A Formação de Estruturas num Fluido de Duas Componentes na Época Pós-Recombinação

Jorge Paulo Maurício de Carvalho

Fevereiro 1995

UNIVERSIDADE DO PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS



A Formação de Estruturas num Fluido de Duas Componentes na Época Pós-Recombinação

Jorge Paulo Maurício de Carvalho

TESE SUBMETIDA PARA PROVAS DE DOUTORAMENTO

Fevereiro 1995

A meus Pais e à Isabel

Agradecimentos

(e um pedido de desculpas)

Ao Grupo de Matemática Aplicada da Faculdade de Ciências e ao Centro de Astrofísica da Universidade do Porto pelas facilidades concedidas, sem as quais a realização deste projecto teria sido bastante mais difícil, se não de todo impossível.

À Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) que através dos projectos PESO/P/PRO/6/91, STRDA/C/PRO/994/92 e STRDA/C/PRO/1036/93 subsidiou a minha participação em conferências científicas nacionais e internacionais.

Ao Professor Paulo Gali Macedo supervisor científico, pela confiança que em mim depositou, pelo empenho, críticas, sugestões, e também pela leitura minuciosa desta tese.

Ao António Manuel pelas conversas e comentários que foram em alguns aspectos muito úteis.

À professora Isabel Laboriau pela disponibilidade demonstrada e valiosa colaboração prestada na área de Sistemas Dinâmicos.

A todos os membros do Centro de Astrofísica (incluindo os colaboradores), responsáveis pelo bom ambiente de trabalho que existe.

Ao professor Orfeu Bertolami com o qual as poucas e curtas conversas que tive se vieram a revelar muito proveitosas.

A todos os meus amigos que de uma forma ou de outra também contribuiram para que a realização deste projecto fosse possível e agradável, em particular ao Hugo e ao Leitão pelo interesse com que acompanharam todo o projecto.

À Augusta por toda a disponibilidade demonstrada em qualquer situação.

Aos meus Pais e à Isabel pelo apoio, carinho, amor, ajuda e tudo.

Finalmente um pedido de desculpas ao João pela minha total indisponibilidade em certos momentos.

Publicações

Esta tese reune os resultados originais dos seguintes trabalhos originais já aceites para publicação:

- *On the onset of the Jeans instability in a two-component fluid*
  J. P. M. de Carvalho e P. G. Macedo
  Aceite para publicação no *Astronomy and Astrophysics*

- *Formation of galaxies in a dark matter dominated Universe – A new approach*
  P. G. Macedo e J. P. M. de Carvalho
  Aceite para publicação em "Currents in High Energy Astrophysics", (1994), ed. M.M. Shapiro, R. Silberberg and J.P. Wefel, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Gostaria no entanto de referir igualmente que o Capítulo 7 e parte do Capítulo 6 constituem versões dos seguintes trabalhos originais submetidos para publicação:

- *The structure formation resonance in a quasi-static aproximation*
  J. P. M. de Carvalho e P. G. Macedo
  Submetido para publicação no *Astrophysical Journal*

- *The effective critical scale for gravitational instability in a two-component expanding fluid*
  J. P. M. de Carvalho e P. G. Macedo
  Submetido para publicação no *Astronomy and Astrophysics*

Finalmente penso que devo referir que no Capítulo 5 desta tese é aflorado o problema da segregação entre as componentes de um fluido, problema este que foi analisado em dois trabalhos originais já publicados. Este assunto não é desenvolvido nesta tese para não a tornar excessivamente longa. No entanto devo dizer que esse estudo serviu de base ao trabalho

que posteriormente se desenvolveu e que constitui o corpo principal desta dissertação. Por isso penso que esses trabalhos também devem ser mencionados:

- *Virial segregation in a self-gravitating two-component fluid*
  J. P. M. de Carvalho e P. G. Macedo
  in "Evolution of the Universe and its Observational Quest" – *Proceedings of The Yamada Conference XXXVII*, (1993), ed. K. Sato, Universal Academy Press, Inc., Tokyo, Japan, p. 411

- An estimate for the mass of dark matter particles in galactic halos
  J. P. M. de Carvalho e P. G. Macedo *in* "Evolution of the Universe and its Observational Quest" – *Proceedings of The Yamada Conference XXXVII*, (1993), ed. K. Sato, Universal Academy Press, Inc., Tokyo, Japan, p. 477

Índice

Prefácio viii

1 Introdução 1

1.1 Motivação – as galáxias e a cosmologia 2

1.2 Objectivos 3

2 Modelos cosmológicos de Friedman 8

2.1 Introdução 9

2.2 Descrição dos modelos de Friedman – o modelo padrão 10

2.3 Sucessos do modelo padrão 16

2.4 Problemas do modelo padrão 17

2.4.1 O problema do horizonte 18

2.4.2 O problema da planaridade 19

3 Instabilidade gravitacional – o critério de Jeans 21

3.1 Introdução 22

3.2 O comportamento de pequenas perturbações de densidade 24

3.3 O critério de instabilidade de Jeans 28

3.3.1 Caso de um meio estático 29

3.3.2 Caso de um meio em expansão 31

3.3.3 O critério de Jeans e a formação de estruturas 38

4 A formação de estruturas na presença de matéria escura 40

4.1 Introdução 41

4.2 Perturbações num meio com duas componentes 44

4.3 Modelos de matéria escura 47

4.3.1 Matéria escura quente 49

4.3.2 Matéria escura fria 52

5 Comportamento das perturbações de densidade num fluido de duas componentes – Caso de um meio estático 55

5.1 Introdução 56
5.2 Equações para o sistema gravitacional acoplado 58
5.3 Estudo qualitativo do sistema dinâmico 62
5.3.1 Pontos críticos, valores próprios e vectores próprios 63
5.3.2 Resultados qualitativos 65
5.4 Valores numéricos dos parâmetros utilizados 69
5.5 Comportamento da solução geral 73
5.6 Ressonância gravitacional 84
5.6.1 Comportamento das amplitudes dos modos próprios do sistema . . . 84
5.6.2 Interpretação física dos resultados obtidos 92
5.7 Estudo detalhado do comportamento de ζ_3 95
5.8 Conclusões 98

6 Evolução do desencadear do crescimento de perturbações numa aproximação quase-estática 100

6.1 Introdução 101
6.2 Descrição do sistema gravitacional acoplado 102
6.3 Evolução temporal da amplitude ζ_3 104
6.4 A evolução temporal da escala ressonante 113

7 Comportamento das perturbações de densidade num fluido de duas componentes – Caso de um meio em expansão 120

7.1 Introdução 121
7.2 Descrição do sistema gravitacional acoplado 122
7.3 Análise qualitativa do sistema dinâmico 124
7.3.1 Escalas críticas para o sistema 128
7.3.2 Os modos próprios, as amplitudes e a sua dependência com a escala 137
7.4 O mecanismo ressonante – resultados numéricos 142
7.5 Conclusões 160

8 Conclusões **162**

8.1 Discussão dos resultados 163

8.2 Questões em aberto – Pistas para trabalhos futuros 167

Prefácio

Só o cientista é o verdadeiro poeta.
Dá-nos a lua, promete-nos estrelas,
e fabricará um universo novo de propósito,
para nós, se for preciso.

(Allen Ginsberg)

É claro que Allen Ginsberg não está completamente correcto quando tem este *pensamento.* O cientista sabe, por experiência própria, que os universos (os modelos cosmológicos) não são construidos por encomenda. No entanto tem também um pouco de razão no que afirma.

Ocorre-me, a este respeito, uma conversa tida com o meu Supervisor quando com ele comecei os meus trabalhos de investigação. A determinada altura dessa conversa confidenciou-me mais ou menos o seguinte:

> *"... os resultados do trabalho do cientista, ao contrário dos do poeta, são 90% fruto de transpiração e apenas 10% fruto de inspiração."*

Apenas mais tarde me apercebi de quão correcta era esta afirmação. Não, obviamente, no que diz respeito à correcção dos valores numéricos referidos, mas quanto ao significado que a afirmação, implicitamente, encerra.

De facto acabei por aperceber-me, embora não imediatamente, que realmente em ciência não se trabalha por encomenda. Isto porque, ao contrário do que parece poder concluir-se dos versos de Allen Ginsberg, existe no trabalho do cientista uma componente dependente da inspiração, que, por mais pequena que seja, é bastante importante para a obtenção de resultados, e portanto para a construção de universos. Esta componente do trabalho

científico, fruto da inspiração, é importante para qualquer ramo da ciência e não apenas para a cosmologia.

No entanto penso que podemos afirmar que, no caso do trabalho do "cosmólogo", a percentagem de inspiração foi bastante superior em tempos passados e passou naturalmente a decrescer, não decaindo no entanto para uma percentagem nula, à medida que a cosmologia passou a ser um área do conhecimento humano cada vez mais científica. Esta diminuição da componente inspiração, e o consequente aumento da componente transpiração, não é de estranhar se nos lembrarmos que no passado a "cosmologia" (não a cosmologia como hoje a entendemos, naturalmente), teve fortes ligações, por exemplo, com a magia e com a mitologia, para não falar de outras áreas com uma forte componente de inspiração. De certa forma podemos dizer que a inspiração foi dando lugar (também) à intuição científica.

Mas na verdade, qualquer ser humano é um cosmólogo, no sentido de que qualquer um "vê" o Universo de uma determinada forma, com determinadas características, e como consequência dessa visão pessoal, cada um constroi o seu universo, (o seu modelo "cosmológico"). Até Allen Ginsberg construiu o seu, e com uma forte componente de inspiração.

Edward Harrisson (1981) diz que cada um destes universos não é mais que um "quadro". Uma pintura que representa apenas e só, uma das interpretações possíveis do nosso Universo, e que por isso a cosmologia é a arte de "pintar" quadros do Universo.

Esta opinião parece ser também partilhada por Malcolm Longair. No entanto Longair (1989) vai mais longe, ao considerar que o cosmólogo não é um artista qualquer. Uma vez que não se preocupa com o detalhe, o cosmólogo é um impressionista.

O trabalho aqui apresentado é assim mais um quadro do Universo, de entre todos os possíveis. Talvez seja mais correcto dizer que são alguns traços num dos quadros possíveis. O quadro da matéria escura não bariónica.

Com efeito, neste trabalho, é analisada a formação de estruturas num universo que actualmente pensamos ser dominado gravitacionalmente por matéria escura. O formalismo desenvolvido é independente da natureza da matéria escura considerada. No entanto pode concluir-se da análise efectuada que um modelo de matéria escura quente é mais favorável ao desenvolvimento de estruturas bariónicas com as características (escalas) observadas do que um modelo de matéria escura fria.

Espero que os resultados obtidos, fruto de alguma inspiração, (penso que inevitável), e de muita transpiração (como é normal), e que conduziram à elaboração deste trabalho, possam de algum modo contribuir para a construção de um quadro que ainda tem muitas semelhanças com uma obra inacabada. Espero assim que este trabalho possa contribuir para

a criação/construção de *um modelo para a formação e evolução de estruturas no Universo.*

Por outro lado espero também que esta tese possa ser útil para quem, por uma razão ou por outra, necessite de recolher informações sobre os assuntos aqui tratados.

1

Introdução

Voici le temps
où l'on connaitra l'avenir
sans mourir de connaissance.
(G. Apollinaire)

Neste capítulo introdutório teceremos algumas considerações acerca da motivação científica (e pessoal) que nos orientou na escolha do tema do projecto de investigação, do qual resultou esta tese.

Vamos igualmente descrever, de uma forma sucinta, os objectivos que nos propusemos atingir com este projecto, e também o modo como esta tese se encontra estruturada, ao longo dos capítulos seguintes, onde apresentamos os resultados do projecto de investigação referido.

1.1 Motivação – as galáxias e a cosmologia

A cosmologia, no seu sentido mais lato, é um dos mais antigos empreendimentos intelectuais da humanidade. É igualmente um dos mais fascinantes. Não só sob o ponto de vista científico mas também sob o ponto de vista filosófico. De onde vimos e para onde vamos? A cosmologia é assim, a procura constante da ligação entre o princípio e o fim de tudo.

É claro que a compreensão desta ligação vai sendo construida com o evoluir do conhecimento humano. No entanto a nossa posição não é talvez a mais desejável para efectuar essa tarefa (a de estabelecer e compreender as leis que governam a natureza). Isso deve-se ao facto de sermos parte integrante do objecto que, em cosmologia, nos propomos estudar - o Universo. É, apesar de tudo, inegável a evolução conseguida ao longo da história do conhecimento da humanidade.

Para facilitar a descrição do Universo, como um todo, é usual pensar-se numa situação ideal em que o seu conteúdo material é um fluido que se encontra uniformemente distribuido no espaço e que acompanha a dinâmica global do universo. Um observador em repouso relativamente a este fluido cósmico designa-se por *observador fundamental* ou *observador co-móvel* com a expansão do Universo. Na literatura é vulgar a maioria dos autores considerarem que as galáxias representam observadores fundamentais. Convém referir que muito embora isto não seja completamente verdade devido à existência de movimentos peculiares

originados pelos campos gravitacionais de galáxias vizinhas, pode na maioria dos casos ser considerada uma aproximação bastante razoável.

Para além de as galáxias serem em geral consideradas como observadores fundamentais elas são também habitualmente consideradas como os "tijolos" fundamentais, utilizados pela gravitação na construção da estrutura do edifício cosmológico que é o Universo, e por isso responsáveis pela "arquitectura" que hoje podemos observar.

As galáxias desempenharam pois um papel decisivo na construção do Universo tal como ele hoje se nos apresenta. No entanto, e bastante paradoxalmente, existe um grande desconhecimento acerca do modo como estes objectos, tão bem definidos (ao contrário de outras estruturas cosmológicas como os enxames ou super enxames de galáxias), surgiram e evoluiram até ao seu estado actual. Para complicar ainda mais este cenário (tão pouco favorável no que diz respeito ao nosso conhecimento sobre as galáxias), no princípio da década de 80 começaram a surgir indicações bastante concretas de que as galáxias não eram apenas constituidas pelo material que podíamos observar. Ao contrário, as observações começaram a apontar no sentido de que na realidade a mais importante componente galáctica deveria ser constituida por um qualquer tipo de material que nos era impossível detectar por observação directa, podendo apenas ser inferido a partir do conhecimento da dinâmica das galáxias. É importante referir que a necessidade da existência no Universo de grandes quantidades de material desconhecido, tinha sido já verificada em estudos sobre a dinâmica de enxames de galáxias, cerca de 50 anos antes. No entanto devido à fraca qualidade das observações feitas nessa época, aliado ao facto de que para os enxames é muito difícil conhecer os seus limites espaciais, a hipótese da existência de *matéria escura* só começou a ganhar consistência quando o conhecimento acerca da dinâmica interna das galáxias se tornou mais completo.

Este fascínio, que os paradoxos[1] e o desconhecido[2] sempre provocam, foi determinante para a escolha do tema do projecto de investigação que nos proposemos realizar.

1.2 Objectivos

O objectivo de qualquer modelo cosmológico é descrever a evolução do Universo tal como ele é visto por observadores fundamentais. É pois inegável o papel fundamental desempenhado

[1] Considerámos ser um paradoxo o facto de as galáxias serem das estruturas cósmicas mais fundamentais e simultaneamente a sua formação continuar sem uma explicação inequívoca.

[2] A existência de material (a matéria escura), cuja natureza é completamente desconhecida.

pelas observações na evolução da cosmologia. Contudo essas observações só por si não explicam o Universo. É pois necessário construir modelos teóricos que, para além de estarem de acordo com o que nos é dado observar, sejam também capazes de explicar as observações. Simultaneamente esses modelos deverão prever o que pode e deve ser observado no futuro, conduzindo assim, na maior parte dos casos, as observações.

Não é pois estranho que os dois saltos normalmente considerados como fundamentais na cosmologia deste século, sejam um de carácter teórico e outro de carácter observacional. O de carácter teórico surge em 1916 e é a *Teoria da Relatividade Geral* devida a A. Einstein. O de carácter observacional prende-se com a descoberta em 1965, por Penzias e Wilson, da *radiação cósmica de fundo de micro-ondas* (Penzias & Wilson 1965).

Convém também aqui referir que a recente descoberta de anisotropias nessa mesma radiação, pelo grupo de G. Smoot (1992) utilizando as observações do satélite COBE (COsmic Background Explorer) é já considerada por alguns como pelo menos tão importante como a descoberta de Penzias e Wilson. Contudo achamos que convém ser cauteloso e esperar que seja a história, como habitualmente, a confirmar ou desmentir a sua verdadeira importância.

Neste trabalho, de carácter teórico, tentámos obter alguns resultados que permitissem fazer alguma luz sobre os dois aspectos referidos anteriormente, relacionados com a formação de estruturas. Isto é, pretendemos:

1. Explicar a razão da existência no Universo de estruturas (gravitacionalmente ligadas) com as escalas galácticas que hoje observamos.

2. Tentar fornecer pistas sobre a natureza da matéria escura que supomos ser gravitacionalmente dominante no Universo.

Como veremos estas duas questões encontram-se relacionadas.

Na primeira parte deste trabalho, capítulos 2, 3 e 4, descrevemos sucintamente o estado actual dos conhecimentos nas áreas que mais directamente se encontram relacionadas com o estudo por nós realizado. Na segunda parte, capítulos 5, 6, 7 e 8, serão apresentados e discutidos os resultados originais da investigação por nós efectuada.

Devido aos sucessos inegáveis conseguidos pelos modelos de Friedman-Robertson-Walker na descrição do Universo, começamos por justificar, no Capítulo 2, a utilização ao longo deste trabalho de um desses modelos, apesar de eles enfrentarem também problemas bastante sérios na explicação de algumas questões.

Contudo, convém salientar igualmente que os problemas com que estes modelos se debatem, não são relevantes para o período pós-recombinação, que é o período onde tempo-

ralmente se insere este trabalho. De facto, os problemas dos modelos de Friedman estão relacionados com a descrição do Universo durante o período mais primitivo da sua história. Parece não poder negar-se hoje, a importância e o carácter decisivo que esse período tem para a formação de estruturas. No entanto a maior parte da história do Universo, e em particular a época que se seguiu à recombinação, pode ser descrita completa e correctamente por um modelo de Friedman.

Assim descreveremos, de uma forma sucinta, as principais características dos modelos cosmológicos de Friedman, dando particular relevo ao modelo de Einstein - de Sitter, uma vez que é este o modelo base que vamos utilizar ao longo de todo este trabalho. Em seguida fazemos referência aos seus mais importantes sucessos e finalmente terminamos o Capítulo 2 com uma abordagem breve a alguns dos problemas com que se debate o modelo padrão.

Acredita-se que as estruturas materiais hoje observadas tiveram a sua origem em pequenas perturbações no Universo primitivo e que cresceram devido à acção da gravitação. Os modelos de formação de estruturas baseiam-se por isso em critérios de instabilidade gravitacional. Um desses critérios mais amplamente utilizado é o critério de instabilidade de Jeans. É a derivação deste critério, para o caso de um fluido constituido apenas por uma componente, que fazemos no Capítulo 3. Primeiro é apresentada a derivação do critério "clássico", isto é, considerando que o fluido se mantém estático no seu estado não perturbado. Depois é apresentada a derivação do critério equivalente para o caso em que o meio não perturbado se encontra num estado de expansão uniforme, à semelhança do que acontece no Universo. A derivação do critério de instabilidade neste segundo caso (resultado bem estabelecido), é feita de forma algo original utilizando um formalismo de Sistemas Dinâmicos, uma vez que será este o formalismo que depois utilizaremos na segunda parte deste trabalho.

Com o aumento das evidências em favor da hipótese da matéria escura os modelos de formação de estruturas passaram a ter que desenvolver formalismos aplicados a pelo menos duas componentes: uma bariónica e pelo menos uma de matéria escura. Assim, a segunda parte desta tese (isto é, a que diz respeito aos resultados originais por nós obtidos), é de certa forma iniciada com o Capítulo 4 o qual serve como introdução aos capítulos seguintes. Neste capítulo apresentamos de uma forma sucinta alguns resultados que se obtêm quando se estuda o comportamento de perturbações de densidade num fluido com duas componentes, sendo igualmente referidas algumas das características mais significativas dos modelos de matéria escura quente e dos modelos de matéria escura fria.

No Capítulo 5 é apresentado o problema da formação de estruturas num fluido com

duas componentes e é estudado o comportamento das perturbações de densidade e a sua dependência com a escala no caso em que se despreza a expansão do Universo. Estabelecemos primeiro o sistema dinâmico que descreve o comportamento do sistema gravitacional acoplado constituido por uma componente bariónica e uma componente de matéria escura (quente ou fria) e analisamos em seguida o comportamento qualitativo deste sistema estudando em função da escala, os seus diferentes modos próprios de oscilação. Este estudo permitirá obter as escalas críticas para a formação de estruturas. Analisamos igualmente o comportamento das trajectórias no espaço de fase, estudo este que nos fornece as indicações necessárias ao conhecimento do comportamento qualitativo da solução geral do sistema. Para se obter um conhecimento mais profundo do modo como se comportam as perturbações de densidade em cada uma das componentes do sistema na aproximação linear, analisamos ainda as amplitudes dos diferentes modos do sistema, dando particular ênfase ao modo de colapso. Concluimos que, no caso de a matéria escura ser quente, se observa neste modo a existência de um processo ressonante o qual é analisado com bastante pormenor. Verificamos que para condições iniciais razoáveis esse processo ressonante ocorre na componente bariónica mas apenas se os bariões estiverem já desacoplados da radiação. Por outro lado, para um valor da massa das partículas de matéria escura da ordem dos 30 eV, a escala a que se verifica a ressonância, imediatamente após a recombinação, é da mesma ordem de grandeza da escala de galáxias gigantes ou super-gigantes. Antes de terminar este capítulo, e como resultado da análise da estrutura do espaço de fase, é referida ainda a existência de um processo de segregação entre as duas componentes, que se manifesta logo após o estabelecimento da perturbação no sistema e que portanto determina uma distribuição espacial distinta das duas componentes ainda durante o regime linear da sua evolução.

Utilizando a mesma aproximação do Capítulo 5 (caso de um meio estático), e depois de obter a dependência temporal dos parâmetros envolvidos nas equações que descrevem o sistema, é analisada no Capítulo 6 a forma como evolui com o tempo a escala ressonante. Relacionando a ocorrência do processo ressonante com a formação no período pós-recombinação, de galáxias com massas distintas, esta análise é feita para vários valores da massa das partículas de matéria escura, permitindo assim estabelecer limites (embora não muito rígidos) para o valor dessa massa.

Uma vez que o tempo característico para o processo de formação de estruturas cosmológicas é da mesma ordem de grandeza que a escala de tempo da expansão do Universo, isto é, a evolução das perturbações decorre num intervalo de tempo comparável à idade do

Universo, para se poder ter um conhecimento correcto do comportamento das perturbações de densidade e sobretudo das escalas críticas para a formação de estruturas, não podemos desprezar a expansão do Universo. Assim, no Capítulo 7 efectuamos um estudo análogo ao do capítulo anterior mas para o caso mais realista, embora bastante mais complicado de analisar, em que a expansão do Universio é considerada nas equações. A análise qualitativa efectuada, mostra um comportamento do sistema, com a escala, em tudo semelhante ao caso anterior, muito embora o comportamento dinâmico seja diferente (como aliás seria de esperar devido à inclusão dos termos devidos à expansão). É analisada a dependência ou evolução temporal das escalas críticas que se obtêm neste caso, antes e depois da recombinação, e discutidas as implicações cosmológicas dessa dependência, no que diz respeito à formação de estruturas.

Finalizamos este trabalho com o Capítulo 8 o qual é uma súmula dos resultados obtidos (que foram sendo apresentados e comentados nos capítulos precedentes), e que julgamos serem importantes para melhor compreender como se comportam as perturbações de densidade num fluido com duas componentes no Universo em expansão. É dada ênfase especial às escalas críticas para a formação de estruturas, neste caso particularmente relevantes para a formação de estruturas galácticas. É ainda discutida a importância desses resultados e os novos problemas por eles levantados, e que no fundo definem a direcção dos projectos de investigação que nos propomos realizar no futuro.

2

Modelos cosmológicos de Friedman

Se tu compreendes, as coisas são como são.
Se tu não compreendes,
as coisas são como são.
(Provérbio budista)

2.1 Introdução

Para perceber o que aconteceu no Universo, entre o *big bang*[1] e a época actual, todos os processos físicos são relevantes. Contudo, hoje ainda não dispomos de um conhecimento suficiente de todos esses procesos e haverá até como é natural, processos que desconhecemos por completo. Um exemplo disto mesmo é o completo desconhecimento da física dos primeiros $10^{-43}s$ de vida do Universo ou seja, até à chamada *época de Planck.*

Mesmo durante o intervalo de tempo que medeia entre esta época e a época em que o Universo atinge a idade de cerca de $10^{-3}s$, a física que o descreve navega num mar de incertezas e chega até em certos casos a ser especulativa (particularmente no período que antecede a época das Teorias de Grande Unificação, o que ocorre para $t \sim 10^{-35}s$).

É no entanto durante este período, que normalmente se designa por Universo muito primitivo, que se supõe terem surgido as sementes que deram origem ao Universo que hoje observamos e conhecemos. Por exemplo, acredita-se hoje que todas as partículas que o Universo contém, assim como as flutuações a partir das quais as estruturas cósmicas evoluiram, tiveram a sua origem nessa época muito primitiva do Universo (Kolb & Turner 1990; Peebles 1993).

Segue-se depois um período que se prolonga até à época em que se dá a recombinação do hidrogénio, e por isso designada normalmente por *época da recombinação,*, o que acontece quando o Universo atinge a temperatura de cerca de 3000 K ou $\sim 10^{13}s$. Durante este período os valores da temperatura e da densidade (apesar de ainda elevados) são já bastante menores do que os do período do Universo muito primitivo, e por isso mesmo os processos físicos relevantes são bem conhecidos e é inclusivamente possível fazer previsões quantitativas de algumas quantidades testáveis por observação, como por exemplo as abundâncias de

[1] Optamos por não traduzir o termo *big bang* devido ao facto de ele ser correntemente utilizado pela generalidade das pessoas, cosmólogos ou não. Uma tradução livre poderia ser *grande explosão.*

elementos leves de que falaremos mais à frente. Este é o período habitualmente designado por *período quente do big bang.*

Finalmente temos o período mais longo da história do Universo. Este, estende-se desde a época da recombinação até à época actual e é por isso mesmo designado por *período pós-recombinação.* É durante este período que se supõe que as estruturas cósmicas actuais, como por exemplo as galáxias e os enxames de galáxias, adquirem a sua forma actual. Neste período, tal como no período anterior, a microfísica é igualmente bem conhecida. No entanto, os processos físicos envolvidos no processo de formação e evolução das primeiras estruturas gravitacionalmente ligadas tornam-se fortemente não lineares. Como consequência deste facto a construção de modelos que procurem descrever completa e detalhadamente a formação e o desenvolvimento das estruturas, durante este período, não foi até agora possível. Da actuação conjunta de todos os processos físicos fortemente não lineares durante este período, resulta toda a complexidade de estruturas que hoje podemos constatar observacionalmente.

Neste capítulo faremos uma descrição sucinta dos modelos cosmológicos de Friedman, bem como uma breve alusão aos seus maiores sucessos.[2]

Referiremos finalmente, também de um modo sucinto, alguns dos problemas mais sérios com que se debatem actualmente estes modelos.

Para uma apresentação mais ou menos detalhada destes modelos ver por exemplo Peebles (1971) ou Weinberg (1972); mais recentemente Kolb & Turner (1990) e Peebles (1993) são também referências importantes.

2.2 Descrição dos modelos de Friedman – o modelo padrão

Muito embora os modelos cosmológicos de Friedman se debatam ainda com enormes dificuldades em determinados aspectos (alguns mesmo que julgamos inultrapassáveis), os seus sucessos são de tal modo importantes e significativos que não será despropositado descrever, ainda que sucintamente, algumas das características destes modelos, até porque o trabalho aqui apresentado insere-se temporalmente num período da história do Universo que é perfeitamente compatível com a descrição do modelo padrão.

Um dos pressupostos fundamentais em que se baseiam os modelos de Friedman é o

[2]Convém referir que são também vulgarmente utilizadas as designações de *modelo padrão* ou *modelo do big bang* para referir qualquer dos modelos cosmológicos de Friedman. Estas designações serão por nós utilizadas indistintamente ao longo deste trabalho.

que é traduzido pelo *Princípio Cosmológico*. Segundo este princípio o Universo pode ser considerado espacialmente homogéneo e isotrópico à escala cosmológica, ou seja, em grandes escalas.[3] As evidências observacionais que podem conduzir à aceitação deste princípio são em grande número, mas a mais importante talvez seja fornecida pela uniformidade observada na radiação cósmica de fundo de micro-ondas cuja temperatura actual T_{γ_0}, é conhecida com grande precisão e é dada por, (Mather et al. 1990):

$$T_{\gamma_0} = 2.735 \pm 0.006\text{K}, \tag{2.1}$$

Esta isotropia em grandes escalas parece também ser confirmada pela uniformidade da radiação cósmica de fundo em outros comprimentos de onda como por exemplo o de raios X (Field 1972; Burbidge 1972; Cen et al. 1990; Hasinger, Schmidt & Trümper 1991).

A homogeneidade decorre directamente de se supôr que o local que ocupamos no Universo não é um local privilegiado. Assim o Universo é isotrópico quando observado a partir de qualquer local, o que implica a sua homogeneidade espacial.

A métrica de um espaço-tempo que admite uma foliação em hipersuperfícies espaciais homogéneas e isotrópicas tem características específicas, (ver por exemplo Weinberg 1972), e no contexto cosmológico é designada por métrica de Robertson-Walker. Assim, esta é a métrica do modelo padrão, a qual pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1 - K\,r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{2.2}$$

onde ds^2 é o quadrado do intervalo próprio elementar entre dois acontecimentos no espaço-tempo, K é uma constante relacionada com a curvatura e que pode tomar os valores -1, 0 ou 1 consoante a curvatura é respectivamente negativa, nula ou positiva, e $a(t)$ é o factor de escala cósmico, que descreve a expansão do Universo. As coordenadas r, θ e ϕ são coordenadas co-móveis. Isto significa que a distância própria entre dois quaisquer objectos co-móveis com a expansão varia proporcionalmente a $a(t)$.

A gravitação, que é a interacção responsável pela evolução temporal do Universo (à escala cósmica), é descrita pelas equações de campo de Einstein, que se podem escrever na forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = 8\,\pi\, G\, T_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

[3]Consideramos, neste contexto, que grandes escalas são aquelas cujas dimensões são bastante superiores a 100 Mpc.

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico definido pela equação (2.2), $R_{\mu\nu}$ e $R = R^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ são respectivamente o tensor de Ricci e a curvatura escalar, que são funções de $g_{\mu\nu}$ e das suas primeiras e segundas derivadas. $T_{\mu\nu}$ é o tensor de impulsão-energia que descreve o conteúdo material do sistema, e G é a constante de gravitação universal.

Especificando uma equação de estado para o fluido cósmico, as equações de Einstein formam pois um sistema que nos permite determinar as três variáveis envolvidas, $a(t)$, $p(t)$ e $\rho(t)$. As suas soluções foram pela primeira vez obtidas, utilizando a métrica de Robertson-Walker equação (2.2), por Alexander Friedman. Daí estes modelos serem também por vezes designados por modelos de Friedman-Robertson-Walker.[4]

O membro esquerdo das equações de Einstein descreve as características geométricas do espaço-tempo, enquanto que o membro direito está relacionado com as propriedades e distribuição da matéria nesse mesmo espaço-tempo, através do tensor de impulsão-energia.

A isotropia e homogeneidade implicam que este tensor tenha a forma do tensor de impulsão-energia para um fluido perfeito, isto é:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

onde $\rho = \rho_m + \rho_r$ é a densidade de energia total, isto é, a densidade de energia devida à matéria, ρ_m, mais a devida à radiação, ρ_r, sendo $\rho_r = 3p$, e p a pressão isotrópica.

Verifica-se assim que a pressão e a densidade são as variáveis que determinam, através deste tensor, o modo como se processa a evolução temporal da expansão. Por outro lado conhecendo a evolução temporal do factor de escala $a(t)$ podemos então ficar a saber o modo como variam a densidade e a pressão.

Utilizando, nas equações de Einstein, a métrica dada por (2.2) e o tensor de impulsão-energia dado por (2.4) pode então obter-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{2.5}$$

e

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{K}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{2.6}$$

[4]Na verdade as mesmas soluções podem ser obtidas utilizando apenas resultados de gravitação Newtoniana (McCrea & Milne 1934; Milne 1934).

onde $\dot{a} \equiv da/dt$ e $\ddot{a} \equiv d\dot{a}/dt$.

Considerando as condições de conservação do tensor de impulsão-energia, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, obtemos mais uma equação que pode ser escrita na forma:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \tag{2.7}$$

e que caracteriza a evolução temporal da densidade de energia total.

Destas 3 últimas equações apenas duas são independentes. De facto, facilmente se verifica que derivando a equação (2.6) e utilizando a equação (2.7) se pode obter a equação (2.5).

Assim, para obtermos as soluções para as 3 variáveis referidas, $a(t)$, $p(t)$ e $\rho(t)$, teremos ainda que considerar uma equação de estado para o conteúdo material do Universo, que relacione a pressão com a densidade, isto é, uma relação do tipo

$$p = p(\rho). \tag{2.8}$$

Podemos então afirmar que as equações fundamentais para a descrição da evolução do Universo são as equações de campo de Einstein, a equação de conservação do tensor de impulsão-energia e a equação de estado.

A equação de estado pode ser utilizada para determinar o modo como varia a densidade ρ com o factor de escala $a(t)$.

Para isso convém escrever a equação (2.7), que descreve a conservação do tensor de impulsão-energia, na forma:

$$a^3\dot{p} - \frac{d}{dt}\left[a^3(\rho + p)\right] = 0, \tag{2.9}$$

que facilmente se pode transformar na equação

$$\frac{d}{da}\left(a^3\rho\right) + 3a^2 p = 0. \tag{2.10}$$

Podemos considerar dois casos distintos:

1. Caso em que a densidade de energia do Universo é dominada por matéria não relativista. Neste caso a pressão pode desprezar-se, isto é

$$p \sim 0\,. \tag{2.11}$$

O período da história do Universo em que é válida esta aproximação é normalmente designada de uma forma abreviada por *época dominada pela matéria.*

2. Caso em que a densidade de energia do Universo é dominada por partículas relativistas como fotões e neutrinos. Neste caso a pressão é comparável à densidade de matéria não relativista e não pode por isso desprezar-se e tem-se

$$p = \frac{\rho}{3} . \tag{2.12}$$

Este período designa-se vulgarmente por *época dominada pela radiação.*

No primeiro caso a partir da equação (2.10), obtemos facilmente:

$$\rho \propto \frac{1}{a^3} , \tag{2.13}$$

enquanto que no segundo, a partir da mesma equação, facilmente se verifica que a densidade ρ varia mais rapidamente com o factor de escala, ou seja

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} . \tag{2.14}$$

Verificamos que conhecendo a densidade ρ em função de a podemos, resolvendo a equação (2.6), determinar a dependência temporal do factor de escala $a(t)$.

Atendendo à expressão da equação (2.6) é fácil verificar que há um modelo de Universo para o qual é particularmente simples obter a dependência temporal do factor de escala. Esse modelo é o *modelo de curvatura nula* ou *modelo plano*, também usualmente designado por *modelo de Einstein-de Sitter*, que se obtém fazendo $K = 0$.

Assim, utilizando (2.13) e (2.14) na equação (2.6) é imediato concluir que no período dominado pela matéria o factor de escala varia com o *tempo cósmico*[5] do seguinte modo:

$$a \propto t^{2/3}, \tag{2.15}$$

enquanto que na época dominada pela radiação temos uma dependência diferente, isto é:

$$a \propto t^{1/2}. \tag{2.16}$$

[5]Tempo medido por um observador co-móvel com a expansão do Universo, ou observador fundamental.

Convém igualmente definir o *parâmetro de densidade* Ω, de um modelo de Universo. Este parâmetro representa a densidade ρ, no referido modelo, em unidades da *densidade crítica* ρ_c, isto é:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} . \tag{2.17}$$

A densidade crítica é por definição a densidade mínima acima da qual o Universo é fechado, ou seja, é a densidade de um Universo para o qual a constante de curvatura K é nula. Este modelo é como dissemos o modelo de Einstein-de Sitter.

