá um reescalonamento do tempo por um factor algébrico em  $\xi$  que só é relevante para o coeficiente B. Assim sendo

$$W_i(\sigma_i) = \frac{1}{2\tau_i} e^{-\sigma_i E_i} \quad (3.36)$$

com  $E_i = \sum_j K_{ij} \sigma_j$  tomando a EM, na aproximação (3.24), a forma :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\langle \sigma \rangle, t) = - \sum_i \frac{h_i}{\tau_i} W_i(\sigma_i) P_{eq}(\langle \sigma \rangle). \quad (3.37)$$

Utilizando a técnica de "deslocamento" das interacções [82], do interior para as faces e destas para as arestas, de cada hipercubo de lado  $b$  [46-49] obtém-se hipercubos com lados constituídos por uma série de  $b$  feixes com  $b^{d-1}$  ligações (aleatórias) em paralelo. Tal procedimento é aplicado a (3.37) nos mesmos termos em que é feito na estática. Por fim, é feito um traço parcial, em ambos os membros, sobre os spins intermédios em cada lado dos hipercubos restaurando-se a simetria da rede [49,53]. Neste processo a forma de (3.37) é mantida.

A renormalização do membro esquerdo de (3.37) conduz, por exemplo para  $d=2$ , a

$$\begin{aligned} h'_{ij} = & h_{ij} + ch^2 K_{ij}^v \sum_{l=1}^{b-1} t_{ij}^{v_1} \cdots t_{ij}^{v_l} [1 - (t_{ij}^{v_{l+1}} \cdots t_{ij}^{v_b})^2] h_{ij}^{v_l} \\ & + ch^2 K_{ij}^v \sum_{l=1}^{b-1} t_{i-1,j}^{v_{l+1}} \cdots t_{i-1,j}^{v_b} [1 - (t_{i-1,j}^{v_1} \cdots t_{i-1,j}^{v_l})^2] h_{i-1,j}^{v_l} \\ & + \text{o equivalente para a direcção horizontal.} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aqui adopta-se a notação em que  $K_{ij}^{v_l}$  refere a l-ésima interacção na direcção v contada apartir do nodo (i, j).

A impossibilidade de seguir a distribuição dos  $h_{ij}$  leva-nos a tomar o valor médio, no ponto fixo ( $T_c=0$ ,  $p=p^*$ ), obtendo-se no caso geral

$$h' = h \left[ 1 + 2d \left( p^{*1/b} \frac{1-p^{*b/b}}{1-p^{*1/b}} - \frac{b-1}{2} p^* \right) \right] \equiv hb^{y_h} \quad (3.39)$$

Quanto às interacções estas renormalizam segundo

$$\text{th } K^{v'} \equiv t^{v'} = \prod_{l=1}^b \text{th} \left( \sum_{j=1}^{b^{d-1}} K_j^{v_l} \right) \quad (3.40)$$

Em resultado da renormalização do membro direito de (3.37) temos

$$\tau'_i = \tau_i \frac{h'_i}{h_i} \prod_{v=1}^{2d} \left\{ \left[ 1 - \prod_{l=1}^b \text{th}^2 \left( \sum_{j=1}^{b^{d-1}} K_j^{v_l} \right) \right] \left[ 1 - \prod_{l=1}^b \text{th}^2 \left( \sum_{j=1}^{b^{d-1}} K_j^{v_1} \right) \right]^{-1} \right\}^{1/2} \quad (3.41)$$

tomando o valor médio tem-se

$$\tau' = \tau b^{y_h} \left[ \left\langle \frac{1 - \prod_{l=1}^b \text{th}^2 \left( \sum_{j=1}^{b^{d-1}} K_j^l \right)}{1 - \text{th}^2 \left( \sum_{j=1}^{b^{d-1}} K_j^1 \right)} \right\rangle \right]^{2d} \quad (3.42)$$

pelo que a contribuição dominante resulta de maximizar o numerador e minimizar o denominador; isto é, todas as  $K_j^{v_1}$

presentes e só uma das  $b^{d-1}$ , em cada  $b-1$  restantes,  $K_i^{v_l}$  presentes. Esta última condição sobre o numerador de (3.42) resulta antes de mais de necessidades de cálculo posteriores (cálculo de  $A$  no limite  $b \rightarrow 1$ ) e pode ser interpretada como forma de assegurar a conectividade entre nodos nos termos do argumento do §3. De facto a média em (3.42) pode ser interpretada como uma média condicionada (à conectividade entre nodos emergentes da renormalização) tal como no cálculo da nova constante de acoplamento

$$t' = \frac{1}{p}, \langle \prod_i \text{th}(\sum_l K_i^l) \rangle \quad (3.43)$$

Tem-se assim que (3.42) assume a forma (2.22) com

$$\beta = \frac{d}{\nu_p} (b^{d-1} - 1) \quad (3.44)$$

assegurando no limite  $b \rightarrow 1$

$$A = \frac{d(d-1)}{2\nu_p} \quad (3.45)$$

Aqui  $\nu_p$  é o obtido de (3.43), no limite  $b \rightarrow 1$ , através da expressão

$$\nu_p^{-1} = d + \text{Ln } p^* + (d-1) \text{Ln } (1-p^*)$$

onde  $p^*$  é o valor aproximado de  $p_c$  que resulta também de (3.50) através da solução da equação

$$(d-1) (1-p) \ln (1-p) = p \ln p .$$

Este limite (renormalização com factor de escala infinitesimal) é particularmente vantajoso pois é conhecida a sua eficácia no caso estático dando resultados muito precisos a baixas dimensionalidades e a baixas temperaturas.

## §5. Discussão

Vimos que no limiar de percolação a dinâmica é fortemente afectada pela estrutura fractal do aglomerado infinito. Para a interpretação deste efeito foram avançados vários modelos e argumentos baseados quer na estrutura das barreiras de energia quer nas propriedades de invariância de escala.

O estudo analítico [52,53] baseado no método de Achiam e Kosterlitz, ignorando a geometria subjacente ao problema, permite, no entanto, estabelecer acertadamente os traços qualitativos do problema: a quebra da hipótese de escala restrita. Enquanto método de renormalização incapaz de calcular  $B$  e estando sujeito a diversas aproximações que, como também é característico do GR aproximado, não são controláveis, estes estudos [52,53] permitem avançar sobre a questão da universalidade dos coeficientes do expoente anómalo  $z$ , em especial de  $A$ .

É claro que as simulações de Monte Carlo têm um maior alcance nesta questão de maior pendor quantitativo. São de destacar neste caso os trabalhos de S. Jain [75-78].

Assim S. Jain et al. [77] prevê um aumento de  $A(q=3)$  em relação a  $A(q=2)$  da ordem dos 50% (quando (3.42) aponta para 30%). Posteriormente, [78] conclui que  $A$  é possivelmente independente de  $q$ .

O método da  $B)$  do §4 ao possibilitar o limite  $b \rightarrow 1$  permite, ao contrário de (3.41), obter um valor

independente do factor de reescalonamento, que para  $d=2$  (e no modelo de Ising) é de  $A = 0,614$ . Este valor está em razoável concordância com o obtido por S. Jain [75]:  $A = 0,51 \pm 0,05$ .

O efeito do tipo de diluição (nodos ou ligações) foi também objecto de S. Jain [76] apontando para universalidade de  $A$  e não-universalidade de  $B$ .

CAPÍTULO IV  
FACTORES DE NÃO-UNIVERSALIDADE A 1D

Neste capítulo são apresentados diversos factores concorrentes para a não-universalidade na dinâmica crítica a 1D. Estes podem ser de natureza puramente estática, como a não homogeneidade das interacções, ou factores puramente dinâmicos como a desordem nos tempos intrínsecos de transição ou no retardamento dessas interacções.

§1. Introdução

Deixaremos para o capítulo V a abordagem da dinâmica de Kawasaki começando por notar, com Haake e Thol [54], que a 1D a própria arbitrariedade na escolha das taxas de transição, e o facto de  $T_c = 0$ , induzem não-universalidade. Para a taxa de forma genérica [54]

$$W_i(\sigma_i) = \frac{W}{2}(1 + \delta\sigma_{i-1}\sigma_{i+1}) \left[1 - \frac{\gamma}{2}\sigma_i(\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1})\right] \quad (4.1)$$

com  $\delta = 1 - Ce^{-2\mu K}$  e  $\gamma = \text{th } 2K$ , são obtidos valores de  $z = 2 + \mu$  para  $0 \leq \mu \leq 2$ .

Neste capítulo consideraremos uma dinâmica de Glauber induzida pela taxa de transição de forma geral

$$W_i(\sigma_i, t) = \sum_i^w \{1 - \sigma_i(t) [\gamma_i^- \sigma_{i-1}(t - \tau_{i-1}) + \gamma_i^+ \sigma_{i+1}(t - \tau_i)]\} \quad (4.2)$$

Esta escolha é motivada pelo facto de quando os tempos de retardamento  $\tau_i$  [56,57], associado à interacção  $J_i$ , são nulos é reobtida a forma de Glauber (1.2) normalizada e satisfazendo a equação de reversibilidade microscópica (1.4) para o hamiltoniano

$$\mathcal{H} = - \sum_i J_i \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (4.3)$$

caso

$$\gamma_i^\pm = \frac{1}{2} [\text{th}(K_i + K_{i-1}) \pm \text{th}(K_i - K_{i-1})] \quad (4.4)$$

As taxas intrínsecas de transição  $w_i$  introduzem desordem apenas na dinâmica desempenhando especial papel os spins lentos, isto é, de pequeno  $w_i$ .

Uma escolha importante para  $J_i$  é o caso em que resultam de um decaimento exponencial [58]

$$J(n) \propto e^{-an}$$

com a distância  $n$  entre átomos magnéticos diluídos, numa cadeia linear, com concentração  $p$ . Neste caso  $J_i$  surge

com distribuição anómala (ver apêndice I)

$$\rho(J_i) = (1-\alpha) J_i^{-\alpha} , \quad (4.5)$$

$0 < J_i \leq 1$ ,  $0 < \alpha < 1$  dependente de  $p$ .

O §2 abordará os argumentos de movimento de paredes no cálculo do expoente dinâmico crítico, suas falhas e reformulação para o caso de distribuições anómalas. No §3 será tratada a dinâmica anómala e quebra de universalidade com origem puramente dinâmica na distribuição anómala dos  $w_i$ . No §4 será exposto um método numérico de renormalização e será introduzida a noção de comprimento de correlação dinâmica e as suas propriedades de escala. Este mesmo método será aplicado no §5 ao estudo do caso de pequenos  $J_i$  sujeitos a (4.5) e grandes  $J_i$  com  $J_i^{-1}$  satisfazendo igualmente a (4.5). O efeito do retardamento das interações será abordado no §6.

## §2. Movimento Aleatório de Paredes de Domínios

O argumento do movimento aleatório de paredes de domínios (AMAPD) de amplitude da ordem do comprimento de correlação  $\xi$ , introduzido por Cordery et al. [59], consiste na identificação do mecanismo mais rápido de difusão dessas paredes. O tempo característico de decaimento desses domínios, com ordem de longo alcance, é proporcional a  $\xi^2$  permitindo identificar um majorante para o expoente crítico dinâmico.

Seguindo M. Droz et al. [60] e aplicando a técnica desenvolvida, por exemplo, em Gardiner [61] considere-se, para a dinâmica (4.3) com  $\tau_i=0$ , o movimento de uma parede separadora de dois domínios de extensão da ordem de  $\xi$ . Representando por

$$P(n,0|m,-t')$$

a probabilidade de num instante terminal ( $t'=0$ ) essa parede se encontrar em  $n$  dado que  $t'$  segundos antes ocupava a posição  $m$ . Então

$$\begin{aligned} & [P(n,0|m,-t'+\Delta t') - P(n,0|m,-t')] = \\ & = \sum_1 P(1,-t'+\Delta t'|m,-t') [P(n,0|m,-t'+\Delta t') - \\ & \quad - P(n,0|1,-t'+\Delta t')] \end{aligned}$$

que no limite  $\Delta t' \rightarrow 0$  e para  $t = -t'$  toma a forma da EM "em marcha-atrás":

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(n,0|m,t) &= W_m^+ [P(n,0|m+1,t) - P(n,0|m,t)] + \\ &+ W_m^- [P(n,0|m-1,t) - P(n,0|m,t)] \quad (4.6) \end{aligned}$$

com

$$W^+ = \frac{W_{n+1}}{2} [1 + \text{th}(K_n - K_{n+1})]$$

e

$$\frac{W_{n+1}^-}{W_n^+} = e^{-2(K_n - K_{n+1})}$$

em consequência de (4.2).

A probabilidade da parede, partindo de  $n$ , ainda se encontrar no instante  $t$  no intervalo  $-\xi \leq l \leq \xi-1$  vale

$$G(n,t) = \sum_l P(l,t|n,0) \quad (4.7)$$

pelo que demorará, em media, um tempo

$$T_n = - \int_0^\infty t \, dG(n,t)$$

a escapar-se desse intervalo. Assim, fazendo uso da homogeneidade temporal da EM

$$P(n,t|m,0) = P(n,0|m,-t)$$

tem-se

$$-1 = W_n^+ [T_{n+1} - T_n] - W_n^- [T_n - T_{n-1}] \quad (4.8)$$

a que se deverá impôr condições fronteiras absorventes

$$T_{-\xi-1} = T_{-\xi} \quad (\text{i.é } W_{-\xi-1}^+ = 0) \quad \text{e} \quad T_\xi = T_{\xi-1} \quad (\text{i.é } W_\xi^- = 0).$$

Substituindo

$$T_{n+1} - T_n = S_n \phi_n$$

com

$$\phi_m = \prod_{n=-\xi}^m \frac{W_n^-}{W_n^+} \quad \text{e} \quad \phi_{-\xi-1} = 0$$

vem

$$-1 = \phi_m W_m^+ [S_m - S_{m-1}] .$$

Ou seja

$$S_m = S_{-\xi-1} - \sum_{n=-\xi}^m \frac{1}{\phi_n W_n^+}$$

e

$$U_m = \phi_m S_{-\xi-1} - \phi_m \sum_{n=-\xi}^m \frac{1}{\phi_n W_n^+} .$$

Somando entre 0 e  $\xi-1$ , ou entre  $-1$  e  $-\xi$ , tem-se respectivamente

$$T_o = - \sum_{m=0}^{\xi-1} \phi_m S_{-\xi-1} + \sum_{m=0}^{\xi-1} \phi_m \sum_{n=-\xi}^m \frac{1}{\phi_n W_n^+}$$

e

$$T_o = \sum_{m=-\xi}^{-1} \phi_m S_{-\xi-1} - \sum_{m=-\xi}^{-1} \phi_m \sum_{n=-\xi}^m \frac{1}{\phi_n W_n^+}$$

de onde se retira, eliminando  $S_{-\xi-1}$  e atendendo à simetria das somas:

$$\begin{aligned} 2T_o &= \sum_{m=0}^{\xi-1} \phi_m \sum_{n=0}^{\xi-1} \frac{1}{\phi_n W_n^+} \\ &= \sum_{n=0}^{\xi-1} \frac{e^{2K_n}}{W_n^+} \sum_{m=0}^{\xi-1} e^{-2K_m} , \end{aligned}$$

$$T_o \approx \xi^2 \langle e^{-2K_n} \rangle \langle e^{+2K_n} \rangle \langle W_n^{-1} \rangle \quad (4.9)$$

No caso de uma distribuição periódica  $\langle J_1, J_2, \dots, J_N \rangle$  [62] reobtem-se o resultado exacto

$$z = 1 + \frac{J_M}{J_m}$$

com

$$\left. \begin{matrix} J_M \\ J_m \end{matrix} \right\} \equiv \begin{matrix} \text{Max} \\ \text{min} \end{matrix} \{J_1, J_2, \dots, J_N\} .$$

Contudo quando o valor médio em (4.9) não existe este deverá ser reinterpretado em termos da estatística de extremos (Apêndice I). Tal é o caso anómalo [63]

$$\rho(1/J_i) \simeq J_i^\alpha, \quad 1 \leq J_i < \infty, \quad 0 < \alpha < 1$$

onde  $T_0$  é dominado pelo factor

$$e^{2\beta\xi^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

com  $\xi \approx \beta e^{2\beta}$ , o que, como veremos no §5, é verificado. Este resultado sugere [63] uma reformulação do AMAPD em termos da estatística de extremos sobre um comprimento  $\xi$ . A existência de spins "muito lentos", num comprimento  $\xi$ , com uma taxa de transição proporcional a (lei de Arrhenius)

$$\exp [-2\beta(J_M(\xi) - J_m(\xi))] \quad (4.10)$$

com  $J_M(\xi)$  ( $J_m(\xi)$ ) valor máximo (mínimo) que tipicamente  $J_i$  toma num comprimento  $\xi$ , conduz, de facto, à violação da hipótese de escala restrita:

$$\ln \tau \approx \xi^{1/(1-\alpha)} \ln \xi \quad (4.11)$$

Outro exemplo que ilustra a necessidade de reformular o AMAPD é o caso da dinâmica (4.2) com  $\tau_i = 0$ ,  $J_i = J$  e  $w_i$  com a distribuição anómala

$$\rho(w_i) = (1-\alpha) w_i^{-\alpha}, \quad (4.12)$$

$0 < w_i \leq 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Neste caso  $\langle w_i^{-1} \rangle$  terá que ser interpretado [64] em termos de valores extremos típicos num comprimento  $\xi$  (Apêndice I),

$$\langle w_i^{-1} \rangle_{\xi} \approx \xi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

conduzindo a um AMAPD com

$$z = (2 - \alpha) / (1 - \alpha) \quad (4.13)$$

### §3. Dinâmica Anômala

Consideremos (4.2) no caso  $\tau_i = 0$ . Esta dinâmica induz a equação de movimento para  $\langle \sigma_n \rangle_t \equiv M_n(t)$ :

$$\frac{d}{dt} M_n = w_n [-M_n + \gamma_n^+ M_{n+1} + \gamma_n^- M_{n-1}] \quad (4.14)$$

$n=1, 2, \dots, N$ , à qual se imporá condições fronteira periódicas.

Da matriz associada a (4.14), com valores próprios  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), retira-se o tempo de relaxação mais divergente  $\tau$  que domina o somatório:

$$\tau \approx \sum_i \lambda_i^{-1} = \sum_i \frac{M_i}{D} \quad (4.15)$$

onde  $M_i$  é o menor principal e  $D$  o determinante. Notando que  $M_i/D = w_i^{-1} M_i^*/D^*$ , sendo  $M_i^*$  e  $D^*$  os correspondentes a  $w_i=1$  (caso puro), e que, se  $w_M \equiv \text{Max}\{w_i\} < \infty$  e  $w_m \equiv \text{min}\{w_i\} > 0$ , então

$$w_M^{-1} \tau_{\text{puro}} < \tau \approx \sum_i w_i^{-1} \frac{M_i^*}{D^*} < w_m^{-1} \tau_{\text{puro}} \quad (4.16)$$

Resulta assim de especial importância o caso com  $w_m=0$  e  $\langle w_i^{-1} \rangle = \infty$  [64] pois se tem

$$\begin{aligned} \tau &\approx N \langle w_n^{-1} \frac{M_n^*}{D^*} \rangle_N = N \langle w_n^{-1} \rangle_N \langle \frac{M_n^*}{D^*} \rangle_N \\ &= \langle w^{-1} \rangle_N \tau_{\text{puro}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

dando o valor (4.13) para  $z$  no caso  $J_i = J$ .

Este valor não-universal (4.13) para  $z$  pode ser reobtido pelo método do GR: calculando a transformada de Fourier de (4.14) e escolhendo desde já o ponto fixo  $T = T_c = 0$  tem-se

$$(1 + i\tau_n \omega) \tilde{M}_n = \frac{1}{2} (\tilde{M}_{n-1} + \tilde{M}_{n+1}) . \quad (4.18)$$

com  $\tau_n = w_n^{-1}$  e  $\tilde{M}_n = \text{TF} \{M_n\}$ . Eliminando em (4.18) os índices ímpares e tomando termos até à ordem  $\omega$  reobtém-se equação formalmente idêntica com novos tempos intrínsecos de transição

$$\tau'_n = \tau_{2n-1} + 2\tau_{2n} + \tau_{2n+1} . \quad (4.19)$$

Iterando (4.19)  $k$  vezes, para  $n=0$ , tem-se

$$\tau_0^{(k)} = 2^k \tau_0 + \sum_{j=1}^{2^{k-1}} j [\tau_{-(2k-j)} + \tau_{2k-j}]$$

ou

$$G^{(k)}(s) = [G(2^k s)]^k \prod_{j=1}^{2^{k-1}} [G(sj)]^2 \quad (4.20)$$

para

$$G(s) = \int_1^{\infty} \rho^{(n)}(\tau) e^{-s\tau} d\tau .$$

Atendendo à invariância de escala para  $k \rightarrow \infty$  [71]

$$G^{(k+1)}(s) \approx G^{(k)}(\lambda_k s) \quad (4.21a)$$

e a que

$$G(s \sim 0) - 1 \approx s^{-(1-\alpha)} \quad (4.21b)$$

tem-se o resultado pretendido introduzindo (4.21a,b) em (4.20):

$$\lambda_k \rightarrow 2^{(2-\alpha)/(1-\alpha)}$$

#### §4. Método Numérico de Renormalização

Partindo da equação de movimento (4.14) e tomando a transformada de Laplace

$$M_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} M_i(t) dt \quad (4.22)$$

tem-se

$$M_i(s) = \Gamma_i^- M_{i-1}(s) + \Gamma_i^+ M_{i+1}(s) + \frac{M_i(t=0)}{s+w_i} \quad (4.23)$$

com

$$\Gamma_i^{\pm}(s) = \gamma_i^{\pm} / (1 + s/w_i) .$$

Só o sistema homogêneo associado a (4.23) determina os tempos de relaxação através dos correspondentes valores próprios pelo que bastará obter relações de recorrência para os  $\Gamma$ : eliminando os índices ímpares em (4.23) obtém-se equação formalmente idêntica com

$$\Gamma_i^{\pm} = \frac{\Gamma_{2i}^{\pm} \Gamma_{2i\pm 1}^{\pm}}{1 - \Gamma_{2i}^+ \Gamma_{2i+1}^- - \Gamma_{2i}^- \Gamma_{2i-1}^+} . \quad (4.24)$$

Orientador das hipóteses e teoria subsequente é o caso puro:

$$\Gamma' = \frac{\Gamma^2}{1 - 2\Gamma^2}$$

ou

$$\chi'^{-1} = 2\chi^{-1} \quad (4.25)$$

com  $\Gamma = 1/(2 \operatorname{ch} \chi^{-1})$ . Para  $T \sim T_c = 0$  e  $s \sim 0$

$$\chi^{-1}(\xi^{-1}, s) \approx (\xi^{-2} + s)^{1/2} .$$

Resulta assim de (4.25) que após  $n$  iterações ( $2^n \gg \xi$ )

$$\Gamma^{(n)} \approx e^{-2^n \chi^{-1}(\xi^{-1}, s)} \quad (4.26)$$

podendo  $\chi$  ser interpretado como um comprimento de correlação dinâmico. Resulta ainda de (4.25) que no limite  $\xi^{-1} = 0$

$$\chi^{-1}(s) \approx s^{1/z} \quad , \text{ com } z = 2. \quad (4.27)$$

A generalização [63] destes resultados ao caso desordenado faz-se postulando para  $\chi$ , definido por

$$\frac{b^{n-1}}{N} \sum_{i=1}^N \Gamma_i^{+(n)} \equiv 1/(2 \operatorname{ch} \chi_n^{-1}) \quad (4.28)$$

$$\chi_n / b^n \rightarrow \chi \quad (n \rightarrow \infty),$$

o seguinte comportamento de escala:

$$\chi^{-1}(b\xi^{-1}, b^z s) = b \chi^{-1}(\xi^{-1}, s) \quad (4.29)$$

com  $b = 2$  (factor de escala). Tal hipótese é amplamente verificada nos casos onde foi aplicada [63].