Sendo $H \equiv H(t)$ a taxa de expansão do Universo na época t, definida por:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} , \tag{2.18}$$

facilmente se conclui então, a partir da equação (2.6), que o valor da densidade no Universo de Einstein-de Sitter (a densidade crítica), é dado pela seguinte expressão:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} . \tag{2.19}$$

É importante aqui referir que é usual designar H por *constante de Hubble*, independentemente da época que se esteja a considerar. No entanto, como o valor de H depende do instante de tempo cósmico considerado, não é na realidade constante. Por isso neste trabalho, utilizaremos a designação *parâmetro de Hubble* em vez de constante de Hubble, para nos referirmos ao valor que H toma numa época arbitrária. A designação de constante de Hubble ficará reservada ao valor que o parâmetro de Hubble toma para a época actual, isto é, H_0.

Assim, a partir da equação (2.19), facilmente se verifica que o parâmetro de densidade pode ser escrito na forma:

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} . \tag{2.20}$$

Um outro parâmetro que convém definir, uma vez que é de utilização constante, é o desvio cosmológico para o vermelho z.[6] O valor de z de um qualquer objecto observado é definido como sendo o desvio relativo sofrido pelo comprimento de onda da radiação por ele emitida, no seu percurso entre a fonte e o observador, isto é:

[6]Para designar o desvio cosmológico para o vermelho a literatura utiliza em geral o termo inglês *red-shift*.

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \tag{2.21}$$

onde λ_{em} e λ_{obs} são respectivamente o comprimento de onda da radiação característica emitida pelo objecto (tal como é medida por um observador co-móvel com a fonte emissora) e o comprimento de onda dessa mesma radiação medido por um observador fundamental.

Quando a velocidade de recessão[7] (v) de um objecto, é muito menor que a velocidade da luz c, o desvio para o vermelho desse objecto está relacionado com a sua velocidade através da expressão aproximada $v \simeq cz$.

É fácil mostrar-se também, utilizando a métrica de Robertson-Walker, que z e o factor de escala do Universo $a(t)$, se encontram relacionados por:

$$a(t) = \frac{1}{1+z} \, . \tag{2.22}$$

2.3 Sucessos do modelo padrão

Como dissemos a cosmologia do big bang (isto é, o modelo cosmológico padrão), é claramente suficiente para explicar muitas das observações a que hoje temos acesso. Por exemplo, e para citar apenas alguns dos seus sucessos mais importantes, está actualmente perfeitamente estabelecido que o modelo padrão explica os seguintes factos observacionais (Weinberg 1972; Kolb & Turner 1990):

- A expansão (de Hubble) do Universo.
- A radiação cósmica de fundo de micro-ondas com uma temperatura actual de cerca de 2.7 K.
- As abundâncias cósmicas de elementos leves, através da nucleosíntese primordial, como o D, o ^{3}He, o ^{4}He ou o ^{7}Li.

Para além destes exemplos, que são vulgarmente considerados como dos maiores sucessos da cosmologia do big bang, as observações dos mais distantes objectos conhecidos, como por exemplo as rádio-galáxias com elevados valores do desvio cosmológico para o vermelho z, ou os quasares com valores de z ainda mais elevados, são perfeitamente consistentes com

[7] Velocidade de recessão é normalmente a designação utilizada quando nos referimos à velocidade de afastamento entre as galáxias devido à expansão do Universo.

a cosmologia padrão, comprovando assim o seu sucesso a partir de aproximadamente $10^{16}s$ (após o big bang) e até à época actual.

Também a confirmação observacional da existência da radiação cósmica de fundo de micro-ondas constituiu um teste positivo à cosmologia padrão a partir de épocas bastante primitivas da história do Universo, isto é, desde a época em que o Universo tinha uma idade de cerca de $5 \times 10^{12}s$.

Ainda de acordo com a cosmologia do big bang, quando o Universo tinha apenas entre 0.01 e $300\,s$ de idade, (o que corresponde a temperaturas de 10 MeV a 0.1 MeV aproximadamente), as condições eram precisamente as necessárias para a produção de diversos núcleos leves. Convém referir que as abundâncias de D, ^{3}He, ^{4}He e ^{7}Li previstas pelo modelo cosmológico padrão, são consistentes com as abundâncias observadas para aqueles elementos desde que a razão entre o número de bariões e o número de fotões χ, seja dado por (Turner 1986):

$$\chi = \frac{n_b}{n_\gamma} \simeq (4-7) \times 10^{-10}\,. \tag{2.23}$$

A concordância entre a teoria e a observação, particularmente no que diz respeito às abundâncias de D e ^{4}He, é uma evidência bastante forte em favor do modelo padrão uma vez que não existe actualmente outro modelo que possa explicar simultaneamente as abundâncias primordiais destes dois isótopos, (Yang et al. 1984, Boesgaard & Steigman 1985).

Resumindo, podemos dizer com elevado grau de certeza que todas as evidências actualmente disponíveis indicam que a cosmologia do big bang fornece uma explicação bastante convincente para a evolução do Universo desde tempos muito primitivos até à época actual, ou seja para o tempo cósmico t pertencente ao intervalo

$$0.01\,s \lesssim t \lesssim 5 \times 10^{17}s\,, \tag{2.24}$$

o que é de facto notável!

2.4 Problemas do modelo padrão

Apesar do sucesso da cosmologia padrão na explicação de muitas das características (observadas) do Universo, este modelo continua ainda a deparar com sérias dificuldades para conseguir explicar os processos que ocorreram sobretudo nos primeiros instantes da história

do Universo, ou seja, para $t \lesssim 10^{-35}s$. Isto para além dos já referidos problemas relativos à nossa dificuldade em conseguir descrever detalhadamente os processos físicos não lineares que ocorrem durante a evolução das estruturas gravitacionalmente ligadas no período pós-recombinação.

Nesta secção vamos referir, de uma forma breve, apenas dois dos problemas com que se debate o modelo padrão, e que são o *problema do horizonte* e o *problema da planaridade.*

2.4.1 O problema do horizonte

Para uma determinada época t, um observador fundamental típico O, tem o seu cone de luz passado truncado no instante do big bang, isto é em $t = 0$. Na era dominada pela radiação, e no intervalo de tempo [0 , t], um sinal luminoso apenas poderia ter percorrido uma distância própria[8] $R(t)$ dada por:

$$R(t) = a(t) \int_0^t \frac{dx}{a(x)} . \tag{2.25}$$

Assim, qualquer comunicação causal com o referido observador fundamental está limitada à esfera de raio R centrada em O. Este limite é designado por horizonte de partícula[9].

Consideremos dois observadores fundamentais O e O' que, no instante t, se encontram separados por uma distância própria superior a $2R(t)$. Os horizontes de partícula destes dois observadores têm assim uma intersecção vazia e portanto no intervalo de tempo considerado não puderam comunicar entre si. Uma vez que para se conseguir a homogeneidade numa vasta região é necessária a ligação causal entre os diversos pontos dessa região, não há razão para à partida se admitir que uma vizinhança de O seja fisicamente semelhante a uma vizinhança de O'. Isto significa que a existência de horizontes de partícula foi uma barreira para os processos físicos que pudessem ter conduzido a um Universo espacialmente homogéneo.

---

[8] Designaremos por distância própria a distância co-móvel multiplicada pelo factor de escala. É também vulgar encontrar a expressão *distância física* para designar esta distância. Ao longo deste trabalho utilizaremos indistintamente uma ou outra destas designações.

[9] É usualmente aceite que os processos físicos apenas podem actuar em escalas inferiores ao raio de Hubble $R_H(t) = c/H(t)$ (ver por exemplo Bardeen, Steinhardt & Turner 1983; Brandenberger 1985), apesar de ser muito difícil demonstrar esta afirmação para o caso geral uma vez que num modelo arbitrário de Friedman-Robertson-Walker, a escala do horizonte pode ser bastante diferente de $c/H(t)$ (ver Padmanabhan & Seshadri 1988; Ellis 1988). No entanto pode considerar-se a era dominada pela radiação tem um horizonte de partícula da mesma ordem de grandeza do raio de Hubble (Narlikar & Padmanabhan 1991).

Se as características do Universo actual como a homogeneidade e a isotropia, tivessem sido determinadas numa determinada época t_i, seria de esperar que a esfera de raio $R(t_i)$ se tivesse expandido o suficiente para abarcar todo o Universo hoje observável, o qual tem uma dimensão física de $\sim 10^{28}$ cm. Nesse caso teriamos uma explicação natural para a homogeneidade observada no nosso Universo.

Na verdade isso não acontece. Tomando por exemplo para t_i a época da grande unificação, isto é $t_i \sim 10^{-35} s$ e considerando as taxas de crescimento de R e do factor de escala a de acordo com o modelo padrão, pode mostrar-se que a esfera de raio $R(t_i) \sim 10^{-25}$ cm, (correspondente ao horizonte nessa época), teria hoje um raio de apenas $\sim 10^2$ cm, o que não tem nada a ver com a dimensão do Universo actual.

Esta discrepância é reduzida à medida que aproximamos o instante t_i da época actual. No entanto mesmo que consideremos que t_i terá sido a época em que se deu o desacoplamento entre a matéria e a radiação, (época da recombinação), pode mostrar-se que a esfera de raio $R(t_i)$ ocupa na época actual um volume que é cerca de 4 ordens de grandeza inferior ao volume ocupado pelo Universo actual. Dito de outra forma, o Universo hoje observável é composto por cerca de 10^4 regiões que, na época da recombinação, não se encontravam relacionadas causalmente.

Este é o problema do horizonte, por vezes também designado por *problema da isotropia e homogeneidade.*

2.4.2 O problema da planaridade

A partir da equação (2.6) podemos obter, usando o parâmetro de densidade Ω, a seguinte relação:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{K}{\dot{a}^2} \,. \tag{2.26}$$

Escrevendo esta relação para a época actual e eliminando K (que supomos diferente de zero), obtemos:

$$\Omega(t) - 1 = \left(\frac{\dot{a}_0}{\dot{a}}\right)^2 (\Omega_0 - 1) \,, \tag{2.27}$$

onde $\dot{a}_0$ e Ω_0 são respectivamente a derivada temporal do factor de escala e o parâmetro de densidade para a época actual.

Atendendo a que na equação (2.6) se tem que $\rho \propto a^{-3}$, esta equação pode ser escrita na forma:

$$\dot{a}^2 = -K + \frac{8}{3}\pi G\rho_0 \frac{1}{a}\,, \tag{2.28}$$

onde ρ_0 é a densidade para a época actual e o factor de escala foi normalizado de modo a que para esta mesma época se tem $a_0 = 1$.

Esta equação mostra que $\dot{a} \to \infty$ quando $a \to 0$, isto é, quando $t \to 0$. Portanto qualquer que seja o valor finito de Ω_0 ("próximo" de 1, segundo as observações actualmente disponíveis), concluimos pela equação (2.27), que quando nos aproximamos do Universo muito primitivo o parâmetro de densidade tende rapidamente para o valor crítico 1.

Para termos uma ideia de quão próximo de 1 foi o valor de Ω nos primeiros instantes do Universo podemos referir que, por exemplo, na época da grande unificação se tem

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{\dot{a}}\right)^2 \leq 10^{-48}, \tag{2.29}$$

o que demonstra claramente o elevado grau de ajuste, para o valor zero, do valor de $|\Omega - 1|$.

Dito de outra forma, para que o valor de $|\Omega_0 - 1|$ seja "próximo" de zero como as observações parecem indicar (Peebles 1993), é necessário que no passado o ajuste de Ω para o valor 1 tenha sido extraordináriamente preciso.

Se assim não fosse, ou o Universo teria recolapsado muito antes da época actual, no caso de $K = 1$, ou ter-se-ia expandido e arrefecido bastante mais do que hoje é observado, no caso de $K = -1$.

Na ausência de mecanismos físicos que consigam explicar o elevado grau de ajuste no parâmetro de densidade, isso terá que ser postulado no modelo padrão. Este é o problema da planaridade.

Como dissemos anteriormente estes são apenas dois dos problemas com que se debate o modelo padrão.

Para além disso convém ainda referir que os modelos inflacionários surgidos no início da década de 80, vieram resolver de uma forma satisfatória estes e outros problemas do modelo padrão (Guth 1981; Sato 1981; Sá 1993; Moniz 1993).

3

Instabilidade gravitacional – o critério de Jeans

Que pena a beleza do Universo não ser assim tão fácil
em vez desta complicação que ninguém entende,
sem rosas nem deuses.
(J. Gomes Ferreira)

3.1 Introdução

O problema da formação de estruturas em geral, e das galáxias em particular, é uma das questões centrais e mais controversas da cosmologia actual.

A aproximação de homogeneidade e isotropia parece ser uma descrição correcta quando consideramos o Universo nas suas maiores escalas. No entanto a escalas menores verificamos que o Universo é altamente não homogéneo e anisotrópico, como o demonstra a existência de galáxias, enxames galácticos, super enxames e vazios cósmicos.[1] Podemos ainda considerar estruturas mais isoladas cuja formação e estrutura não são ainda bem conhecidas, como o *Grande Atractor,* que se supõe ser uma região com uma grande concentração de massa, responsável pelo movimento peculiar do *Grupo Local,* ou a *Grande Parede* que, como o nome sugere, é uma região com a forma de um paralelipípedo relativamente pouco espesso onde a concentração de galáxias é extremamente elevada.

O estudo da formação de toda esta variedade de estruturas torna-se de facto complicado e os modelos hoje existentes ainda não fazem mais do que tentar explicar algumas das características mais gerais da formação destas estruturas.

Acredita-se hoje que as estruturas existentes no Universo são a consequência da evolução de perturbações de densidade primordiais. O modo como estas perturbaçãoes são originadas, num Universo homogéneo e isotrópico, é ainda fruto de muita discussão e debate.

Este é um problema a que os modelos inflacionários tentam dar resposta (Bardeen, Steinhardt & Turner 1983; Guth & Pi 1982; Hawking 1982; Starobinsky 1982), sem contudo terem conseguido até agora ser conclusivos, principalmente devido ao facto de grande parte das suas previsões não serem testáveis por observação directa (Peebles 1993).

Há igualmente outro tipo de modelos que procuram resolver o mesmo problema. Esta-

[1] Regiões do espaço despovoadas, pelo menos aparentemente, de estruturas materiais. Normalmente na literatura de lingua inglesa estas regiões são designadas por *voids*.

mos a referir-nos aos modelos decorrentes de defeitos topológicos que surgem em transições de fase no Universo primitivo como por exemplo as cordas cósmicas (Zel'dovich et al. 1974; Kibble 1976, 1980). Segundo estes modelos os defeitos topológicos são as sementes primordiais das estruturas hoje observadas (Zel'dovich 1980; Vilenkin 1981; Silk & Vilenkin 1984; Turok 1985). Para uma discussão detalhada ver por exemplo Brandenberger (1989a, 1989b) ou Vilenkin & Shellard (1993).

As observações da radiação cósmica de fundo de micro-ondas, como por exemplo as recentes observações do satélite COBE entre outras, (ver por exemplo Davies et al. 1987, Wilkinson 1987, Partridge 1988, Smoot et al. 1992 e Wright et al. 1992), permitem apesar de tudo afirmar com bastante segurança, que na época da recombinação as perturbações de densidade existentes numa escala angular de cerca de cerca de 10° (o que corresponde a uma escala característica na época actual de cerca de 10^3 Mpc ou $\sim 10^{23}\,M_\odot$), eram de muito baixa amplitude. De facto as flutuações observadas na temperatura da radiação cósmica de fundo de micro-ondas são da ordem de 10^{-5}.

Para escalas menores, as mais recentes observações disponíveis apontam também no sentido de que nessa mesma época, as perturbações existentes tinham uma amplitude da mesma ordem de grandeza (embora ligeiramente superior segundo algumas observações), e portanto ainda se encontravam bastante longe do regime não linear de evolução (para observações a diversas escalas ver por exemplo de Bernardis et al. 1992; Gaier et al. 1992; Readhead & Lawrence 1992; Watson et al. 1992; Myers et al. 1993; Cheng et al. 1993; Meinhold et al. 1993; Subrahmanyan et al. 1993).

É portanto razoável que a maioria dos modelos actuais que pretendem explicar a existência das estruturas materiais hoje observadas, admita a existência de pequenas perturbações de densidade na época da recombinação e tente seguir a evolução dessas perturbações durante o período que se estende desde a recombinação até à época actual.

De facto, no período anterior à recombinação, o acoplamento via espalhamento de Thomson entre o material bariónico e a radiação, impedia o crescimento efectivo das eventuais perturbações de densidade no material bariónico, podendo mesmo apagar completamente essas perturbações em certas escalas de interesse cosmológico (Silk 1967; Doroshkevich et al. 1967; Peebles & Yu 1970; Field 1971; Weinberg 1971).

O estudo dos mecanismos responsáveis pela formação de estruturas no Universo foi iniciado por Jeans (1902, 1928) com um trabalho pioneiro nesta área.

Considerando um meio estático, Jeans estudou as condições sob as quais uma nuvem gasosa, sujeita apenas à sua auto-gravitação, se torna gravitacionalmemte instável e con-

cluiu que apenas as perturbações com massas superiores a um determinado valor crítico M_J, a *massa de Jeans*, podem crescer sob a acção da sua auto-gravitação conduzindo à formação de estruturas gravitacionalmemte ligadas. Por outro lado as perturbações com massas inferiores à massa de Jeans comportam-se como ondas acústicas, não crescendo em amplitude, e não dando portanto origem a formação de estruturas.

Com efeito, é fácil verificar que em determinada época da história do Universo nem todas as perturbações são gravitacionalmente instáveis. A escala da perturbação determina se estamos perante uma perturbação estável ou instável, e o critério de instabilidade mais amplamente utilizado nos modelos de formação e evolução de estruturas é o critério de Jeans.

Nas secções seguintes consideramos um fluido constituido por uma componente e derivamos da forma habitual, a equação que descreve o comportamento de pequenas perturbações de densidade num Universo em expansão. É em seguida apresentado o critério de instabilidade de Jeans tanto num meio estático como num meio em expansão, e discutida a sua relação com a formação de estruturas. Apresentações detalhadas deste mecanismo podem encontrar-se por exemplo em Weinberg (1972) ou Zel'dovich & Novikov (1983).

3.2 O comportamento de pequenas perturbações de densidade

Não deixa de ser interessante constatar, e importante referir, que o problema da instabilidade gravitacional num meio material homogéneo foi formulado e resolvido por Jeans, utilizando apenas elementos da dinâmica newtoniana, no início deste século (Jeans 1902; Jeans 1928). Apesar disso, este critério de instabilidade continua a ser um dos mais utilizados em astrofísica teórica. A comprovar isso mesmo verifica-se que expressões como *Comprimento de Jeans* ou *Massa de Jeans*, são hoje de uso corrente em astrofísica para designar a escala crítica acima da qual a instabilidade se estabelece.

O tratamento relativista do mesmo problema foi efectuado bastante mais tarde por Lifshitz (1946) que obteve essencialmente os mesmos resultados que Jeans obtivera quase meio século antes.

O critério de Jeans estabelece fundamentalmente a relação entre dois factores que determinam o comportamento das pequenas perturbações de densidade. Esses factores são a gravidade que actua no sentido de concentrar o material perturbado, e a pressão que actua em sentido contrário, isto é, tende a eliminar qualquer perturbação que se possa originar e

portanto a distribuir a matéria de um modo uniforme.

Nesta secção vamos estabelecer a equação diferencial que descreve o comportamento de pequenas perturbações de densidade num fluido constituido por uma componente sujeito apenas à sua auto-gravitação.

O fluido é caracterizado pelos campos de densidade, de pressão e de velocidades que designaremos respectivamente por ρ, p e $\boldsymbol{v}$, sendo o potencial gravitacional ϕ dado em cada ponto como função da distribuição de densidade. As equações que descrevem a dinâmica desse fluido são as equações habituais da hidrodinâmica, isto é, a equação de continuidade, a equação de Euler e a equação de Poisson, e podem escrever-se, em coordenadas eulerianas, na forma seguinte:

Equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3.1}$$

Equação de Euler

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \phi \tag{3.2}$$

Equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \tag{3.3}$$

As duas primeiras, destas três equações diferenciais de derivadas parciais, descrevem respectivamente a conservação de massa e o movimento de um elemento do fluido, e a última descreve o potencial auto-gravitacional devido à distribuição de densidade ρ.

É conveniente referir que as derivadas parciais que figuram nessas equações, descrevem a variação das quantidades relativamente a um ponto fixo do espaço, isto é, as equações escritas nesta forma referem-se a coordenadas Eulerianas. Podemos contudo escrever as equações (3.1) – (3.3) na forma Lagrangeana (ou co-móvel), isto é, numa forma em que é "acompanhado" o movimento de um elemento particular do fluido. Isso é conseguido passando das derivadas parciais $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, para derivadas totais $\left(\frac{d}{dt}\right)$, através da relação entre os respectivos operadores, e que se escreve:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \tag{3.4}$$

É usual admitir, tal como Jeans, que o estado não perturbado do fluido, isto é, a solução de ordem zero do sistema constituido pelas três equações (3.1), (3.2) e (3.3), é o estado em

que o fluido se encontra em repouso ($\boldsymbol{v} = 0$), e para o qual os valores da densidade e da pressão não variam no espaço.

É fácil verificar que neste caso, em que tudo é uniforme e a velocidade nula, apenas temos soluções se a densidade ρ for nula, o que significa que não há solução estática com densidade e pressão finitas não nulas. Convém no entanto referir que mesmo assim (isto é, mesmo sem um completo rigor matemático), as informações qualitativas que podem ser obtidas a partir desta análise são essencialmente as mesmas que se obtêm com a resolução correcta do problema.

Esta dificuldade, que surge ao supôr $\boldsymbol{v} = 0$, é contudo ultrapassada quando consideramos o crescimento de perturbações num meio em expansão, tal como acontece no Universo. Neste caso o estado não perturbado corresponde a uma situação em que o fluido é co-móvel com a expansão do meio.

Definimos por isso um sistema de coordenadas co-móveis no qual o vector de posição de um ponto arbitrário é representado por $\boldsymbol{r}_{\rm cm}$. Este vector de posição está relacionado com o vector de posição $\boldsymbol{r}$ num sistema de coordenadas físicas, ou próprias, por:

$$\boldsymbol{r} = a(t)\,\boldsymbol{r}_{\rm cm} \tag{3.5}$$

onde $a(t)$ é o factor de escala cósmico.

Assim a velocidade própria $\boldsymbol{v}$, de um ponto arbitrário, pode escrever-se na forma:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{a}\,\boldsymbol{r}_{\rm cm} + a\,\dot{\boldsymbol{r}}_{\rm cm}\,. \tag{3.6}$$

Dado que $\dot{a}\,\boldsymbol{r}_{\rm cm}$ representa a velocidade de expansão de Hubble, o termo $a\,\dot{\boldsymbol{r}}_{\rm cm}$ representa a perturbação na velocidade relativamente ao movimento co-móvel, e é habitualmente designada por *velocidade peculiar*. Note-se que estas duas velocidades (a velocidade de expansão de Hubble $\dot{a}\,\boldsymbol{r}_{\rm cm}$, e a velocidade peculiar $a\,\dot{\boldsymbol{r}}_{\rm cm}$), estão referidas ao referêncial próprio.

No sistema co-móvel a velocidade de Hubble será naturalmente nula enquanto que a velocidade peculiar será dada por

$$\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{r}}_{\rm cm}\,. \tag{3.7}$$

Considerando que as perturbações de densidade são função do tempo e da posição e são de pequena amplitude (perturbações lineares ou de primeira ordem), escrevemos a densidade ρ na seguinte forma:

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \rho_0(t) + \delta\rho(\boldsymbol{r},t), \tag{3.8}$$

onde $\delta\rho \equiv \delta\rho(\boldsymbol{r},t)$ satisfaz a seguinte condição:

$$\delta\rho \ll \rho_0 \tag{3.9}$$

É contudo mais usual utilizar em vez da perturbação de densidade $\delta\rho$, uma outra variável, que habitualmente se designa por *contraste de densidade,* que representaremos por $\Delta \equiv \Delta(\boldsymbol{r},t)$ e é definida por:

$$\Delta \equiv \Delta(\boldsymbol{r},t) = \frac{\rho(\boldsymbol{r},t) - \rho_0(t)}{\rho_0(t)} \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \tag{3.10}$$

Assim a equação (3.8) pode ser escrita na forma:

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \rho_0(t)\,[1 + \Delta(\boldsymbol{r},t)] \tag{3.11}$$

onde ρ_0 representa o valor não perturbado da densidade. Das equações (3.9) e (3.10) resulta imediatamente que $\Delta \ll 1$.

Para as restantes variáveis dinâmicas, $\boldsymbol{v}$, p e Φ escrevemos expressões equivalentes, isto é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v} \\ p &= p_0 + \delta p \\ \Phi &= \Phi_0 + \delta\Phi \end{aligned} \tag{3.12}$$

Assim, perturbando linearmente as equações (3.1) – (3.3), é possível obter a seguinte equação diferencial de segunda ordem para o contraste de densidade (Peebles 1980; Longair 1989):

$$\ddot{\Delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta} = \frac{1}{\rho_0 a^2}\nabla^2_{\mathrm{cm}}\delta p + 4\pi G\delta\rho \tag{3.13}$$

onde ∇_{cm} é o operador gradiente em coordenadas co-móveis.

Considerando que as flutuações são adiabáticas, as perturbações na pressão e na densidade estão relacionadas através da velocidade do som adiabática c_s, da forma seguinte:

$$c_s = \left(\frac{\delta p}{\delta\rho}\right)^{1/2}. \tag{3.14}$$

Substituindo então na equação anterior δp por $c_s^2\,\delta\rho$, obtemos:

$$\ddot{\Delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta} = \frac{c_s^2}{\rho_0 a^2}\nabla_{\rm cm}^2\delta\rho + 4\pi G\delta\rho. \tag{3.15}$$

Uma vez que estamos a considerar um meio espacialmente homogéneo, é de esperar que a solução geral da equação (3.15) seja uma combinação linear de soluções do tipo de onda plana, (ver por exemplo Weinberg 1972 ou Longair 1989). Dito de outro modo consideramos que as perturbações são funções de quadrado integrável nas variáveis espaciais e por isso podem ser desenvolvidas em integral de Fourier nessas variáveis.

Assim, definimos o par de transformadas de Fourier para o contraste de densidade Δ (Zel'dovich & Novikov 1983; Longair 1989):

$$\Delta(\boldsymbol{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int \Delta_k\, e^{i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d^3k\,, \tag{3.16}$$

onde Δ_k é dado por

$$\Delta_k = \frac{1}{V}\int \Delta(\boldsymbol{r})\, e^{-i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d^3\boldsymbol{r}, \tag{3.17}$$

onde V é o volume total ocupado pela região perturbada, $\boldsymbol{k}$ é o vector de onda da perturbação com $k = |\boldsymbol{k}|$ e $i = \sqrt{-1}$.

Devido ao carácter linear do problema, enquanto a amplitude das perturbações for suficientemente pequena ($\Delta \ll 1$), as perturbações evoluem independentemente (Zel'dovich & Novikov 1983), e por isso na equação (3.16) é suficiente considerar apenas uma das componentes do desenvolvimento de Fourier.

Assim, da equação (3.15) obtém-se para o contraste de densidade de uma perturbação com número de onda co-móvel arbitrário ($k_{\rm cm}$), a seguinte equação:

$$\ddot{\Delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta}_k - \left(4\pi G\rho_0 - \frac{c_s^2 k_{\rm cm}^2}{a^2}\right)\Delta_k = 0 \tag{3.18}$$

O termo entre parêntesis nesta equação representa a competição que se estabelece na região perturbada, entre a força gravitacional atractiva representada por $4\pi G\rho_0$, e as forças de pressão repulsivas representadas por $c_s^2 k_{\rm cm}^2/a^2$.

3.3 O critério de instabilidade de Jeans

No que diz respeito ao processo de formação de estruturas é muitas vezes mais importante conhecer os regimes estáveis e instáveis do sistema gravitacional perturbado, do que o conhecimento detalhado da evolução temporal das perturbações.

Por isso é fundamental o estabelecimento de um critério de instabilidade que nos possa fornecer informações que permitam concluir se nas regiões perturbadas vai ou não ocorrer colapso gravitacional efectivo, isto é, que possa conduzir à formação de estruturas.

3.3.1 Caso de um meio estático

O critério (clássico) de instabilidade de Jeans, isto é, aquele que resulta quando consideramos que o meio não perturbado é um meio estático, obtém-se da equação (3.18) considerando que $\dot{a} = 0$, o que corresponde a desprezar nessa equação o termo devido à expansão do Universo $(\dot{a}/a)$.

Assim para ondas com frequência ω e com número de onda k, da forma

$$\Delta = \Delta_0 \, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{3.19}$$

a relação de dispersão que se obtém da equação (3.18), fazendo $\dot{a} = 0$, é dada por (Weinberg 1972; Zel'dovich & Novikov 1983):

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \tag{3.20}$$

A partir desta relação de dispersão facilmente se conclui que no que diz respeito ao comportamento do sistema gravitacional, há dois regimes distintos de acordo com o sinal de ω^2. Assim:

- Se $\omega^2 > 0$ tem-se $c_s^2 k^2 > 4\pi G \rho_0$ e em consequência o gradiente de pressão interna é suficiente para suportar o efeito da gravitação e portanto o sistema é estável (no sentido de que não colapsa). As perturbações de densidade comportam-se como ondas acústicas de amplitude constante Δ_0 e comprimento de onda $l = 2\pi/k$, sendo a frequência dada por $\omega = \pm(c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0)^{1/2}$.

- Se $\omega^2 < 0$ concluimos que os valores de ω são imaginários puros conjugados. Pela equação (3.19) podemos ainda concluir que a evolução das perturbações passa a ser descrita por um modo de decaimento e um modo de crescimento (modo de colapso) exponencial. Não há modos acústicos neste regime e portanto as oscilações no sistema deixam de existir.

  Imediatamente se verifica portanto que o sistema é estável apenas para perturbações cujos comprimentos de onda l não excedam o valor crítico l_J que é dado por

$$l_J = c_s \left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{1/2}, \tag{3.21}$$

e que é designado por *comprimento de Jeans.*

A interpretação física desta situação é simples: sendo $\omega^2 < 0$ obtemos $c_s^2 k^2 < 4\pi G\rho_0$ (ou seja $l > l_J$), de onde se pode concluir que os efeitos gravitacionais se conseguem sobrepôr aos efeitos de pressão. O sistema torna-se então gravitacionalmente instável e colapsa.

Na verdade o modo de decaimento também se encontra presente para estas escalas, mas devido à existência do modo de colapso, o modo de decaimento sendo transiente não tem influência determinante na evolução temporal das perturbações e portanto não impede o processo de colapso.

Neste caso a solução pode escrever-se na forma

$$\Delta = \Delta_0 \, e^{\frac{1}{\tau}t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{3.22}$$

onde $\tau = -(i\omega)^{-1}$ é a taxa de crescimento das perturbações e pode ser escrita em função do comprimento de onda na forma:

$$\tau = \pm \left[4\pi G\rho_0 \left(1 - \frac{l_J^2}{l^2}\right)\right]^{-1/2}. \tag{3.23}$$

Daqui se conclui que para perturbações com comprimentos de onda muito maiores que o comprimento de onda de Jeans a taxa de crescimento destas perturbações, o chamado *tempo característico de colapso,* (tempo gasto pela perturbação de densidade para crescer de um factor igual a e), é dado por

$$\tau_c \sim (G\rho_0)^{-1/2}. \tag{3.24}$$

Notar que o comprimento de Jeans é da mesma ordem de grandeza da distância percorrida por uma onda acústica durante um intervalo de tempo igual ao tempo característico de colapso τ_c.

Resumindo podemos dizer que no primeiro caso temos dois modos acústicos (caso estável), enquanto que no segundo temos um modo estável e um modo instável o que naturalmente conduz a uma situação de instabilidade no sistema dado que o modo estável é

transiente. É a existência deste modo instável que permite o colapso das regiões perturbadas com escalas superiores à escala de Jeans, sendo a formação de estruturas gravitacionalmente ligadas a consequência natural desse processo de colapso.

3.3.2 Caso de um meio em expansão

Se tivermos em conta a expansão do Universo teremos que estudar o comportamento do sistema gravitacional através da análise da solução da equação (3.18) na sua forma completa, isto é, considerando que $\dot{a} \neq 0$.

Convém pois conhecer a dependência temporal do termo $\dot{a}/a$ e da densidade ρ. Para isso vamos considerar que essa dependência é a mesma que existe no período dominado pela matéria num modelo de Universo plano (constante de curvatura $K = 0$). Esta aproximação é válida se nos restringirmos a fases da evolução do Universo em que $a(t) \ll a_0$, pois neste caso podemos na equação (2.6) do capítulo anterior, desprezar o valor de K relativamente a $\dot{a}$ e $8\pi G\rho a^2/3$. Isto é, mesmo que actualmente $K = \pm 1$. sabemos que em épocas recuadas, como por exemplo na época da recombinação, tanto $\dot{a}$ como $8\pi G\rho a^2/3$ eram muito maiores que 1, (Weinberg 1972, Longair 1989).

Nestas condições o termo devido à expansão na equação (3.18), ou seja o parametro de Hubble $\dot{a}/a$, é dado em função do tempo cósmico por, (ver a equação (2.15) do capítulo anterior):

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}, \tag{3.25}$$

e a densidade, que é a densidade crítica, é dada por (ver a equação (2.19) do capítulo anterior):

$$\rho_c = \frac{1}{6\pi G t^2}. \tag{3.26}$$

Falta apenas conhecer a dependência temporal do número de onda k e da velocidade do som c_s para que os coeficientes da equação (3.18) fiquem todos expressos em função do tempo cósmico t.

Quanto ao número de onda sabemos que $k \propto l^{-1} \propto a^{-1}$. Por outro lado na era dominada pela matéria e em particular depois da recombinação (isto é, quando as perturbações no material bariónico podem começar a crescer), vimos já que $a \propto t^{2/3}$. Assim podemos escrever as relações seguintes:

$$k = \frac{k_{\rm cm}}{a} = \frac{k_{\rm cm} t_0^{2/3}}{t^{2/3}} = \frac{k^*}{t^{2/3}} \,, \tag{3.27}$$

onde $k_{\rm cm}$ é o número de onda co-móvel normalizado para a época actual t_0. Para a obtenção destas relações assumiu-se que $a_0 = 1$ e definiu-se a constante $k^* = k_{\rm cm} t_0^{2/3}$.

Quanto à velocidade do som c_s, o seu valor sofre uma variação bastante acentuada na época da recombinação devido ao desacoplamento que se verifica nesta época entre os bariões e a radiação. Contudo, uma vez que estamos a considerar transformações adiabáticas, podemos supôr que a equação de estado é, quer antes quer depois da recombinação, da forma:

$$p \propto \rho^{\gamma} \,, \tag{3.28}$$

onde γ é o coeficiente adiabático do fluido, sendo igual a 4/3 no caso relativista ou 5/3 quando o fluido considerado é não relativista.

Assim a velocidade do som adiabática, ver equação (3.14), é dada por

$$c_s = \left[\alpha \gamma \rho^{(\gamma-1)}\right]^{1/2} \,, \tag{3.29}$$

onde α é uma constante.

Atendendo a que $\rho \propto a^{-3} \propto t^{-2}$ obtemos a dependência temporal da velocidade do som que pode ser escrita na forma:

$$c_s = \frac{c_{si}}{t^{(\gamma-1)}} \,, \tag{3.30}$$

onde c_{si} é uma constante. Esta constante é, naturalmente, diferente antes e depois da recombinação, isto é, antes e depois do desacoplamento entre os bariões e a radiação. Convém notar que se estivermos a considerar um fluido não bariónico a recombinação não provoca qualquer alteração no valor da velocidade do som para esse fluido.

Substituindo as variáveis envolvidas nos coeficientes da equação (3.18) pelas respectivas funções do tempo dadas pelas expressões (3.25), (3.26), (3.27) e (3.30), obtém-se:

$$\ddot{\Delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\Delta}_k - \left[\frac{2}{3}\frac{\Omega}{t^2} - \frac{(c_{si}\,k^*)^2}{t^{\nu}}\right]\Delta_k = 0 \tag{3.31}$$

onde o parâmetro ν é função do coeficiente adiabático γ, sendo dado por:

$$\nu = 2\left(\gamma - \frac{1}{3}\right) \tag{3.32}$$

e Ω é como habitualmente o parâmetro de densidade que supomos ter um valor próximo de 1.

Por uma questão de simplicidade de notação, no que se segue escreveremos a componente de Fourier Δ_k, sem o índice respectivo.