O processo de renormalização numérica empregue pelo autor [63] consiste em gerar uma cadeia de  $N = 2^{15}$  spins de acordo com as distribuições relevantes (ver Apêndice

II) aplicando em seguida, e sucessivamente, as relações de recorrência (4.24). Finalmente é extrapolado segundo (4.29) o valor de  $\chi^{-1}(\xi^{-1}, s)$ . Uma média sobre várias realizações do sistema é feita a fim de diminuir o efeito do tamanho finito do sistema.

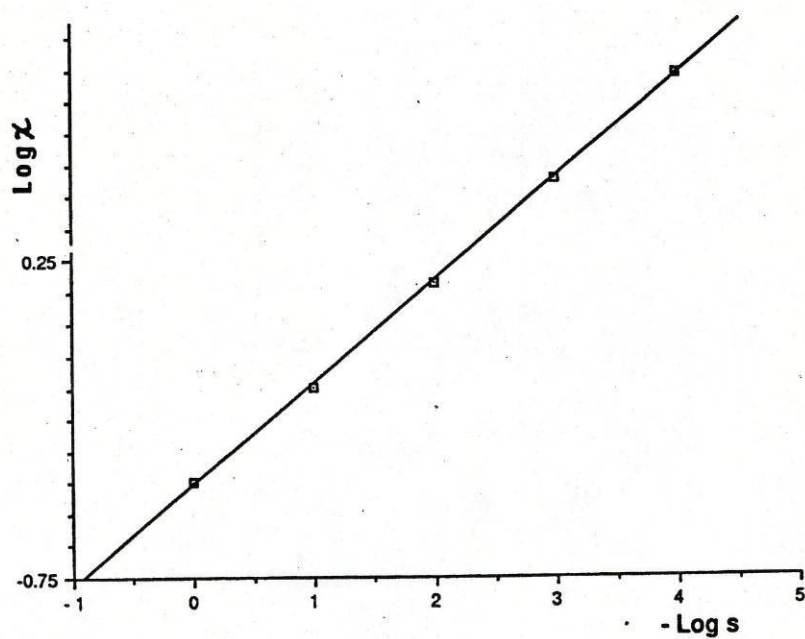


Fig. 3 - Caso das taxas de transição intrínsecas anómala-mente distribuidas ( $\alpha = 1/2$ ):  $\text{Log } \chi$  versus  $\text{Log } s$ . É encontrado  $1/z = 0,32$ .

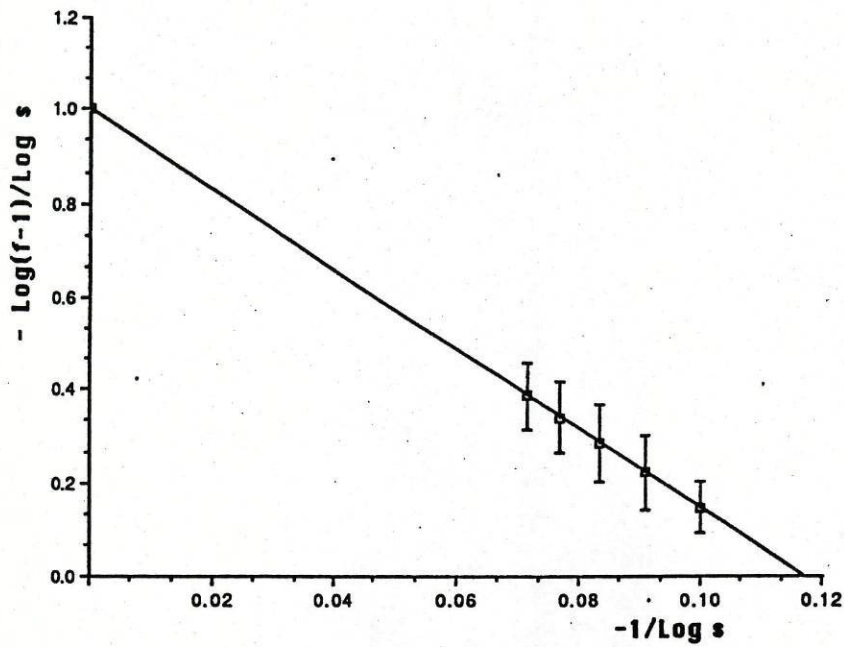


Fig. 4 - Caso dos pequenos JJ ( $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 12$ ):  $\text{Log}(\chi^{-1}/\xi^{-1}-1)/(-\text{Log } s)$  versus  $-1/\text{Log } s$ . O declive representa  $\text{Log } \tau$ .

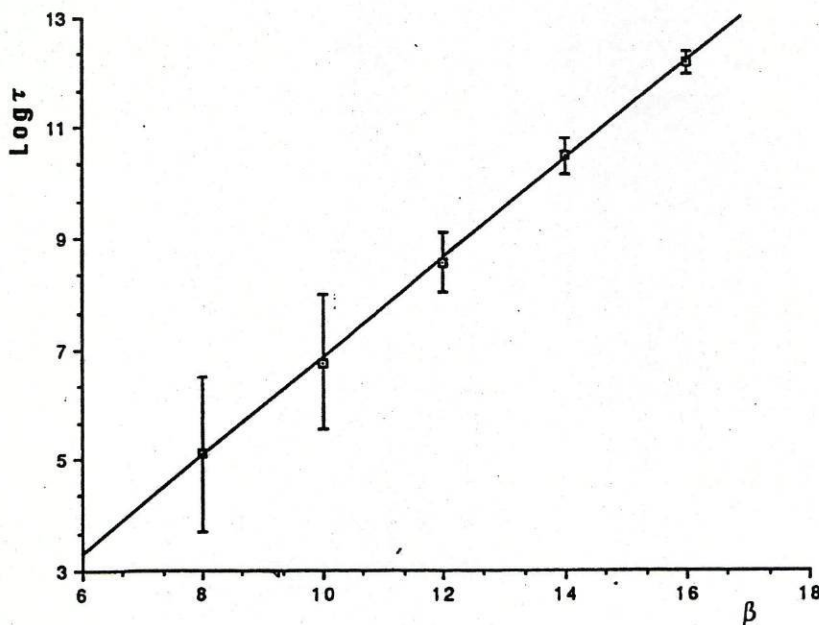


Fig. 5 - Caso dos pequenos JJ ( $\alpha = 1/2$ ):  $\text{Log } \tau$  versus  $\beta$ . É encontrado  $\tau \approx e^{c\beta}$ , com  $c = 2,05$ .

### §5. Caso com distribuição anômala das interações

O método anterior foi testado com sucesso [63] nos casos de solução exacta conhecida: distribuição binária  $\{J_1 > J_2\}$  com  $z = 1 + J_1/J_2$ , e distribuição anômala de tempos intrínsecos de transição  $w_i^{-1}$  (§3) com  $z = (2-\alpha)/(1-\alpha)$ . Este último caso consiste de facto no teste da hipótese (4.29) para  $\xi^{-1} = 0$ ; isto é

$$\chi^{-1}(s) \approx s^{1/z}.$$

Na fig.3 ilustra-se este comportamento para  $\alpha = 0,5$ .

Mais geralmente, (4.29) implica que

$$\chi^{-1}(\xi^{-1}, s) = \xi^{-1} f(s\tau(\xi)) \quad (4.30)$$

sendo  $f$  uma função de escala que para  $x = s \tau(\xi) \ll 1$  é verificado [63] ser

$$f(x) \approx 1 + x, \quad x \ll 1 \quad (4.31)$$

Aplicando a forma assintótica (4.31) ao caso com  $w_i = w$  e  $J_i$  distribuído segundo (4.5) é encontrado um valor de  $z$  dependente da temperatura (fig.s 4 e 5)

$$z \approx \frac{\beta}{\text{Ln } \beta} \quad (4.32)$$

com conseqüente quebra da hipótese de escalonamento dinâmico.

No caso de (grandes)  $JJ$  distribuídos segundo

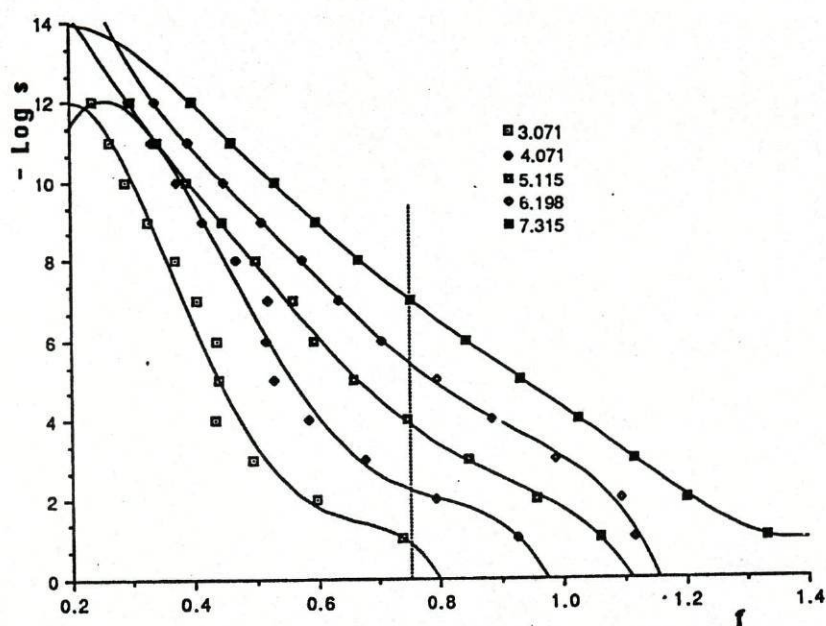


Fig. 6 - Caso dos grandes JJ ( $1/(1-\alpha)=1.1$ ):  $-\text{Log } s$  versus  $\chi^{-1}/\xi^{-1}$ . As etiquetas referem os valores de  $\xi$ , e o segmento vertical em  $\chi^{-1}/\xi^{-1} = 0,75$  corresponde a um valor fixo de  $x = s\tau$  para o qual se lê, a partir do ajuste gráfico, o valor de  $\text{Log } \tau(\xi)$ .