A equação diferencial de segunda ordem (3.31) pode ser transformada num sistema dinâmico de duas equações diferenciais de primeira ordem, isto é, consideramos que

$$\begin{cases} x_1 = \Delta \\ \\ x_2 = \dot{\Delta} \end{cases} \tag{3.33}$$

e obtemos o sistema seguinte:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x} \tag{3.34}$$

onde $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2)$ e $\boldsymbol{A}$(t) é a matriz dos coeficientes do sistema que pode ser escrita na forma:

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ \frac{2}{3}\frac{\Omega}{t^2} - \frac{k^{*2}c_{si}^2}{t^\nu} & -\frac{4}{3t} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Podemos obter informações acerca do comportamento qualitativo do sistema dinâmico (3.34) determinando os seus pontos críticos, que são dados pelas soluções da equação $\det(\boldsymbol{A}) = 0$, e analisando os elementos próprios, (valores próprios e respectivos vectores próprios associados), da matriz $\boldsymbol{A}$.

Assim, obtemos 2 pontos críticos: um é a origem, isto é, $x_1 = x_2 = 0$ e o outro é dependente do número de onda da perturbação. Na verdade, se

$$k^{*2} = \frac{2}{3}\frac{\Omega}{c_{si}^2}\,t^{\nu-2} \tag{3.36}$$

qualquer ponto da forma $(x_1, 0)$ (onde x_1 pode tomar qualquer valor), é um ponto crítico.

Uma vez que estamos a analisar o regime linear da evolução das perturbações para uma escala arbitrária, o que mais nos interessa conhecer é o comportamento do sistema para pontos ligeiramente afastados do ponto crítico que é a origem.

Os valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}$ são determinados calculando as raízes do seu polinómio característico, isto é, resolvendo a equação:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{3.37}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade.

Assim, os dois valores próprios λ_1 e λ_2 que se obtêm da equação anterior, podem escrever-se na forma:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3t} + \frac{1}{3t} f \tag{3.38}$$

e

$$\lambda_2 = -\frac{2}{3t} - \frac{1}{3t} f \tag{3.39}$$

onde f é a seguinte função de t:

$$f = \sqrt{4 + 6\Omega - 9k^{*2} c_{si}^2 t^{(2-\nu)}} \tag{3.40}$$

Facilmente se conclui a partir das expressões (3.38) e (3.39) que se o radicando da expressão de $f(k^*, t)$ for negativo, os valores próprios λ_1 e λ_2 são complexos conjugados. Esta condição é verificada para $k^* > k_1^*$, onde k_1^* é a seguinte função do tempo:

$$k_1^* = \left[\frac{2}{3c_{si}^2} \left(\frac{2}{3} + \Omega \right) t^{(\nu-2)} \right]^{1/2}. \tag{3.41}$$

Para além disso verifica-se ainda que λ_1 se anula para $k^* = k_2^*$, onde k_2^* também é função do tempo e é dada por:

$$k_2^* = \left(\frac{2}{3} \frac{\Omega}{c_{si}^2} t^{(\nu-2)} \right)^{1/2}. \tag{3.42}$$

Destas duas últimas equações facilmente se conclui que para qualquer instante t e para qualquer valor de γ se tem que $k_1^* > k_2^*$. De uma forma explícita obtemos:

$$k_1^{*2} = k_2^{*2} + \frac{4}{9c_{si}^2} t^{(\nu-2)}, \tag{3.43}$$

e portanto o zero de λ_1 ocorre no regime real deste valor próprio.

Quanto ao valor próprio λ_2 verifica-se que não tem zeros e que a sua parte real é sempre negativa. Estes resultados relativos ao comportamento dos dois valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}$ estão representados na Tabela 3.1.

Podemos assim distinguir dois regimes distintos:

Tabela 3.1: Sinais das partes real ($\Re$) e imaginária ($\Im$) dos valores próprios da matriz A em função do parâmetro k^*. Ver no texto a discussão respectiva.

		$k^*=0$	$0<k^*<k_2^*$	$k^*=k_2^*$	$k_2^*<k^*<k_1^*$	$k^*=k_1^*$	$k^*>k_1^*$
λ_1	$\Re$	+	+	0	−	−	−
	$\Im$	0	0	0	0	0	+
λ_2	$\Re$	−	−	−	−	−	−
	$\Im$	0	0	0	0	0	−

- Para $k^* > k_2^*$ nenhum dos valores próprios tem parte real positiva, por isso o sistema é estável, tendo, no entanto, dois tipos de comportamento distintos. Se $k^* > k_1^*$ os dois valores próprios são complexos conjugados com parte real negativa e o sistema apresenta oscilações amortecidas. No caso em que $k^* < k^* < k_1^*$ os dois valores próprios são reais e negativos e portanto as perturbações vão decair sem contudo oscilarem.

  Fisicamente podemos interpretar a escala associada a k_1^* como sendo aquela a partir da qual a expansão do meio vai impedir as oscilações do modo próprio associado a λ_1, apesar de o sistema não se encontrar ainda no seu regime instável.

  Weinberg (1972) mostrou a existência desta escala para o caso de um fluido (num meio em expansão) com coeficiente adiabático $\gamma = 4/3$. No entanto, como se pode ver pela expressão (3.43), ela existe para qualquer valor de γ e portanto a sua existência não é consequência do valor do coeficiente adiabático do fluido considerado, mas sim devida ao efeito da expansão no comportamento das perturbações.

- Para $k^* < k_2^*$ temos dois modos próprios com comportamentos distintos. O modo próprio associado ao valor próprio real e negativo, λ_2 é um modo de decaimento e portanto estável. O modo associado ao valor próprio real e positivo, λ_1, é um modo de crescimento e portanto instável. Este regime ($k^* < k_2^*$), conduz portanto ao crescimento das perturbações já que o modo estável não tem influência determinante na evolução temporal do sistema.

A escala que separa os dois regimes (estável e instável) num determinado instante é a

escala de Jeans para o fluido (nesse instante) $l_J(t)$, a qual é obtida conhecendo o valor de k_2^* e utilizando as relações escritas em (3.27). Assim

$$l_J(t) = \frac{2\pi}{k_J(t)} = 2\pi \frac{t^{2/3}}{k_2^*} , \tag{3.44}$$

onde $k_J(t)$ é o número de onda (próprio) de Jeans no instante t.

Os valores de γ que mais interessa analisar são 4/3 e 5/3. No caso de um Universo com uma densidade actual relativamente elevada, isto é, com um parâmetro de densidade para a época actual $\Omega_0 \sim 1$, a época de igualdade entre matéria e radiação ocorre antes do desacoplamento entre bariões e radiação e temos então um período, anterior à recombinação, relativamente alargado e em que a densidade de energia total do Universo é dominada por material não relativista, sendo no entanto a pressão dominada pela radiação (ver por exemplo Weinberg 1972). Neste caso os bariões comportam-se como um fluido não relativista com coeficiente adiabático $\gamma = 4/3$, e a equação (3.31) fica:

$$\ddot{\Delta} + \frac{4}{3t}\dot{\Delta} - \frac{1}{t^2}\left[\frac{2}{3}\Omega - (c_{si}\,k^*)^2\right]\Delta = 0 \tag{3.45}$$

É fácil verificar que a dependência temporal dos dois modos Δ_1 e Δ_2 da solução geral desta equação $\Delta = a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2$, onde a_1 e a_2 são constantes, é da forma:

$$\Delta_1 = t^{n_1} \tag{3.46}$$

e

$$\Delta_2 = t^{n_2} , \tag{3.47}$$

onde, considerando um Modelo de Einstein-de Sitter ($\Omega = 1$) se tem:

$$n_1 = -\frac{1}{6} + \left[\frac{25}{36} - (c_{si}\,k^*)^2\right]^{1/2} \tag{3.48}$$

e

$$n_2 = -\frac{1}{6} - \left[\frac{25}{36} - (c_{si}\,k^*)^2\right]^{1/2} . \tag{3.49}$$

Analisando estas duas expressões verifica-se que n_2 é sempre negativo, enquanto que para determinados valores do parâmetro k^* obtem-se um valor de n_1 positivo e portanto Δ_1 será nesses casos um modo crescente ou de colapso. É a existência deste modo que garante o crescimento das perturbações que podem dar origem à formação de estruturas. Pode ainda

verificar-se que no limite de grandes comprimentos de onda (isto é, $k^* \to 0$) o contraste de densidade cresce com $t^{2/3}$.

A condição de instabilidade pode então escrever-se neste caso como $n_1 > 0$. Atendendo às definições de c_{si} e de k^* é fácil mostrar que esta condição é equivalente à condição de instabilidade "clásssica" de Jeans, que como vimos se escreve $4\pi G\rho > c_s^2 k^2$ (Weinberg 1972).

Na época que se segue à recombinação a densidade de energia do Universo é dominada por material não relativista que se encontra desacoplado da radiação e o coeficiente adiabático do fluido cósmico (bariónico) é então $\gamma = 5/3$.

Neste caso, da equação (3.31) obtemos:

$$\ddot{\Delta} + \frac{4}{3t}\dot{\Delta} - \left[\frac{2}{3}\frac{\Omega}{t^2} - \frac{(c_{si}\,k^*)^2}{t^{8/3}}\right]\Delta = 0\,. \tag{3.50}$$

A solução geral desta equação pode escrever-se como combinação linear das duas soluções seguintes (Weinberg 1972):

$$\Delta_1 \propto \frac{1}{t^{1/6}}\,J_{-5/2}\left(3\,\frac{c_{si}\,k^*}{t^{1/3}}\right) \tag{3.51}$$

e

$$\Delta_2 \propto \frac{1}{t^{1/6}}\,J_{+5/2}\left(3\,\frac{c_{si}\,k^*}{t^{1/3}}\right) \tag{3.52}$$

onde J são funções de Bessel da primeira espécie (Weinberg 1972; Gradshteyn & Ryzhik 1980).

Estas funções de Bessel apresentam oscilações amortecidas para $t \ll (c_{si}\,k^*)^3$, (que corresponde a considerar o argumento $c_{si}\,k^*/t^{1/3} \gg 1$), enquanto que para $t \gg (c_{si}\,k^*)^3$ (isto é $c_{si}\,k^*/t^{1/3} \ll 1$), as soluções particulares Δ_1 e Δ_2 têm o comportamento seguinte:

$$\Delta_1 \propto t^{2/3} \tag{3.53}$$

e

$$\Delta_2 \propto \frac{1}{t}\,. \tag{3.54}$$

Assim, neste caso a condição de instabilidade pode escrever-se na forma $t > (c_{si}\,k^*)^3$ o que num modelo de Einstein-de Sitter corresponde a $6\pi G\rho > c_s^2 k^2$. Como se verifica, a diferença relativamente ao caso sem expansão não é significativa, já que nesse caso tinhamos $4\pi G\rho > c_s^2 k^2$.

3.3.3 O critério de Jeans e a formação de estruturas

O desacoplamento entre bariões e radiação acontece aproximadamente na época da recombinação e por isso se considera que as perturbaçãos na componente bariónica só a partir desta época podem começar a crecer.

Este desacoplamento altera a equação de estado da componente bariónica e portanto a sua velocidade do som é também modificada significativamente. Por isso convém fazer uma estimativa da escala de Jeans, que se encontra definida pela equação (3.21), para os períodos imediatamente antes e imediatamente após a recombinação. Esta escala pode ser estimada conhecendo o valor da densidade e das velocidades do som para os instantes considerados. Verifica-se que (ver por exemplo Weinberg 1972), a escala de Jeans imediatamente antes da recombinação é da ordem de grandeza da dos super-enxames galácticos ($\sim 10^{16-17}\mathrm{M}_{\odot}$) e imediatamente após aquela época, baixa para a escala dos enxames globulares ($\sim 10^{5-6}\mathrm{M}_{\odot}$). Este salto na escala gravitacionalmente instável, tem como resultado o facto de até hoje não haver uma explicação suficientemente convincente para a formação de estruturas com as escalas das galáxias ($\sim 10^{8-12}\mathrm{M}_{\odot}$), que emboram possam variar de algumas ordens de grandeza, se situam longe dos valores críticos da escala de Jeans.

Por outro lado podemos verificar que a dependência temporal do contraste de densidade expressa pelas relações (3.46), (3.47), (3.51) e (3.52) é a diferença fundamental relativamente ao caso sem expansão. Isto é, se o fluido no seu estado não perturbado for co-móvel com a expansão do meio, as perturbações crescem apenas com uma potência do tempo como acabamos de ver, enquanto que se o estado não perturbado do fluido for estático o crescimento das perturbações é exponencial com o tempo.

Esta "pequena" diferença tem contudo implicações importantes. Na verdade, crescendo durante o regime linear apenas com uma potência do tempo ($< t^{2/3}$), como resultado da expansão do Universo, as perturbações crescem muito lentamente.

No entanto estruturas como as galáxias, já há muito que não se encontram no regime linear da sua evolução. Isto é, para que as estruturas galácticas tivessem atingido o regime não linear antes da época actual, ter-se-iam que verificar (na época da recombinação, que é aquela a partir da qual se considera que as perturbações bariónicas podem começar a crescer), contrastes de densidade nos bariões bastante mais elevados que os limites superiores impostos pelas observações das flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo que são da ordem de $\Delta \sim 10^{-5}$ (dependendo ligeiramente da escala).

Com um crescimento na melhor das hipóteses $\Delta \propto t^{2/3}$, verifica-se que aquele valor

(10^{-5}), não é suficiente para se atingirem os regimes não lineares até à época actual, ao contrário do que se constata por exemplo no caso das galáxias.

Concluimos assim que num Universo essencialmente bariónico (considerando correcto o modelo para a evolução de perturbações adiabáticas), é muito difícil conciliar a formação de estruturas (em particular estruturas galácticas), com os valores observados para as flutuações na temperatura da radiação cósmica de fundo de micro-ondas.

Foi então necessário elaborar modelos que permitissem ultrapassar este problema. Veremos igualmente no próximo capítulo que a hipótese da existência de partículas materiais que apenas manifestam a sua presença através da interacção gravitacional (a *matéria escura*), pode resolver este e outros problemas relacionados com a formação de estruturas.

4

A formação de estruturas na presença de matéria escura

Como é o lugar
quando ninguém passa por ele?
Existem as coisas sem ser vistas?

(C. Drummond de Andrade)

4.1 Introdução

Neste capítulo, que de certa forma servirá de introdução à segunda parte desta tese, na qual apresentamos os resultados originais por nós obtidos, faremos uma breve introdução ao problema da formação de estruturas num Universo constituido por duas componentes materiais: uma bariónica e outra de matéria escura.

As razões da aceitação generalizada dos modelos de matéria escura são várias, das quais apenas citaremos as que se nos afiguram mais determinantes.

O mecanismo proposto por Jeans para a formação de estuturas materiais (que apresentámos no capítulo anterior), tem sido desde sempre amplamente utilizado como um critério de estabilidade em muitos modelos de formação galáctica. No entanto na época da recombinação a escala crítica implicada pelo critério de Jeans não está de modo nenhum relacionada com a escala galáctica (Weinberg 1972, Longair 1989).

Com efeito, como referido no capítulo anterior, imediatamente antes da recombinação a massa crítica de Jeans $M_{\rm J}^{\rm ar}$, é:

$$M_{\rm J}^{\rm ar} \sim 10^{16-17}{\rm M}_{\odot} \tag{4.1}$$

o que corresponde à massa de grandes enxames de galáxias ou mesmo de super-enxames, enquanto que imediatamente após a época da recombinação a massa de Jeans baixa drásticamente mais de 10 ordens de grandeza para o valor

$$M_{\rm J}^{\rm dr} \sim 10^{5-6}{\rm M}_{\odot}\,, \tag{4.2}$$

valor este se encontra relacionado com a massa de enxames globulares, (Weinberg 1972, Zel'dovich & Novikov 1983).

Como se constata existe uma grande discrepância entre o valor das massas galácticas $\sim 10^{8-12}{\rm M}_{\odot}$ e as massas críticas de Jeans imediatamente antes e imediatamente após

a recombinação. Convém referir ainda que estes valores para a massa de Jeans antes e depois da época da recombinação são obtidos supondo que o fluido material do Universo é constituido apenas por uma componente bariónica.

Como veremos nos capítulos seguintes, este problema pode ser resolvido considerando que o Universo é gravitacionalmente dominado por determinado tipo matéria escura.

Historicamente, a necessidade de matéria escura no Universo para explicar certos dados de observação remonta ao início dos anos 30. De facto sabe-se desde o princípio daquela década que a matéria luminosa observada na nossa galáxia (Oort 1932), mas sobretudo em enxames de galáxias (Zwicky 1933), não é suficiente para manter estas estruturas gravitacionalmente ligadas. As elevadas dispersões de velocidades observadas em enxames galácticos não é compatível com a distribuição de massa observada[1].

Para além desta discrepância há muito conhecida para o caso dos enxames, também para a escala galáctica se começou a confirmar a partir da década de 70, a existência do mesmo problema (Bahcall 1977; Faber & Gallagher 1979; Trimble 1987). Com efeito começou a ser possível determinar as velocidades de rotação das galáxias espirais até regiões bastante afastadas da região central (mesmo muito para além dos seus limites visíveis), constatando-se que ao contrário do que seria de esperar a velocidade de rotação a partir de determinado valor do raio (e até aos limites em que é possível fazer as observações), mantém um valor aproximadamente constante (Rubin et al. 1980, 1982, 1985; Bosma 1981a, 1981b).

A constatação da existência deste problema estendeu-se mais tarde também às galáxias elípticas. A confirmação da discrepância de massa para o caso destas galáxias ficou a dever-se à maior precisão com que passou a ser possível obter a dispersão de velocidades estelares, mas principalmente devido às mais recentes observações de raios X nestas galáxias (ver por exemplo Forman et al. 1985; Bertin et al. 1993). Para o caso de grupos compactos e de enxames galácticos ver também Koyama et al. 1991; Watt et al. 1992; Ponman & Bertram 1993; Mulchaey et al. 1993; Henry et al. 1993.

Todas estas constatações conduziram a que se concluisse que teria que existir material para além daquele que era observado directamente, para ser possível explicar a dinâmica observada. Uma das soluções propostas para resolver este problema da discrepância entre a teoria e a observação foi conjecturar a existência de matéria escura não bariónica. Em particular, todos estes factos conduziram à hipótese da existência de halos de matéria escura a envolver as regiões luminosas das galáxias.

[1] Este facto foi durante muito tempo identificado na literatura como o problema da *missing mass*, quando na realidade o que faltava era a luminosidade.

Passou então a admitir-se a existência de partículas massivas não bariónicas que não emitem qualquer tipo de radiação electromagnética detectável e que apenas se manifestam através da sua interacção gravitacional com os bariões.

Para além de resolver o problema da discrepância de massa, a hipóptese da matéria escura veio ainda resolver um outro problema não menos importante: o da formação de estruturas bariónicas no Universo. De facto admitindo a existência de matéria escura não bariónica, cujas perturbações podem começar a crescer antes da recombinação, pode resolver-se (como adiante veremos), o problema da formação de estruturas bariónicas com elevados contrastes de densidade na época actual, o que não é possível num Universo bariónico, pelas razões referidas no final do capítulo anterior. Assim, é perfeitamente razoável supôr que a contribuição dominante da matéria escura não bariónica poderá resolver o problema da formação de estruturas cosmológicas em geral e o da formação galáctica em particular.

Um outro argumento em favor de um Universo dominado por matéria escura surge com os modelos inflacionários para o Universo primitivo (Guth 1981; Linde 1982; Albrecht & Steinhardt 1982, ver também Kazanas 1980; Sato 1981; Hawking et al. 1982; Guth & Weinberg 1983). Nestes modelos o valor do parâmetro de densidade $\Omega \sim 1$ é uma consequência natural da própria inflação. Conhecendo os limites impostos (pela nucleosíntese primordial do modelo padrão) à quantidade de material bariónico existente no Universo, que são dados por (Olive et al. 1990; Walker et al. 1991),

$$\frac{0.010}{h^2} \leq \Omega_B \leq \frac{0.015}{h^2} \tag{4.3}$$

facilmente se conclui que se os modelos inflacionários são correctos, a matéria escura não bariónica é aquela que é gravitacionalmente dominante.

Nesta equação Ω_B é o parâmetro de densidade na componente bariónica e h representa a constante de Hubble em unidades de $100\,\mathrm{Km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$, isto é:

$$h = \frac{H_0}{100\,\mathrm{Km\,s^{-1}Mpc^{-1}}}\,, \tag{4.4}$$

Usualmente considera-se que h pertence ao seguinte intervalo (Jacoby et al. 1992; Fukugita et al. 1993; Peebles 1993; Sandage et al. 1994; Saha et al. 1994; Pierce et al. 1994):

$$0.5 \leq h \leq 1 \tag{4.5}$$

o que é equivalente a escrever a condição seguinte para a constante de Hubble:

$$50\,\mathrm{Km\ s^{-1}\,Mpc^{-1}} \leq \mathrm{H_0} \leq 100\,\mathrm{Km\ s^{-1}\,Mpc^{-1}}. \tag{4.6}$$

4.2 Perturbações num meio com duas componentes

Todos os modelos que partem da hipótese de que o Universo é dominado por matéria escura[2] consideram que ela é constituida por partículas massivas que apenas interagem muito fracamente[3] e que por isso tanto o material bariónico como a radiação se encontram completamente desacoplados da matéria escura, excepto através da sua influência gravitacional mútua.

Em virtude deste facto, e considerando apenas perturbações com grandes comprimentos de onda (isto é, perturbações tais que a sua pressão interna possa ser desprezada), as equações diferenciais para o contraste de densidade nas componentes escura e bariónica podem escrever-se respectivamente na forma:[4]

$$\ddot{\Delta}_D + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta}_D = 4\pi G\left(\rho_D\Delta_D + \rho_B\Delta_B\right) \tag{4.7}$$

e

$$\ddot{\Delta}_B + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta}_B = 4\pi G\left(\rho_D\Delta_D + \rho_B\Delta_B\right) \tag{4.8}$$

onde os índices D e B dizem respeito às componentes de matéria escura e bariónica respectivamente.

Se considerarmos (como vulgarmente é feito), que o parâmetro de densidade para a componente bariónica Ω_B, se pode desprezar relativamente ao parâmetro de densidade da matéria escura Ω_D (que de acordo com a condição (4.3) se supõe ser ~ 1), a equação (4.7) fica reduzida a:

$$\ddot{\Delta}_D + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta}_D = 4\pi G\rho_D\Delta_D \tag{4.9}$$

que é equivalente à equação (3.18) do capítulo anterior no caso em que se pode desprezar a pressão interna do fluido.

[2]No que se segue, sempre que utilizarmos a designação de matéria escura subentende-se que se trata de matéria escura não bariónica, salvo indicação explícita em contrário.

[3]Na literatura inglesa utiliza-se muitas vezes a designação WIMP (forma abreviada da expressão Weakly Interacting Massive Particle).

[4]A derivação destas equações é em tudo semelhante ao caso de apenas uma componente. Para uma derivação detalhada ver por exemplo Longair (1989), Peebles (1980) ou Padmanabhan (1993).

É importante aqui fazer um parêntesis para salientar que este tipo de análise correntemente utilizada (Bond & Szalay 1983; Longair 1989; Padmanabhan 1993), apesar de fornecer resultados correctos, é contudo bastante incompleta e é em particular a principal responsável pela não descoberta até agora da ressonância de formação de estruturas que será mencionada nos capítulos seguintes.

Regressando à equação anterior a sua solução instável Δ^+, é dada como vimos por:

$$\Delta_D^+ = \alpha\, a \propto t^{2/3}, \tag{4.10}$$

onde α é uma constante.

A equação (4.8) virá então escrita na forma seguinte:

$$\ddot{\Delta}_B + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta}_B = 4\pi G\rho_D \alpha\, a\,. \tag{4.11}$$

Uma vez que o modelo de Universo que estamos a utilizar é o de Einstein-de Sitter, atendendo à relação entre a variável t e a variável a, e utilizando a relação $3H_0^2 = 8\pi G\rho_D$ (ver Capítulo 2), esta equação escreve-se:

$$a^{3/2}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{d\Delta_B}{da}\right) + 2\frac{d\Delta_B}{da} = \frac{3}{2}\alpha \tag{4.12}$$

Pode verificar-se que

$$\Delta_B = \alpha\,(a - a_{\rm in}) \tag{4.13}$$

é uma solução da equação anterior, onde $a_{\rm in}$ é uma constante de integração.

Esta solução mostra que para a época em que $a = a_{\rm in}$ o contraste de densidade na componente bariónica é nulo.

Apesar de esta análise ser uma aproximação muito pouco rigorosa, que não tem em conta a discussão dos modos existentes no fluido constituido pelas duas componentes consideradas, podemos contudo ter uma ideia de como evolui uma perturbação na componente bariónica, sob a influência da perturbação na matéria escura, mesmo que na época em que $a = a_{\rm in}$ essa perturbação seja praticamente nula quando comparada com a perturbação na componente escura.

Para isso escrevemos a equação (4.13) em função do desvio para o vermelho z:

$$\Delta_B = \Delta_D\left(1 - \frac{z}{z_{\rm in}}\right) \tag{4.14}$$

onde $z_{\rm in}$ é o valor de z na época $a_{\rm in}$. De referir que ao derivar esta expressão utilizámos o facto de que $z_{\rm in} \gg 1$.

Como se pode verificar a amplitude da perturbação na componente bariónica cresce rapidamente com z, para um valor próximo do da perturbação na componente escura. Explicando melhor podemos dizer que mesmo que os bariões não estejam inicialmente perturbados na época $z_{\rm in}$, sentem a perturbação do campo gravitacional originada pela perturbação na matéria escura e em consequência disso surge a flutuação de densidade na componente bariónica. Depois de z ter variado apenas cerca de uma ordem de grandeza relativamente a $z_{\rm in}$, os contrastes de densidade nas duas componentes são já idênticos.

Este resultado, que tal como se referiu foi fobtido de uma forma pouco rigorosa, não deixa de ser importante. Vejamos porquê. Convém dizer antes de mais, que as estruturas com escalas inferiores às escalas dos super-enxames galácticos correspondem a perturbações de densidade que entraram no horizonte antes da recombinação.

Consideremos primeiro as perturbações bariónicas. A partir da época em que se dá a entrada destas perturbações no horizonte, se não houver processos dissipativos, elas mantêm aproximadamente a mesma amplitude até à época da recombinação. Isto é devido ao facto de até esta época a escala de Jeans para os bariões ser da mesma ordem de grandeza da escala do horizonte (devido ao acoplamento destes com a radiação), e portanto as perturbações a escalas inferiores encontram-se no regime acústico.

Quanto às perturbações na matéria escura suponhamos que elas entram no horizonte antes da época de transição entre as eras de domínio da radiação e da matéria. Nesse caso, uma vez que até essa época a radiação é a principal fonte de densidade de energia, essas perturbações mantêm igualmente uma amplitude aproximadamente constante. No entanto a partir dessa época, se as partículas de matéria escura forem não relativistas, as perturbações nesta componente podem começar a crescer sem que esse crescimento afecte significativamente os bariões, enquanto se verificar o acoplamento destes com a radiação.

Resumindo podemos concluir que as perturbações bariónicas são praticamente estabilizadas desde a sua entrada no horizonte e a recombinação, enquanto que as perturbações na matéria escura podem crescer durante o período que vai da época de igualdade entre matéria e radiação, que ocorre para um valor de $z = z_{eq}$, até à recombinação. Nesta época a razão entre os contraste de densidade nas duas componentes pode ser estimado a partir da equação (4.14), isto é:

$$\frac{\Delta_D}{\Delta_B} \sim \frac{z_{eq}}{z_{rec}} \tag{4.15}$$

onde z_{rec} é o desvio para o vermelho na época da recombinação.

Uma vez que, de acordo com o modelo cosmológico padrão, no Universo de Einstein-de Sitter se tem $z_{eq} \gg z_{rec}$, verificamos que na época da recombinação a amplitude das perturbações na matéria escura pode ser muito maior que a amplitude das perturbações na componente bariónica.

A partir da recombinação, como se verifica através da equação (4.14), a perturbação nos bariões cresce rapidamente para um valor próximo do da amplitude na componente escura. Assim, mesmo que as perturbações na componente bariónica sejam completamente apagadas devido a processo dissipativos anteriores à recombinação, a presença de flutuações na matéria escura assegura que as flutuações nos bariões são rapidamente regeneradas após aquela época.

Este resultado mostra claramente que considerar a formação e evolução de estruturas num Universo de pelo menos duas componentes dominado gravitacionalmente por matéria escura, é um caminho que convém seriamente explorar.

4.3 Modelos de matéria escura

A natureza da matéria escura que poderá eventualmente existir no Universo, continua contudo a ser uma das questões mais importantes ainda em aberto e um assunto de aceso debate e controvérsia. Os modelos fundamentais para a formação de estruturas num Universo dominado por partículas de matéria escura, distinguem-se precisamente pela natureza dessas partículas. Aqui apenas descreveremos sucintamente algumas das características mais importantes destes modelos. Para uma análise mais detalhada ver por exemplo Kolb & Turner (1990), Padmanabhan (1993) ou Peebles (1993).

Os modelos de matéria escura têm sido objecto de desenvolvimentos e ajustes diversos na tentativa de explicar convenientemente os resultados das observações actualmente disponíveis. De acordo com as velocidades térmicas das partículas que constituem a matéria escura existem basicamente dois tipos destes modelos e que são habitualmente designados por *Modelo de Matéria Escura Quente* e *Modelo de Matéria Escura Fria.* Assim temos que:

- Nos modelos de matéria escura quente a componente dominante é constituida por partículas com elevadas velocidades térmicas.

- Os modelos de matéria escura fria são fundamentalmente constituidos por partículas que possuem velocidades térmicas muito baixas.

É portanto de importância crucial o conhecimento da natureza da matéria escura que domina gravitacionalmente o Universo actual.

Uma vez que sabemos que os neutrinos existem, são eles, no caso de possuirem massa em repouso não nula, os candidatos mais naturais a constituintes da matéria escura no primeiro tipo de modelos (apesar de a sua massa permanecer desconhecida).

Os candidatos não bariónicos a constituintes da matéria escura fria são em grande número. Desde os axiões até às partículas supersimétricas e supermassivas previstas pelas Teorias de Grande Unificação.

De entre estes dois tipos de modelos os primeiros a serem desenvolvidos foram os de matéria escura quente. O papel de pioneirismo deste tipo de modelos ficou a dever-se ao facto de ter sido proposta a possibilidade teórica de os neutrinos possuirem massa em repouso não nula, (ver por exemplo Gribov & Pontecorvo 1969; Bilenky & Pontecorvo 1976, 1978). O interesse cresceu quando a essa possibilidade teórica foi dado algum suporte experimental, (Barger et al. 1980; Lyubimov et al. 1980; Reines, Sobel & Pasierb 1980).

Um dos mais fortes argumentos contra este tipo de modelos, foi desde sempre o de que não era possível formar estruturas a pequena escala, ou seja, à escala galáctica, caso sejam neutrinos leves as partículas gravitacionalmente dominantes.[5]

Sendo as galáxias os blocos fundamentais na construção do Universo, a validade da utilização destes modelos na formação de estruturas começou a ser posta seriamente em causa, e as críticas feitas aos modelos de matéria escura quente conduziu ao desenvolvimento de modelos que fossem capazes de formar estruturas a pequena escala (em particular galáxias). Surgem assim os modelos de matéria escura fria.

À medida que uma maior quantidade de dados de observação foram ficando disponíveis, e principalmente devido aos recentes resultados das observações do satélite COBE, (Smoot et al. 1992), começou a verificar-se que tanto um como outro dos modelos tinha vantagens mas também alguns problemas na explicação da formação de estruturas que abrangessem toda a gama de escalas observadas.

Isto é, enquanto que os modelos de matéria escura quente tinham problemas a pequenas escalas, com os modelos de matéria escura fria passa-se o inverso, isto é, têm dificuldades em explicar a formação das estruturas observadas às maiores escalas.

[5]Como veremos este argumento não está em nossa opinião completamente correcto. Mostraremos nos capítulos seguintes, que um estudo detalhado deste problema demonstra que isto de facto não é verdade.

Sobre este assunto há um grande número de trabalhos publicados. Aqui apenas citamos os que pensamos serem mais relevantes: Bond et al. 1980; Bond & Szalay 1983; Centrella et al. 1988; Maddox et al. 1990; Ostriker & Suto 1990; Zeng & White 1991; Cen & Ostriker 1992a,b; Moore et al. 1992; Fisher et al. 1993.

Em consequência destas constatações e numa tentativa de aproveitar as vantagens de cada um dos dois modelos, assistiu-se mais recentemente (embora a ideia remonte a meados da década de 80), a uma tendência de desenvolvimento de modelos (cada vez mais elaborados), que partem da hipótese de que a matéria escura presente no Universo é constituida por uma mistura de partículas escuras quentes e partículas escuras frias (ver por exemplo Fang et al. 1984 e Shafi & Stecker 1984, ou mais recentemente Schaefer et al. 1989; Holtzman 1989; Fang et al. 1990; Davis et al. 1992b; van Dalen & Schaefer 1992).

4.3.1 Matéria escura quente

Como dissemos, nos modelos de matéria escura quente as partículas candidatas são os neutrinos, dos quais sabemos existirem três tipos associados às três famílias de leptões conhecidas. Assim temos: o neutrino associado ao electrão ν_e, o neutrino associado ao muão ν_μ e o neutrino associado à partícula tau ν_τ.

É claro que estes modelos assumem que a massa de pelo menos um dos tipos de neutrinos é não nula. No entanto, à luz dos conhecimentos actuais ainda nada se pode concluir sobre a veracidade deste pressuposto. Esta é uma questão chave, quer para a cosmologia quer para a física de partículas elementares.

Apesar de não podermos afirmar que os neutrinos têm massa não nula, há actualmente limites superiores, laboratoriais, para as massas de cada um dos três tipos de neutrinos, (Holzschuch 1992; Peebles 1993), que são:

$$\begin{cases} m_{\nu_e} \leq 9 \text{ eV} \\ m_{\nu_\mu} \leq 250 \text{ KeV} \\ m_{\nu_\tau} \leq 31 \text{ MeV} \end{cases} \tag{4.16}$$

Apesar de o limite inferior para qualquer dos três tipos ser zero, há argumentos em favor de massas não nulas para os neutrinos, dos quais apenas citaremos três (Sciama 1990a, 1990b):

1. Na física das partículas elementares não há qualquer princípio de simetria conhecido que obrigue a que os neutrinos tenham massa nula, ao contrário do que acontece por

exemplo com o fotão. Em virtude deste facto há alguns modelos que, apesar de mais ou menos especulativos, conduzem naturalmente a massas não nulas para os ν's.

2. Uma explicação bastante atractiva para o problema dos neutrinos solares considera que o neutrino electrónico altera o seu tipo durante o trajecto que efectua desde o centro do Sol. Este mecanismo pode ser devido a oscilações na matéria (Bahcall 1989) ou devido a uma precessão de spin num campo magnético (Akhmedov, Lanza & Petcov 1993). Estes processos apenas poderão funcionar se a massa dos neutrinos for diferente de zero.

3. Os neutrinos são partículas que se tem a certeza que existem e para além disso sabe-se que foram produzidas em grandes quantidades no Universo primitivo (Peebles 1993). Se tiverem massa não nula são candidatos naturais a constituir grande parte da matéria escura que se supõe existir no Universo.

Em grande parte dos modelos de matéria escura quente o processo base usualmente considerado para determinar as escalas críticas para a formação de estruturas é o processo de *free streaming*,[6] o qual ocorre assim que os neutrinos entram no horizonte, desde que estes sejam relativistas.

Pa explicar melhor consideremos uma perturbação de densidade em que as partículas gravitacionalmente dominantes são neutrinos relativistas. Assim que essa perturbação entrar no horizonte os neutrinos podem mover-se livremente para fora da perturbação. Em consequência deste processo as perturbações são amortecidas a partir do momento em que se tornam interiores ao horizonte. De facto, apenas quando os neutrinos se tornam não relativistas é que podem ficar gravitacionalmente ligados à perturbação.