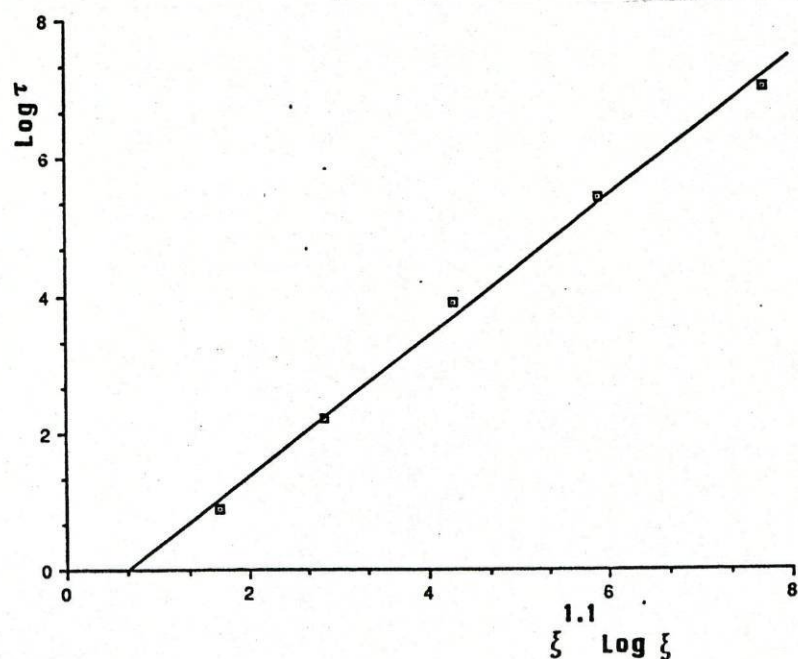


Fig. 7 - Caso dos grandes JJ ( $1/(1-\alpha) = 1,1$ ):  $\text{Log } \tau$  versus  $\xi^{1,1} \text{Log } \xi$ .

$$\rho(J_i) = (1-\alpha) J_i^{-(2-\alpha)}, \quad 1 \leq J_i < \infty, \quad 0 < \alpha < 1$$

não sendo a região  $x \ll 1$  numericamente acessível é possível extrapolar [63] o valor de  $f$  (fig. 6), para cada  $x$ , através de (4.30). É verificado o previsto pelo AMAPD reformulado no §2 deste capítulo (fig. 7):

$$z \approx \xi^{1/(1-\alpha)} \tag{4.33}$$

Tem-se pois um modelo que pela monotorização do tipo de distribuição dos JJ pode passar de um simples comportamento não-universal, caso da distribuição sem "cauda" [62], para um comportamento com quebra de escalonamento dinâmico como em (4.32,33).

## §6. Efeito do Retardamento das Interacções

Um novo factor ou mecanismo de não-universalidade é encontrado [56] no caso do modelo de Choi e Huberman [57], quando são considerados em (4.2) os "tempos de propagação"  $\tau_i$  das interacções  $J_i$ .

A equação de movimento escreve-se neste caso ( $w_i=1$ )

$$\frac{d}{dt} m_i(t) = -m_i(t) + \gamma_i^- m_{i-1}(t-\tau_{i-1}) + \gamma_i^+ m(t-\tau_i). \quad (4.34)$$

De igual modo a (4.23) tomando a transformada de Laplace de (4.34) tem-se

$$M_i = \Gamma_i^- M_{i-1} + \Gamma_i^+ M_{i+1} + q_i(s) \quad (4.35)$$

com a nova definição

$$\Gamma_i^+ = \gamma_i^+ \frac{e^{-s\tau_i}}{1+s}, \quad \Gamma_i^- = \gamma_i^- \frac{e^{-s\tau_{i-1}}}{1+s}$$

e sendo  $q_i(s)$  um funcional de  $m_i(t)$  e  $m_{i\pm 1}(t)$ , para  $t \leq 0$ , irrelevante do ponto de vista da renormalização ( $q_i$  representa a preparação do sistema e renormaliza num subespaço ortogonal ao dos  $\Gamma$ ).

À equação (4.35) foi aplicada a técnica do §4 em dois casos que ilustram o efeito dos retardamentos a 1D:

A) No caso do modelo descrito por (4.5) com interacções decaindo exponencialmente com a distância,

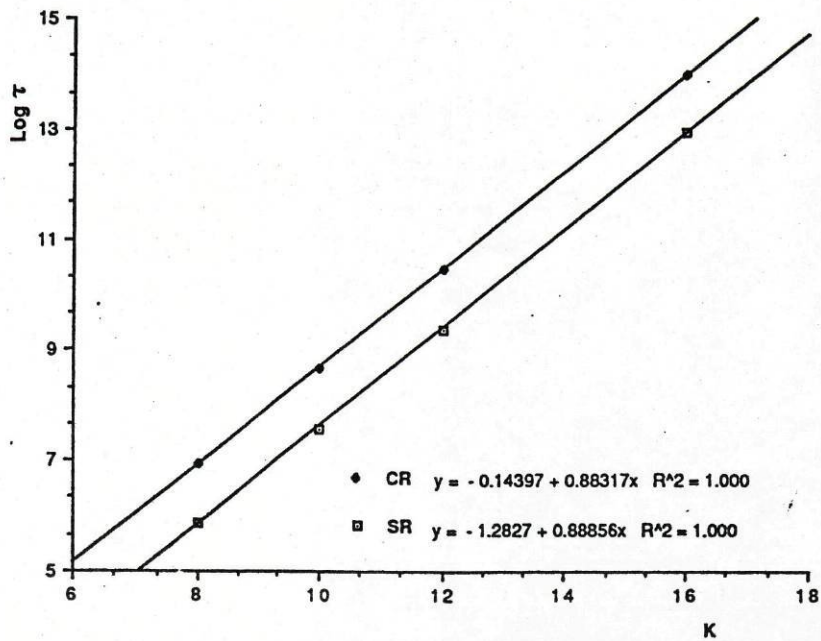


Fig. 8 -  $\text{Log } \tau$  versus  $K=1/k_B T$  para retardamentos distribuidos exponencialmente (CR) e sem retardamentos (SR).

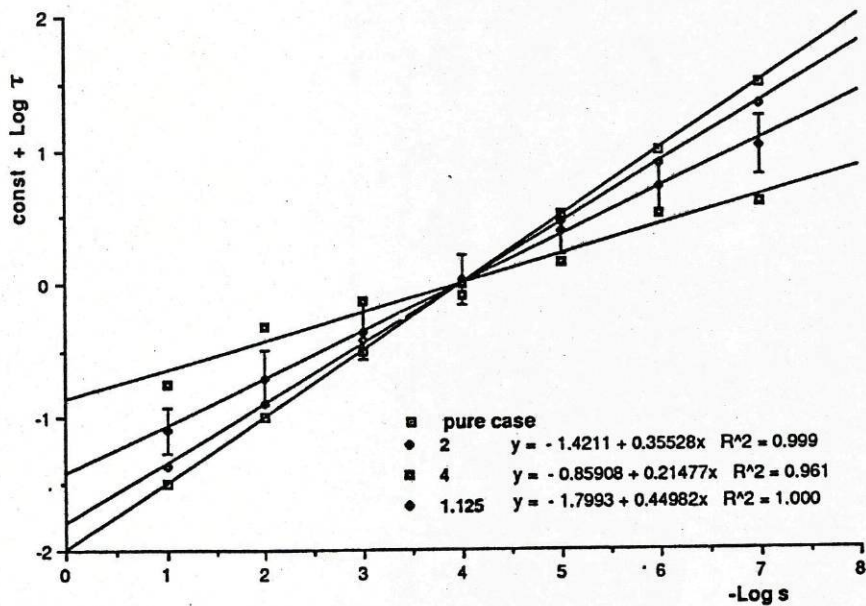


Fig. 9 -  $\text{Log } \tau$  versus  $-\text{Log } s$  para interações anormalmente distribuidas. As etiquetas referem valores de  $1/(1-\alpha)$ . Os declives dão  $1/z$  e, para não sobrecarregar a figura, só para  $\alpha = 0,5$  são representados os intervalos de confiança. Os resultados podem ser contrastados com a recta correspondente ao caso puro.

foi suposto [56] um "tempo de voo"  $\tau(n) \propto n^\alpha$  que conduz a uma distribuição exponencial dos atrasos

$$\rho(\tau_i) \propto e^{-b\tau_i}, \quad 1 \leq \tau_i < \infty. \quad (4.36)$$

É o facto de existir valor médio finito para  $\tau_i$  que leva a que a dinâmica crítica não seja afectada pelos retardamentos como mostra a fig. 8.

B) No caso homogéneo nas interacções ( $J_i = J$ ) mas com uma distribuição anómala nos  $\tau_i$

$$\rho(\tau_i) \propto \tau_i^{-(2-\alpha)}, \quad 1 \leq \tau_i < \infty \quad (4.37)$$

é manifesta a dependência de  $z$  com  $\alpha$  (vêr fig. 9). De facto os resultados sugerem [56] que  $z = (2-\alpha)/(1-\alpha)$  à semelhança do modelo do §3.

## §7. Discussão

Do que ficou exposto resulta que variados são os mecanismos que a 1D conduzem à quebra de universalidade. Neste contexto assume especial importância a desordem segundo distribuições anômalas, isto é, sem valor médio finito. No caso dos pequenos JJ anormalmente distribuídos verifica-se a dependência anômala de  $z$  na temperatura (4.32), já encontrada no §2 do capítulo II, que é apenas oriunda do comportamento anômalo da estática expresso pela forma do comprimento de correlação  $\xi \approx \beta^{1-\alpha}$ . O comportamento anômalo verificado no caso dos grandes JJ é, pelo contrário, de origem dinâmica: a existência de spins extremamente lentos.

Sendo difícil o tratamento destes sistemas desordenados só pontualmente é possível o tratamento exacto. A própria aplicação do método de Achiam e Kosterlitz [33] a caso tão simples como o do §3 falha. Na base desta ocorrência parece estarem os spins "lentos", com  $w_i$  situados na cauda da distribuição anômala, que conservam memória do seu estado inicial. Ao linearizar-se a distribuição para o sistema de spins

$$P(t) \approx P_{eq} \left( 1 + \sum_i h_i \sigma_i \right)$$

tal informação é completamente perdida.

Outra questão em aberto é a aparente equivalência, entre o caso B) do §6 e o modelo do §3, proposta pelo resultado  $z = (2-\alpha)/(1-\alpha)$  sugerido no §6.

## CAPÍTULO V

### DINÂMICA DE KAWASAKI

Neste capítulo é abordada a aplicação do grupo de renormalização à dinâmica de Kawasaki. Destaca-se neste estudo uma adaptação do método de Achiam e Kosterlitz [65-67] ao caso unidimensional. É também abordada a questão da não-universalidade em 1D e a aplicabilidade do argumento do movimento de paredes de domínios.

#### §1. Introdução

O primeiro tratamento da dinâmica de Kawasaki a 1D que conduz ao valor exacto de  $z = 5$  é o de W. Zwerger (1981) [68]. Trabalhando na aproximação da resposta linear Zwerger encontra o seguinte comportamento de escala para a frequência característica  $\Omega_c$  do modo difusivo de vector de onda  $q$

$$\Omega_c(q, \xi) = \Omega_0 \xi^{-z} \Omega(q\xi) \quad (5.1)$$

com a função de escala  $\Omega(x) = x^2 (1+x^2)$ .