Podemos fazer um cálculo aproximado da massa das perturbações que podem sobreviver a este amortecimento que é consequência do processo de free streaming. Para isso calculamos a massa em neutrinos interior ao horizonte M_{H_ν}, na época em que os neutrinos se tornam não relativistas. O valor desta massa é dado por:

$$M_{H_\nu} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_H}{2}\right)^3 \rho_\nu \tag{4.17}$$

[6]Optamos por não traduzir esta designação em virtude de ela ser de uso comum entre a comunidade cosmológica e para não correrrmos o risco de na tradução se perder o sentido correcto da designação. No entanto pensamos que *difusão livre* poderia ser uma tradução possível.

onde d_H e ρ_ν são respectivamente o *diâmetro* do horizonte e a densidade de massa em neutrinos na época em que estes se tornam não relativistas, o que acontece para um valor de z que é, (Doroshkevich et al. 1988):

$$z_{\rm NR} \simeq 6 \times 10^4 \, \frac{m_\nu}{30\,{\rm eV}} \tag{4.18}$$

onde m_ν é a massa dos neutrinos em eV (electrão-Volt).

A massa M_{H_ν}, que define a escala de free streaming, vem então dada pela seguinte expressão:

$$M_{H_\nu} \simeq 10^{15} \left(\frac{m_\nu}{30\,{\rm eV}} \right)^{-2} {\rm M}_\odot \tag{4.19}$$

Para valores razoáveis[7] da massa dos neutrinos o valor da expressão anterior corresponde à massa de densos enxames de galáxias.

As perturbações que não são amortecidas pelo processo de free streaming podem começar a crescer quando os neutrinos se tornam não relativistas. A partir da relação (4.18) pode verificar-se que se os neutrinos tiverem uma massa superior a aproximadamente 1 eV, tornam-se não relativistas antes da recombinação. Assim, concluimos que as perturbações na componente de matéria escura quente podem começar a crescer mesmo antes da recombinação, enquanto que as perturbações nos bariões são amortecidas durante esse período devido ao acoplamento com a radiação. Quando se atinge a recombinação os bariões ficam livres para se ligarem gravitacionalmente à perturbação nos neutrinos, e rapidamente atingem um contraste de densidade da mesma ordem de grandeza do que se observa para a componente escura.

A evolução subsequente das perturbações é em tudo semelhante ao clássico modelo bariónico adiabático. Nestes modelos as grandes estruturas são as que primeiro se formam, enquanto que as estruturas de menor escala terão que ser obtidas por fragmentação. As vantagens e desvantagens são também em quase tudo semelhantes às do modelo adiabático bariónico, ou seja, as etruturas formam-se bastante tarde e é particularmente difícil conseguir ter galáxias formadas suficientemente cedo de modo a não estar em desacordo com as observações actualmente disponíveis. Por outro lado os halos galácticos de matéria escura constituidos por neutrinos, são facilmente explicáveis com estes modelos. Convém

[7] Convém explicitar o que se entende aqui por valor razoável para a massa dos neutrinos. Considera-se habitualmente que um valor razoável é aquele que é da mesma ordem de grandeza do valor imposto por condições de carácter cosmológico, isto é ~ 30 eV, (ver por exemplo Peebles 1993).

no entanto referir que há casos como os de algumas galáxias anãs, que implicariam uma massa para os neutrinos bastante elevada, isto é, acima dos limites superiores impostos por considerações cosmológicas. Este problema não implica contudo, a não aceitação de um modelo dominado por matéria escura quente até porque são cada vez mais as indicações no sentido de que pelo menos grande parte da matéria escura existente nos halos de galáxias, particularmente nas galáxias anãs, deverá ser de origem bariónica (ver por exemplo Carr 1990).

4.3.2 Matéria escura fria

Os modelos de matéria escura fria surgiram no princípio da década de 80 (Peebles 1982; Bond & Efstathiou 1984) e têm sido os modelos sobre formação de estruturas mais detalhada e exaustivamente estudados (Peebles 1984; Blumenthal et al. 1984; Davis et al. 1985; White & Frenk 1991).

Estes modelos foram desenvolvidos em diversas variantes (ver por exemplo Frenk 1992 ou Davis et al. 1992a e a referências citadas nestes trabalhos), entre as quais citamos o *bias model* cujos resultados estão em concordância com agumas simulações de N-corpos (Davis et al. 1985, Bardeen et al. 1986) e o *tilted model*.[8] No entanto aqui apenas referiremos algumas das características mais importantes do modelo de matéria escura fria tal como inicialmente proposto, isto é, do *modelo de matéria escura fria padrão*. Por exemplo, ao contrário dos modelos modificados, admitia-se no modelo inicial que a distribuição de galáxias (ou de massa luminosa), tinha a mesma distribuição que a matéria escura.

Alguns dos pressupostos deste modelo são comuns ao modelo de matéria escura quente, ou seja, por hipótese:

- A densidade do Universo é a densidade crítica (modelo de Einstein-de Sitter), e portanto $\Omega_0 = 1$.
- As estruturas hoje observadas têm origem em perturbações de densidade adiabáticas que crescem via instabilidade gravitacional.
- A densidade do material bariónico é a imposta pelos limites da nucleo-síntese primordial do modelo padrão.

[8] Optamos por não traduzir as designações inglesas destes modelos para não correr o risco de poder subverter o seu significado com a tradução.

Assim a diferença fundamental nos pressupostos deste modelo relativamente ao modelo referido na secção anterior reside no facto de que neste caso em vez de partículas tipo-neutrinos temos que:

- A matéria escura é constituida por partículas elementares estáveis não colisionais, que eram não relativistas na época em que desacoplaram dos outros constituintes do fluido cósmico no Universo muito primitivo. Os hipotéticos candidatos são partículas como os axiões que surgem nas Teorias de Grande Unificação.

ou em alternativa

- A matéria escura é constituida por partículas supersimétricas, como por exemplo os fotinos, com uma massa bastante elevada de forma a que possam ser consideradas frias, isto é, com velocidades térmicas bastante baixas.

Esta "pequena" diferença conduz no entanto a um processo de formação de estruturas no modelo de matéria escura fria que é completamente distinto do processo responsável por essa formação no modelo de matéria escura quente. Enquanto que no modelo da secção anterior as estruturas que primeiro se formam são as de maior escala (que posteriormente se fragmentam dando origem às estruturas mais pequenas), no modelo de matéria escura fria as primeiras perturbações a crescerem e colapsarem são as mais pequenas que em seguida se agregam gravitacionalmente originando o aparecimento das estruturas a maior escala.

Podemos descrever de uma forma sucinta o processo de formação e evolução de estruturas no modelo de matéria escura fria padrão. Assim enquanto o Universo é dominado pela radiação as perturbações na matéria escura fria, que se encontram dentro do horizonte, practicamente não crescem, mas assim que que o Universo passa a ser dominado pela matéria o seu crescimento torna-se mais acentuado sendo proporcional a $t^{2/3}$. Contudo, os bariões matêm-se acoplados com a radiação até à época da recombinação, e portanto a sua escala instável (escala de Jeans) é da ordem da escala do horizonte. Como resultado, as perturbações na componente bariónica interiores ao horizonte, comportam-se até à recombinação como ondas acústicas. Para além disso, todas as perturbações bariónicas em pequenas escalas (isto é, escalas inferiores a $\sim 10^{12-13}\,M_\odot$ são praticamente apagadas devido a processos dissipativos. Também as perturbações interiores ao horizonte, nas componentes de fotões e de neutrinos sem massa, são amortecidas devido aos processos de difusão e de free streaming respectivamente.

Depois da recombinação os bariões não têm mais o suporte anti-gravitacional que era fornecido pela pressão da componente de fotões, e a sua escala crítica instável para o colapso gravitacional baixa drasticamente para um valor próximo da escala dos enxames globulares, isto é, $\sim 10^{5-6}\,M_\odot$, e estão portanto livres para, em escalas superiores a esta, poderem cair nos poços de potencial criados pelas perturbações na matéria escura fria que entretanto haviam crescido desde a época de igualdade entre a matéria e a radiação. Esse crescimento acontece praticamente a qualquer escala devido à quase inexistência de free streaming na componente escura.

O movimento dos bariões para os poços de potencial criados pela matéria escura é bastante rápido. Com efeito, como se viu na equação (4.14), após um breve intervalo de tempo a seguir à recombinação, (correpondente aproximadamente a um factor de 2 em termos do desvio para o vermelho z), as perturbações na componente bariónica atingem praticamente a mesma amplitude das perturbações na componente escura. Segundo estes modelos pode então concluir-se que para $z \ll z_{\rm rec}$ (onde $z_{\rm rec}$ é o valor de z na recombinação), a distribuição espacial dos bariões é semelhante à distribuição da matéria escura, desde que as perturbações não tenham ainda iniciado o seu processo não linear de evolução.

Assim espera-se que as primeiras estruturas a serem formadas sejam as de menor escala (enxames globulares), e as estruturas a maior escala apenas se formarão mais tarde devido principalmente a forças de maré e colisões entre as estruturas menores. Neste cenário a época de formação das estruturas em diversas escalas é dependente dos detalhes do processo de colapso. No entanto pensa-se que por exemplo as galáxias típicas ($\sim 10^{11}\,M_\odot$), formar-se-ão apenas recentemente, isto é para $z \sim 3$, (Frenk 1991).

A formação de halos de matéria escura neste modelo é também um processo recente. Concretamente, apenas quando as estruturas passarem ao regime de evolução não linear é que os halos se poderão formar. De facto, devido à ocorrencia de diversos processos dissipativos durante o regime não linear de evolução das perturbações, o material bariónico perde energia, arrefece e condensa-se na região central das estruturas virializadas (ver por exemplo Rees & Ostriker 1977). Nestes modelos, como aliás em todos os modelos com uma componente de matéria escura não bariónica dominante, espera-se que as estruturas virializadas sejam constituidas por um núcleo bariónico no interior de um halo de matéria escura.

5

Comportamento das perturbações de densidade num fluido de duas componentes

—

Caso de um meio estático

... já conhecemos mil processos que não resultam.
Quer dizer que nos encontramos mais perto
daquele que resultará.
(T. Edison)

5.1 Introdução

Uma das consequências da existência de matéria escura é a de que quando se estuda a formação e a dinâmica das estruturas observadas no universo, não podemos utilizar o critério de instabilidade "clássico" de Jeans para um fluido com apenas uma componente.

Com efeito, considerando válida a hipótese da existência de matéria escura, deveremos estudar o modo como surgem as instabilidades gravitacionais e as escalas críticas respectivas, numa mistura de pelo menos duas componentes. É este o estudo que efectuaremos nos capítulos seguintes.[1]. Quando consideramos um sistema constituido por duas componentes, cada uma delas quando tomada separadamente possui o seu próprio limite de estabilidade, isto é, a sua própria escala de Jeans, e é natural indagar sobre quais as leis que regem a instabilidade gravitacional num sistema constituido pelas duas componentes acopladas apenas gravitacionalmente. Em particular podemos questionar-nos sobre qual o número de soluções instáveis e quais os parâmetros do sistema que as determinam.

Questões deste tipo parecem não ter respostas triviais. De facto, se por exemplo pensarmos que um fluido constituido por duas componentes se comporta como um qualquer sistema de dois osciladores acoplados chegamos à conclusão de que há casos em que o sistema pode ter mais do que uma solução instável, (ver Grishchuk & Zel'dovich 1981).

No nosso caso os dois "osciladores" são duas componentes constituidas por partículas de diferentes espécies, acopladas apenas pela gravitação e cujos valores das densidades estão condicionados aos valores possíveis para o nosso Universo.

[1] O estudo da formação de estruturas num fluido com duas componentes foi iniciado por alguns autores russos como por exemplo Grishchuk & Zel'dovich (1981) ou Polyachenko & Fridman (1981). Devido, em parte, ao facto de nesses estudos ser utilizado um formalismo diferente do aqui apresentado as características mais importantes do processo de formação de estruturas num fluido deste tipo não são postas em evidência. Em particular não é referida a existência da ressonância por nós verificada e que pensamos ser o aspecto mais importante deste trabalho.

Assim, verifica-se que no fluido cósmico que supomos ser constituido por duas componentes acopladas apenas pela gravitação, as perturbações de densidade não possuem mais do que um modo próprio instável, tendo sido Grishchuk & Zel'dovich (1981) os primeiros a demonstrá-lo num trabalho que praticamente passou despercebido no Ocidente.[2]

Como veremos, esta formulação do problema conduz a um diferente conceito da massa crítica de Jeans, bem como a uma melhor compreensão de como podem surgir as escalas galácticas típicas.

Uma vez que se considera que a matéria escura é constituida por partículas massivas, que para além da interacção gravitacional apenas interagem muito fracamente com os bariões, vamos apenas considerar o caso em que as duas componentes da mistura cósmica se encontram acopladas pela gravitação.

As duas componentes que vamos considerar são uma componente bariónioca e outra constituida por partículas de matéria escura. Neste e nos restantes capítulos estas componentes serão designadas de um modo geral por componentes B e D respectivamente (tal como no capítulo anterior).

Toda a análise é feita tendo em consideração que um modelo de Friedman é uma boa aproximação para a descrição da evolução do nosso Universo durante o período que nos interessa considerar (o período dominado pela matéria). O modelo utilizado foi o de Einstein-de Sitter ($\Omega = 1$).

Para além disso supôs-se ainda que as perturbações de densidade na componente bariónica, que podem conduzir à formação de estruturas gravitacionalmente ligadas, surgem na época imediatamente após a recombinação (depois de se ter verificado o desacoplamento entre a radiação e as partículas bariónicas).

Convém notar que apesar de alguns dos exemplos numéricos apresentados neste capítulo se referirem apenas ao caso particular de matéria escura quente, o formalismo aqui desenvolvido é perfeitamente geral e pode ser aplicado a qualquer mistura de duas componentes interagindo apenas gravitacionalmente.

Este capítulo está organizado da forma seguinte:

- Na Secção 5.2 é estabelecido o sistema (dinâmico) de equações lineares acopladas que descreve o comportamento das perturbações de densidade num fluido com duas componentes, fazendo em seguida na Secção 5.3 uma análise qualitativa desse sis-

[2]Devido ao desconhecimento destes resultados, eles foram por nós redescobertos independentemente, confirmando a sua correcção.

tema dinâmico em tudo semelhante à que foi feita no caso de uma componente no Capítulo 3.

- Os valores numéricos dos parâmetros de que dependem as equações do sistema dinâmico, e que se utilizarão nas secções seguintes para efectuar representações gráficas, são estabelecidos na Secção 5.4. Convém no entanto salientar que todo o estudo é puramente analítico e as representações gráficas obtidas numericamente só serão indicadas, no sentido de clarificar alguns dos resultados qualitativos apresentados.

- Na Secção 5.5 estudamos no espaço de fase, o comportamento das trajectórias que representam a solução geral do sistema dinâmico.

- Na Secção 5.6 analisaremos o comportamento com a escala das amplitudes dos modos próprios da solução geral do sistema, verificando que ocorre uma ressonância em algumas dessas amplitudes.

- Este processo ressonante é em nossa opinião o mecanismo responsável pela formação na época da recombinação, de estruturas com a escala de galáxias típicas. Este aspecto será discutido na Secção 5.8. A relação entre o processo ressonante e a formação galáctica será contudo analisado com mais detalhe nos capítulos seguintes.

5.2 Equações para o sistema gravitacional acoplado

Consideremos um fluido estático, sujeito apenas à sua auto-gravitação, constituido por duas componentes B e D. Vamos supôr que este fluido se encontra perturbado linearmente na época imediatamente após a recombinação.

Nessa época, a componente bariónica encontra-se já desacoplada da radiação e é constituida por partículas não relativistas. Quanto à componente de matéria escura podemos considerar dois casos distintos: matéria escura quente ou matéria escura fria. Neste último caso a velocidade das partículas é (por definição de matéria escura fria), muito inferior à velocidade da luz e portanto esta componente é sempre não relativista. No caso de matéria escura quente vamos admitir que as partículas constituintes têm uma massa tal que na época da recombinação elas são também não relativistas, o que se verifica para partículas com massas superiores a cerca de 1 eV (Doroshkevich et al. 1988).

Vamos ainda considerar apenas regiões com escalas muito inferiores à escala do horizonte (que nesta época é da ordem de $50 - 60$ Mpc o que equivale a uma massa da ordem de

10^{17-18} massas solares.

Assim, a dinâmica deste fluido de duas componentes sujeito apenas à acção da sua auto-gravitação, pode ser descrita por um formalismo não relativista ou newtoniano, isto é, pelo habitual sistema de equações hidrodinâmicas, que são: a equação de continuidade (ou de conservação de massa), a equação de Euler e a equação de Poisson.

Uma vez que neste capítulo estamos particularmente interessados no comportamento das perturbações de densidade num intervalo de tempo muito curto após o estabelecimento dessas perturbações na componente bariónica (o que acontece imediatamente após a época da recombinação), vamos desprezar nas equações os termos devidos à expansão do Universo. Mais adiante (nos capítulos seguintes), ter-se-á em consideração a referida expansão.

Neste caso de duas componentes, as equações acima referidas podem escrever-se do seguinte modo:

$$\frac{\partial \rho_D}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_D \boldsymbol{v}_D) = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_B \boldsymbol{v}_B) = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_D}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_D \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}_D = -\frac{1}{\rho_D} \nabla p_D - \nabla \Phi \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_B}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_B \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v}_B = -\frac{1}{\rho_B} \nabla p_B - \nabla \Phi \tag{5.4}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G (\rho_D + \rho_B) \tag{5.5}$$

onde Φ é o potencial gravitacional total (gerado pelas duas componentes) e ρ_j, $\boldsymbol{v}_j$ e p_j são respectivamente os campos de densidade, velocidade e pressão relativos à componente j da mistura, podendo o índice j tomar os valores D ou B.

Tal como no Capítulo 3 utilizamos perturbações de primeira ordem, podendo as variáveis dinâmicas ser escritas na forma seguinte:

$$\begin{aligned} \rho_j &= \rho_{j0} + \delta\rho_j \\ \boldsymbol{v}_j &= \boldsymbol{v}_{j0} + \delta\boldsymbol{v}_j \\ p_j &= p_{j0} + \delta p_j \\ \Phi &= \Phi_0 + \delta\Phi \end{aligned} \tag{5.6}$$

onde o índice $(_0)$ se refere ao valor não perturbado da variável, e δ às perturbações de primeira ordem referidas.

É usual considerar a solução de ordem zero (fluido não perturbado), como sendo um fluido infinito em repouso (solução estática: $v_0 = 0$), e para o qual a densidade e pressão não dependem da posição.

Também aqui se podem fazer as mesmas considerações que foram feitas anteriormente no Capítulo 3, a propósito da validade desta solução estática

Assim começaremos por perturbar esta configuração estática de modo a obter informações qualitativas acerca do comportamento do fluido, e no próximo capítulo consideraremos o caso mais realista de um fluido imerso num universo em expansão.

Vamos supôr que as soluções do sistema de equações acopladas descrito pelas equações (5.1) – (5.5), são funções de quadrado integrável nas variáveis espaciais (tal como no caso de uma componente do Capítulo 3), e portanto podem ser escritas em termos de integrais de Fourier com respeito a estas variáveis.

Considerando as referidas perturbações de primeira ordem, dadas pelas relações (5.6), o sistema de equações (5.1) – (5.5) pode ser escrito, depois de feita a análise de Fourier nas variáveis espaciais e alguma manipulação, na forma (Kolb & Turner 1990, Padmanabhan 1993):

$$\begin{cases} \ddot{\Delta}_D + \left(c_D^2\, k^2 - W_D\right) \Delta_D - W_B\, \Delta_B &= 0 \\ \\ \ddot{\Delta}_B + \left(c_B^2\, k^2 - W_B\right) \Delta_B - W_D\, \Delta_D &= 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

onde k é o número de onda da perturbação e Δ_j é o contraste de densidade na componente j, isto é:

$$\Delta_j = \frac{\delta\rho_j}{\rho_{j0}} = \frac{\rho_j - \rho_{j0}}{\rho_{j0}}. \tag{5.8}$$

sendo $\ddot{\Delta}_j$ a segunda derivada, de Δ_j, em ordem ao tempo.

A variável c_j representa a velocidade do som adiabática na componente j e é dada pela relação:

$$c_j = \left(\frac{\partial p_j}{\partial \rho_j}\right)^{1/2}. \tag{5.9}$$

Por sua vez o parâmetro W_j é função da densidade não perturbada da componente j, e é dado por:

$$W_j = 4\pi G \rho_{j_0} \,. \tag{5.10}$$

Podemos transformar o sistema (5.7) de duas equações diferenciais de segunda ordem, num sistema dinâmico autónomo constituido por 4 equações diferenciais de primeira ordem, e que pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \tag{5.11}$$

Nesta equação $\boldsymbol{x}$ tem como elementos os contrastes de densidade para as duas componentes, e as respectivas primeiras derivadas em ordem ao tempo, isto é:

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \equiv (\dot{\Delta}_{_D}, \Delta_{_D}, \dot{\Delta}_{_B}, \Delta_{_B})^{\mathrm{T}} \tag{5.12}$$

onde o índice superior $(^{\mathrm{T}})$ significa transposta.

A matriz $\boldsymbol{A}$, cujos elementos são apenas função do parâmetro k, tem a forma:

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}(k) = \begin{pmatrix} 0 & W_{_D} - c_{_D}^2\, k^2 & 0 & W_{_B} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{_D} & 0 & W_{_B} - c_{_B}^2\, k^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Interessam-nos particularmente as soluções que representam o comportamento das perturbações de densidade nas duas componentes, D e B. Estas soluções são dadas pelas segunda e quarta componentes, $x_2(t)$ e $x_4(t)$, da solução geral $\boldsymbol{x}(t)$, do sistema dinâmico (5.11).

Informações importantes acerca do comportamento qualitativo das perturbações podem ser obtidas analisando o sistema (5.11). Para isso utilizaremos métodos de teoria qualitativa de equações diferenciais. Estas informações ajudar-nos-ão a compreender melhor o comportamento do sistema gravitacional constituido pelas duas componentes.

Em alternativa o sistema (5.7), ou o sistema (5.11) que lhe é equivalente, pode ser estudado numericamente desde que se especifique a condição inicial

$$\boldsymbol{x}_0 \equiv \boldsymbol{x}(t_{\mathrm{in}}) \tag{5.14}$$

onde t_{in} é o instante de tempo cósmico em que o estado de equilíbrio do fluido é perturbado e que vamos considferar ser o instante da recombinação t_{rec}.

É de referir que este sistema dinâmico tem solução analítica explícita e por isso não será necessário um tratamento numérico. Este tipo de tratamento será utilizado apenas quando for considerado útil para visualizar através de representações gráficas os resultados analíticos obtidos.

Assim, nas secções seguintes analisaremos qualitativamente o sistema (5.11) e sempre que se justifique, ilustraremos os resultados obtidos com alguns gráficos obtidos numericamente.

5.3 Estudo qualitativo do sistema dinâmico

A matriz $\boldsymbol{A}(k)$, dada pela expressão (5.13), tem 4 valores próprios distintos para qualquer k excepto para o valor limite $k = 0$ e para um outro valor particular $k = k_M$, que definiremos mais à frente. Assim, para os valores com significado físico do parâmetro k (isto é, para $k > 0$), e para $k \neq k_M$, há sempre 4 vectores próprios linearmente independentes associados aos 4 valores próprios distintos de $\boldsymbol{A}$. Neste caso a solução geral $\boldsymbol{x}(t)$ do sistema (5.11) é bem conhecida, (Arnold 1973).

No caso em que todos os valores próprios são reais, essa solução pode ser escrita como combinação linear de soluções particulares da forma $\mathrm{e}^{\lambda_j t}\,\boldsymbol{\xi}_j$, isto é:

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \,\mathrm{e}^{\lambda_j t}\,\boldsymbol{\xi}_j \tag{5.15}$$

onde λ_j e $\boldsymbol{\xi}_j$ são respectivamente os valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}(k)$ e os seus vectores próprios associados. Os coeficientes α_j são funções do parâmetro k e podem ser determinados a partir do conhecimento das condições iniciais $\boldsymbol{x}_0 \equiv \boldsymbol{x}(t_{\mathrm{in}})$.

No caso em que existem pares de valores próprios complexos conjugados λ_j e λ_j^*, com vectores próprios associados $\boldsymbol{\xi}_j$ e $\boldsymbol{\xi}_j^*$ (também complexos conjugados), facilmente se verifica que as partes real e imaginária da função complexa $\mathrm{e}^{\lambda_j t}\,\boldsymbol{\xi}_j$ são duas funções reais que são soluções particulares do sistema dinâmico.

Assim, para obter informações qualitativas acerca do comportamento das perturbações de densidade, teremos que determinar os pontos críticos, ou de equilíbrio, do sistema (5.11) e calcular os valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}(k)$ bem como os seus vectores próprios associados.

Estaremos em particular interessados em estudar a dependência dos coeficientes α_j (as amplitudes dos modos próprios), com o número de onda k,.

5.3.1 Pontos críticos, valores próprios e vectores próprios

Os pontos críticos do sistema dinâmico autónomo (5.11) são obtidos resolvendo a equação

$$\dot{\boldsymbol{x}} = 0. \tag{5.16}$$

Verifica-se que o único ponto crítico que não depende do parâmetro k é a origem, isto é:

$$\boldsymbol{x} \equiv (0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}. \tag{5.17}$$

No entanto verifica-se também que há pontos críticos dependentes de k. Estes são determinados pelas soluções da equação

$$\det(\boldsymbol{A}) = 0. \tag{5.18}$$

Facilmente se conclui que se k satisfaz a relação

$$k^2 = \frac{W_B}{c_B^2} + \frac{W_D}{c_D^2} = k_B^2 + k_D^2 = k_M^2\ , \tag{5.19}$$

qualquer ponto sobre o plano (x_2, x_4), isto é, qualquer ponto da forma

$$\boldsymbol{x} \equiv (0, x_2, 0, x_4)^{\mathrm{T}}\ , \tag{5.20}$$

onde x_2 e x_4 podem ser quaisquer, é um ponto crítico do sistema.

Notar que o número de onda k_M (referido já anteriormente), fica perfeitamente definido através desta relação.

Na equação (5.19) k_B e k_D são respectivamente os números de onda de Jeans para as componentes B e D quando as consideramos separadamente. Ao valor crítico k_M chamaremos o *número de onda de Jeans para a mistura* constituida pelas duas componentes quando acopladas gravitacionalmente. Mais à frente ficará clara a razão de ser desta designação.

Os valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}(k)$ são as raízes do polinómio característico, e portanto são obtidos resolvendo a equação

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{I}) = 0 \tag{5.21}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade.

Os 4 valores próprios de $\boldsymbol{A}(k)$, que designaremos por λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4, são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{f+\sqrt{f^2+4k^2g}} \\ \\ \lambda_3 = -\lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{f-\sqrt{f^2+4k^2g}} \end{cases} \tag{5.22}$$

onde f e g são as seguintes funções de k:

$$f(k) = W_B + W_D - k^2\left(c_B^2 + c_D^2\right) \tag{5.23}$$

$$g(k) = W_B c_D^2 + W_D c_B^2 - k^2 c_B^2 c_D^2 \tag{5.24}$$

Os vectores próprios $\boldsymbol{\xi}_j$ da matriz $\boldsymbol{A}(k)$ associados aos valores próprios λ_j, são obtidos resolvendo a equação:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\xi}_j = \lambda_j\,\boldsymbol{\xi}_j, \tag{5.25}$$

e podem ser escritos na forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_1 \equiv (\beta_1\,\lambda_1,\ \beta_1,\ \lambda_1,\ 1)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\xi}_2 \equiv (\beta_2\,\lambda_2,\ \beta_2,\ \lambda_2,\ 1)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\xi}_3 \equiv (\beta_3\,\lambda_3,\ \beta_3,\ \lambda_3,\ 1)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\xi}_4 \equiv (\beta_4\,\lambda_4,\ \beta_4,\ \lambda_4,\ 1)^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{5.26}$$

onde as funções β_j dependem também do parâmetro k, e são dadas por:

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2W_D}\left(h+\sqrt{f^2+4k^2g}\right) \\ \\ \beta_3 = \beta_4 = \frac{1}{2W_D}\left(h-\sqrt{f^2+4k^2g}\right) \end{cases} \tag{5.27}$$

sendo h a função:

$$h(k) = W_D - W_B + k^2\left(c_B^2 - c_D^2\right). \tag{5.28}$$

5.3.2 Resultados qualitativos

Parte da informação qualitativa acerca do comportamento do sistema é obtida estudando o sinal das partes real e imaginária dos valores próprios λ_j. Para isso basta analisar o sinal dos radicandos $\left(f + \sqrt{f^2 + 4k^2 g}\right)$ e $\left(f - \sqrt{f^2 + 4k^2 g}\right)$ das equações (5.19). É este estudo que a seguir desenvolvemos.

A função $f(k)$ definida pela equação (5.23), tem apenas um zero que é dado por:

$$k_f = \left(\frac{W_B + W_D}{c_B^2 + c_D^2}\right)^{1/2}, \tag{5.29}$$

sendo definida positiva para valores de $k < k_f$ e negativa para valores de $k > k_f$.

Por sua vez a função $g(k)$, equação (5.23), anula-se para $k = k_g$, dado por:

$$k_g = \left(\frac{W_B}{c_B^2} + \frac{W_D}{c_D^2}\right)^{1/2} = k_M, \tag{5.30}$$

obtendo-se $g(k) > 0$ para $k < k_M$ e $g(k) < 0$ para $k > k_M$.

Para além disso pode verificar-se que:

$$f(k_M) = -\left(c_D^2 \frac{W_B}{c_B^2} + c_B^2 \frac{W_D}{c_D^2}\right) < 0\,, \tag{5.31}$$

e podemos então concluir que quando k é o número de onda de Jeans da mistura (k_M), o valor próprio λ_1 é dado por:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{f(k_M) + \sqrt{[f(k_M)]^2}}\,, \tag{5.32}$$

sendo portanto nulo. Como $\lambda_1 = -\lambda_2$ o mesmo se verifica para este valor próprio.

É ainda fácil verificar que o radicando $\left(f + \sqrt{f^2 + 4k^2 g}\right)$ é negativo apenas no caso em que as funções $g(k)$ e $f(k)$ forem simultâneamente negativas. Esta dupla condição é satisfeita para $k > k_M$.

Podemos então distinguir duas situações distintas quanto à natureza dos valores próprios λ_1 e λ_2:

- Para $k < k_M$ os valores próprios λ_1 e λ_2 são reais e diferentes de zero, sendo λ_1 positivo e λ_2 negativo.

- Para $k > k_M$ temos que λ_1 e λ_2 são dois valores próprios imaginários puros conjugados.

Tabela 5.1: Sinais das partes real ($\Re$) e imaginária ($\Im$) dos 4 valores próprios da matriz $A(k)$ em função do parâmetro k. Notar que $\Im(\lambda_3) = -\Im(\lambda_4) \neq 0$ qualquer que seja $k \neq 0$. (Ver no texto a discussão respectiva.)

		$k = 0$	$0 < k < k_M$	$k = k_M$	$k > k_M$
λ_1	$\Re$	$+$	$+$	0	0
	$\Im$	0	0	0	$+$
λ_2	$\Re$	$-$	$-$	0	0
	$\Im$	0	0	0	$-$
λ_3	$\Re$	0	0	0	0
	$\Im$	0	$+$	$+$	$+$
λ_4	$\Re$	0	0	0	0
	$\Im$	0	$-$	$-$	$-$

Quanto ao radicando $\left(f - \sqrt{f^2 + 4k^2 g}\right)$ da expressão que define os valores próprios λ_3 e λ_4 verifica-se que nunca se anula, excepto para o valor assimptótico $k = 0$. Para todos os outros valores de k estes valores próprios são imaginários puros conjugados.

De facto este radicando apenas se anularia no caso em que se verificassem simultâneamente duas condições: $g(k) = 0$ e $f(k) > 0$. Atendendo a (5.30) e (5.31), estas condições nunca são satisfeitas simultâneamente e é fácil então verificar que aquele radicando é sempre negativo para $k > 0$.

O conjunto destes resultados encontra-se esquematicamente representado na Tabela 5.1.

O significado físico destes resultados tem uma interpretação simples: para qualquer valor do número de onda $k > k_M$ temos 4 modos próprios que correspondem a oscilações acústicas no sistema acoplado, com amplitude constante. No entanto quando $k < k_M$ dois destes modos abandonam o regime oscilatório passando, um para um regime crescente (caso do modo próprio associado a λ_1), e o outro a um regime decrescente (caso do modo próprio associado a λ_2).

Devemos assim distinguir duas situações perfeitamente distintas no que diz respeito à

estrutura do espaço de fase (quadridimensional), de acordo com o valor do parâmetro k, isto é:

1. Para $k > k_M$ os 4 valores próprios λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 são imaginários puros e portanto o espaço de fase é um *espaço centro*, o qual é gerado pelos vectores próprios associados àqueles valores próprios.

   As soluções num espaço centro são estáveis, oscilando com amplitude constante. Em consequência podemos concluir que no nosso caso, as perturbações de densidade com número de onda $k > k_M$ vão oscilar com amplitude constante e portanto não vão crescer nem decair em amplitude. É usual designar este regime por *regime acústico.*

   Esta situação é consequência da existência de dois pares de modos próprios oscilatórios que se propagam na mistura com velocidades de fase distintas.

   Tal como referido pela primeira vez por Grishchuk & Zel'dovich (1981), no limite de pequenos comprimentos de onda verifica-se que estes modos têm as mesmas relações de dispersão e composição que teriam duas ondas acústicas propagando-se nos fluidos D e B se estes se encontrassem completamente desacoplados. Isto é devido ao facto de que o papel desempenhado pela auto-gravitação, que é o único mecanismo responsável pelo acoplamento das duas componentes, não ser significativo a estas pequenas escalas.

2. Para $k < k_M$ o valor próprio λ_1 é real e positivo, λ_2 é real e negativo e λ_3 e λ_4 são valores próprios imaginários puros conjugados. Temos, neste caso, um espaço de fase que é o producto directo de 3 sub-espaços distintos, (ver a Tabela 5.1):

   (a) Um *sub-espaço instável* de dimensão 1 gerado pelo vector próprio associado ao valor próprio com parte real positiva, λ_1.

   As soluções num sub-espaço instável são soluções que se afastam sempre do ponto de equilíbrio, e uma vez que λ_1 é um valor próprio real e independente do tempo o crescimento destas soluções particulares é exponêncial sem oscilações.

   (b) Um *sub-espaço estável* também de dimensão 1 gerado pelo vector próprio associado ao valor próprio com parte real negativa, λ_2.

   As soluções num sub-espaço estável são sempre soluções decrescentes, isto é, soluções que se aproximam do ponto de equilíbrio. No nosso caso o valor próprio λ_2 (associado a este sub-espaço), é também real, e assim o decaimento destas soluções particulares é igualmente exponêncial sem oscilações

(c) Um *sub-espaço centro* que para este intervalo de valores de k é de dimensão 2 e é gerado pelos vectores próprios associados aos valores próprios imaginários puros, isto é, λ_3 e λ_4.

Este caso, $(k < k_M)$, corresponde à existência de um par de modos próprios acústicos juntamente com um modo próprio crescente e outro decrescente. A análise da composição destes modos mostra que todos eles estão associados às duas componentes D e B estando completamente acoplados pela gravidade que para estas grandes escalas desempenha um papel fundamental.

Podemos pois concluir que o crescimento de perturbações de densidade só é possível para $k < k_M$. É importante referir que este crescimento afecta simultaneamente as duas componentes da mistura e não apenas uma delas.

Fica agora clara a razão pela qual chamámos a k_M o número de onda de Jeans da mistura, isto é, sendo k_M o valor de k para o qual λ_1 passa de um regime complexo a um regime real e positivo podemos desde logo afirmar que só haverá crescimento das perturbações (nas duas componentes da mistura), quando $k < k_M$ ou, o que é equivalente, quando o comprimento de onda das perturbações, definido por

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{5.33}$$

for maior que o comprimento de Jeans para a mistura, ou seja , quando

$$\lambda > \lambda_M = \frac{2\pi}{k_M}. \tag{5.34}$$

É importante referir que apesar de esta escala λ_M estar relacionada com as escalas l_D e l_B (os comprimentos de onda de Jeans das duas componentes quando estas se tomam separadamente), ela não coincide no caso geral com nenhuma delas.

De facto a partir da relação (5.19) podemos verificar que

$$l_M = \left(l_B^{-2} + l_D^{-2}\right)^{-1/2}. \tag{5.35}$$

Na Secção 5.5 estudaremos o comportamento da solução geral do sistema dinâmico definido pela equação (5.11). Como referido anteriormente, o estudo puramente analítico deste comportamento será ilustrado sempre que se achar necessário, através de alguns gráficos obtidos numericamente. Por isso a secção seguinte servirá para estabelecer os valores numéricos dos parâmetros utilizados na obtenção dos referidos gráficos.