Com a introdução de inhomogeneidades, nos acoplamentos  $J_i$ , passam as taxas de transição normalizadas a escreverem-se

$$W_i^K(\sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{w^K}{2} (1 - \sigma_i \sigma_{i+1}) (\alpha_i^K + \beta_i^K \sigma_{i-1} \sigma_{i+2}) \exp[-K_{i-1} \sigma_{i-1} \sigma_i + K_{i+1} \sigma_{i+1} \sigma_{i+2}] \quad (5.2)$$

com

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i^K \\ \beta_i^K \end{array} \right\} \equiv \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\text{ch}(K_{i-1} - K_{i+1})} \pm \frac{1}{\text{ch}(K_{i-1} + K_{i+1})} \right] \quad (5.3)$$

Abordaremos neste capítulo (§3) a situação, que generaliza todos os resultados conhecidos [65,68-70], através da consideração de uma distribuição periódica de interacções  $\langle J_1, J_2, \dots, J_B \rangle$  de período arbitrário  $B$ . O método utilizado conduz num primeiro passo a uma transformação de dinâmicas projectando na dinâmica de Glauber já abordada para o mesmo sistema em [62]. Neste caso as taxas de transição de um spin escrevem-se [62]:

$$W_i^G(\sigma_i) = w_i^G (\alpha_i^G + \beta_i^G \sigma_{i-1} \sigma_{i+1}) \exp-\sigma_i [K'_{i-1} \sigma_{i-1} + K'_i \sigma_{i+1}] \quad (5.4)$$

com

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i^G \\ \beta_i^G \end{array} \right\} \equiv \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\text{ch}(K'_{i-1} - K'_i)} \pm \frac{1}{\text{ch}(K'_{i-1} + K'_i)} \right] \quad (5.5)$$

diferenças, tinha já sido feita aos casos homogéneos ferro e anti-ferromagnéticos [56] tendo sido obtido, respectivamente,  $z = 5$  e  $z = 2$ . Aí é reencontrado o comportamento de escala restrita, para o tempo de relaxação característico:

$$\tau = \xi^z f(\Delta q \xi) \quad (5.6)$$

com  $\Delta q = q - q_c$ .

No caso simples da distribuição binária  $J_1 > J_2 > 0$  aplicaremos no §2 o AMAPD, com  $z = 3 + 2 J_1/J_2$ , em dissonância com o que é obtido quer pelo estudo das equações de movimento [70] quer pelo método de renormalização ([67] e §4)  $z = 4 + J_1/J_2$ .

## §2. Argumento do movimento de paredes de domínios

No caso da dinâmica de Kawasaki Cordery et al. [59] sugerem o seguinte mecanismo de difusão. Após a inversão dos dois spins da parede, o spin que é assim injectado no domínio executa um caminho aleatório até sair no outro lado. Por cada um destes conjuntos de etapas o domínio avança um sítio na rede.

Ora sendo  $P_N$  a probabilidade de num caminho aleatório chegar a  $N$ , partindo de 1, sem passar por 0, tem-se

$$P_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{N-1}}{2} \left(\frac{1-P_{N-1}}{2}\right)^n = \frac{P_{N-1}}{1-P_{N-1}} \quad (5.7)$$

Como  $P_1 = 1$  então  $P_N = N^{-1}$ . Isto é, o spin uma vez injectado executa a travessia de um domínio de comprimento  $\xi$  com uma pequena probabilidade  $P_\xi = \xi^{-1}$ . No total, a deslocação de um sítio pelo domínio ocorre com uma frequência

$$w_k e^{-2K} P_\xi \approx w_k \xi^{-3}, \quad (5.8)$$

onde  $w_k e^{-2K}$  é a frequência de injeção, como resulta de (5.2).

Supondo com Cordery et al. [59] que o mecanismo mais fácil de decaimento do domínio é a sua deslocação de um comprimento  $\xi$ , o que ocorrerá em  $\xi^2$  deslocamentos do tipo anteriormente descrito, vem:

$$\tau \approx w_K^{-1} \xi^5 \quad (5.9)$$

Na adaptação deste argumento ao caso binário  $\langle J_1, J_2 \rangle$  ( $J_1 > J_2 > 0$ ) feita por Droz et al. [60] apenas há que considerar a existência de duas frequências consoante o par de spins, da parede, em troca se encontra sobre a ligação  $J_1$  ( $w^K e^{-4K_2}$ ) ou  $J_2$  ( $w^K e^{-4K_1}$ ). Assim

$$\begin{aligned} \tau &\approx \xi \xi^2 (e^{4K_1} + e^{4K_2}) \\ &\approx \xi^{3+2J_1/J_2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

pois  $\xi^{-1} = -\frac{1}{b} \text{Ln} \prod_{i=1}^b |t_i| \approx e^{-2K_2}$ . Como outros métodos [67,70] indicam um valor de  $z = 4 + J_1/J_2$  inferior ao de (5.10) resulta que neste AMAPD não foi identificado o mecanismo mais rápido de relaxação dos domínios.

No caso do anti-ferromagnete puro [65] a parede situa-se entre spins no mesmo estado pelo que o movimento da parede se processa por troca de um deles com um outro vizinho sem qualquer custo energético. Resulta assim um simples movimento de difusão da parede com  $\tau \approx \xi^2$  confirmado pela renormalização [65].

### §3. Aplicação do método de renormalização

Consideremos a distribuição periódica das interacções  $\langle J_1, J_2, \dots, J_B \rangle$  de período  $B$  para o hamiltoniano de Ising

$$\mathcal{H} = - \sum_i J_i \sigma_i \sigma_{i+1}.$$

A fim de manter a simetria da estática do problema toma-se a renormalização, por "dizimação", com um factor de escala  $b = B + 1$ . Desta forma obtém-se novos acoplamentos definidos por

$$t'_s = t_s \left( \prod_{r=1}^B t_r \right), \quad t_r = \tanh K_r \quad (5.11)$$

Neste caso o comprimento de correlação é  $\xi \approx e^{2K_m}$  com

$J_m = \text{Min} \{J_1, J_2, \dots, J_B\}$ . Definimos também

$J_M = \text{Max} \{J_1, J_2, \dots, J_B\}$ .

A EM associada a (5.2) escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\langle \sigma \rangle, t) = - \sum_i (1 - \hat{p}_{i,i+1}) W_i^K(\sigma_i, \sigma_{i+1}) P(\langle \sigma \rangle, t) \quad (5.12)$$

onde  $\hat{p}_{i,i+1}$  é o operador de troca do spin  $\sigma_i$  com o  $\sigma_{i+1}$ .

Projectando a distribuição no subespaço das funções

$$P(\langle \sigma \rangle, t) \simeq P_{\text{eq}}(\langle \sigma \rangle) \left( 1 + \sum_i h_i(t) \sigma_i \right) \quad (5.13)$$

a equação (5.7) toma a forma linearizada nos campos  $h_i(t)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_l (h_{l+1} - h_l) \langle \sigma_{l+1} - \sigma_l \rangle W_l^K(\sigma_l, \sigma_{l+1}) P_{eq} \quad (5.14)$$

É pois possível fazer decomposição de Fourier com

$$h_l = H_s e^{iq(Bn+s)}, \quad l=Bn+s, \quad (5.15)$$

com  $s=1, \dots, B$  especificando a posição na célula e  $n$  especificando a célula.

De (5.13) e (5.15) vem que

$$\langle \sigma_{Bn+s} \rangle_t = e^{iq(Bn+s)} \sum_{s'} \chi_{q,\xi}^{s,s'} H_{s'} \quad (5.16)$$

onde

$$\chi_{q,\xi}^{s,s'} = e^{-iq(s-s')} \sum_{n'} e^{iqB(n'-n)} \langle \sigma_{Bn+s} \sigma_{Bn'+s'} \rangle \quad (5.17)$$

é a matriz das susceptibilidades. Como este valor médio (5.16) não deve ser alterado pelo processo de "dizimação", no que respeita a spins que não são traçados,

$$\langle \sigma_{Bn+s} \rangle_t = \langle \sigma_{Bn'+s'} \rangle_t', \quad n=bn'+s,$$

temos

$$\bar{\chi}_{q,\xi} \bar{H} = \bar{\chi}_{bq,\xi/b} \bar{H}' \quad (5.18)$$

Após  $m$  iterações ( $b^m \gg \xi$ ), em que os acoplamentos iteram para zero, (5.18) dá origem a

$$\bar{H}^{(m)} = \bar{\chi}_{q,\xi} \bar{H} \quad (5.19)$$

Equações (5.18,19) e (5.11) constituem as equações da renormalização da estática, na aproximação linear nos campos, e são de facto o resultado da renormalização do primeiro membro de (5.14). Quanto ao segundo membro de (5.14) o primeiro traço parcial não respeita o tipo de dinâmica obtendo-se

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = - \sum_l h_l' \alpha_l W_l^G(\alpha_l) P'_{eq} \quad (5.20)$$

Resulta que (5.20) é o equivalente de (5.14) para a dinâmica de Glauber [62], o que assim permite identificar

$$w_s^G \alpha_s^G H_s' \sqrt{1-t_{s-1}'^2} \sqrt{1-t_s'^2} = \sum_r A_{sr} H_r \quad (5.21)$$

onde

$$A_{sr} = \delta_{rs} (a_s + a_{s-1}) - a_{s-1} e^{-iq\delta_{s,r+1}} - a_s e^{iq\delta_{s,r-1}} \quad (5.22)$$

e

$$a_r = w^K \alpha_r^K e^{-K_r} / (\text{ch}K_{r-1} \text{ch}K_r \text{ch}K_{r+1}).$$

O processo de renormalização, propriamente dito, é executado sobre (5.20) sendo inicializado com (5.21). Assim temos [62]

$$\beta_i^G = \beta_i^G \prod_{l=1}^b t_l^2,$$

pelo que os  $\beta_i^{G,K}$  são irrelevantes, pois iteram para zero,

e

$$w_s^{(m-1)G} \alpha_s^{(m-1)G} H_s^{(m-1)} \sqrt{1-t_{s-1}^{\prime 2}} \sqrt{1-t_s^{\prime 2}} = w_s^G \alpha_s^G H_s^G \sqrt{1-t_{s-1}^{\prime 2}} \sqrt{1-t_s^{\prime 2}} \quad (5.23)$$

Iterando (5.23) m-1 vezes obtém-se

$$\begin{aligned} w_s^{(m-1)G} H_s^{(m)} &= w_s^G \alpha_s^G H_s^G \sqrt{1-t_{s-1}^{\prime 2}} \sqrt{1-t_s^{\prime 2}} \\ &= \sum_r A_{sr} H_r \end{aligned}$$

escrevendo-se a EM iterada:

$$\frac{\partial}{\partial t} P^{(m)} = - \sum_l h_l^{(m)} \alpha_l w_l^{(m-1)G} P_{eq}^{(m)} \quad (5.24)$$

Em termos dos parâmetros originais a equação (5.24) toma a forma

$$\dot{\bar{H}} = - \bar{\chi}^{-1} \bar{A} \bar{H} \quad (5.25)$$

que constitui a equação fundamental nesta abordagem. Com efeito os tempos de relaxação do sistema são dados pelos valores próprios de

$$\bar{A}^{-1} \bar{\chi} \quad (5.26)$$

§4. Modos críticos e tempos de relaxação

Começemos por verificar algumas propriedades de  $\bar{A}^{-1}$  e  $\bar{\chi}$ .