Convém ainda dizer que atendendo a que estamos sobretudo interessados na formação de estruturas (ou seja, no caso em que é possível o crescimento das perturbações de densidade), no que se segue consideraremos apenas o regime em que $k < k_M$ (ou $l > l_M$). Designaremos este regime por *regime de colapso.*

5.4 Valores numéricos dos parâmetros utilizados

Convém antes de mais definir matéria escura quente e matéria escura fria, em termos dos valores numéricos das massas das partículas. É usual considerar-se matéria escura quente (ver por exemplo Longair 1989), a que é constituida por partículas cuja massa m_D satisfaz a condição:

$$m_D \leq 1\,\mathrm{KeV} \tag{5.36}$$

Matéria escura fria considerou-se aqui para efeitos numéricos ser aquela cujas partículas têm massas m_D tal que

$$m_D \geq 1\,\mathrm{GeV} \tag{5.37}$$

o que conduz a velocidades do som para esta componente (na época da recombinação) que não têm significado, isto é, são praticamente nulas quando comparadas com a velocidade do som na componente bariónica.

Sempre que se apresentar qualquer resultado numérico relativo a qualquer dos tipos de matéria escura, será no entanto referido qual o valor da massa das partículas que foi utilizado na obtenção desse resultado.

Quanto aos parâmetros de densidade, supomos que

$$\Omega = \Omega_B + \Omega_D = 1 \tag{5.38}$$

onde Ω_B e Ω_D são os parametros de densidade das componentes bariónica e de matéria escura respectivamente.

Utilizaremos um valor para o parâmetro de densidade da componente bariónica de acordo com os limites impostos pela nucleosíntese primordial do modelo padrão (Olive et al. 1990; Walker et al. 1991), isto é:

$$\frac{0.010}{\mathrm{h}^2} \leq \Omega_B \leq \frac{0.015}{\mathrm{h}^2} \tag{5.39}$$

onde h é a constante de Hubble em unidades de $100\,\mathrm{Km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$, isto é:

$$\mathrm{h} = \frac{\mathrm{H_0}}{100\,\mathrm{Km\,s^{-1}Mpc^{-1}}}\,. \tag{5.40}$$

Segundo as mais recentes determinações de $\mathrm{H_0}$ supõe-se que h pertence ao intervalo (Jacoby et al. 1992; Fukugita et al. 1993; Sandage et al. 1994; Saha et al. 1994; Pierce et al. 1994):

$$0.5 \leq \mathrm{h} \leq 1 \tag{5.41}$$

o que é equivalente a considerar:

$$50\,\mathrm{Km\ s^{-1}\,Mpc^{-1}} \leq \mathrm{H_0} \leq 100\,\mathrm{Km\ s^{-1}\,Mpc^{-1}} \tag{5.42}$$

Assim o valor de Ω_B terá limites (inferior e superior) dados por:

$$0.01 \leq \Omega_B \leq 0.06 \tag{5.43}$$

e o valor por nós utilizado nos cálculos numéricos foi:

$$\Omega_B = 0.05\,. \tag{5.44}$$

Atendendo à equação (5.38) utilizámos para parâmetro de densidade da componente de matéria escura o valor seguinte:

$$\Omega_D = 0.95\,. \tag{5.45}$$

Devemos ainda fazer referência aos valores numéricos das densidades não perturbadas ρ_{j_0} (ou dos parâmetros W_j), e das velocidades do som c_j, calculados para a época da recombinação.

A densidade na componente j pode escrever-se em função do seu parâmetro de densidade Ω_j, e da densidade crítica ρ_c, na forma:

$$\rho_j = \Omega_j \rho_\mathrm{c}\,. \tag{5.46}$$

onde, como vimos no Capítulo 2, a densidade ρ_c (a densidade num Universo de Einstein-de Sitter), é dada em função do tempo por:

$$\rho_\mathrm{c} = \frac{1}{6\pi G t^2}\,. \tag{5.47}$$

Utilizando estas duas últimas expressões na equação (5.10) que define W_j, é fácil verificar que o seu valor imediatamente após a época da recombinação $t_{\rm rec}$, pode escrever-se em função de $t_{\rm rec}$ e de Ω_j, na forma seguinte:

$$W_j = \frac{2}{3}\,\frac{\Omega_j}{t_{\rm rec}^2} \tag{5.48}$$

A velocidade do som c_j, para a mesma época, é dada pela expressão habitual para a velocidade do som adiabática num gás ideal monoatómico (Weinberg 1972), isto é:

$$c_j^{\rm rec} = \left(\frac{5}{3}\,\frac{K_{\rm Bol}\,{\rm T}_j^{\rm rec}}{m_j}\right)^{1/2} \tag{5.49}$$

onde $K_{\rm Bol}$ é a constante de Boltzman e $\mathrm{T}_j^{\rm rec}$ e m_j são respectivamente a temperatura da componente j na época da recombinação, e a massa das partículas que constituem a mesma componente.

Deve referir-se que, se suposermos que as partículas de matéria escura são partículas tipo-neutrinos, desde a época em que se dá o seu desacoplamento da radiação até à época $t_{\rm NR}$ em que estas partículas se tornam não relativistas, a sua temperatura T_D é dada por (Weinberg 1972, Padmanabhan 1993):

$$\mathrm{T}_D = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \mathrm{T}_\gamma \propto \frac{1}{a} \tag{5.50}$$

onde T_γ representa como habitualmente a temperatura da radiação.

Convém referir que a época $t_{\rm NR}$ é dada por:

$$t_{\rm NR} \sim \frac{10^{10}}{(m_{30})^{3/2}}\ s \tag{5.51}$$

o que corresponde a um valor do desvio cosmológico para o vermelho dado por (Doroshkevich et al. 1988),

$$z_{\rm NR} \sim 6 \times 10^4\, m_{30} \tag{5.52}$$

onde m_{30} representa a massa das partículas de matéria escura em unidades de 30 eV, isto é:

$$m_{30} = \frac{m_D\,({\rm eV})}{30\,{\rm eV}} \tag{5.53}$$

A partir da época $z_{\rm NR}$, a temperatura T_D decai com a^{-2} (Gao & Ruffini 1981; Padmanabhan 1993), ou seja

$$\mathrm{T}_D \propto \frac{1}{a^2}\,. \tag{5.54}$$

Em particular na época da recombinação, a componente de matéria escura terá uma temperatura $\mathrm{T}_{D_{rec}}$, dada por

$$\mathrm{T}_{D_{rec}} \sim \frac{40}{m_{30}} K\,. \tag{5.55}$$

Esta expressão mostra claramente que no caso de partículas com elevados valores para as suas massas, podemos considerar que os seus movimentos térmicos não têm significado e por isso a velocidade do som nessa componente é praticamente nula, justificando assim a definição de matéria escura fria dada através da condição (5.37).

Notar que para poder garantir a aplicação das equações imediatamente após a recombinação, supôs-se que as partículas de matéria escura quente têm uma massa em repouso, tal que nessa época elas são já não relativistas. Esta condição é satisfeita para partículas cuja massa seja superior a aproximadamente 1 eV, como se pode constatar pela equação (5.52) e portanto atendendo à condição (5.36) temos que no caso de matéria escura quente poderemos utilizar valores para a massa das partículas de acordo com a seguinte condição:

$$1\,\mathrm{eV} \leq m_{_D} \leq 1\,\mathrm{KeV}\,. \tag{5.56}$$

Uma vez ue os neutrinos são os candidatos mais naturais a constituirem a matéria escura quente, convém referir que os limites para os valores da sua massa impostos por considerações de ordem cosmológica (tendo em conta a produção de neutrinos no universo primitivo), são dados por (Peebles 1993):

$$m_{_D} \equiv m_\nu = 93\,\Omega_\nu\, h^2\,\mathrm{eV} \tag{5.57}$$

onde Ω_ν é o parâmetro de densidade na componente de neutrinos.

Finalmente, quanto à temperatura dos bariões na época da recombinação $\mathrm{T}_B^{\rm rec}$, ela é a mesma que a temperatura da radiação (T_γ), e consideramos que tem o seguinte valor (Kolb & Turner 1990):

$$\mathrm{T}_\gamma^{\rm rec} = \mathrm{T}_B^{\rm rec} \sim 3000\,\mathrm{K} \tag{5.58}$$

onde $\mathrm{T}^{\rm rec}$ significa *temperatura na época da recombinação.*

5.5 Comportamento da solução geral

Para analisarmos o comportamento com a escala do sistema dinâmico (5.11) no início do processo de formação de estruturas bariónicas (isto é, a seguir ao desacoplamento entre a radiação e os bariões), necessitamos de analisar o modo como variam com k os valores próprios λ_j, os vectores próprios $\boldsymbol{\xi}_j$ e as amplitudes dos modos próprios α_j, que nos permitem escrever a solução geral (5.15).

Dado que $\lambda_2 = -\lambda_1$ e $\lambda_4 = -\lambda_3$ apenas faremos a análise da dependência com a escala do valor próprio real λ_1, (lembramos que apenas nos interessa o caso em que $k < k_{_M}$), e da parte imaginária de λ_3.

O valor próprio λ_1, que por ser real e positivo é o que está relacionado com o crescimento das perturbações, é uma função que cresce com a escala l.

Verificamos que λ_1 não cresce com a mesma taxa para todas as escalas Podemos igualmente constatar que λ_1 tem um comportamento com a escala que é distinto de acordo com o tipo de matéria escura considerado.

De facto para o caso de matéria escura fria este valor próprio tem um rápido crescimento na região da escala de Jeans da mistura, atingindo rapidamente um valor que vai manter aproximadamente constante para escalas superiores. Este comportamente é ilustrado na Figura 5.1.

Por outro lado, para o caso de matéria escura quente, verifica-se que há duas escalas particulares para as quais ocorre uma variação significativa na taxa de crescimento de λ_1.

A primeira é na região da escala de Jeans da mistura $l_{_M}$, onde depois de sofrer a transição do regime imaginário para o real, λ_1 cresce muito rapidamente para depois se manter aproximadamente constante até se atingir a segunda escala peculiar, o que se verifica próximo da escala de Jeans para a matéria escura, $l_{_D}$. Nesta região da escala λ_1 tem de novo uma taxa de crescimento elevada. Para escalas superiores a esta o crescimento de λ_1 abranda de novo, aproximando-se assimptoticamente do seu valor limite, isto é, a partir das equações (5.22) e (5.23) obtemos:

$$\lim_{l\to\infty} \lambda_1 = W_{_B} + W_{_D}. \tag{5.59}$$

Este comportamento é ilustrado na Figura 5.2.

Quanto ao valor próprio λ_3 a sua parte imaginária é uma função decrescente com a escala l.

Para o caso de matéria escura fria a taxa de crescimento de λ_3 é constante para qualquer

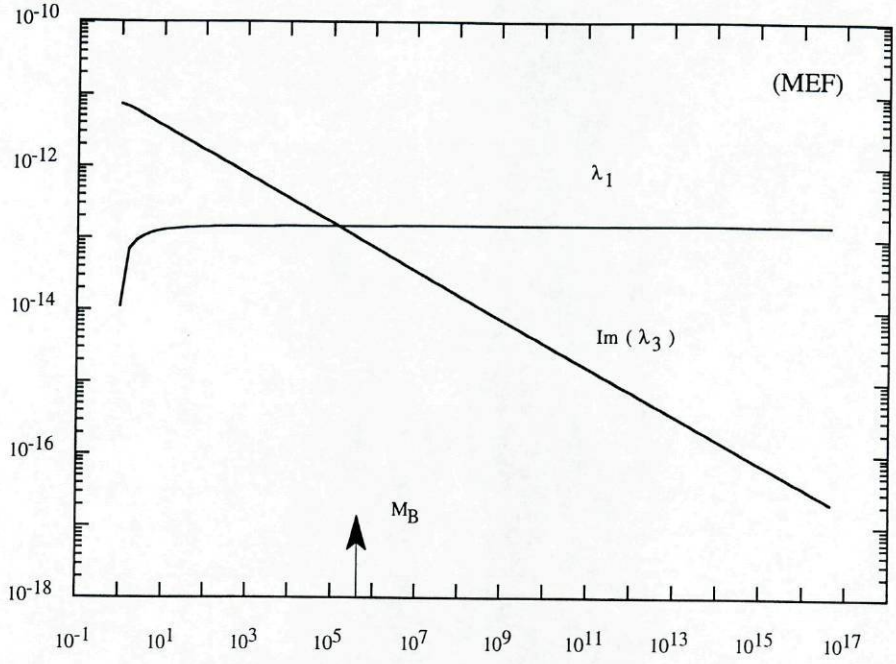


Figura 5.1: Variação com a escala (em massas solares), e apenas no regime instável ($l > l_M$), do valor próprio λ_1 e da parte imaginária de λ_3, para o caso de um modelo dominado gravitacionalmente por matéria escura fria em que se considerou que as partículas tinham uma massa de 1 GeV. Notar que a única variação significativa no comportamento de λ_1 ocorre na região da escala de Jeans da mistura l_M. Quanto a λ_3 verifica-se que o seu comportamento não sofre alterações significativas em todo este regime. A seta vertical indica a massa total contida numa região esférica de diâmetro l_B.

$k < k_M$. Para o caso de matéria escura quente observa-se uma alteração significativa no seu comportamento, para uma escala que coincide com a segunda escala peculiar observada no crescimento de λ_1, isto é para uma escala próxima de l_D. Nesta região verifica-se um decréscimo mais acentuado, da parte imaginária de λ_3, do que para qualquer outra escala. Para escalas superiores a esta, λ_3 aproxima-se assimptoticamente do seu valor limite:

$$\lim_{l \to \infty} \lambda_3 = 0. \tag{5.60}$$

Uma vez que λ_3 está relacionado com a frequência dos modos acústicos, podemos dizer,

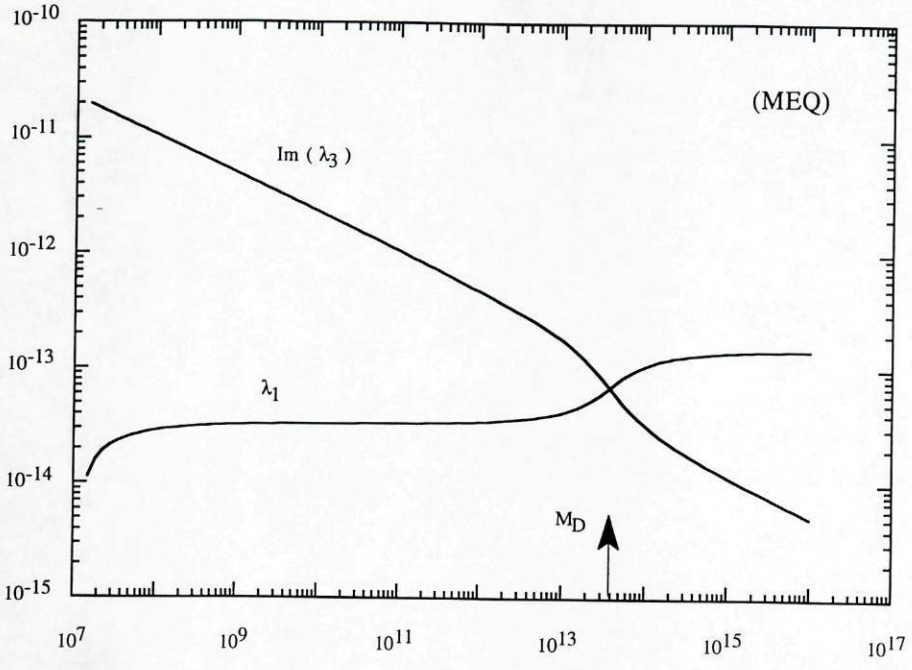


Figura 5.2: O mesmo que na figura anterior mas para o caso de matéria escura quente, considerando que as partículas constituintes têm uma massa de 30 eV. Notar as duas regiões relevantes no comportamento de λ_1 e apenas uma para λ_3 (que coincide com a segunda para λ_1). A seta vertical indica a massa total contida numa região esférica de diâmetro l_D.

de acordo com a sua dependência com a escala, que apesar de se verificarem modos oscilatórios a qualquer escala, para grandes escalas as ondas acústicas dão lugar ao crescimento das perturbações (positivas ou negativas), no sentido de que a sua frequência tende para zero, ou (o que é equivalente), o seu período tende para infinito.

Nas figuras 5.1 e 5.2 ilustra-se o comportamento de λ_1 e da parte imaginária de λ_3 na região $l > l_M$, para os dois casos, isto é, no caso de matéria escura fria e no caso de matéria escura quente respectivamente. No primeiro caso consideramos para efeitos da elaboração do gráfico, que as partículas têm uma massa da ordem de 1 GeV, e no segundo caso utilizamos uma massa de 30 eV para as partículas correspondentes.

Podemos conhecer algo mais sobre o comportamento qualitativo do sistema dinâmico estudando as trajectórias, no espaço de fase, correspondentes à solução geral $x(t)$. Infelizmente, dado que o espaço de fase é de dimensão 4, a visualização dessas trajectórias

não é possível. Uma vez que (como já dissemos), estamos sobretudo interessados no comportamento qualitativo da segunda e quarta componentes da solução geral, ou seja, no comportamento dos contrastes de densidade $\Delta_D(t)$ e $\Delta_B(t)$, vamos analisar o comportamento da solução geral, projectando as trajectórias (que são quadridimensionais no espaço de fase), no plano $(x_4, x_2) \equiv (\Delta_B, \Delta_D)$, e inferir algumas propriedades mais acerca do comportamento das duas componentes da mistura.

Analisando as componentes dos vectores próprios, dadas pelas relações (5.26), podemos verificar que a projecção do sub-espaço estável, no plano (x_4, x_2), coincide com a projecção, no mesmo plano, do sub-espaço instável, já que $\beta_1 = \beta_2$.

Esta projecção, comum para estes dois sub-espaços, é a recta dada pela equação:

$$\Delta_D = \beta_1 \Delta_B . \tag{5.61}$$

Por seu lado facilmente se verifica também que o sub-espaço centro tem uma projecção, no mesmo plano (Δ_B, Δ_D), que é igualmente uma linha recta cuja equação é:

$$\Delta_D = \beta_3 \Delta_B . \tag{5.62}$$

Estas duas equações, que representam as direcções da projecção dos sub-espaços estável-instável e centro, dão-nos a composição relativa, isto é, a percentagem relativa das componentes escura e bariónica nos diversos modos. Através da primeira daquelas equações ficamos a conhecer a composição relativa nos modos crescente/decrescente, enquanto que a equação (5.62) nos dá a composição nos modos acústicos.

Por outro lado, partir das expressões que definem $f(k)$, $g(k)$ e $h(k)$ (equações (5.23), (5.24) e (5.28) respectivamente), facilmente se verifica que

$$f^2 + 4k^2 g = h^2 + 4W_B W_D > 0 , \tag{5.63}$$

Daqui se pode concluir que as componentes β_j dos vectores próprios são funções reais, como seria de esperar. Para além disso verificam as seguintes condições:

$$\beta_1 > 0 \qquad \text{e} \qquad \beta_3 < 0. \tag{5.64}$$

A primeira destas condições juntamente com a equação (5.61), significa que as duas componentes participam positivamente no colapso da mistura, bem como no modo de decaimento (o qual sendo transiente não nos interessa considerar neste estudo). A segunda condição e a equação (5.62) mostram que nos modos acústicos as duas componentes oscilam

em oposição de fase, isto é, quando numa delas o contraste de densidade aumenta, na outra diminui.

O produto directo dos sub-espaços estável (decaimento) e instável (colapso) forma um sub-espaço de dimensão 2 designado usualmente por *sub-espaço sela* (Arnold 1973). As soluções pertencentes a um tal sub-espaço aproximam-se inicialmente do ponto de equilíbrio, devido à acção exercida pelo sub-espaço estável, e afastam-se posteriormente desse ponto devido à acção do sub-espaço instável. Como resultado obtém-se que quando o tempo t varia de $-\infty$ a $+\infty$, as órbitas, que representam estas soluções particulares, se aproximam do ponto crítico atingindo um ponto de aproximação máxima num determinado instante, que designamos por t_m, a partir do qual se afastam indefenidamente tendo como direcção assimptótica a direcção do sub-espaço instável.

Escolhendo condições iniciais tais que $\boldsymbol{x}_0$ se encontre sobre o plano (x_4, x_2), isto é

$$x_1 = x_3 = 0\,, \tag{5.65}$$

e dada a simetria entre os vectores próprios $\boldsymbol{\xi}_1$ e $\boldsymbol{\xi}_2$ (na primeira e terceira componentes), podemos concluir que o ponto de aproximação máxima destas órbitas ao ponto crítico, é atingido para o instante inicial t_{in}, isto é, $t_m = t_{\text{in}}$. Assim, neste caso, quando t cresce de t_{in} até $+\infty$ podemos dizer que a trajectória se afasta de uma forma monótona do ponto crítico do sistema (isto é, da origem). É importante referir que a condição de $\boldsymbol{x}_0$ pertencer ao plano (x_4, x_2) corresponde à hipótese de que a mistura inicia o colapso a partir de um estado de repouso.

Para além deste comportamento das órbitas (que é devido à existência do sub-espaço sela), teremos que considerar a acção exercida pelo sub-espaço centro. Assim, e uma vez que o efeito deste sub-espaço é o de obrigar a trajectória a oscilar, teremos uma órbita (em projecção), que oscila em torno da projecção do sub-espaço sela, ou seja em torno da direcção da recta dada pela equação (5.61).

De acordo com as condições iniciais representadas em (5.65), podemos verificar duas evoluções possíveis:

1. Se $\Delta_{D_0} > \beta_3 \Delta_{B_0}$ o sistema colapsa de modo a formar uma estrutura material.

2. No caso em que $\Delta_{D_0} < \beta_3 \Delta_{B_0}$ o sistema desenvolverá uma estrutura cujo contraste de densidade é negativo e portanto com uma densidade média inferior à do meio envolvente, o que normalmente se designa por vazio.

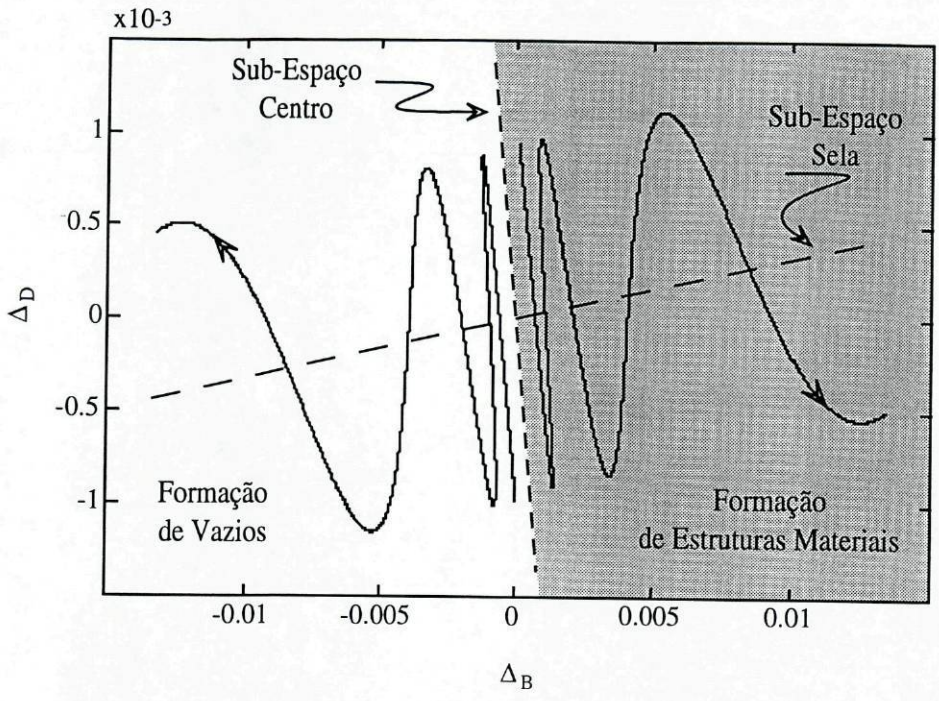


Figura 5.3: Trajectórias típicas no espaço de fase projectadas no plano (x_4, x_2) e que representam a solução geral do sistema dinâmico para o caso de matéria escura quente. Também se ilustram as projecções dos sub-espaços centro e sela no mesmo plano. As órbitas do lado esquerdo correspondem à situação $\Delta_{D_0} < \beta_3 \Delta_{B_0}$ e as do lado direito à condição inicial inversa. (Convém referir que esta representação particular corresponde a uma perturbação com uma massa da ordem de $10^{13} M_\odot$)

Estas duas situações possíveis são ilustradas na Figura 5.3.

Analisemos agora as funções β_1 e β_3. Como se viu estas funções dependem do número de onda k da perturbação, e portanto é imediato concluir que as direcções das projecções dos sub-espaços atrás referidas variam com a escala. Assim o crescimento relativo das perturbações nas duas componentes, bem como a composição do modos oscilatório e de colapso, depende igualmente da escala considerada.

Convém referir que este diferente crescimento relativo das perturbações é responsável por um efeito de segregação entre as duas componentes. Este é um problema que sai do âmbito específico deste trabalho e por isso não será aqui tratado.[3]

[3]Pensamos contudo que este processo poderá explicar pelo menos em parte a segregação de massa e de

A variação com a escala, do crescimento relativo das perturbações pode ser analisada estudando o comportamento de β_1 com k (ou l).

As rectas definidas pelas equações (5.61) e (5.62) fazem ângulos, com a direcção do eixo x_4, que são dados respectivamente por

$$\theta_1 = \arctan(\beta_1) \tag{5.66}$$

e

$$\theta_3 = \arctan(\beta_3). \tag{5.67}$$

Vejamos como se comportam θ_1 e θ_3 com a escala. Para o caso de matéria escura quente (caso em que $c_B < c_D$), verificamos que a derivada

$$\frac{d\beta_1}{dl} = 4\pi^2 \frac{c_D^2 - c_B^2}{W_D} \left(1 + \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4W_B W_D}} \right) \frac{1}{l^3} \tag{5.68}$$

é sempre positiva, enquanto que no caso da matéria escura fria $c_B > c_D$ e portanto esta derivada é sempre negativa.

Assim, dado que

$$\beta_1(l_M) = \frac{c_B^2}{c_D^2} \tag{5.69}$$

e

$$\lim_{l \to \infty} \beta_1 = 1 \tag{5.70}$$

conclui-se que para o caso da matéria escura quente θ_1 é uma função monótona crescente de l, sendo decrescente para o caso de matéria escura fria.

O ângulo θ_1 varia nos dois casos entre

$$\theta_1(l_M) = \arctan\left(\frac{c_B^2}{c_D^2} \right) \tag{5.71}$$

e o valor assimptótico

$$\lim_{l \to \infty} \theta_1 = 45°. \tag{5.72}$$

luminosidade observada sobretudo em enxames galácticos (Dressler 1984; Yepes et al. 1991; Domínguez-Tenreiro & Yepes 1991; Salvador-Solé 1991), mas também em galáxias (Inagaki & Saslaw 1985) e enxames globulares (Spitzer 1969; Saslaw 1985; Binney & Tremaine 1987). Para uma abordagem deste assunto por nós efectuada utilizando um formalismo diferente do aqui apresentado, ver de Carvalho & Macedo 1994.

Notar que no caso de matéria escura quente $\theta_1(l_M) < 45°$ enquanto que no caso de matéria escura fria se tem $\theta_1(l_M) > 45°$.

Um estudo análogo para β_3 leva-nos a concluir que a derivada

$$\frac{d\beta_3}{dl} = 4\pi^2 \frac{c_D^2 - c_B^2}{W_D} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4W_B W_D}}\right) \frac{1}{l^3} \tag{5.73}$$

é também sempre positiva para o caso de matéria escura quente e negativa para o caso de matéria escura fria.

Assim, θ_3 no primeiro caso cresce com a escala enquanto que no segundo caso decresce. A sua variação ocorre entre

$$\theta_3(l_M) = \arctan\left(-\frac{W_B}{W_D}\frac{c_D^2}{c_B^2}\right) \tag{5.74}$$

e o valor assimptótico

$$\lim_{l\to\infty} \theta_3 = \arctan\left(-\frac{W_B}{W_D}\right). \tag{5.75}$$

É contudo importante referir que as taxas de variação (com a escala) de β_1 e β_3 não são constantes e naturalmente o mesmo acontece com θ_1 e θ_3, como se pode verificar pelas figuras 5.4 e 5.5 onde se ilustra a variação daqueles ângulos com a escala para os casos de matéria escura quente e matéria escura fria respectivamente.

Quanto ao ângulo θ_1 ele tem um comportamento inverso quando passamos de um caso para o outro. Esta inversão de comportamento de θ_1 é consequência da inversão do papel desempenhado pela componente bariónica nos dois casos: no caso de matéria escura quente a componente bariónica é aquela que tem a menor velocidade do som, enquanto que no caso de matéria escura fria acontece o contrário. De referir que neste caso (matéria escura fria), θ_3 tem um comportamento menos interessante do que no caso de matéria escura quente, como imediatamente se pode constatar pela comparação daquelas figuras.

Na Figura 5.6 ilustram-se esquematicamente no plano (x_4, x_2) os intervalos de variação de θ_1 e θ_3 para o caso de matéria escura quente.

As taxas de variação de β_1 e β_3 podem ser analisadas através das expressões (5.68) e (5.73). Assim, para o caso de matéria escura quente por exemplo, podemos concluir que para escalas tais que $l_M < l \ll l_D$ (isto é, para $k_D \ll k < k_M$), aquelas funções crescem apenas ligeiramente, enquanto que quando se atinge uma escala próxima da de l_D elas assumem um crescimento bastante mais acentuado.

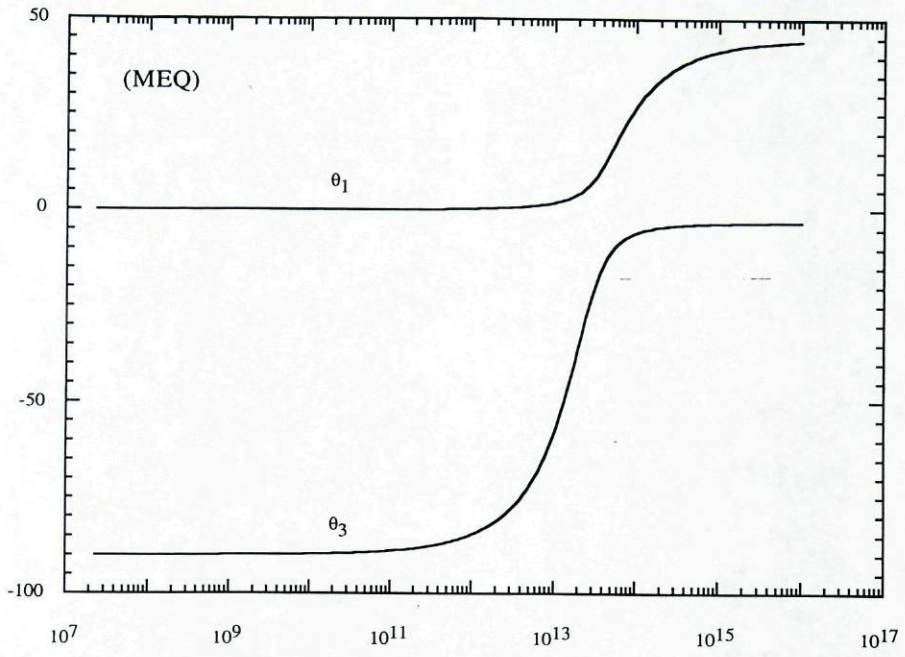


Figura 5.4: Dependencia de θ_1 e θ_3 com a escala (em massas solares), para o caso de matéria escura quente com partículas cuja massa é de 30 eV. O valor de θ_1 e θ_3, na escala vertical, está expresso em graus.

Para valores de l acima desta escala a taxa de variação de β_1 e β_3 diminui de novo à medida que estas duas funções se aproximam dos seus valores assimptóticos, respectivamente 1 e $-W_B/W_D$, como expresso em (5.70) e (5.75).

Isto significa que a composição da mistura em colapso sofre uma alteração substancial quando a escala da perturbação atinge um valor próximo do de l_D. Para esta região da escala a mistura em colapso começa a englobar uma percentagem muito maior de material da componente escura, o qual para escalas menores se encontrava sobretudo associado aos modos acústicos.

De facto, no limite de grandes escalas, $(k \to 0)$, temos:

$$\lim_{k\to 0} \frac{\Delta_{Dc}}{\Delta_{Bc}} = 1 \tag{5.76}$$

onde Δ_{Dc} e Δ_{Bc} são respectivamente os contrastes de densidade no modo de colapso das

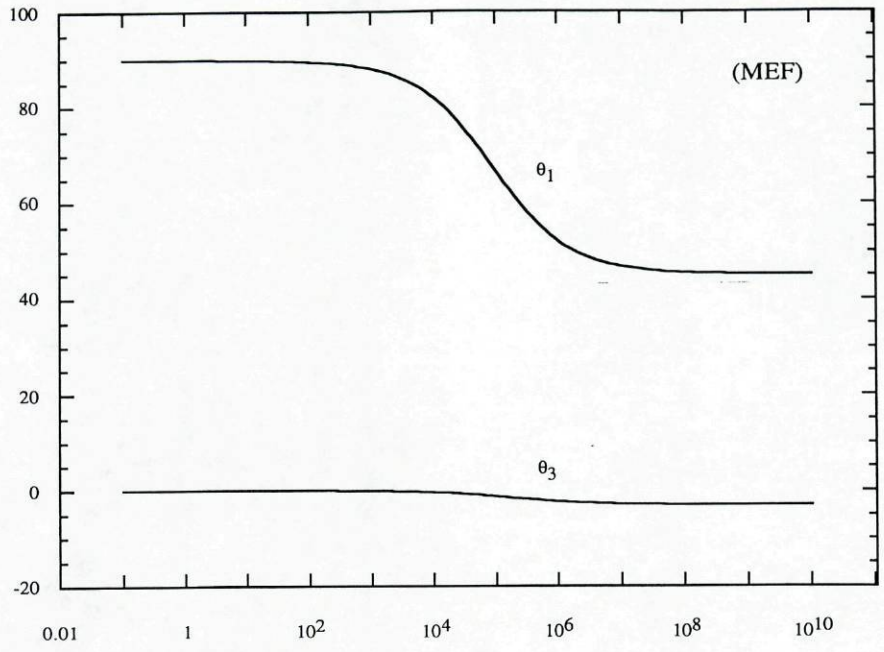


Figura 5.5: O mesmo que na figura anterior mas para o caso de matéria escura fria constituida por partículas cuja massa é de 1 GeV. Notar o valor aproximadamente constante de θ_3.

componentes de matéria escura e bariónica.

De outra forma, se representarmos respectivamente por δ_{Dc} e δ_{Bc} as perturbações de densidade absolutas nas componentes escura e bariónica no mesmo modo (de colapso), temos:

$$\lim_{k\to 0} \frac{\delta\rho_{Dc}}{\delta\rho_{Bc}} = \frac{\rho_{D0}}{\rho_{B0}} \tag{5.77}$$

De uma forma análoga, para os modos acústicos obtemos:

$$\lim_{k\to 0} \frac{\delta\rho_{Da}}{\delta\rho_{Ba}} = -1 \tag{5.78}$$

onde δ_{Da} e δ_{Ba} são as perturbações de densidade absolutas nos modos acústicos de cada uma das componentes.

O resultado expresso pela equação (5.77), significa que para as grandes escalas a composição da perturbação no modo de colapso é idêntica à do estado não perturbado.