Quer  $\bar{A}^{-1}$  quer  $\bar{\chi}$  são hermiticos como resulta evidente das definições (5.22) e (5.17). Por exemplo  $\bar{A}$  tem a forma circulante

$$\begin{bmatrix} a_b + a_1 & -a_1 e^{iq} & 0 & 0 & \dots & -a_b e^{-iq} \\ -a_1 e^{-iq} & a_1 + a_2 & -a_2 e^{iq} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 e^{-iq} & a_2 + a_3 & -a_3 e^{iq} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_b e^{iq} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{b-1} + a_b \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

A própria matriz  $\bar{A}$  é definida positiva pois

$$\sum_{rs} x_r^+ A_{rs} x_s = \sum_r a_r |x_r - e^{iq} x_{r+1}|^2 \quad (5.28)$$

e igualmente o é a matriz  $\bar{\chi}$  como resulta da definição (5.22):

$$\sum_{ss'} x_s^+ \chi_{q,\xi}^{ss'} x_{s'} = \sum_l \langle |x_{s_l} e^{iq} \alpha_l|^2 \rangle \quad (5.29)$$

Está assim assegurada a existência de  $\bar{\chi}^{-1/2}$  que induz uma mudança de base na qual (5.26) se escreve:

$$\bar{\chi}^{1/2} \bar{A}^{-1} \bar{\chi}^{1/2} = (\bar{\chi}^{1/2} \bar{A}^{-1/2})(\bar{\chi}^{1/2} \bar{A}^{-1/2})^+ \quad (5.30)$$

assegurando que (5.26) é definida positiva e real. Por outras palavras, não existe comportamento oscilatório, mas sim verdadeiro decaimento, e está assegurada a diagonalização simultânea de  $\bar{A}$  e  $\bar{\chi}$  por uma transformação congruente [86]. Assim o tempo característico  $\tau$  diverge junto a  $T_c = 0$  como

$$\tau \approx \text{tr} (\bar{A}^{-1} \bar{\chi}) \quad (5.31)$$

no modo crítico  $q_c$  para o qual a susceptibilidade

$$\chi_{q,\xi} \equiv \frac{1}{B} \sum_{s,s'} \chi_{q,\xi}^{ss'}$$

também diverge como  $\xi$ . Tal modo crítico corresponde à periodicidade do estado fundamental subjacente.

Fazendo  $z_r = t_r e^{iq}$  e  $\lambda = \prod_{r=1}^B z_r$  então

$$\chi_{q,\xi}^{ss} = \frac{1 - |\lambda|^2}{|1 - \lambda|^2} \quad (5.32)$$

e para  $s' > s$

$$\begin{aligned} \chi_{q,\xi}^{ss'} &= \chi_{q,\xi}^{s's*} \\ &= \frac{\prod_{r=s+1}^{s'} Z_r}{1 - \lambda} + \frac{1}{\prod_{r=s+1}^{s'} Z_r^*} \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\bar{\chi}^{1/2} \bar{A}^{-1} \bar{\chi}^{1/2} = (\bar{\chi}^{1/2} \bar{A}^{-1/2})(\bar{\chi}^{1/2} \bar{A}^{-1/2})^+ \quad (5.30)$$

assegurando que (5.26) é definida positiva e real. Por outras palavras, não existe comportamento oscilatório, mas sim verdadeiro decaimento, e está assegurada a diagonalização simultânea de  $\bar{A}$  e  $\bar{\chi}$  por uma transformação congruente [86]. Assim o tempo característico  $\tau$  diverge junto a  $T_c = 0$  como

$$\tau \approx \text{tr} (\bar{A}^{-1} \bar{\chi}) \quad (5.31)$$

no modo crítico  $q_c$  para o qual a susceptibilidade

$$\chi_{q,\xi} \equiv \frac{1}{B} \sum_{s,s'} \chi_{q,\xi}^{ss'}$$

também diverge como  $\xi$ . Tal modo crítico corresponde à periodicidade do estado fundamental subjacente.

Fazendo  $z_r = t_r e^{iq}$  e  $\lambda = \prod_{r=1}^B z_r$  então

$$\chi_{q,\xi}^{ss} = \frac{1 - |\lambda|^2}{|1 - \lambda|^2} \quad (5.32)$$

e para  $s' > s$

$$\begin{aligned} \chi_{q,\xi}^{ss'} &= \chi_{q,\xi}^{s's*} \\ &= \frac{\prod_{r=s+1}^{s'} Z_r}{1 - \lambda} + \frac{1}{\prod_{r=s+1}^{s'} Z_r^*} \frac{\lambda^*}{1 - \lambda^*} \end{aligned} \quad (5.33)$$

A) Caso B=2

De (5.32,33) conclui-se:

$$\bar{\chi} = \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2} \begin{bmatrix} 1 & \chi \\ \chi^* & 1 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

com

$$\chi = \frac{Z_1(1-|Z_2|^2) + Z_2^*(1-|Z_1|^2)}{1-|\lambda|^2}$$

e de (5.27) resulta

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\cos 2q} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \begin{bmatrix} 1 & A \\ A^* & 1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

com

$$A = \frac{a_1 e^{iq} + a_2 e^{-iq}}{a_1 + a_2}$$

Assim, de (5.31,34 e 35) tem-se

$$\tau \approx \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2} \frac{1}{1-\cos 2q} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) [1 + \Re(\chi A^*)] \quad (5.36)$$

Quatro situações surgem:

- i)  $J_1 > J_2 > 0$ ,  $q_c=0$  e  $z = 4 + J_1/J_2$
- ii)  $J_2 < J_1 < 0$ ,  $q_c=\pi$  e  $z = 2$
- iii)  $-J_1 > J_2 > 0$ ,  $q_c=\pi/2$  e  $z = 2$
- iv)  $J_1 > -J_2 > 0$ ,  $q_c=\pi/2$  e  $z = 1 + J_1/|J_2|$

B) Caso B=3:

$$\bar{\chi} = \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2} \begin{bmatrix} 1 & \chi_1 & \chi_3^* \\ \chi_1^* & 1 & \chi_2 \\ \chi_3 & \chi_2^* & 1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

com

$$\chi_1 = \frac{Z_1(1-|Z_2|^2|Z_3|^2) + Z_2^*Z_3^*(1-|Z_1|^2)}{1-|\lambda|^2}$$

e permutações circulares dos índices. Para  $\bar{A}$  tem-se

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\cos 3q} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \begin{bmatrix} 1 & A_1 & A_3^* \\ A_1^* & 1 & A_2 \\ A_3 & A_2^* & 1 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

com

$$A_1 = \frac{a_1(a_2+a_3)e^{iq} + a_2a_3e^{-2iq}}{a_1(a_2+a_3) + a_2a_3}$$

e permutações circulares dos índices. Então

$$\tau \approx \frac{1}{1-\cos 3q} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\lambda|^2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \Re e \sum_{i=1}^3 \chi_i A_i^* \right] \quad (5.39)$$

de onde se extrai a tabela:

	$q_c$	$z$
$0 < J_1 < J_2 < J_3$	0	$3 + \frac{J_2 + J_3}{J_1}$
$0 > J_1 > J_2 > J_3$	$\pi$	$1 +  J_3/J_1 $
$0 < J_1 < J_2 ; -J_3$	$\pi/3$	$1 + (J_2 + J_3)/ J_3 $
$0 < -J_3 < J_1 < J_2$	$\pi/3$	$1 + (J_1 + J_2)/ J_3 $
$0 < J_3 < -J_1 < -J_2$	$2\pi/3$	$4 +  J_2 /J_3$
$0 < -J_1 < -J_2 ; J_3$	$2\pi/3$	$3 + (J_3 - J_2)/ J_1 $

C) Caso B arbitrário e  $J_i > 0$ :

A análise de  $\bar{\chi}$  e  $\bar{A}^{-1}$  permite concluir que

$$\tau \approx \xi q^{-2}/a_m \quad (5.40)$$

com  $a_m = \text{Min} \{a_i : i=1,2,\dots,b\}$  (o que é facilmente verificado para  $b=4$ ).

Desta forma (5.40) expressa o facto que o expoente dinâmico depende (para  $B \geq 3$ ) da disposição espacial dos acoplamentos.

## §5 Discussão

Pelo que ficou exposto, o método de Achiam e Kosterlitz permite o tratamento simples da dinâmica de Kawasaki a 1D. De facto, é possível reproduzir os resultados de Luscombe [70], reconfirmando a quebra de universalidade e a não aplicabilidade do AMAPD que prevê  $z = 3 + 2J_1/J_2$  em confronto com o inferior valor  $z=4+J_1/J_2$  obtido no §4. Mais, é possível generalizar a  $B > 2$  obtendo-se, equação (5.19), valores de  $z$  que, para além de dependerem dos valores relativos dos acoplamentos  $J_i$ , também dependem da forma como estes acoplamentos se posicionam.

No processo de renormalização adoptado no §3 existe uma primeira etapa, com o primeiro traço parcial, que transforma a dinâmica de Kawasaki na de Glauber. Tal procedimento pode ser interpretado como menos ortodoxo pois o GR é suposto preservar as simetrias do problema devolvendo sempre um problema formalmente idêntico ao anterior. Contudo, essa suspeita é facilmente afastada se reinterpretarmos o método na linha da competição de dinâmicas de [65]: estendendo o espaço de parâmetros de forma a coexistirem à partida as duas dinâmicas

$$\frac{\partial}{\partial t} P = - (w_G \mathcal{L}_G + w_K \mathcal{L}_K) P$$

onde o operador  $\mathcal{L}_G$  refere a dinâmica de Glauber e  $\mathcal{L}_K$  a de Kawasaki. O desaparecimento de  $\mathcal{L}_K$  em (5.20), isto é  $w'_K=0$ ,

apenas refere que  $\mathcal{L}_g$  é que é o operador relevante. A dinâmica conservativa continua a manifestar-se após a primeira iteração sob a forma de um  $w_g \propto q^2$  tornado explícito na equação (12b) de [65].

## CAPÍTULO VI

### EPILOGO

Neste capítulo explicitaremos as conclusões desta Tese. Será também feito um pequeno inventário de problemas e temas pesquisados mas que devido a dificuldades intrínsecas (ou por mera oportunidade de resolução de outros) foram abandonados. Por fim, uma pequena sùmula que, sem pretender ser exhaustiva, regista oportunidades de investigação futura neste campo.

#### §1. Conclusões

Do sincretismo das ideias expostas nos capítulos precedentes ressaltam três ideias-força. A primeira é a anunciada no §2 do capítulo II: a peculiaridade da dinâmica na vizinhança de  $T_c = 0$ . Esta, que poderá ser agravada por efeitos quânticos sabidos importantes a muito baixas temperaturas, é de facto ilustrada em vários resultados expressos nos capítulos III a V: quebra de escalonamento dinâmico no ponto percolativo dos

ferromagnetes diluídos e no caso dos pequenos JJ do §5 do capítulo IV; e a não-universalidade do expoente crítico dinâmico nos diversos modelos considerados.

Em vários dos casos considerados é a desordem (nas interações, nas taxas intrínsecas de transição ou nos retardamentos das interações) a motivadora da não-universalidade. Esta surgiu sempre que a desordem segue uma lei anómala para a qual é crucial o comportamento dos seus valores extremos: o que constitui a segunda ideia-força desta Tese. Neste caso tornou-se necessário a reinterpretação das teorias e argumentos em termos da estatística de valores extremos.

No respeitante à observação de diversos comportamentos anómalos divisa-se a terceira ideia-força: a natureza puramente dinâmica de certos desses comportamentos. Temos neste caso o modelo dos grandes JJ do §5 do capítulo IV onde pontificam os spins "muito lentos" seguindo a lei (4.10). Por oposição, no modelo dos pequenos JJ a origem do comportamento anómalo é de natureza puramente estática tendo sido já anunciada no §2 do capítulo II.

Para além das conclusões maiores atrás citadas outras observações importam ser feitas. Para começar há que destacar a importância da teoria convencional que na formulação do §2 do capítulo II permite extrair resultados correctos, em certos casos, quanto à ocorrência de não-universalidade.

Também o AMAPD, quando identificando o processo de

decaimento mais rápido, permitiu descrever os mecanismos físicos de relaxação do sistema e conseqüentemente a resposta, a baixas temperaturas, a um campo magnético fraco. Para este tipo de argumento concorreu, no caso dos ferromagnetes diluídos, a natureza fractal (e conseqüente invariância de escala) da geometria subjacente (o AI); e, nos casos sujeitos a distribuição anómala, um argumento de estatística de extremos. Notemos, ainda, que mesmo no primeiro caso podemos, como mostrou [40], associar o comportamento em  $p_c$  à existência de uma distribuição, do tipo das do apêndice I, para tempos microscópicos de relaxação (i.e., de decaimento de um domínio arbitrário):

$$\Pi(\tau) = \lambda T \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-(1+\lambda T)}$$

com  $\lambda = \frac{d - d_f}{d_f}$ .

É claro que os resultados do AMAPD têm que passar pela verificação analítica, e aqui o método de renormalização de Achiam e Kosterlitz mostrou-se um poderoso instrumento apesar das várias limitações apontadas: a situação que talvez melhor ilustra isto é o caso do §3 do capítulo IV (taxas intrínsecas com distribuição anómala) que constitui um dos problemas em aberto desta investigação.

Quanto às verificações, pelo método de simulação de Monte Carlo, apontadas na discussão do capítulo III para o estudo das dependências  $A(q)$  e  $A(d)$ , elas mostram-se

longe de terem encerrado o problema. Neste ponto é notória a falta do estudo da dependência na dimensionalidade.

## §2. Problemas em aberto

Para além dos já focados no §1 vários problemas em aberto resultaram da investigação conducente a esta Tese. Faremos assim um breve inventário e, num ou outro caso, descreveremos sumariamente as dificuldades encontradas.

Logo no capítulo III mostra-se necessário cotejar os resultados obtidos, para a diluição de ligações, com o caso da diluição de sítios. A primeira dificuldade a encarar é a da formulação de um esquema de renormalização apropriado. Também nesse capítulo há uma extensão que pode ser feita: o estudo da dinâmica junto à linha crítica  $T_c(p > p_c)$ . Por outras palavras, interessa saber da aplicabilidade do "Critério de Harris" [1] ou de uma reformulação deste. Para além da sensibilidade do parâmetro caracterizador do critério (expoente crítico do calor específico do sistema puro) às aproximações envolvidas num GR a maior dificuldade reside na necessidade de seguir as distribuições relevantes sob o GR segundo a técnica de [71]. Aqui o tratamento numérico é extremamente dificultado pela instabilidade dos pontos fixos quando se pretende determinar as distribuições invariantes sob a transformação de escala.

No capítulo IV, para além das evidentes possibilidades de generalização a dimensionalidades superiores e da conjectura levantada no § de discussão, persistem problemas que se prendem com a interpretação da noção de comprimento de correlação dinâmico (4.26) e a

solução analítica dos modelos apresentados.

Mas sem dúvida o grande problema em aberto é o da fundamentação ou aperfeiçoamento do método de Achiam e Kosterlitz.

### §3. Desenvolvimentos futuros

As perspectivas de desenvolvimentos nesta área são amplas. De facto são vários os modelos, e situações passíveis de estudo, para os quais a estática, como convém, é bem conhecida.

Por simplicidade apontaremos apenas uma meia dúzia de situações a 1D acompanhadas, sempre que possível, de uma referência relevante:

\* Efeito da competição de interacções entre primeiros e segundos vizinhos [87]:

$$\mathcal{H} = -J \sum_i \sigma_i (\sigma_{i+1} - \alpha \sigma_{i+2}) ;$$

\* Modelo B.E.G.: cadeia de spins  $S = 1$  [88];

\* Mistura de spins com 2 e 3 estados [89];

\* Competição de dinâmicas em líquidos magnéticos [90] com, p. ex.,

$$\mathcal{H} = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} \mu_i \mu_{i+1}$$

estando  $\sigma$  e  $\mu$  sujeitos a dinâmicas diferentes;

\* Dinâmica de Kawasaki a 1D com desordem (ex.: vidro de spins com  $J_i = \pm J$ ).

## APÊNDICE I

### Estatística de Valores Extremos

Uma classe importante de distribuições sem primeiro momento finito é conhecida pela sua "cauda comprida"

$$p(x) \sim x^{-(2-\alpha)}, \quad x \sim \infty, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (I.1)$$

e são designadas por distribuições de Lévy [27,13] das quais a de Pareto toma a forma

$$p(x) = (1-\alpha) x^{-(2-\alpha)}, \quad x \geq 1 \quad (I.2)$$

Este tipo de distribuições tem tido diversas aplicações em Física das quais destacamos: o caminho aleatório com distribuições, de tempo de espera, com cauda e sua aplicação a processos de condução por saltos sujeitos a barreiras de energia aleatórias [27,28]; o estudo de redes de condutâncias com distribuição anômala do tipo (I.2) [29]; e aplicações a fenómenos de transporte em meios porosos e correspondentes modelos de percolação contínua (modelo do "Queijo Suiço" [30] e o "Gás de Lorentz" [31]).

Para uma distribuição do tipo (I.1) a extracção de uma amostra de  $n$  valores independentes é caracterizada por um valor médio (no sentido estatístico) que diverge com o tamanho  $n$  da amostra. Tal é devido à ocorrência de valores extremos com probabilidade que decresce de modo pouco acentuado. Daí a necessidade de se definir um valor extremo típico (ou característico) para uma amostra de tamanho  $n$ . Na Física, onde este tipo de distribuições ocorre, os fenómenos são essencialmente determinados por esses valores extremos.

Sendo

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy \quad ,$$

a probabilidade de se obter nessa amostragem um valor inferior a  $x$  é

$$\Phi_n(x) = F^n(x) \quad ,$$

o que nos dá a lei de distribuição desses valores extremos. Como esperamos que  $n[1-F(x)]$  valores da amostra sejam superiores ou iguais a  $x$  definiremos valor extremo característico  $x_n$  aquele valor de  $x$  para o qual tal ocorrência é em média de apenas uma vez; isto é:

$$F(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \quad .$$

No caso da distribuição de Pareto:

$$x_n = n^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e

$$\Phi(x) = \left[ 1 - \frac{1}{n} \left( \frac{x}{x_n} \right)^{-1+\alpha} \right]^n$$

$$\rightarrow \Phi(x/x_n)$$

com  $\Phi(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^{(1-\alpha)}$ . Assim o valor médio para uma amostra de tamanho  $n$  valerá

$$\langle f \rangle_n = \int_{-\infty}^{x_n} f \, dF$$

tendo-se para a distribuição de Pareto

$$\langle x \rangle_n \approx n^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

## APÊNDICE II

### Geradores de números aleatórios

Segundo D.E. Knuth (pág. 38 de [73]) "...aplicam-se cerca de meia dúzia de diferentes tipos de testes estatísticos a um gerador de números aleatórios, e se este passar satisfatoriamente em todos, consideramo-lo um bom gerador - é então presumido inocente até ser provado culpado.". Estes testes, empíricos ou teóricos, não são de facto decisivos dependendo a escolha do gerador da forma como se comporta na aplicação que dele se faz e de um compromisso entre velocidade e qualidade.

O capítulo IV assenta praticamente em resultados obtidos por simulação de cadeias lineares de interacções sujeitas a uma dada distribuição. Nesse processo de simulação um dos factores mais importantes foi o tamanho apreciável da cadeia com  $N = 2^{15}$  interacções, daí a necessidade de escolher um gerador com período (número de extracções ao fim do qual a sequência se repete) substancialmente maior que  $N$ . A escolha recaiu sobre o gerador "presumido inocente" (pág.s 26 e seg.s, e os exercícios 3.2.2-1,23 de [73]) com um período superior a  $2^{55}$ :

$$x_n = (x_{n-24} + x_{n-55}) \text{ mod } 1, \quad n \geq 55$$

Para arrancar com a geração dos primeiros 50 números usou-se o gerador notoriamente "culpado"

$$X_{n+1} = 65539 X_n \text{ mod } p,$$

com  $X_0$  ímpar,  $x_n = X_n / p$  e  $p = 2^{32}-1$ , que é de muito fácil implementação num computador de 32 bits. A qualidade do produto final mostrou ser excelente na aplicação feita às variantes dos sistemas considerados (capítulo IV) e para as quais eram conhecidos tratamentos analíticos.

## REFERÊNCIAS

- [1] R.B. Stinchcombe - Dilute magnetism - in Phase transitions and critical phenomena, vol. 7; eds C. Domb e J.L. Lebowitz; Academic Press (1983)
- [2] H.E. Stanley - Introduction to phase transitions and critical phenomena, Oxford (1971)
- [3] P.C. Hohenberg e B.I. Halperin - Theory of dynamic critical phenomena - Rev. Mod. Phys. 49, 435 (1977)
- [4] K. Kawasaki - Kinetics of Ising Models - in "Phase transitions and critical phenomena" vol. 2, eds. C. Domb e M.S. Green (1972)
- [5] C.P. Enz (ed.) - Dynamical critical Phenomena and related topics - Lecture notes in Physics vol. 104, Springer-Verlag (1979)
- [6] S.G. Brush - History of the Lenz-Ising model - Rev. Mod. Phys. 39, 883 (1967)
- [7] R.J. Glauber - Time-dependent statistics of an Ising chain - Bull. Am. Phys. Soc. 5, 296 (1960)
- [8] R.J. Glauber - Time-dependent statistics of the Ising model - J. Math. Phys. 4, 294 (1963)
- [9] S.P. Heims - Master equation for Ising model - Phys. Rev. A138, 587 (1965)
- [10] P.A. Martin - Modèles en mécanique statistique des processus irréversibles - in Lecture notes in Physics vol. 103, Springer-Verlag (1979)
- [11] Y. Yamada e Y. Fujii - Dielectric relaxation mechanism in  $\text{NaNO}_2$  - J. Phys. Soc. Japan 24, 1053 (1968)
- [12] K. Kawasaki - Diffusion constants near the critical point for time-dependent Ising models I - Phys. Rev. 145, 224 (1966)
- [13] L.P. Kadanoff e J. Swift - Transport coefficients near the critical point: a master-equation approach - Phys. Rev. 165, 310 (1968)
- [14] F.Y. Wu - The Potts model - Rev. Mod. Phys. 54, 235 (1982)