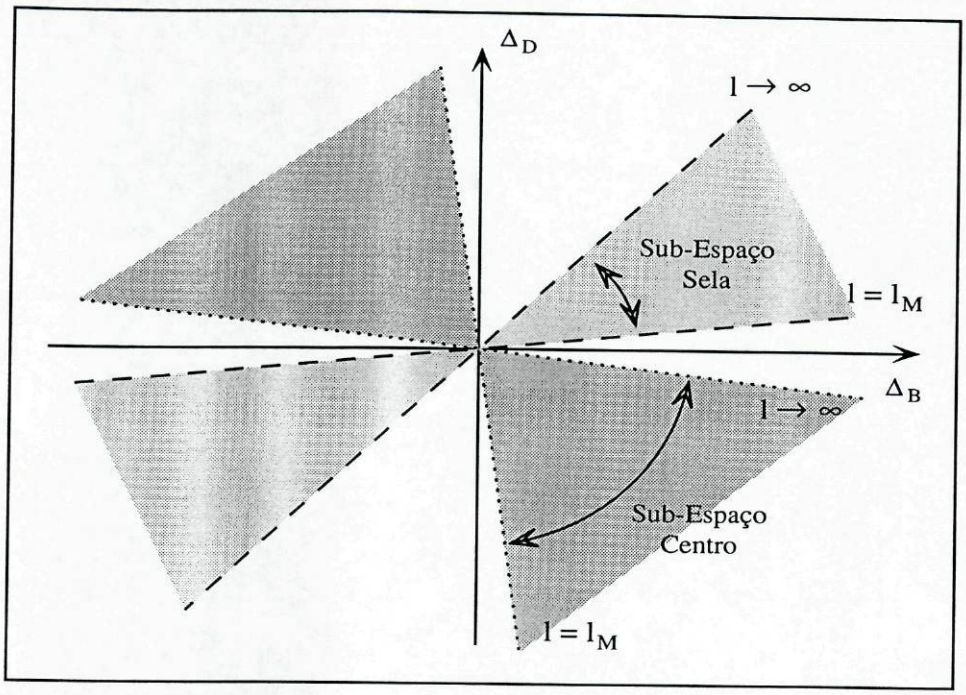


Figura 5.6: Projecção no plano (x_4, x_2) dos três sub-espaços descritos no texto (para $l > l_M$) para o caso de matéria escura quente. As linhas a tracejado representam a projecção do sub-espaço sela nos limites $l = l_M$ e $l \to \infty$. As linhas a ponteado são as projecções do sub-espaço centro para os mesmos limites

Por outro lado a equação (5.78), mostra que as perturbações presentes nas duas componentes que se encontram associadas aos modos acústicos, oscilam com a mesma amplitude mas em oposição de fase.

Na secção seguinte mostraremos que no caso de matéria escura quente, o comportamento peculiar dos elementos próprios (valores próprios e vectores próprios), para uma escala próxima da de l_D, é devido à existência de uma escala "crítica" $l_{\rm r}$, para a qual sob certas condições, se observa uma ressonância entre as duas componentes. Para esta escala particular os modos acústicos tendem a ficar despovoados de material que é transferido para o modo de colapso. No caso particular que estamos a considerar (matéria escura quente), a escala $l_{\rm r}$ é da mesma ordem de grandeza que l_D, tal como mais adiante se verá.

5.6 Ressonância gravitacional

Podemos concluir da existência desta escala "crítica" analisando a variação, com a escala, das amplitudes dos diversos modos nas duas componentes. É o que faremos em seguida.

5.6.1 Comportamento das amplitudes dos modos próprios do sistema

Os coeficientes α_j da solução geral do sistema dinâmico descrita pela expressão (5.15), podem ser obtidos como função das condições iniciais

$$x_i(t_{\rm in}) = x_{i_0}. \tag{5.79}$$

Assim, substituindo na expressão (5.15) da solução geral, obtemos:

$$x_{i_0} = \sum_j \alpha_j \xi_{(j)i} e^{\lambda_j t_{\rm in}} \tag{5.80}$$

onde $\xi_{(j)i}$ é a i-ésima componente do vector próprio $\boldsymbol{\xi}_j$.

Resolvendo este sistema de equações linear nos α_j, e sob a já mencionada hipótese de que as perturbações crescem a partir do repouso, isto é,

$$x_{1_0} = x_{3_0} = 0, \tag{5.81}$$

obtêm-se os coeficientes α_j, que são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \tfrac{x_{2_0}}{2}\ \tfrac{1-Q_0\beta_3}{\beta_1-\beta_3}\ e^{-\lambda_1 t_0} \\
\alpha_2 &= \tfrac{x_{2_0}}{2}\ \tfrac{1-Q_0\beta_3}{\beta_1-\beta_3}\ e^{\lambda_1 t_0} \\
\alpha_3 &= x_{2_0}\ \tfrac{Q_0\beta_1-1}{\beta_1-\beta_3}\ \cos(i\lambda_3 t_0) \\
\alpha_4 &= x_{2_0}\ \tfrac{1-Q_0\beta_1}{\beta_1-\beta_3}\ \sin(i\lambda_3 t_0)
\end{aligned} \tag{5.82}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e Q_0 é a razão entre os contrastes de densidade nas duas componentes para $t = t_{\rm in}$, ou seja,

$$Q_0 = \frac{x_{4_0}}{x_{2_0}} = \frac{\Delta_{B_0}}{\Delta_{D_0}}. \tag{5.83}$$

Substituindo as expressões de α_j dadas por (5.82) na segunda e quarta componentes da solução geral, equação (5.15), após algumas simplificações obtém-se:

$$\Delta_D(\tau) \equiv x_2(\tau) = x_{2_0}\left[\zeta_1\left(e^{\lambda_1\tau} + e^{-\lambda_1\tau}\right) + \zeta_2\cos(i\lambda_3\tau)\right] \tag{5.84}$$

e

$$\Delta_B(\tau) \equiv x_4(\tau) = x_{4_0}\left[\zeta_3\left(e^{\lambda_1\tau} + e^{-\lambda_1\tau}\right) + \zeta_4\cos(i\lambda_3\tau)\right] \tag{5.85}$$

onde $\tau = t - t_{\text{in}}$ e os novos coeficientes ζ_j, que são as amplitudes dos modos físicos das perturbações nas componentes escura e bariónica, são dados pelas expressões:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \tfrac{\beta_1}{2}\,\tfrac{1-Q_0\beta_3}{\beta_1-\beta_3} \\
\zeta_2 &= \beta_3\,\tfrac{Q_0\beta_1-1}{\beta_1-\beta_3} \\
\zeta_3 &= \tfrac{1}{2}\,\tfrac{Q_0^{-1}-\beta_3}{\beta_1-\beta_3} \\
\zeta_4 &= \tfrac{\beta_1-Q_0^{-1}}{\beta_1-\beta_3}
\end{aligned} \tag{5.86}$$

Por uma questão de simplicidade e clareza da análise, suporemos, no que se segue, que Q_0 é positivo apesar de haver casos em que mesmo com Q_0 negativo a perturbação de densidade poder crescer no sentido positivo (ver as figuras 5.3 e 5.6 e a discussão respectiva na Secção 5.5).

Antes de mais convém referir que pelas equações (5.86) poderemos facilmente constatar que os pares $(\zeta_1\ ,\ \zeta_2)$ e $(\zeta_3\ ,\ \zeta_4)$ estão relacionados da forma seguinte:

$$2\,\zeta_1 + \zeta_2 = 1 \tag{5.87}$$

e

$$2\,\zeta_3 + \zeta_4 = 1 \tag{5.88}$$

o que significa que um máximo de ζ_1 corresponde a um mínimo de ζ_2 e inversamente, o mesmo acontecendo para o par $(\zeta_3\ ,\ \zeta_4)$.

Passemos agora ao estudo das funções que descrevem o comportamento com a escala das amplitudes ζ_j.

Todas estas amplitudes apresentam um comportamento peculiar para uma escala próxima de l_D (caso de matéria escura quente) ou para uma escala próxima de l_B (caso da

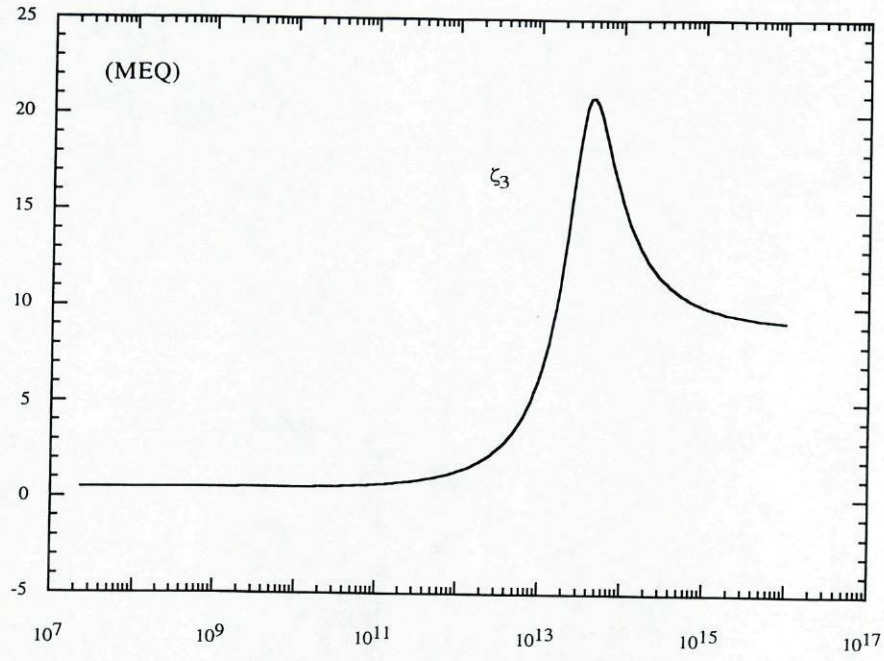


Figura 5.7: Variação com a escala (em $M_\odot$) da amplitude do modo de colapso na componente bariónica ζ_3, para o caso de matéria escura quente constituida por partículas com uma massa de 30 eV e utilizando um parâmetro $q = W_D/W_B = 19$. É notório o comportamento ressonante numa estreita banda da escala de massas. A escala vertical está em unidades arbitrárias.

matéria escura fria). Estas características do comportamento das amplitudes com a escala são ilustradas para os dois casos, nos gráficos das figuras 5.7 – 5.12.

No entanto, uma vez que o modo de colapso é aquele que pode conduzir à formação de estruturas, estamos particularmente interessados no estudo do comportamento com a escala das amplitudes ζ_1 e ζ_3, que são as que estão associadas a esse modo nas duas componentes.

Por outro lado, atendendo às relações (5.87) e (5.88), o estudo de apenas estas duas funções revela-se suficiente. Passemos pois à sua análise.

Definindo a variável $y = k^2$ e calculando a derivada de ζ_1 em ordem a y obtemos:

$$\frac{d\zeta_1}{dy} = \frac{W_B\left(c_D^2 - c_B^2\right)\left[W_D - W_B - 2\,q\,W_D - y\left(c_D^2 - c_B^2\right)\right]}{2\,q\left[(y-y_r)^2\left(c_D^2 - c_B^2\right)^2 + 4\,W_B\,W_D\right]^{3/2}}, \tag{5.89}$$

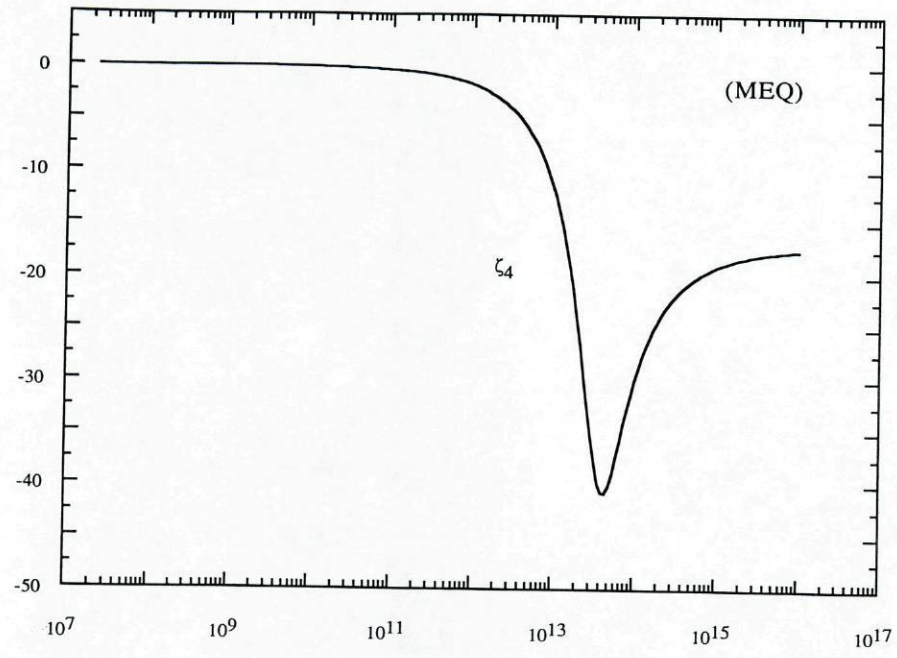


Figura 5.8: O mesmo que na figura anterior mas para o coeficiente do modo acústico, ζ_4. Notar que este coeficiente é sempre negativo para escalas superiores à escala de Jeans da mistura.

e relativamente a ζ_3 a sua derivada é dada por:

$$\frac{d\zeta_3}{dy} = \frac{W_D \left(c_D^2 - c_B^2\right) \left[\left(W_D - W_B\right) q + 2\, W_B - y \left(c_D^2 - c_B^2\right) q\right]}{2 \left[\left(y - y_{\rm r}\right)^2 \left(c_B^2 - c_D^2\right)^2 + 4\, W_B\, W_D\right]^{3/2}}\,, \tag{5.90}$$

onde q é o inverso de Q_0, isto é,

$$q \equiv \frac{1}{Q_0} = \frac{\Delta_{D_0}}{\Delta_{B_0}}, \tag{5.91}$$

e $y_{\rm r}$ é definido por

$$y_{\rm r} = \frac{W_D - W_B}{c_D^2 - c_B^2}\,. \tag{5.92}$$

Notar que $y_{\rm r}$ é positivo no caso de matéria escura quente e negativo no caso de matéria escura fria.

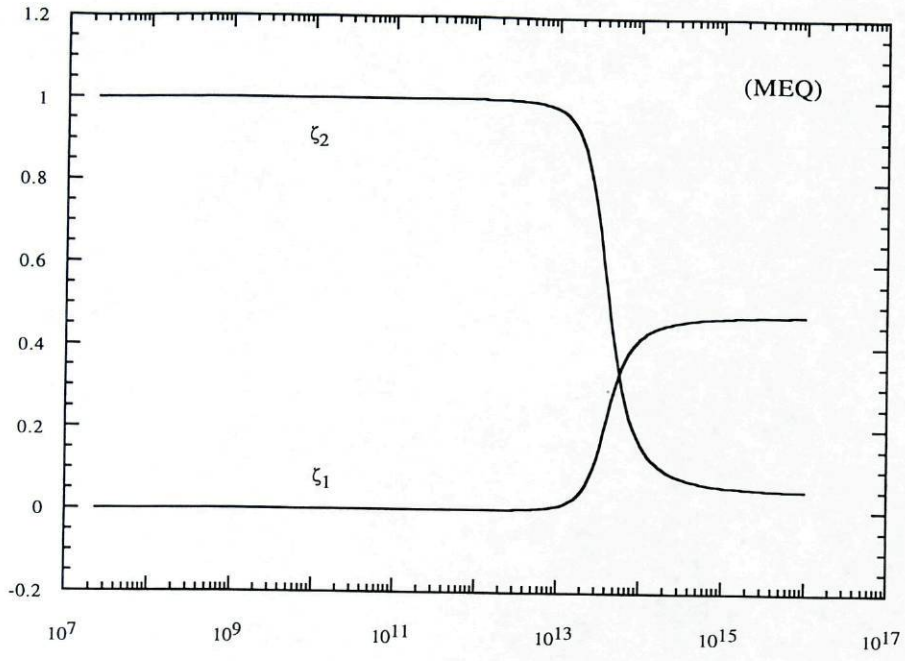


Figura 5.9: O mesmo que nas duas figuras anteriores mas neste caso para as amplitudes dos modos de colapso e acústico da componente de matéria escura, respectivamente ζ_1 e ζ_2. Ver a discussão destes comportamentos no texto.

Assim, verificamos que os extremos das amplitudes ζ_1 e ζ_3 (máximos neste caso), ocorrem para valores de k que são dados pelas expressões:

$$k\,(\zeta_1^{\max}) = \left[y_{\rm r} - \frac{2\,W_{_D}}{c_{_D}^2 - c_{_B}^2} \right]^{1/2} \tag{5.93}$$

no que se refere a ζ_1, e por

$$k\,(\zeta_3^{\max}) = \left[y_{\rm r} + \frac{2\,Q_0\,W_{_B}}{c_{_D}^2 - c_{_B}^2} \right]^{1/2} \tag{5.94}$$

no que respeita a ζ_3.

Analisando a equação (5.93) e atendendo à expressão de $y_{\rm r}$ dada pela equação (5.92), verificamos que ζ_1 terá um máximo (no intervalo do regime instável com significado físico $0 < k < k_{\rm M}$), apenas se as seguintes condições forem simultaneamente satisfeitas:

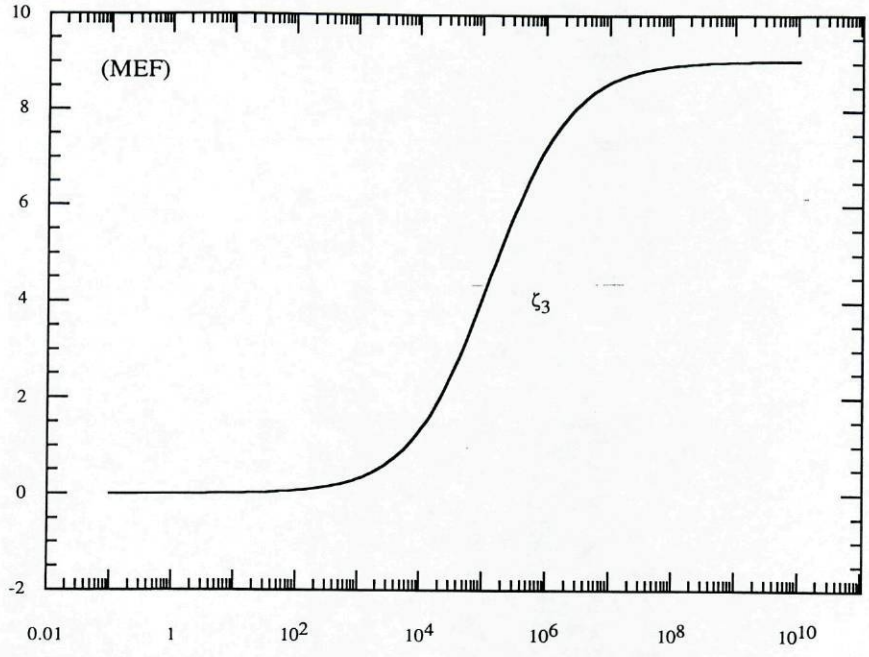


Figura 5.10: Variação com a escala (em $M_\odot$) da amplitude do modo de colapso na componente bariónica ζ_3, para o caso de matéria escura fria constituida por partículas com uma massa de 1 GeV e utilizando um parâmetro $q = W_D/W_B = 19$. Notar neste caso a ausência de comportamento ressonante. A escala vertical está em unidades arbitrárias.

$$q < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{W_B}{W_D}\right) \tag{5.95}$$

e

$$q > \frac{1}{2}\left(\frac{c_B^2}{c_D^2} - \frac{W_B}{W_D}\frac{c_D^2}{c_B^2}\right) \tag{5.96}$$

Imediatamente se verifica que no caso de matéria escura fria ($c_B > c_D$) os intervalos definidos por estas duas condições têm uma intersecção vazia e portanto ζ_1 nunca terá um máximo no intervalo $0 < k < k_M$. No caso de matéria escura quente ($c_B < c_D$) a intersecção daqueles intervalos é não vazia, o que significa que há valores do parâmetro q que permitem a existência de um máximo na amplitude ζ_1. Veremos no entanto que esses valores de q correspondem a condições iniciais muito pouco realistas.

Atendendo à equação (5.94) podemos igualmente concluir que amplitude ζ_3 apenas terá

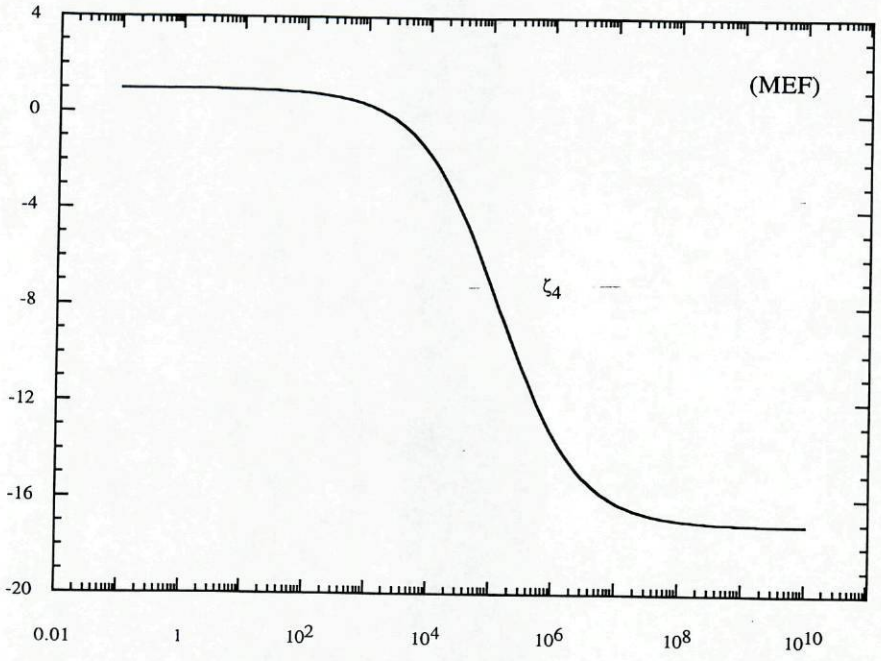


Figura 5.11: O mesmo que na figura anterior mas para o coeficiente do modo acústico, ζ_4. Notar que este coeficiente passa de positivo a negativo quando nos aproximamos da escala de Jeans da componente bariónica.

um máximo no mesmo intervalo, se Q_0 satisfizer simultaneamente as condições:

$$Q_0 > \frac{1}{2}\left(1 - \frac{W_D}{W_B}\right) \tag{5.97}$$

e

$$Q_0 < \frac{1}{2}\left(\frac{c_D^2}{c_B^2} - \frac{W_D}{W_B}\frac{c_B^2}{c_D^2}\right) \tag{5.98}$$

De uma forma análoga ao que foi feito para ζ_1 também aqui se verifica que apenas no caso de matéria escura quente a intersecção dos intervalos definidos por estas duas condições é não vazia e portanto apenas neste caso a amplitude ζ_3 poderá ter um máximo no intervalo pretendido.

Por outro lado é razoável admitir que a composição da perturbação inicial é semelhante à composição do estado não perturbado da mistura, isto é:

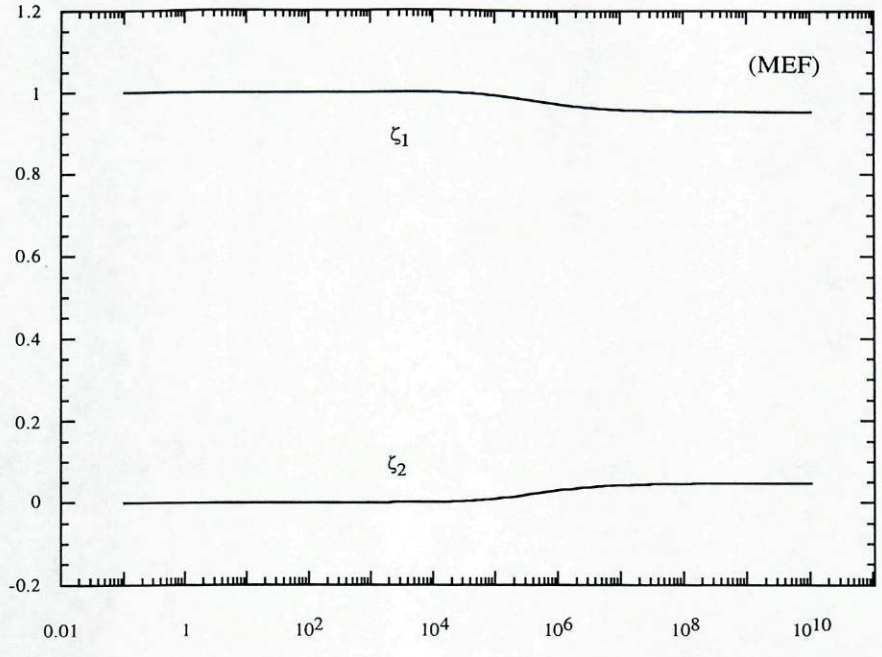


Figura 5.12: O mesmo que nas duas figuras anteriores mas neste caso para as amplitudes dos modos de colapso e acústico da componente de matéria escura fria, respectivamente ζ_1 e ζ_2. Ver a discussão destes comportamentos no texto.

$$q = \frac{W_D}{W_B} \tag{5.99}$$

Neste caso, atendendo à expressão (5.95), é fácil verificar que ζ_1 nunca terá um máximo no intervalo referido ($0 < k < k_M$), enquanto que ζ_3 poderá ter um, mas apenas se a seguinte condição for satisfeita:

$$\frac{c_D^2}{c_B^2} > \frac{W_B}{W_D} + \sqrt{\frac{{W_B}^2}{{W_D}^2} + \frac{W_D}{W_B}}. \tag{5.100}$$

Desta análise decorre que num universo como o nosso, dominado por matéria escura (isto é, $W_D > W_B$), o processo ressonante (expresso pela existência de máximos ou mínimos nas amplitudes dos modos do sistema) apenas ocorrerá se a matéria escura presente no Universo for quente e para além disso apenas afectará a componente bariónica. Por isso, na Secção 5.7 estudaremos mais detalhadamente apenas o comportamento com a escala do coeficiente

ζ_3, que é a amplitude associada ao modo de colapso da componente bariónica.

5.6.2 Interpretação física dos resultados obtidos

Do ponto de vista físico o significado dos resultados obtidos é simples: a ocorrência de pontos de máximo (ressonância) nas amplitudes ζ_1 ou ζ_3 a uma determinada escala, está relacionada com o facto de que para essa escala, a razão entre o número de partículas de uma componente que se encontram nos modos de colapso ou de decaimento, e o número de partículas da mesma componente que se encontram a oscilar, cresce substancialmente quando comparada com o valor da mesma razão calculada para outras escalas. Isto indica-nos que a escala em que ocorrem os máximos nas referidas amplitudes corresponde à região do espectro de massas em que existe a maior percentagem de material no modo de colapso e por consequência uma menor percentagem de material é deixado a oscilar. De algum modo é a existência de modos não instáveis (acústicos neste caso) que permite a ocorrência deste processo ressonante, uma vez que o despovoamento desses modos contribui decisivamente para o aumento do número de partículas no modo de colapso.

Por outro lado a ocorrência desta ressonância pode ser interpretada da seguinte forma:

Tal como referido por Grishchuk & Zel'dovich (1981), o sistema dinâmico descrito pela equação (5.11) pode ser visto como representando dois osciladores acoplados gravitacionalmente que são as duas componentes materiais que temos vindo a considerar.

Se tomarmos cada uma destas componentes separadamente cada uma delas tem a sua frequência própria de oscilação ou se preferirmos, o seu período característico de oscilação ou de colapso, consoante o regime que estejamos a considerar.

Considerando então as componentes bariónica e de matéria escura separadamente (isto é, completamente desacopladas), as suas frequências próprias de oscilação, respectivamente ω_D e ω_B, podem ser obtidas a partir das respectivas relações de dispersão, sendo dadas para cada uma das componentes por:

$$\omega_D^2 = c_D^2\, k^2 - W_D \tag{5.101}$$

e

$$\omega_B^2 = c_B^2\, k^2 - W_B \tag{5.102}$$

Estas duas relações mostram que as frequências próprias de oscilação das duas componentes são coincidentes para um valor do número de onda que designaremos por k_{r} e que é dado por:.

$$k_{\mathrm{r}} = \left(\frac{W_D - W_B}{c_D^2 - c_B^2} \right)^{1/2} . \tag{5.103}$$

Notar que $k_{\mathrm{r}} < k_D < k_B$ e portanto k_{r} pertence ao intervalo instável para qualquer das componentes tomadas separadamente.

Devemos ainda fazer uma chamada de atenção para o facto de a expressão de ${k_{\mathrm{r}}}^2$ já ter surgido em diversas situações anteriores sob a designação de y_{r}, que se encontra definido pela relação (5.92), isto é:

$$k_{\mathrm{r}} \equiv (y_{\mathrm{r}})^{1/2} \tag{5.104}$$

Pelo que atrás fica dito concluimos então que k_{r} é o número de onda para o qual as perturbações nas duas componentes quando tomadas separadamente, teriam os mesmos períodos característicos de colapso. É esta a explicação para a ocorrência de uma ressonância entre as duas componentes para um valor de k numa vizinhança de k_{r}, ou pelo menos em algumas das amplitudes dos modos de "oscilação" do sistema.

O comprimento de onda l_{r}, correspondente a k_{r}, é dado por:

$$l_{\mathrm{r}} = 2\pi \left(\frac{c_D^2 - c_B^2}{W_D - W_B} \right)^{1/2} = \left[\frac{l_D^2 - \frac{W_B}{W_D} l_B^2}{1 - \frac{W_B}{W_D}} \right]^{1/2} \tag{5.105}$$

e se $c_B \ll c_D$ e $W_B \ll W_D$, facilmente se conclui que l_{r} é da mesma ordem de grandeza de l_D (ligeiramente superior). A razão para não coincidir exactamente com l_D está ligado ao facto de o sistema ser constituido por dois osciladores que de certa forma exercem atrito (gravitacional) um sobre o outro.

Por outro lado podemos verificar que o valor de k_{r} tem que ser positivo para que a ressonância tenha significado físico. Pela análise da equação (5.103) imediatamente se conclui que isso só acontece quando a componente gravitacionalmente dominante, isto é, aquela com um maior valor de W, tiver também a maior velocidade do som. Dito de outro modo $(W_D - W_B)$ e $(c_D - c_B)$ terão que ter o mesmo sinal, pois caso contrário a escala para a qual as duas componentes teriam a mesma frequência própria de oscilação seria uma escala imaginária, o que não tem significado físico. Esta é pois uma condição necessária para a ocorrência de ressonância no sistema. Aplicando este resultado ao nosso Universo, para o qual as evidências observacionais apontam no sentido de ele ser dominado gravitacionalmente por matéria escura (isto é, $W_D > W_B$), podemos concluir que o Universo

não pode ser dominado por matéria escura fria, caso as estruturas formadas no período pós-recombinação, e que hoje observamos, tenham tido a sua origem neste processo ressonante.

Nesse caso (o de um Universo dominado gravitacionalmente por matéria escura fria), não existiria escala ressonante uma vez que $k_{\rm r}$ seria imaginário, o que comfirma os resultados que anteriormente foram obtidos através do estudo analítico das amplitudes ζ_j.

Assim, no que se segue é implicitamente assumido que a componente gravitacionalmente dominante (a de matéria escura), é aquela que tem uma maior velocidade do som, isto é:

$$W_{_D} > W_{_B} \qquad \text{e} \qquad c_{_D} > c_{_B} \ , \tag{5.106}$$

o que significa que estamos a considerar um modelo de Universo dominado por matéria escura quente.

Atendendo a que as amplitudes ζ_j dependem directamente das componentes dos vectores próprios β_j, podemos concluir que é o comportamento peculiar destas componentes, e especialmente da diferença $(\beta_1 - \beta_3)$ para o caso de matéria escura quente (e para $l \sim l_{\rm r}$, tal como referido na secção anterior), que é responsável pelo facto de que, de todas as perturbações que podem começar a crescer imediatamente após a época da recombinação, as que têm massas da mesma ordem de grandeza da escala (de massas) ressonante apresentam uma maior amplitude do que quaisquer outras (sobretudo no modo de colapso da componente com menor velocidade do som). Neste sentido consideramos que a escala $l_{\rm r}$ é uma escala privilegiada para a formação de estruturas bariónicas no nosso Universo.

Verifica-se assim que a existência da ressonância está intimamente ligada com a estrutura geométrica do espaço de fase do sistema dinâmico através das componentes dos vectores próprios β_j.

Devemos contudo ser cuidadosos na interpretação dos resultados até aqui obtidos uma vez que eles apenas são válidos para o instante em que o sistema é perturbado e não podem, pelo menos para já, ser extrapolados no tempo.

Para se ter uma ideia correcta da evolução dinâmica das perturbações teremos que resolver um problema mais complicado, isto é, teremos que incluir nas equações os termos devidos à expansão do Universo.

Por outro lado uma outra dificuldade surge devido ao facto de termos resolvido as equações apenas para uma componente de Fourier da solução geral, o que separa perturbações com comprimentos de onda distintos e que em princípio têm taxas de crescimento diferentes. Assim, em qualquer instante o contraste de densidade numa região perturbada

com uma escala l deverá ser integrado para toda a extensão dessa região, ou seja, para todos os valores de k no intervalo $0 < k < 1/l$.

5.7 Estudo detalhado do comportamento de ζ_3

Substituindo o valor de $k\,(\zeta_3^{\max})$ dado pela equação (5.94) na expressão de ζ_3 em (5.86), obtemos para a função ζ_3 o seu valor máximo $\zeta_3^{\max}$, dado por:

$$\zeta_3^{\max} = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{W_D}{W_B}\,q^2}\right) \tag{5.107}$$

que como se vê depende apenas das densidades não perturbadas das duas componentes e das condições iniciais. Como se constata o valor de $\zeta_3^{\max}$ será tanto maior quanto maior for o valor de q (isto é, quanto maior for a perturbação na matéria escura).

No caso de um Universo plano dominado por matéria escura, e atendendo aos limites impostos pela nucleosíntese primordial à produção de bariões, tem-se que $W_D/W_B \gg 1$. Assim, para condições iniciais nos contrastes de densidade de acordo com a expressão (5.99), podemos escrever

$$\zeta_3^{\max} \simeq \frac{1}{4}\left(\frac{W_D}{W_B}\right)^{3/2}. \tag{5.108}$$

Através desta expressão fica claro que a altura do pico ressonante aumenta com o aumento da razão W_D/W_B. Isto significa que quanto mais o Universo for dominado por matéria escura, mais importante será o efeito da ressonância na formação de estruturas bariónicas.

A importância da ressonância pode ser igualmente medida pela largura γ, da banda ressonante. Esta banda define-se (Feynman 1966), como sendo a largura do gráfico de $\zeta_3^{\,2}$ a meio da sua altura máxima, isto é, quando $\zeta_3^{\,2}(k) = \frac{1}{2}\,(\zeta_3^{\max})^2$.

Quanto mais larga é a banda ressonante menos significativa será a ressonância.

No nosso caso, os dois valores do número de onda, k_1 e k_2, que definem a largura da banda ressonante

$$\gamma = |k_1 - k_2| \tag{5.109}$$

devem portanto satisfazer a condição

$$\zeta_3^{\,2}(k_1) = \zeta_3^{\,2}(k_2) = \frac{1}{2}\,(\zeta_3^{\max})^2, \tag{5.110}$$

e é fácil verificar que esses valores são dados por:

$$k_1 = \left[k_r^2 + \frac{2\,W_D\,q}{d} + \left(\sqrt{2} - 4\,\zeta_3^{\max}\right)\frac{r}{d} \right]^{1/2} \tag{5.111}$$

e

$$k_2 = \left[k_r^2 + \frac{2\,W_D\,q}{d} - \left(\sqrt{2} - 4\,\zeta_3^{\max}\right)\frac{r}{d} \right]^{1/2} \tag{5.112}$$

onde

$$d = 4\,\zeta_3^{\max}\left(2\,\zeta_3^{\max} - \sqrt{2}\right)\left(c_D^2 - c_B^2\right) \tag{5.113}$$

e

$$r = \sqrt{W_D^{\,2}\,q^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right)W_B W_D + 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{W_B W_D\left(W_D^{\,2}\,q^2 + W_B W_D\right)}} \tag{5.114}$$

Para velocidades do som dadas (isto é, fixas para cada componente), pode verificar-se que a largura da banda ressonante é bastante sensível ao produto $W_B W_D$. Por outro lado, quanto mais afastados forem os valores das duas velocidades do som das duas componentes, c_D e c_B, menor é essa largura, o que implica a existência de uma ressonância significativamente mais forte.

Uma outra característica que devemos realçar é o comportamento de ζ_3 à esquerda e à direita da ressonância. Uma vez que não existe modo crescente (ou de colapso), para valores de $k > k_M$, apenas estamos interessados em estudar o comportamento de ζ_3 quando $k \to k_M^-$ e no limite assimptótico $k \to 0^+$.