- [15] E.J.S. Lage - A theory of kinematics for the Potts model - J. Phys. A18, 2289 (1985)
- [16] N.Ito, M. Taiji e M. Suzuki - Critical dynamics of the Ising model with Ising machine - J. de Physique C8, 1397 (1988)
- [17] D.P. Landau, S. Tang e S. Wansleben - Monte Carlo studies of dynamic critical phenomena - J. de Physique C8, 1525 (1988)
- [18] U. Decker e F. Haake - Renormalization group transformation for the master equation of a kinetic Ising chain - Z. Phys. B35, 281 (1979)
- [19] P.O. Weir, J.M. Kosterlitz e S.H. Adachi - Non-universality in the dynamics of one-dimensional Potts model - J. Phys. A19, L757 (1986)
- [20] B.I. Halperin e P.C. Hohenberg - Scaling laws for dynamic critical phenomena - Phys. Rev. 177, 952 (1969)
- [21] M. Suzuki - Static and dynamic finite-size scaling theory based on the renormalization group approach - Progr. Theor. Phys. 58, 1142 (1977)
- [22] L. Van Hove - Time-dependent correlations between spins and neutron scattering in ferromagnetic crystals - Phys. Rev. 93, 1374 (1954)
- [23] B. McCoy - Exact calculations on a random Ising system - in Phase transitions and critical phenomena, vol 2; ed.s C. Domb e M. S.Green; Academic Press (1972)
- [24] B.I. Halperin - Rigorous inequalities for the spin-relaxation function in the kinetic Ising model - Phys. Rev. B8, 4437 (1973)
- [25] R. Abe - Dynamics of the Ising model near the transition point - Progr. Theor. Phys. 39, 947 (1968)
- [26] Y. Achiam - The critical dynamics and the real-space renormalization group - Physica A120, 279 (1983)

- [27] E.W. Montroll e M.F. Shlesinger - On the wonderful world of random walks - cap. I de "Nonequilibrium Phenomena II - From stochastics to hydrodynamics", eds. J.L. Lebowitz e E.W. Montroll, Elsevier Science Publisher BV (1984)
- [28] S. Alexander, J. Bernasconi e W.R. Schneider - Excitation dynamics in random one-dimensional systems - Rev. Mod. Phys. 53, 175 (1981)
- [29] J.P. Straley - Non-universal threshold behaviour of random resistor networks with anomalous distributions of conductances - J. Phys. C15, 2343 (1982)
- [30] B.I. Halperin, S. Feng e P.N. Sen - Differences between lattice and continuum percolation transport exponents - Phys. Rev. Lett. 54, 2391 (1985)
- [31] J. Machta e S.M. Moore - Diffusion and long-time tails in the overlapping Lorentz gas - Phys. Rev. A32, 3164 (1985)
- [32] E.J. Gumbel - Statistics of extremes - Columbia University Press, N.Y. (1958)
- [33] Y. Achiam e J.M. Kosterlitz - Real-space renormalization group for critical dynamics - Phys. Rev. Lett. 41, 128 (1978)
- [34] W.L. McMillan - Scaling theory of Ising spin glasses - J. Phys. C17, 3179 (1984)
- [35] G. Aeppli, H. Guggenheim e Y.J. Uemura - Spin dynamics near the magnetic percolation threshold - Phys. Rev. Lett. 52, 942 (1984)
- [36] G. Aeppli - Dynamics of random spin systems - Physica B136, 301 (1986)
- [37] C.L. Henley - Critical Ising spin dynamics on percolation clusters - Phys. Rev. Lett. 54, 2030 (1985)
- [38] R. Rammal e A. Benoit - Critical Ising spin dynamics near the percolation threshold - Phys. Rev. Lett. 55, 649 (1985)

- [39] C.K. Harris e R.B. Stinchcombe - Critical Dynamics of diluted Ising systems - Phys. Rev. Lett. 56, 869 (1985)
- [40] R. Rammal - Spin dynamics and glassy relaxation on fractals and percolation structures - J. Physique 46, 1837 (1985)
- [41] E. Pytte - Monte Carlo study of Ising spin dynamics on fractal lattice - Phys. Rev. B34, 2060 (1986)
- [42] O.F. de Alcantara Bonfim - Dynamics of the Potts model on a fractal lattice - J. Phys. A20, L993 (1987)
- [43] S.C. Bell e B.W. Southern - Singular dynamic scaling on fractal lattices - Phys. Rev. B38, 333 (1988)
- [44] A. Coniglio - Cluster structure near the percolation threshold - J. Phys. A15, 3829 (1982)
- [45] H. Hermann e H.E. Stanley - Building blocks of percolation clusters: volatile fractals - Phys. Rev. Lett. 53, 1121 (1984)
- [46] S.T. Chui, G. Forgacs e H.L. Frisch - Migdal-type renormalization-group calculation for the kinetic Ising model - Phys. Rev. B20, 243 (1979)
- [47] Y. Achiam - Critical dynamics and the potential moving approximation - J. Phys. A13, 1355 (1980)
- [48] G. Forgacs, S.T. Chui e H.L. Frisch - Critical dynamics of the Potts model - Phys. Rev. B22, 415 (1980)
- [49] E.J.S. Lage - Critical dynamics of the Potts model in several dimensionalities - Physica A140, 629 (1987)
- [50] E.J.S. Lage - Critical dynamics of the pure and diluted two-dimensional Ising model - J. Phys. C19, L91 (1986)
- [51] E.J.S. Lage - Critical dynamics of the two dimensional Potts model - J. Phys. C19, 5715 (1986)

- [52] J.M. Nunes da Silva e E.J.S. Lage - The breakdown of dynamic scaling of the bond-diluted Ising model at the percolation threshold for hypercubic lattices - J. Phys. C20, L275 (1987)
- [53] J.M. Nunes da Silva e E.J.S. Lage - Breakdown of dynamic scaling in the 2D diluted Potts model - J. Phys. A20, 2655 (1987)
- [54] F. Haake e K. Thol - Universality classes for one dimensional kinetic Ising models - Z. Physik B40, 219 (1980)
- [55] E.J.S. Lage - Critical dynamics of the one-dimensional Potts model - J. Phys. A18, 2411 (1985)
- [56] J.M. Nunes da Silva - Effect of delayed interactions in the critical dynamics of 1D Glauber Model - aceite para publicação em Phys. Letters A
- [57] M.Y. Choi e B.A. Huberman - Collective excitations and retarded interactions - Phys. Rev. B31, 2862 (1985)
- [58] G. Theodorou e M.H. Cohen - Dilute random magnets in one dimension - Phys. Rev. B19, 1561 (1979)
- [59] R. Cordery, S. Sarker e J. Tobochnik - Physics of the dynamical critical exponent in one dimension - Phys. Rev. B24, 5402 (1981)
- [60] M. Droz, J. Kamphorst Leal da Silva, A. Malaspinas e A.L. Stella - On the critical dynamics of one-dimensional disordered Ising models - J. Phys. A20, L387 (1987)
- [61] C.W. Gardiner - Handbook of stochastic methods - Berlin: Springer (1983)
- [62] E.J.S. Lage - Non-universal critical dynamical behaviour in 1D spin systems - J. Phys. C20, 3969 (1987)
- [63] J.M. Nunes da Silva e E.J.S. Lage - Anomalous dynamics in the Ising chain - aceite para publicação em J. Stat. Phys.

- [64] J.M. Nunes da Silva e E.J.S. Lage - Glauber dynamics in the Ising chain with random transition rates - Phys. Letters A135, 17 (1989)
- [65] J.M. Nunes da Silva e E.J.S. Lage - Kawasaki dynamics in the Ising chain: a renormalization group treatment - J. Phys. C21, 2225 (1988)
- [66] J.M. Nunes da Silva e E.J.S. Lage - Kawasaki dynamics in the Ising chain - em "Dynamics of Disordered Materials"; eds: D. Richter, A.J. Dianoux, W. Petry e J. Teixeira; Springer Proceedings in Physics vol. 37; Spreenger-Verlag Berlin, Heidelberg (1989)
- [67] J.M. Nunes da Silva e E.J.S. Lage - Kawasaki dynamics in the Ising chain with mixed interactions - aceite para publicação em Phys. Rev. A
- [68] W. Zwerger - Critical slowing down of diffusion in one-dimensional kinetic Ising model - Phys. Letters A84, 269 (1981)
- [69] M. Droz, J. Kamphorst Leal da Silva e A. Malaspinas - On the critical dynamics of one-dimensional Ising models - Phys. Letters A115, 448 (1986)
- [70] J.H. Luscombe - Nonuniversal critical dynamics of the alternating-bond Ising chain: relaxational and diffusive kinetics - Phys. Rev. B36, 501 (1987)
- [71] R.B. Stinchcombe e B.P. Watson - Renormalization group approach for percolation conductivity - J. Phys. C9, 3221 (1976)
- [72] S. Havlin e D. Ben-Avraham - Diffusion in disordered media - Adv. Phys. 36, 695 (1987)
- [73] D.E. Knuth - The art of computer programming; vol. 2, cap. 3, Reading, Mass.: Addison-Wesley (1969)
- [74] C.K. Harris - Bicritical dynamic scaling and dynamic crossover in the bond diluted Ising chain - J. Phys. A17, 673 (1984)
- [75] S. Jain - Breakdown of dynamic scaling at the percolation threshold - J. Phys. A19, L57 (1986)

- [76] S. Jain - Non-universality in dynamics at the percolation threshold - J. Phys. A19, L667 (1986)
- [77] S. Jain, E.J.S. Lage e R.B. Stinchcombe - Dynamics of the q-state Potts models at the percolation threshold - J. Phys. C19, L805 (1986)
- [78] S. Jain - On the critical dynamics of the diluted Q-state Potts models - J. Phys. A21, L179 (1988)
- [79] P.O. Weir, J.M. Kosterlitz e S.H. Adachi - Non-universality in the dynamics of the one-dimensional Potts model - J. Phys. A19, L757 (1986)
- [80] R.B. Stinchcombe - Dilution-induced critical dynamics - in Scaling phenomena in disordered systems, NATO ASI Series, vol B133, ed.s R. Pynn e A. Skjeltorp; Plenum Press (1985)
- [81] R.A. Cowley, R.J. Birgeneau e G. Shirane - Spin fluctuations in random magnetic-nonmagnetic two dimensional antiferromagnets III. An Ising system. - Phys. Rev. B21, 4038 (1980)
- [82] T.W. Burkhardt - Bond-moving and variational methods in real-space renormalization - in Real-space renormalization, vol 30, Topics in current Physics, Springer-Verlag (1982)
- [83] O.F. De Alcantara Bonfim - Critical dynamics of the q-state Potts model in two dimensions - Europhys. Lett. 4, 373 (1987)
- [84] A.L.C. Ferreira, S.K. Mendiratta e E.J.S. Lage - Simulation of domain wall dynamics in 2D anisotropic Ising model - J. Phys. A22, L431 (1989)
- [85] D. Kandall - Analysis of a dynamic renormalization group technique - Phys. Rev. B38, 486 (1988)
- [86] H. Goldstein - Classical Mechanics (p. 326) - Addison Wesley (1972)
- [87] M.Y. Choi e B.A. Huberman - Digital dynamics and the simulation of magnetic systems - Phys. Rev. B28, 2547 (1983)

- [88] E.J.S. Lage - Critical dynamics of the one-dimensional BEG model - Phys. Lett. A127, 9 (1988)
- [89] S. Miyazima - A random Potts model with different number of Potts spin states - Progr. Theor. Phys. 71, 1123 (1984)
- [90] T. Kawasaki - Kinetic behavior of a double Ising system - Progr. Theor. Phys. 59, 1812 (1978)