O segundo destes limites depende apenas dos valores de W_B e W_D, e é dado por:

$$\lim_{k\to 0^+} \zeta_3 = \frac{1}{2}\,\frac{q\,W_D + W_B}{W_D + W_B} \tag{5.115}$$

enquanto que o primeiro, para além das densidades não perturbadas das duas componentes, depende também das suas velocidades do som, sendo dado por:

$$\lim_{k\to k_M^-} \zeta_3 = \frac{1}{2}\,\frac{q + \frac{W_B}{W_D}\frac{c_D^2}{c_B^2}}{\frac{c_B^2}{c_D^2} + \frac{W_B}{W_D}\frac{c_D^2}{c_B^2}} \tag{5.116}$$

No caso particular em que $q \sim W_D/W_B$, a partir da equação (5.115) obtém-se

$$\lim_{k\to 0^+} \zeta_3 \gg \frac{1}{2}, \tag{5.117}$$

enquanto que, se suposermos que q pode ser muito menor que 1, obtemos

$$\lim_{k\to 0^+} \zeta_3 \ll \frac{1}{2}. \tag{5.118}$$

Por outro lado, no caso de matéria escura quente que mais nos interessa considerar, ou seja quando

$$W_D/W_B \ll c_D/c_B\,, \tag{5.119}$$

verificamos que para valores razoáveis de q, se tem sempre

$$\lim_{k\to k_M^-} \zeta_3 \sim \frac{1}{2}. \tag{5.120}$$

Podemos portanto concluir que a curva de ζ_3 tem um comportamento distinto à esquerda e à direita da região da escala ressonante, isto é: para pequenas escalas o valor desta função é pouco sensível às condições iniciais, enquanto que para grandes escalas, (escalas superiores à escala ressonante), aquele valor depende crucialmente das condições iniciais.

Este tipo de comportamento para diferentes valores das condições iniciais descritas pelo parâmetro q, é ilustrado graficamente na Figura 5.13. Comparar com o gráfico de ζ_3 da Figura 5.7 que foi obtido para um valor do parâmetro q igual a 19, o que corresponde a supôr que

$$q = \frac{W_D}{W_B} = \frac{\Omega_D}{\Omega_B}, \tag{5.121}$$

utilizando para Ω_B e Ω_D os valores 0.05 e 0.95, respectivamente.

Pela análise da Figura 5.13 pode ver-se que quanto menor é a perturbação na componente de matéria escura, menor é também o valor da amplitude do modo de colapso da componente bariónica para escalas maiores que a escala ressonante. Este comportamento da amplitude ζ_3 para condições iniciais em que a perturbação na maréria escura é pequena, favorece assim em primeiro lugar o crescimento de perturbações com uma escala semelhante à escala ressonante, e depois as perturbações com escalas inferiores àquela.

O inverso acontece se a perturbação na componente de matéria escura aumenta relativamente à perturbação na componente bariónica. Nesse caso as escalas favorecidas para o

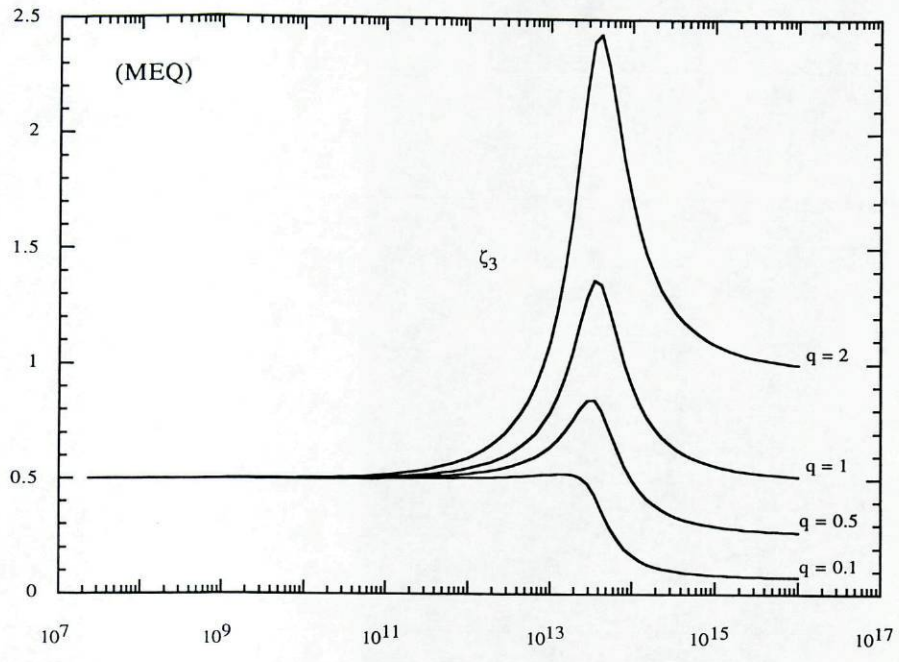


Figura 5.13: Variação com a escala (em Massas Solares), da amplitude do modo de colapso da componente bariónica, ζ_3, para condições iniciais distintas que são representadas por diferentes valores do parâmetro q. Notar que para $q > 1$ os valores de ζ_3 à direita da escala ressonante são maiores que os que se situam à esquerda daquela escala, enquanto que o inverso acontece no caso em que $q < 1$.

crescimento das perturbações serão (para além da escala ressonante), as escalas que lhe são superiores.

5.8 Conclusões

Em função dos resultados que obtivemos neste capítulo pensamos que numa mistura de duas componentes é incorrecta a utilização do critério de instabilidade gravitacional de Jeans tal como formulado para um fluido de apenas uma componente, devido sobretudo a duas razões:

1. A escala de Jeans para a mistura não corresponde a nenhuma das escalas de Jeans para qualquer das componentes quando tomadas separadamente.

2. Para além disso, numa mistura de duas componentes num meio estático há sempre material a qualquer escala, que se encontra a oscilar em modos acústicos, o que não acontece no caso de uma só componente. A existência destes modos não instáveis permite a ocorrência de uma ressonância entre as componentes de matéria escura e bariónica a uma determinada escala crítica ressonante $l_{\rm r}$.

Esta ressonância encontra-se ligada ao facto de que na região da escala $l_{\rm r}$ há um aumento do número de partículas que participam no modo de colapso, em vez de se encontarem associadas aos modos acústicos como acontece para outras escalas. Este efeito é apenas significativo numa estreita banda ressonante do espectro de massas das perturbações. Acreditamos que esta é a razão para a formação na época da recombinação, de estruturas galácticas com determinadas massas características.

Supondo que a componente de matéria escura é constituida por partículas tipo-neutrino com massas da ordem dos 30 eV, este efeito ressonante ocorre imediatamente após a época da recombinação para a escala de galáxias gigantes típicas. No capítulo seguinte ficará mais clara a razão pela qual se pode fazer uma estimativa para o valor da massa das partículas de matéria escura quente a partir do ajuste entre a escala deste tipo de galáxias e a escala ressonante na época da recombinação.

É interessante verificar que este valor para a massa das partículas é compatível com o valor previsto pelo modelo da *hipótese do decaimento da matéria escura* (Sciama 1990a, 1990b, 1992, 1993).[4] Devemos referir ainda que esta escala de massas é da ordem de $4 \times 10^{13} \mathrm{M}_{\odot}$ o que corresponde a uma massa bariónica, contida na mesma região, da ordem de

$$M_B \sim \frac{\rho_B}{\rho} M_{\rm r} \sim 2 \times 10^{12} \mathrm{M}_{\odot} \tag{5.122}$$

o que está de acordo com as massas típicas de galáxias gigantes.

Estes resultados numéricos ficarão mais claros no capítulo seguinte onde mostraremos igualmente como varia a escala ressonante $l_{\rm r}$, com o valor da massa das partículas que constituem a componente de matéria escura.

[4] A designação em inglês é Decaying Dark Matter Hypothesis.

6

Evolução do desencadear do crescimento de perturbações numa aproximação quase-estática

Procuremos somente a beleza, que a vida
é um punhado infantil de areia ressequida,
um som de água ou de bronze e uma sombra que passa ...
(Eugénio de Castro)

6.1 Introdução

No capítulo anterior considerámos um fluido estático (no seu estado não perturbado), constituido por duas componentes (uma de matéria escura e outra bariónica), sujeito apenas à sua auto-gravitação. Verificámos então que quando este fluido é perturbado linearmente, no período que se segue à recombinação é observado um processo ressonante na amplitude do modo de colapso da componente bariónica, no caso em que a componente de matéria escura é quente.

Esta ressonância ocorre para uma escala definida pela equação (5.94) que foi obtida analiticamente, e a que chamámos escala ressonante.

No entanto, como as equações que governam o comportamento do sistema gravitacional acoplado do capítulo anterior foram obtidas para o caso de um meio estático, elas representam uma situação pouco realista se pretendemos estudar o comportamento das perturbações num Universo em expansão. Em particular se quisermos estudar a sua evolução temporal. Por isso o valor da escala ressonante foi então determinado apenas para a época imediatamente após a recombinação, uma vez que é a partir desta época que a ressonância se manifesta e simultaneamente as perturbações na componente bariónica podem começar a crescer.

Neste capítulo começaremos por estabelecer da forma usual, as equações lineares acopladas que governam o comportamento das perturbações de densidade num fluido de duas componentes, mas num meio em expansão (Wasserman 1981; Solov'eva & Starobinsky 1985). Definiremos igualmente os parâmetros de que dependem essas equações, que serão escritas explicitamente em função do tempo cósmico t e de um parâmetro k^*. Este parâmetro encontra-se relacionado através de uma constante, com o número de onda co-móvel $k_{\rm cm}$, normalizado para a época actual.

Sempre que quisermos estudar o comportamento do sistema em intervalos de tempo

muito menores que o tempo característico de expansão do Universo, podemos desprezar os termos que a expansão introduz nas equações e o sistema reduz-se ao que foi estudado no capítulo anterior.

Utilizando esta aproximação que designaremos por *aproximação quase-estática*, podemos pois estudar o comportamento (com a escala) da amplitude do modo de colapso da componente bariónica (que designános por ζ_3), não apenas na época da recombinação mas numa vizinhança suficientemente pequena de qualquer outro instante $t_{\rm in}$.

Para isso admitimos que nessa vizinhança de $t_{\rm in}$ o sistema é caracterizado pelas equações quase-estáticas, desprezando portanto os termos devidos à expansão do Universo.

Esta aproximação é legítima uma vez que neste capítulo não estaremos interessados na análise exaustiva e detalhada da dependência temporal das perturbações, mas sim no comportamento relativo das amplitudes dos modos próprios do sistema (no desencadeamento do processo de crescimento das perturbações), e particularmente na evolução temporal desse comportamento. Assim, podemos obter uma estimativa da evolução da escala ressonante com o tempo cósmico.

Efectuado este estudo, pode concluir-se (como adiante mostraremos), que se as partículas de matéria escura quente tiverem uma massa entre aproximadamente 25 e 50 eV, a escala ressonante varia (desde a época da recombinação até à época actual), entre a massa das galáxias gigantes e a massa das galáxias anãs, fornecendo assim uma explicação possível para as escalas das galáxias que hoje observamos e em consequência para a formação galáctica.

Mais tarde (no capítulo seguinte), verificaremos que esta estimativa feita para a evolução temporal do valor da escala ressonante utilizando as equações aproximadas, se encontra de acordo com os resultados que iremos obter considerando as equações escritas na sua forma exacta.

6.2 Descrição do sistema gravitacional acoplado

Tal como no caso do capítulo anterior, a dinâmica de um fluido não relativista sujeito apenas à sua auto-gravitação, pode igualmente no caso de um meio em expansão ser descrita pelo conjunto das equações hidrodinâmicas usuais, escritas no capítulo abterior através das relações (5.1) – (5.5), isto é, as equações de continuidade e de Euler para cada uma das componentes e a equação de Poisson.

De forma a poder incluir nestas equações o efeito da expansão uniforme do Universo basta-nos estabelecer a relação entre o referêncial próprio (físico) e o referêncial co-móvel

com a expansão, o que é feito como habitualmente através do factor de escala do Universo $a(t)$, tal como no caso de apenas uma componente descrito no Capítulo 3.

Tal como no capítulo anterior, também aqui as variáveis dinâmicas são perturbadas linearmente e escritas na mesma forma que na equação (5.6).

É usual considerar que a solução de ordem zero das equações (5.1) – (5.5) representa neste caso um fluido infinito, co-móvel com a expansão do Universo e para o qual a densidade e a pressão têm o mesmo valor em qualquer ponto (Peebles 1980). Esta solução representa assim o estado não perturbado do fluido.

Supomos ainda que também neste caso as soluções do sistema acoplado constituido pelas equações (5.1) – (5.5) são funções de quadrado integrável nas variáveis espaciais e podem por isso ser desenvolvidas em integral de Fourier com respeito a essas mesmas variáveis.

Considerando como dissemos perturbações de primeira ordem (depois de efectuada a análise de Fourier com respeito às variáveis espaciais e de alguma manipulação), o sistema de equações (5.1) – (5.5) pode ser escrito para um observador no referêncial próprio na forma seguinte (ver por exemplo Peebles 1980 ou Longair 1989):

$$\ddot{\Delta}_D + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta}_D + \left(c_D^2\, k^2 - 4\pi G\rho_D\right)\Delta_D - 4\pi G\rho_B\Delta_B = 0 \tag{6.1}$$

$$\ddot{\Delta}_B + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Delta}_B + \left(c_B^2\, k^2 - 4\pi G\rho_B\right)\Delta_B - 4\pi G\rho_D\Delta_D = 0 \tag{6.2}$$

onde os símbolos ($\dot{}$) e ($\ddot{}$) representam respectivamente a primeira e segunda derivada em ordem ao tempo e Δ_j é o contraste de densidade na componente j, tal como definido pela equação (5.8) do capítulo anterior.

A velocidade do som adiabática na componente j (representada naquelas equações por c_j), foi também já definida na capítulo anterior através da equação (5.9).

O número de onda próprio da perturbação é representado por k. A sua relação com o número de onda co-móvel $k_{\rm cm}$ normalizado para a época actual, foi estabelecida no Capítulo 3 através das relações escritas em (3.27).

As equações (6.1) e (6.2) são válidas (na época dominada pela matéria), para qualquer instante da evolução linear do sistema, desde que as partículas de matéria escura sejam não relativistas.

Como dissemos anteriormente, se considerarmos intervalos de tempo suficientemente pequenos, de tal forma que possamos desprezar os efeitos da expansão do Universo, podemos

igualmente desprezar nas equações (6.1) e (6.2) os termos em $\dot{a}/a$, ficando reduzidos ao sistema de equações do capítulo anterior.

Nesse caso obtivemos as relações que traduzem o comportamento com a escala das amplitudes dos modos de oscilação do sistema que são as dadas pelas expressões (5.86), e efectuámos a análise desse comportamento para a época da recombinação. Uma vez que para condições iniciais realistas o processo ressonante ocorre na amplitude do modo de colapso da componente bariónica (ζ_3), é esta amplitude que mais nos interessa aqui considerar.

Vimos também que a escala ressonante podia ser obtida analiticamente, sendo a sua expressão dada pela equação (5.94).

Podemos contudo fazer o mesmo tipo de análise (a que se refere ao comportamento da amplitude ζ_3 com a escala e ao cálculo da escala ressonante), para qualquer instante dentro dos limites de aplicabilidade das equações (6.1) e (6.2). Isso permitir-nos-á obter a relação que traduz a forma como a amplitude ζ_3 varia (simultaneamente) com a escala e com o tempo cósmico bem como a função que descreve a dependência temporal da escala ressonante.

Para isso é necessário conhecer para o instante considerado e para cada uma das componentes, o valor das velocidades do som adiabáticas e o valor das densidades não perturbadas. Dito de outra forma, necessitamos de conhecer como variam no tempo as velocidades do som e as densidades não perturbadas de cada uma das componentes no nosso Universo. É isso que faremos nas secções seguintes.

Notar que os valores dos parâmetros de densidade (Ω_j) para cada uma das componentes, se mantêm constantes. Para além disso, uma vez que vamos apenas considerar o período pós-recombinação, também os coeficientes adiabáticos (γ_j) não sofrem qualquer alteração significativa.

6.3 Evolução temporal da amplitude ζ_3

Uma vez que supomos que a densidade actual do Universo é próxima da densidade crítica, podemos admitir que um modelo plano de Friedmann-Robertson-Walker, ou seja, um modelo de Einstein-de Sitter, é uma boa aproximação para a descrição da evolução do Universo (Weinberg 1972; Longair 1989).

Vimos no Capítulo 2 que neste modelo a densidade (crítica) decai com t^{-2} durante o período que aqui nos interessa considerar. Assim, a densidade ρ_j para a componente

j, tem a mesma dependência temporal e é dada pela relação (5.46) do capítulo anterior. Atendendo à definição de ρ_c (a densidade crítica), podemos escrever:

$$\rho_j = \frac{\Omega_j}{6\pi G t^2} , \tag{6.3}$$

Admitindo, como habitualmente que cada uma das componentes têm equações de estado da forma (recordar a equação (3.28) do Capítulo 3):

$$p_j \propto \rho_j^{\gamma_j} , \tag{6.4}$$

e utilizando as equações (5.9) e (6.3), conclui-se que a velocidade do som adiabática na componente j, pode ser escrita na forma seguinte:

$$c_j = \left(\gamma_j \frac{p_j}{\rho_j}\right)^{1/2} = c_{s_j} t^{1-\gamma_j} \tag{6.5}$$

onde γ_j é o coeficiente adiabático para a componente j e c_{s_j} são constantes.

Quanto ao número de onda próprio da perturbação k, a sua dependência temporal é expressa tal como no Capítulo 3, na forma:

$$k = \frac{k_{\rm cm}}{a} = k_{\rm cm} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} = \frac{k^*}{t^{2/3}} , \tag{6.6}$$

onde k^* é constante e t_0 representa a época actual.

Tal como referido também no Capítulo 3, o parâmetro k^* está associado a um número de onda co-móvel (no sentido em que para uma mesma escala co-móvel não tem variação temporal).

Assim a expressão que traduz o comportamento da amplitude do modo de colapso da componente bariónica ζ_3, pode ser escrita explicitamente em função do tempo e de k^* e deverá neste caso ser então escrita na forma:

$$\zeta_3(k^*, t) = \frac{1}{2} \frac{q - \beta_3(k^*, t)}{\beta_1(k^*, t) - \beta_3(k^*, t)} , \tag{6.7}$$

Por seu lado as expressões de β_1 e β_3 (ver as relações escritas em (5.27) do capítulo anterior), devem também neste caso ser escritas na forma seguinte:

$$\begin{cases} \beta_1(k^*, t) &= \frac{1}{2 W_D(t)} \left[h(k^*, t) + \sqrt{[h(k^*, t)]^2 + 4\, W_B(t)\, W_D(t)} \right] \\ \\ \beta_3(k^*, t) &= \frac{1}{2 W_D(t)} \left[h(k^*, t) - \sqrt{[h(k^*, t)]^2 + 4\, W_B(t)\, W_D(t)} \right] \end{cases} \tag{6.8}$$

Atendendo à definição de W_j, dada pela equação (5.10) e utilizando a equação (6.3), podemos escrever as relações anteriores na forma:

$$\begin{cases} \beta_1(k^*,t) &= \frac{3}{4}\frac{t^2}{\Omega_D}\left[h(k^*,t) + \sqrt{[h(k^*,t)]^2 + \frac{16}{9}\frac{\Omega_B\,\Omega_D}{t^4}}\right] \\ \\ \beta_3(k^*,t) &= \frac{3}{4}\frac{t^2}{\Omega_D}\left[h(k^*,t) - \sqrt{[h(k^*,t)]^2 + \frac{16}{9}\frac{\Omega_B\,\Omega_D}{t^4}}\right] \end{cases} \tag{6.9}$$

onde, atendendo às expressões (6.5) e (6.6), a função $h(k^*,t)$ é agora dada pela expressão (ver a equação (5.28) do capítulo anterior):

$$h(k^*,t) = \frac{2}{3}\,\frac{\Omega_D - \Omega_B}{t^2} + \left[\frac{c_{s_B}^2}{t^{(2\gamma_B - 2/3)}} - \frac{c_{s_D}^2}{t^{(2\gamma_D - 2/3)}}\right] k^{*2}\,, \tag{6.10}$$

Na equação (6.7) o parâmetro q representa o quociente Δ_D/Δ_B entre as perturbações nas duas componentes no instante t que tomarmos para instante inicial.

É claro que este parâmetro pode variar com o tempo, e em geral varia. No entanto, é razoável admitir que, no instante em que se estabelece a instabilidade gravitacional numa determinada região, o valor de q é sempre maior que 1, e como vimos no capítulo anterior para estes valores de q observa-se sempre um mecanismo ressonante e sempre no modo de colapso da componente bariónica (ver os gráficos da Figura 5.13 e a discussão no texto a ela associada).

Em virtude deste facto e como apenas estamos interessados numa estimativa da ordem de grandeza da escala ressonante em épocas distintas da evolução do Universo podemos considerar que q não varia significativamente quando consideramos os diferentes instantes em que regiões distintas são perturbadas. Isto é, a composição da perturbação permanece aproximadamente inalterada durante o regime linear e não depende da região perturbada que estejamos a aconsiderar.

Assim, a equação (6.7) permite-nos obter informações acerca da dependencia temporal e com a escala, da amplitude do modo de colapso na componente bariónica, isto é, do seu do comportamento tanto com o tempo t como com a escala (utilizando o parâmetro k^*). Para tal falta ainda especificar os coeficientes adiabáticos γ_j e as constantes c_{s_j} para as duas componentes.

Quanto aos coeficientes adiabáticos apenas nos interessa conhecer o seu valor no período da pós-recombinação uma vez que é aquele em que ocorre a ressonância.

Assim, depois da recombinação os bariões encontram-se já desacoplados da radiação e portanto podemos considerar que a componente bariónica se comporta como um fluido

ideal não relativista (Weinberg 1972; Zel'dovich & Novikov 1983), para o qual o coeficiente adiabático γ_B, é:

$$\gamma_B = \frac{5}{3} \cdot \tag{6.11}$$

Quanto à componente de matéria escura, uma vez que as equações que utilizamos se aplicam apenas ao período durante o qual as partículas de matéria escura são não relativistas (o qual se inicia antes da recombinação, mas depois do seu desacoplamento da radiação), esta componente comporta-se também durante todo o período de aplicabilidade das equações, como um fluido ideal não relativista (Peebles 1993), e portanto o seu coeficiente adiabático γ_D, é igualmente dado por:

$$\gamma_D = \frac{5}{3} \cdot \tag{6.12}$$

Como consequência disto, as velocidades do som adiabáticas para cada uma das componentes (c_j) podem exprimir-se em função da temperatura, através da expressão:

$$c_j = \left(\frac{5}{3} \frac{\mathrm{K_{Bol}} \mathrm{T}_j}{m_j} \right)^{1/2} \tag{6.13}$$

onde $\mathrm{K_{Bol}}$ é a constante de Boltzman e T_j e m_j são respectivamente a temperatura da componente j no instante considerado e a massa das partículas que constituem a mesma componente.

Para conhecer a forma como a amplitude do modo de colapso da componente bariónica (ζ_3) varia com a escala e com o tempo, falta apenas obter a função que nos permite conhecer em cada instante a temperatura de cada uma das componentes $\mathrm{T}_j(t)$.

Em função dos resultados do capítulo anterior estamos apenas interessados num modelo de Universo dominado por matéria escura quente. A dependência temporal da temperatura nesta componente está já descrita na Secção 5.4 do capítulo anterior.

No que respeita à componente bariónica é bem conhecido (Weinberg 1972), que devido ao acoplamento que existe entre esta componente e a radiação, no período anterior à recombinação as suas temperaturas são iguais, isto é:

$$\mathrm{T}_B = \mathrm{T}_\gamma \propto \frac{1}{a} \cdot \tag{6.14}$$

No entanto, depois da recombinação a temperatura dos bariões decai com a^{-2} (Weinberg 1972; Padmanabhan 1993), ou seja:

$$T_B \propto \frac{1}{a^2}. \tag{6.15}$$

Para além disso, o valor utilizado para a temperatura comum da radiação e do material bariónico na época da recombinação foi como no capítulo anterior de 3000 K (Kolb & Turner 1990).

Podemos assim fazer uma estimativa da temperatura de qualquer das componentes em qualquer instante, e consequentemente calcular as respectivas velocidades do som e o valor das constantes c_{s_j}.

Convém ainda lembrar que todos os resultados numéricos foram obtidos para um modelo de Universo plano ($\Omega = 1$), e supôs-se ainda como anteriormente, que $\Omega = \Omega_B + \Omega_D$ e utilizámos para Ω_B e Ω_D os mesmos valores do capítulo anterior, isto é: $\Omega_B = 0.05$ e $\Omega_D = 0.95$.

Nas figuras 6.1 – 6.4 ilustramos em representações gráficas tri-dimensionais, o comportamento da amplitude do modo de colapso da componente bariónica $\zeta_3(k^*, t)$, com o tempo e com a escala, para diferentes valores da massa das partículas de matéria escura quente.

Pela análise destes figuras podemos imediatamente concluir que para um mesmo valor da massa das partículas a escala ressonante decresce desde a época da recombinação até à época actual, como aliás seria de esperar.

Para além disso, através destes gráficos podemos igualmente fazer uma estimativa grosseira da massa das partículas de matéria escura. Se o mecanismo ressonante é o responsável pela formação de galáxias (durante o período pós-recombinação) com escalas que cubram todo o intervalo de massas observadas para estas estruturas, isto é: desde as galáxias anãs até às galáxias gigantes a massa das partículas de matéria escura quente m_D terá que se situar no intervalo:

$$10\,\mathrm{eV} \leq m_D \leq 100\,\mathrm{eV}. \tag{6.16}$$

De facto para massas superiores a 100 eV a escala ressonante nas épocas mais recentes é bastante inferior às massas das galáxias anãs, enquanto que na época da recombinação a ressonância ocorre para uma escala que é muito menor que a escala das galáxias gigantes ($\sim 10^{12-13}\,\mathrm{M}_\odot$) e portanto este tipo de galáxias não se poderiam formar.

Por outro lado se as partículas tiverem massas muito baixas (inferiores a 10 eV) passa-se o inverso, isto é: na época da recombinação a escala ressonante é muito superior à escala das galáxias gigantes e em épocas mais recentes mantém-se acima dos valores aceitáveis para

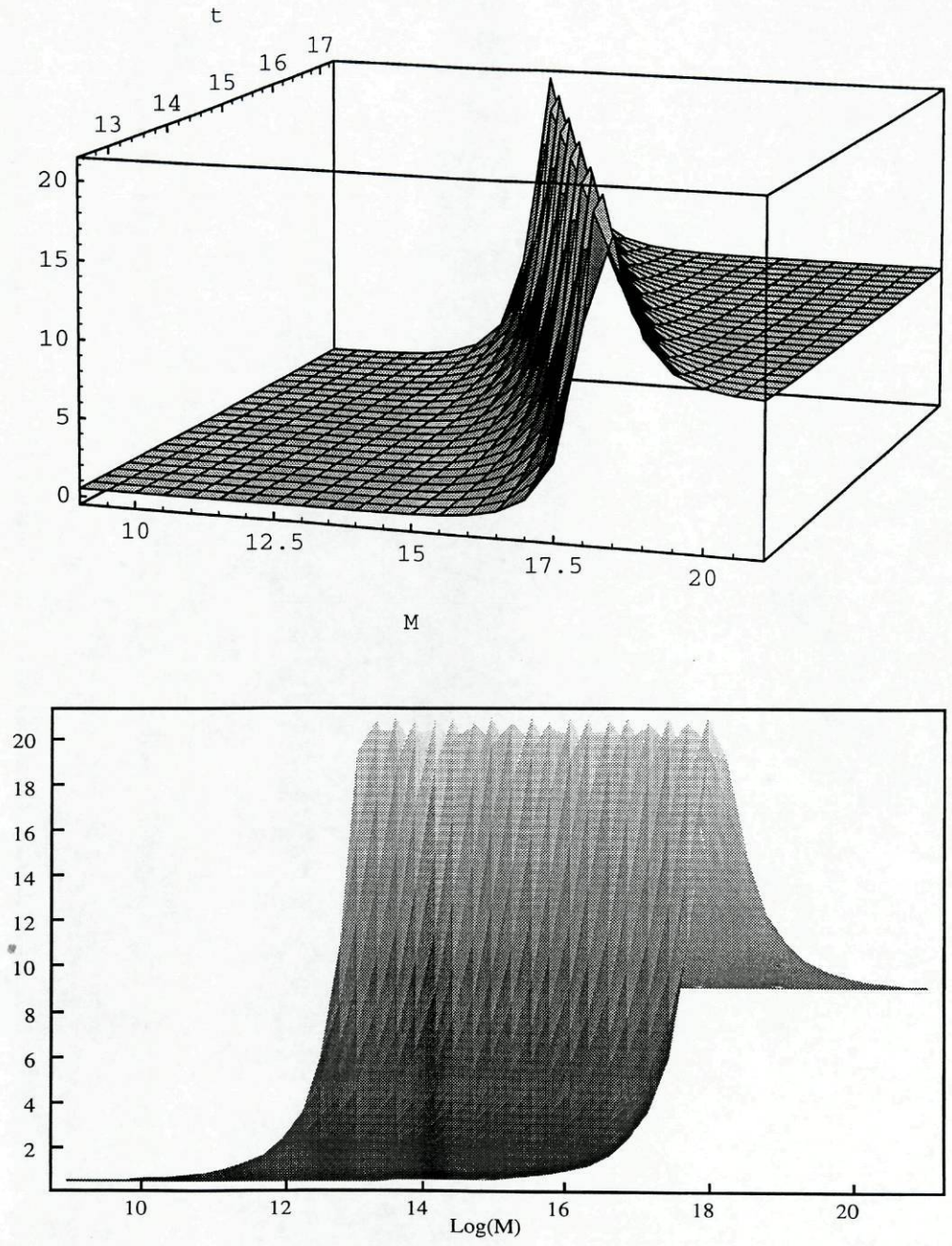


Figura 6.1: Comportamento da amplitude do modo de colapso da componente bariónica $\zeta_3(k^*, t)$, com o tempo t (em s) e com a escala M (em $M_\odot$), desde a recombinação até à época actual considerando que as partículas têm uma massa $m_D = 1\,\mathrm{eV}$. O gráfico inferior representa a projecção do gráfico tri-dimensional (em cima), no plano (M, ζ_3).

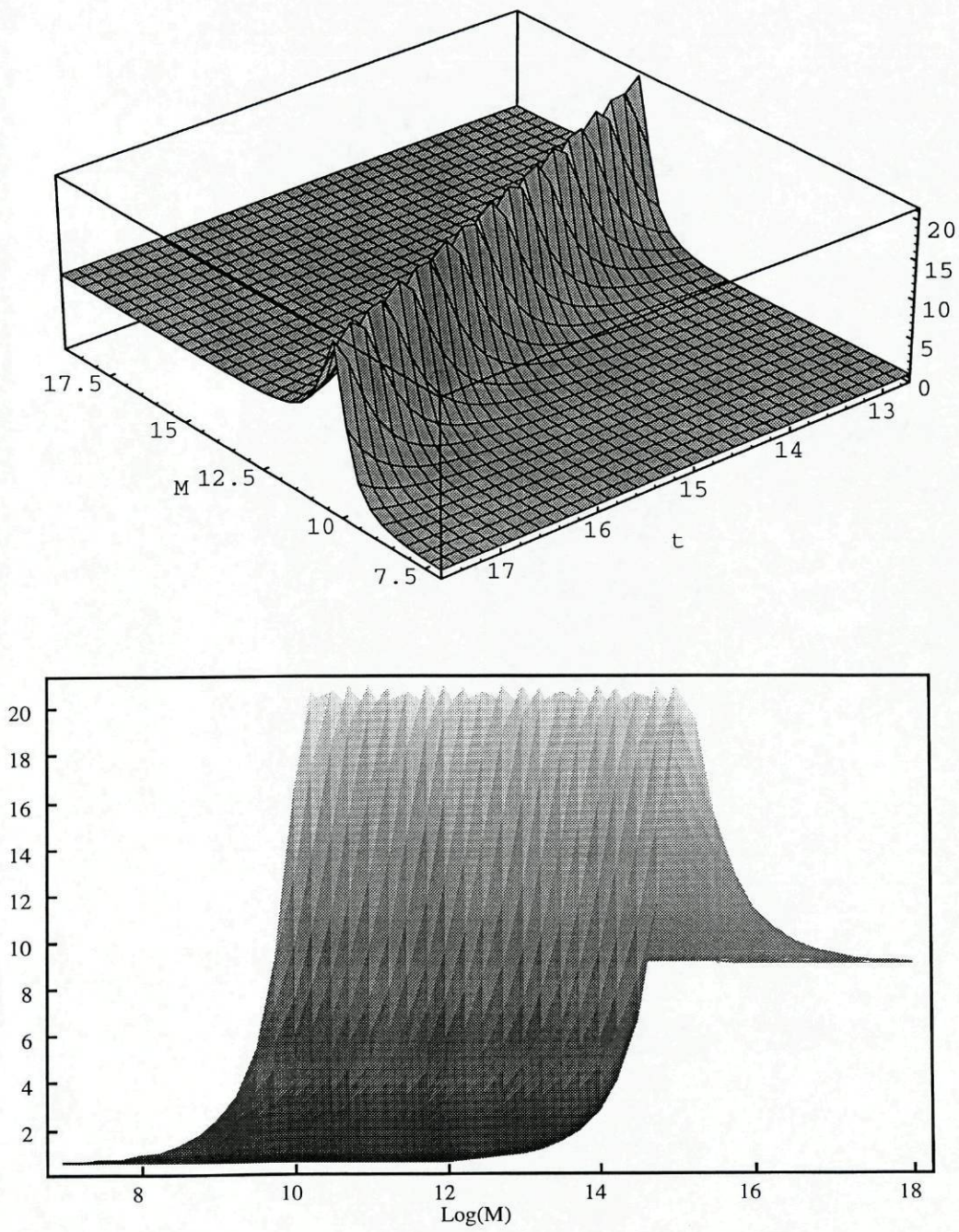


Figura 6.2: O mesmo que na figura anterior mas para o caso em que as partículas de matéria escura quente têm uma massa $m_D = 10\,\mathrm{eV}$, e considerando uma perspectiva diferente para o gráfico tri-dimensional.

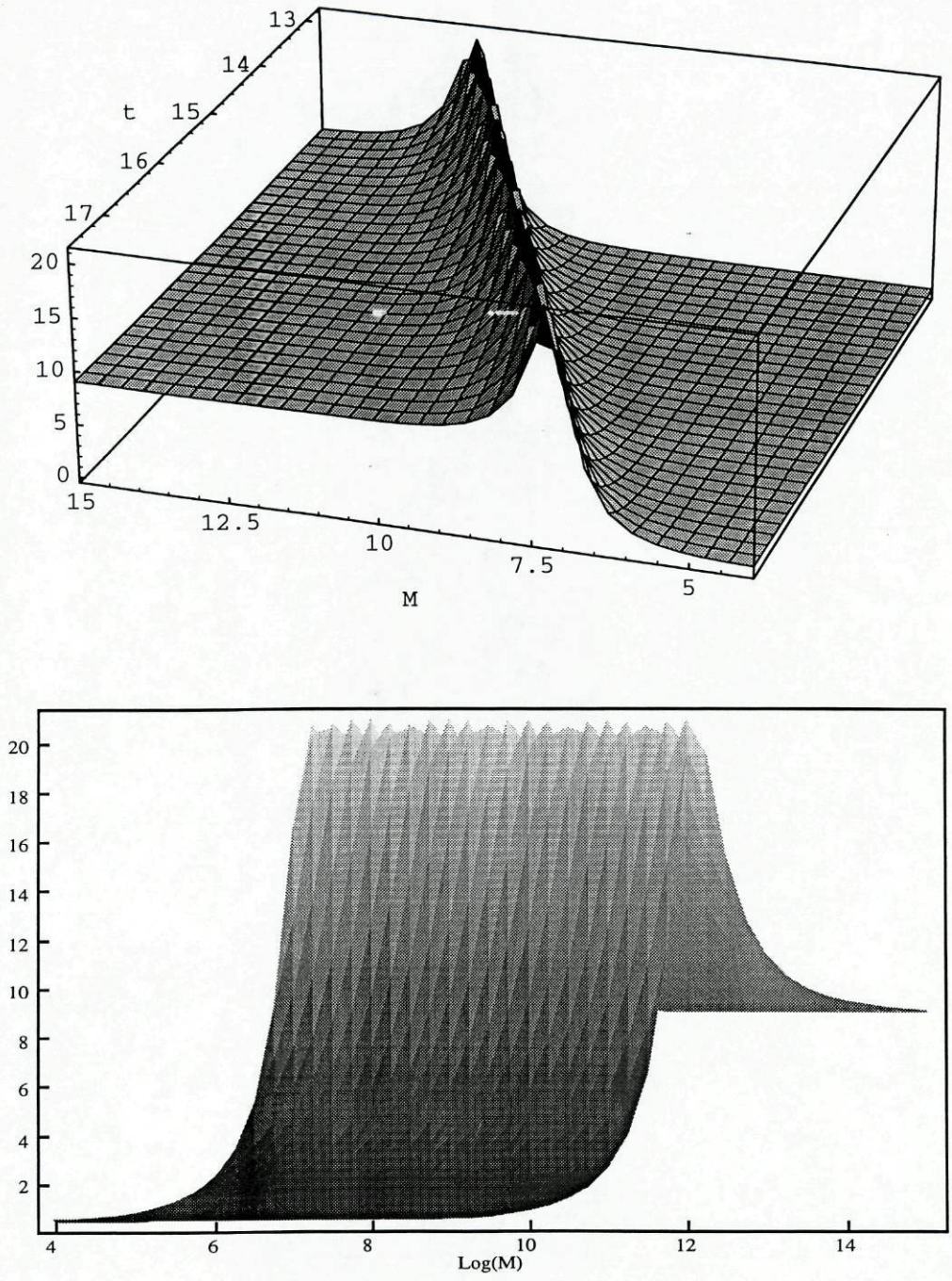
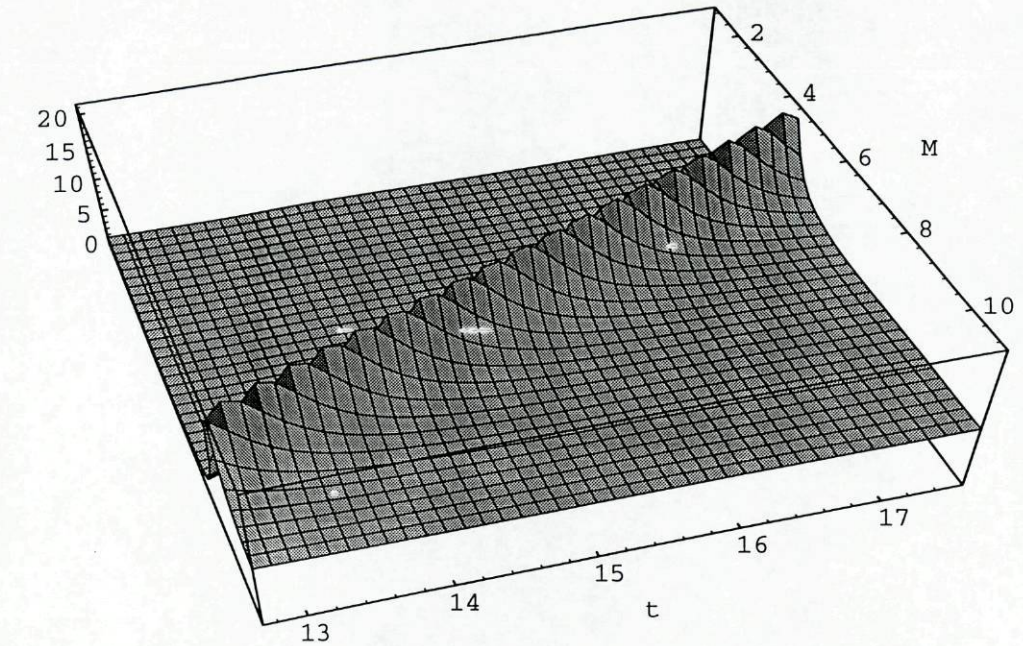


Figura 6.3: O mesmo que nas figuras anteriores utilizando neste caso um valor de 100 eV para a massa das partículas de matéria escura quente, e considerando uma nova perspectiva tri-dimensional.



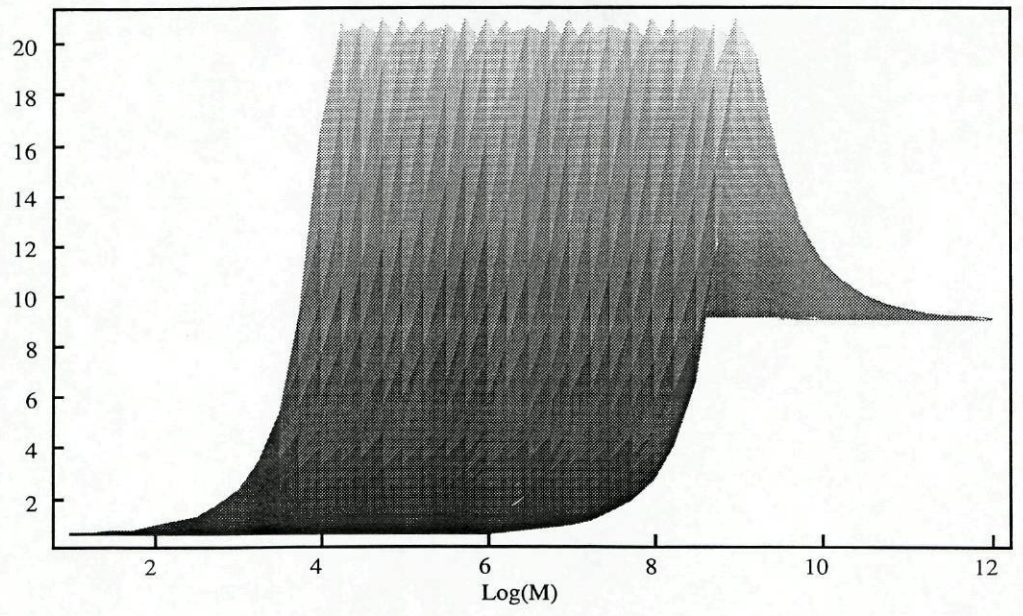


Figura 6.4: O mesmo que nas três figuras anteriores mas para o caso em que as partículas têm o maior valor para a massa: $m_D = 1\,\mathrm{KeV}$, e considerando uma quarta perspectiva para o gráfico tri-dimensional

as galáxias anãs ($\sim 10^{7-8}\,M_{\odot}$), sendo neste caso impossível formar galáxias deste tipo.

O estudo efectuado na secção seguinte permitir-nos-á melhorar um pouco mais a estimativa para a massa das partículas de matéria escura quente, isto é: apertar o intervalo definido em (6.16).

6.4 A evolução temporal da escala ressonante e a sua relação com a formação galáctica

O comportamento ressonante da amplitude do modo de colapso da componente bariónica ζ_3, que descrevemos com algum detalhe no capítulo anterior e a respeito do qual acabamos de apresentar alguns resultados numéricos acerca da sua evolução temporal, pode quanto a nós, ser o mecanismo responsável pela formação de estruturas na época pós-recombinação. É pois de admitir que a escala destas estruturas seja da mesma ordem de grandeza da escala ressonante.

Por outras palavras, a ressonância seleciona as escalas que são mais favoráveis ao crescimento das perturbações que como vimos é a escala ressonante.

De acordo com os resultados obtidos na secção anterior as massas típicas de galáxias gigantes devem corresponder à massa das perturbações que na época da recombinação tinham uma escala próxima da escala ressonante, já que em instantes posteriores esta escala será menor e portanto já não será possível formar este tipo de galáxias, pelo menos através deste mecanismo ressonante.

Este mecanismo pode assim fornecer uma explicação para a razão pela qual na época da recombinação, se formam estruturas com as massas típicas de galáxias gigantes, apesar de a massa de Jeans para os bariões, quer imediatamente antes quer imediatamente após aquela época, ser respectivamente muito maior ou muito menor que as massas típicas dessas galáxias.

Se as estruturas galácticas forem de facto formadas por um processo ressonante deste tipo, podemos ainda obter informações sobre a natureza da matéria escura presente no universo.

Com efeito, como mostrámos no capítulo anterior, num fluido constituido por duas componentes perturbado linearmente, é observada a ocorrência de um mecanismo ressonante sempre que a componente gravitacionalmente dominante (isto é, aquela com maior densidade), é também aquela que possui uma velocidade do som mais elevada, ver a equação (5.22).

Assim, supondo que o parâmetro de densidade do universo é $\Omega \sim 1$ e adoptando um valor para o parâmetro de densidade na componente bariónica de acordo com a nucleosíntese primordial do modelo padrão (ver a Secção 5.4 do capítulo anterior), podemos imediatamente concluir que o universo é gravitacionalmente dominado por matéria escura não bariónica, isto é, a condição

$$W_D > W_B \,, \tag{6.17}$$

terá necessariamente que ser verificada.

Recordando a equação (5.22), podemos concluir que no caso de a matéria escura ser fria, ou seja no caso em que $c_B > c_D$, um tal processo ressonante não é possível, e portanto as escalas galácticas não seriam escalas previligiadas para a formação de estruturas, como tudo leva a crer que são.

Somos então conduzidos à conclusão de que a maior parte da matéria escura presente no Universo é matéria escura quente, ou seja, é constituida por partículas leves (possivelmente neutrinos). Esta conclusão decorre imediatamente da condição para a existência do mecanismo ressonante. Na verdade, supondo válida a condição anterior (6.17), a ressonância apenas existe quando $c_D > c_B$, sendo particularmente significativa quando se tem (lembrar as equações (5.111) e (5.112) do capítulo anterior e a discussão respectiva então efectuada):

$$c_D \gg c_B \,. \tag{6.18}$$

De acordo com este cenário, podemos então fazer uma estimativa para m_D, o valor da massa das partículas de matéria escura quente.

A escala para a qual ocorre o pico ressonante em ζ_3 é particularmente sensível à velocidade do som na componente escura c_D, ver a equação (5.94). Por sua vez c_D é função da massa m_D e portanto para uma determinada época, podemos obter uma relação entre a escala ressonante e a massa m_D. Assim, numa primeira estimativa que de certo modo serve para justificar o valor de m_D utilizado no capítulo anterior (30 eV), podemos impor que a escala ressonante na época da recombinação seja da ordem de grandeza da escala das galáxias gigantes típicas. Obtemos assim uma estimativa para o valor da massa das partículas de matéria escura.

Uma vez que é o valor da massa das estruturas materiais que se obtém (directa ou indirectamente) por observação, convém estabelecer antes de mais a relação entre M (a massa total da perturbação), e k (o seu número de onda).

A massa M é então a massa total contida numa região esférica de raio $l/2 = \pi/k$, e é dada por:

$$M = \frac{4}{3}\pi^4 \frac{\rho}{k^3}, \tag{6.19}$$

onde $\rho = \rho_B + \rho_D$ é a densidade total, não perturbada, na região esférica considerada.

Para obter uma estimativa para a massa das partículas de matéria escura, supômos então que as galáxias gigantes iniciam o colapso gravitacional imediatamente após a época da recombinação devido ao processo ressonante descrito, e têm portanto massas que correspondem à escala para a qual ζ_3 (na mesma época) atinge o seu máximo.

Substituindo na equação (6.19) o valor do número de onda k pelo valor que ele toma quando ζ_3 atinge o pico ressonante, isto é $k = k(\zeta_3^{\max})$, tal como definido pela equação (5.94), podemos estabelecer a relação seguinte entre M (em Massas Solares) e m_D (em eV):

$$m_D = 210\,\pi^{5/6}\,\frac{\rho^{1/3}}{\rho_D^{1/2} M^{1/3}} \tag{6.20}$$

Ao derivar esta equação, suposemos como anteriormente que $W_D \gg W_B$ e que $c_D \gg c_B$.

Os valores de W_j e das velocidades do som c_j calculados para a época da recombinação para cada uma das componentes, que aparecem na equação (5.94) utilizada para obter a equação (6.20), são dados respectivamente pelas equações (5.48) e (5.49) do capítulo anterior.

Na figura 6.5 representa-se para a época imediatamente após a recombinação, a escala M para a qual ocorre o pico ressonante na amplitude do modo de colapso da componente bariónica ζ_3, em função do valor m_D da massa das partículas de matéria escura. Consideramos que M é a massa total das estruturas que se formam naquela época.

Supondo que uma galáxia gigante típica iniciou o seu colapso imediatamente após a época da recombinação (devido ao processo ressonante) e tem uma massa bariónica de aproximadamente $10^{12}\,\mathrm{M}_\odot$, podemos então a partir do gráfico da figura 6.5 estimar que o valor da massa das partículas de matéria escura deverá estar aproximadamente entre 25 e 50 eV, isto é:

$$25\mathrm{eV} \leq m_D \leq 50\mathrm{eV}\,. \tag{6.21}$$

Está assim justificado o valor de 30 eV utilizado na elaboração dos gráficos numéricos do capítulo anterior relativos ao caso da matéria escura quente.

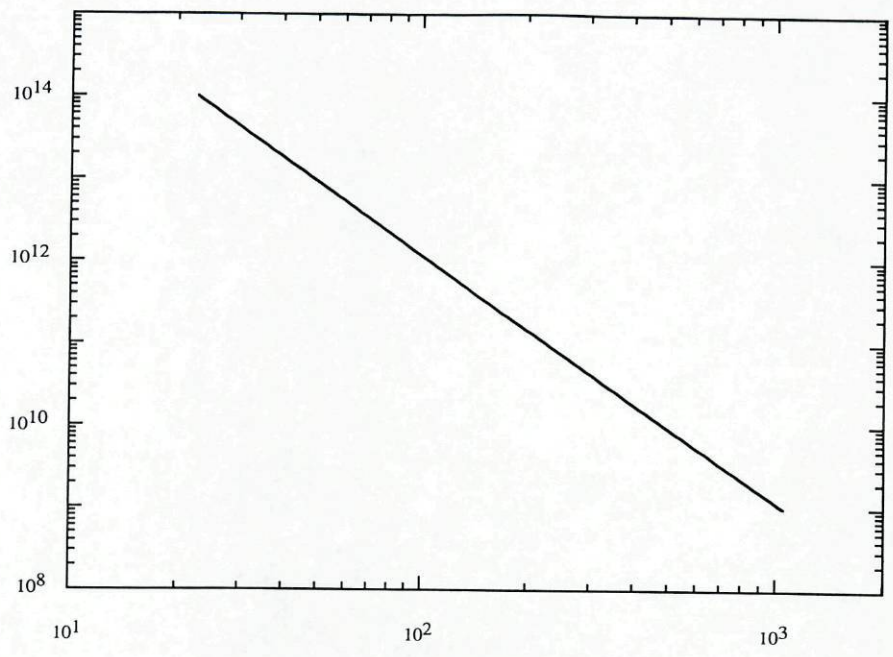


Figura 6.5: Variação da escala M (em $M_{\odot}$), para a qual ocorre o pico ressonante na amplitude ζ_3, com a massa m_D (em eV) das partículas que constituem a componente de matéria escura quente. Representamos M no eixo vertical e m_D no horizontal.

Pensamos ainda ser importante referir que os valores possíveis dados pela expressão (6.21) para a massa das partículas de matéria escura quente estão em concordância com os limites cosmológicos para as massas dos neutrinos, (Peebles 1993), bem como com os valores previstos para a massa das mesmas partículas pelo modelo da *hipótese do decaimento da matéria escura* tal como já referido no final do capítulo anterior.

Devemos acrescentar que esta estimativa é feita utilizando apenas os resultados do capítulo anterior. Devido ao facto da escala ressonante decrescer com o tempo, consideramos que as galáxias que primeiro se formam (ou seja, as que iniciam o colapso gravitacional imediatamente após a época da recombinação), são as galáxias gigantes ou supergigantes, e portanto o valor da massa das partículas deve decorrer do ajuste entre a escala resonante (calculada para a época da recombinação) e as massas típicas destas galáxias.

Contudo não há razão, pelo menos aparentemente, para que todas as galáxias iniciem a sua formação durante os breves instantes imediatamente após a época da recombinação.

Por isso podemos supôr que o início do colapso das regiões perturbadas pode ocorrer em épocas muito mais recentes

Como vimos na secção anterior, as densidades não perturbadas ρ_j e as velocidades do som c_j nas duas componentes vão variar durante o período pós-recombinação e em consequência ocorre a variação temporal da escala ressonante.

Assim, admitindo que a maior parte das as galáxias se formou por um processo ressonante, podemos concluir que a massa das galáxias depende da época em que se estabelece a perturbação proto-galáctica.

Para ter uma ideia mais clara de como evolui com o tempo a escala ressonante vamos escrever a expressão que representa a escala ressonante, que no capítulo anterior designámos por $k\left(\zeta_3^{\max}\right)$, em função do tempo t.

Assim, se na equação (5.94) do capítulo anterior, utilizarmos as expressões (6.3) e (6.5), obtemos:

$$k\left(\zeta_3^{\max}\right) = \left[\frac{2}{3}\frac{q\,\Omega_D - (q-2)\,\Omega_B}{q\left(c_{s_D}^2\, t^{2(2-\gamma_D)} - c_{s_B}^2\, t^{2(2-\gamma_B)}\right)}\right]^{1/2} . \tag{6.22}$$

Atendendo aos valores de γ_j dados pelas expressões (6.11) e (6.12), esta expressão pode ser escrita na forma:

$$k\left(\zeta_3^{\max}\right) = \left[\frac{2}{3}\frac{q\,\Omega_D - (q-2)\,\Omega_B}{q\left(c_{s_D}^2 - c_{s_B}^2\right)}\right]^{1/2} t^{-1/3} . \tag{6.23}$$

Imediatamente se conclui atendendo à expressão (6.19), que a massa associada à escala ressonante M_r, isto é a massa contida numa região de raio $\pi/k\left(\zeta_3^{\max}\right)$, tem a seguinte dependência temporal:

$$M_r(t) \propto \frac{\rho(t)}{\left[k\left(\zeta_3^{\max}\right)\right]^3} \propto \frac{1}{t} . \tag{6.24}$$

Notar que o número de onda $k\left(\zeta_3^{\max}\right)$ é um número de onda próprio. Para obtermos o correspondente número de onda co-móvel normalizado para a época actual teremos que utilizar as relações escritas na expressão (6.6).

Podemos então utilizar a expressão (6.23) para ilustrar graficamente a evolução temporal da escala ressonante. Esta evolução é representada na Figura 6.6 onde as diversas curvas representam essa evolução para os diferentes valores (indicados) da massa das partículas de matéria escura quente.

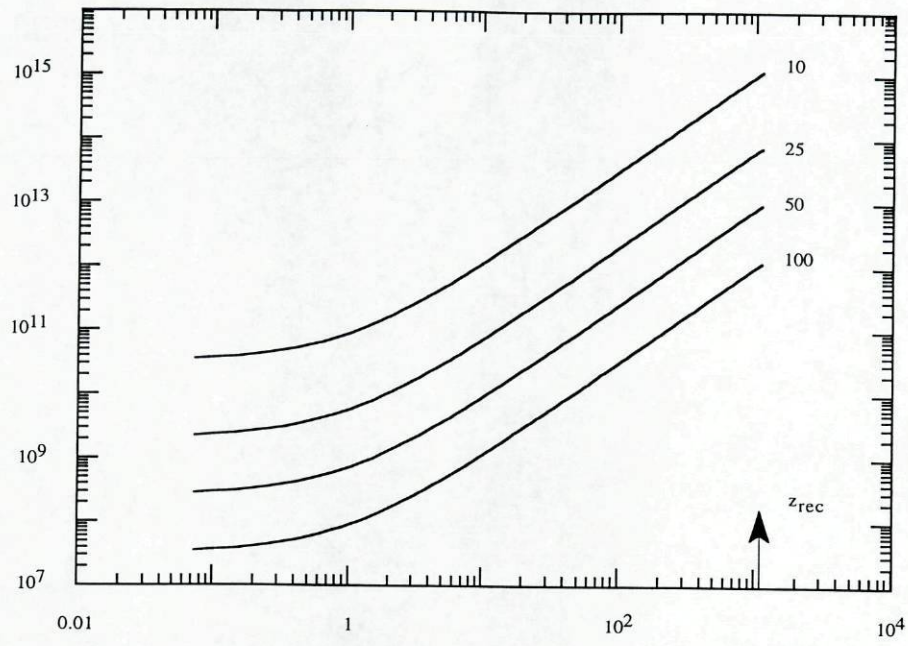


Figura 6.6: Dependência temporal da escala ressonante (em $M_\odot$) para diferentes valores da massa das partículas de matéria escura quente que estão indicados em eV. Como variável independente utilizámos o desvio cosmológico para o vermelho z em vez do tempo cósmico t utilizando a relação $1 + z \propto t^{-2/3}$, válida para um modelo de Universo de Einstein-de Sitter.

Admitindo então que as massas típicas das galáxias que hoje se podem observar no Universo (desde as galáxias anãs até às galáxias gigantes) corresponde ao valor da escala ressonante em diferentes épocas de evolução do Universo no período pós-recombinação, verificamos que a estimativa feita anteriormente para a massa das partículas de matéria escura, está de acordo com a que se pode fazer pela análise da equação (6.24), ou equivalentemente pela análise do gráfico da Figura 6.6.

Assim, admitindo que o espectro de massas galácticas varia entre aproximadamente 10^8 e $10^{12}\,M_\odot$ (considerando apenas o material bariónico), concluimos que um valor para a massa das partículas de matéria escura entre 25 e 50 eV, será o que melhor representa a evolução temporal da escala ressonante de forma a poderem formar-se galáxias no período pós-recombinação com as massas hoje observadas.

A evolução temporal da escala ressonante para aqueles valores da massa das partículas

permite assim obter uma explicação para o intervalo relativamente alargado a que pertencem as massas observadas das estruturas galácticas (desde as anãs até às gigantes).

7

Comportamento das perturbações de densidade num fluido de duas componentes

—

Caso de um meio em expansão

... a mim parece-me que tenho sido uma criança que brinca ...
enquanto o imenso oceano da verdade jaz perante mim,
como uma incógnita.

(I. Newton)

7.1 Introdução

Em função da análise desenvolvida nos dois últimos capítulos, e apesar da sofisticação de todos os modelos de matéria escura até agora desenvolvidos, pensamos que nos estudos sobre o comportamento de um fluido constituido por diversas componentes, (que acreditamos ser a aproximação mais razoável para o conteúdo material que preenche o Universo à escala cósmica), bem como nos estudos sobre a forma como se estabelecem as instabilidades gravitacionais num fluido desse tipo devido à sua auto-gravitação, há alguns pontos cruciais a que não foi dada a devida atenção.

Em particular, um estudo detalhado das amplitudes dos distintos modos próprios de oscilação de uma mistura constituida por diversas componentes, nunca tinha sido efectuada. No Capítulo 5 mostrámos que ao considerarmos um fluido constituido por duas componentes com determinadas características, se forem satisfeitas certas condições iniciais, ocorre uma ressonância entre as duas componentes do fluido.

Apesar de, no caso do fluido cósmico, a ressonância ocorrer apenas para o caso de um Universo dominado por matéria escura quente, devemos referir que, tal como no Capítulo 5, o formalismo aqui utilizado é perfeitamente geral e aplicável a qualquer tipo de fluido constituido por duas componentes.

Neste capítulo generalizamos o estudo efectuado no Capítulo 5 sobre o estabelecimento de escalas críticas gravitacionalmente instáveis. Tal como nesse capítulo é feita a análise para o caso mais simples de um fluido multi-componente, (isto é, com apenas duas componentes), mas considerando agora nas equações os termos devidos à expansão do meio. Mostramos que, sob condições iniciais razoáveis, e no caso de a matéria escura existente no Universo ser quente, a ressonância que se verifica entre as duas componentes se manifesta, tal como anteriormente, nas amplitudes dos modos da componente bariónica, mas apenas no período que se segue à recombinação.

Utilizando neste caso as equações escritas na sua forma correcta, ou seja, para o caso geral (considerando os termos devidos à expansão do Universo), mostramos também que a dependência temporal da escala ressonante coincide com a que se obteve considerando a aproximação quase-estática.

O estudo da evolução temporal das escalas críticas juntamente com o da escala ressonante irá, como veremos adiante, permitir concluir que a *escala crítica efectiva* que estabelece a instabilidade gravitacional antes da recombinação, e que é a escala de Jeans da mistura, encontra, depois daquele período, uma continuação natural na escala ressonante.

Em consequência disto consideramos ter fortes razões para acreditar que durante o período da pós-recombinação o mecanismo ressonante é o responsável pela seleção das escalas preferênciais nas quais se gera a instabiladade gravitacional que conduz ao desenvolvimento das estruturas hoje observadas.

Este capítulo encontra-se organizado do modo seguinte:

- Na Secção 7.2 são estabelecidas, da forma usual, as equações lineares acopladas que governam o comportamento das perturbações de densidade num fluido de duas componentes, bem como definidos os parâmetros de que depende a solução geral.

- Um estudo qualitativo do sistema dinâmico que descreve a evolução linear das perturbações de densidade é efectuado na Secção 7.3, onde também são obtidas as escalas críticas associadas aos modos próprios de oscilação do sistema gravitacional acoplado. Este estudo analítico é complementado com algumas representações gráficas (numéricas) de forma a tornar mais claros alguns dos resultados qualitativos obtidos.

- Na Secção 7.4 descreveremos a ressonância que como dissemos é, em nossa opinião, o mecanismo responsável pela formação das estruturas com as escalas típicas das galáxias, estudando em particular a sua evolução temporal.

- Finalmente na Secção 7.5 discutiremos algumas das implicações cosmológicas dos resultados obtidos.

7.2 Descrição do sistema gravitacional acoplado

Vimos no capítulo anterior que um sistema gravitacional constituido por duas componentes num meio em expansão, sujeito apenas à sua auto-gravitação e perturbado linearmente é descrito pelas equações (6.1) e (6.2).

Ao considerar um modelo de Universo de Einstein - de Sitter, o termo naquelas equações que é devido à expansão $(\dot{a}/a)$, é dado, para a época dominada pela matéria, por:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}, \tag{7.1}$$

Por seu lado os parâmetros (a densidade, a velocidade do som e o número de onda), envolvidos nas equações (6.1) e (6.2) têm uma dependência temporal que foi já descrita na Secção 6.3 do capítulo anterior.

Assim as equações (6.1) e (6.2) que descrevem o comportamento do sistema podem então escrever-se explicitamente em função do tempo cósmico t e do parâmetro k^* na forma seguinte:

$$\ddot{\Delta}_D + \frac{4}{3t}\dot{\Delta}_D + \left(\frac{c_{s_D}^2 k^{*2}}{t^{(2\gamma_D - 2/3)}} - \frac{2}{3}\frac{\Omega_D}{t^2}\right)\Delta_D - \frac{2}{3}\frac{\Omega_B}{t^2}\Delta_B = 0 \tag{7.2}$$

$$\ddot{\Delta}_B + \frac{4}{3t}\dot{\Delta}_B + \left(\frac{c_{s_B}^2 k^{*2}}{t^{(2\gamma_B - 2/3)}} - \frac{2}{3}\frac{\Omega_B}{t^2}\right)\Delta_B - \frac{2}{3}\frac{\Omega_D}{t^2}\Delta_D = 0 \tag{7.3}$$

Convém relembrar que estas equações apenas são válidas durante o regime linear de evolução das perturbações, a partir da época em que o Universo passa a ser dominado pela matéria e desde que as partículas de matéria escura sejam não relativistas.

No caso de um Universo dominado por partículas de matéria escura quente (tipo neutrinos), estas duas épocas são praticamente simultâneas (Longair 1989), isto é, o Universo passa a ser dominado pela matéria, praticamente ao mesmo tempo em que as partículas de matéria escura quente se tornam não relativistas, o que acontece um pouco antes da recombinação.

Assim, nas equações anteriores, os parâmetros (coeficiente adiabático γ_D e constante c_{s_D}) que dizem respeito à componente de matéria escura têm os mesmos valores que foram estabelecidos para o caso do capítulo anterior. Isto deve-se ao facto de a equação de estado para esta componente não sofrer qualquer alteração durante todo o período de aplicabilidade das equações (7.2) e (7.3).

No entanto, o mesmo não acontece relativamente a esses mesmos parâmetros no que se refere à componente bariónica, já que a sua equação de estado é alterada durante o breve período da recombinação.

Com efeito, se para a época pós-recombinação, o que se disse acerca dos parâmetros da componente bariónica no capítulo anterior se aplica igualmente aqui, o mesmo não é

verdade para o período anterior à recombinação em que a aplicação das equações anteriores é válida.

Devido ao acoplamento que existe entre a radiação e as partículas bariónicas antes da recombinação, esta mistura comporta-se como um fluido cujo coeficiente adiabático γ_B^{ar}, é dado por, (Weinberg 1972; Zel'dovich & Novikov 1983):

$$\gamma_B^{ar} = \frac{4}{3}. \tag{7.4}$$

Quanto à sua velocidade do som neste período, ela pode ser calculada pela seguinte expressão (Weinberg 1972):

$$c_B = \left(\frac{1}{3} \frac{\sigma \, \mathrm{K_{Bol}} \mathrm{T}_B}{m_B + \sigma \, \mathrm{K_{Bol}} \mathrm{T}_B} \right)^{1/2}, \tag{7.5}$$

onde σ é a entropia específica neste período, dada pela relação:

$$\frac{\sigma = 4 m_B \, \mathrm{K_{S-Bol}} \mathrm{T}_B{}^3}{3 \rho_B \, \mathrm{K_{Bol}} \, .} \tag{7.6}$$

e $\mathrm{K_{S-Bol}}$ representa a constante de Stefan - Boltzmann ou constante de corpo negro.

Finalmente, quanto aos parâmetros de densidade para cada uma das componentes utilizados nos cálculos numéricos, foram os já referidos no capítulo anterior. No entanto foram também efectuados alguns ensaios considerando modelos de Universo com valores de Ω diferentes de 1 ($0.8 < \Omega < 1.2$), que mostraram que os resultados não eram significativamente alterados.

Por isso todos os resultados numéricos aqui apresentados referem-se (por uma questão de simplificação), a um modelo de Universo plano ($\Omega = 1$).

7.3 Análise qualitativa do sistema dinâmico

O sistema de duas equações diferenciais lineares de segunda ordem representado pelas equações (7.2) e (7.3), e que descreve o comportamento do sistema gravitacional acoplado constituido pelas duas componentes materiais, pode ser transformado num sistema dinâmico não-autónomo de quatro equações diferênciais lineares de primeira ordem, que podemos escrever na forma matricial do seguinte modo:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(k^*, t) \, \boldsymbol{x} \tag{7.7}$$

onde

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \equiv (\dot{\Delta}_{_D}, \Delta_{_D}, \dot{\Delta}_{_B}, \Delta_{_B})^{\mathrm{T}} \tag{7.8}$$

e onde o expoente T significa *transposta.*

As componentes da matriz $\boldsymbol{A}$ são funções tanto do número de onda co-móvel da perturbação, k^*, como do tempo cósmico t, e pode escrever-se na forma:

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}(k^*, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}\frac{\Omega_{_D}}{t^2} - \frac{c_{s_{_D}}^2 k^{*2}}{t^{(2\gamma_{_D}-2/3)}} & -\frac{4}{3t} & \frac{2}{3}\frac{\Omega_{_B}}{t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3}\frac{\Omega_{_D}}{t^2} & 0 & \frac{2}{3}\frac{\Omega_{_B}}{t^2} - \frac{c_{s_{_B}}^2 k^{*2}}{t^{(2\gamma_{_B}-2/3)}} & -\frac{4}{3t} \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

A segunda e quarta componentes, $x_2(t)$ and $x_4(t)$, da solução geral $\boldsymbol{x}(t)$, do sistema dinâmico (7.7), são as que mais nos interessam uma vez que são as que representam o comportamento dos contrastes de densidade respectivamente nas componentes de matéria escura e bariónica.

Vamos analisar o comportamento qualitativo destas soluções e em particular estudaremos as escalas críticas associadas aos diferentes modos de oscilação da solução geral. Uma vez que incluimos, nas equações anteriores, os termos devidos à expansão do Universo poderemos ainda estudar o modo como estas escalas evoluem com o tempo.

Devemos desde já referir que a dependência temporal de cada um dos modos, para escalas distintas, não será analisada devido à complexidade analítica do problema que advém do facto de se tratar de um sistema não-autónomo. Na verdade, não se conhece uma solução analítica geral do sistema dinâmico (7.7), e em particular a dependência temporal de cada um dos modos.[1] No entanto este facto não tem uma importância crucial para o objectivo deste trabalho, que é o estudo das amplitudes dos modos próprios. Em particular o seu comportamento com a escala, e não com o tempo. Tal como foi dito anteriormentem, este é um dos pontos cruciais que deve ser analisado em qualquer modelo de formação de

[1] Devemos contudo referir também que para alguns valores particulares dos parâmetros envolvidos foram já obtidas soluções analíticas, (ver por exemplo os trabalhos de Wasserman 1981; Fargion 1983; Solov'eva & Starobinsky 1985; Mathai et al. 1988). No entanto os casos em que os parâmetros envolvidos tomam os valores referidos por estes autores são em geral desprovidos de grande interesse físico.

estruturas e ao qual, tanto quanto é do nosso conhecimento, não tem sido dada a devida importância.

Por outro lado, no que diz respeito à evolução temporal das perturbações instáveis, é conhecido um limite superior para o seu crescimento. Com efeito, o modo instável (que é o que mais interessa considerar uma vez que é o que pode conduzir à formação de estruturas), cresce sempre mais lentamente do que $t^{2/3}$, que é o limite assimptótico quando a escala considerada tende para infinito. Este resultado foi pela primeira vez obtido para o caso de um fluido com duas componentes por Wasserman (1981). Este limite superior dá-nos assim uma ideia de como as perturbações, a escalas com interesse cosmológico, evoluem com o tempo, num meio em expansão.

Em alternativa podemos sempre estudar numericamente o sistema dinâmico desde que especifiquemos as condições iniciais, isto é, desde que conheçamos

$$\boldsymbol{x}_0 \equiv \boldsymbol{x}(t_0)\,, \tag{7.10}$$

onde t_0 é o instante de tempo cósmico em que o estado de equilíbrio do fluido é perturbado.

Contudo, estudando o sistema apenas numericamente, perde-se muita da informação qualitativa que pode obter-se utilisando métodos analíticos da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais. Esta informação qualitativa revelou-se já extremamente importante para uma melhor compreensão do comportamento do sistema aquando do estabelecimento da instabilidade gravitacional, (caso de um meio estático), tal como se mostrou no Capítulo 5. Também neste caso, em que consideramos a expansão do meio, iremos verificar a relevância deste tipo de informação.

Analisemos então qualitativamente o comportamento do sistema dinâmico (7.7) na vizinhança do seu ponto crítico que é a origem, isto é, $(0, 0.0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Os 4 valores próprios $\lambda_i(k^*, t)$ da matriz $\boldsymbol{A}$ são dados por:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3t} + \frac{1}{6t}\left[16 + 12\left(\Omega_B + \Omega_D\right) - 18\left(S_B + S_D\right)k^{*2} + 6R\right]^{1/2} \tag{7.11}$$

$$\lambda_2 = -\frac{2}{3t} - \frac{1}{6t}\left[16 + 12\left(\Omega_B + \Omega_D\right) - 18\left(S_B + S_D\right)k^{*2} + 6R\right]^{1/2} \tag{7.12}$$

$$\lambda_3 = -\frac{2}{3t} + \frac{1}{6t}\left[16 + 12\left(\Omega_B + \Omega_D\right) - 18\left(S_B + S_D\right)k^{*2} - 6R\right]^{1/2} \tag{7.13}$$

$$\lambda_4 = -\frac{2}{3t} - \frac{1}{6t}\left[16 + 12\left(\Omega_B + \Omega_D\right) - 18\left(S_B + S_D\right)k^{*2} - 6R\right]^{1/2} \tag{7.14}$$

onde S_j é, para cada uma das componentes j, a seguinte função dependente do tempo

$$S_j = \frac{c_{s_j}^2}{t^{2(\gamma_j - 4/3)}} = c_{s_j}^2 t^{(2-\nu_j)} \tag{7.15}$$

e R é, para além de função do tempo t, também função do número de onda co-móvel k_c, sendo definida por:

$$R = \left[4\left(\Omega_B + \Omega_D\right)^2 + 12\left(\Omega_D - \Omega_B\right)\left(S_B - S_D\right)k^{*2} + 9\left(S_B - S_D\right)^2 k_c^4\right]^{1/2}. \tag{7.16}$$

Na equação (7.15), o parâmetro ν_j, para a componente j, é definido por:

$$\nu_j = 2\gamma_j - \frac{2}{3}, \tag{7.17}$$

Notar que cada uma das funções S_j se encontra directamente relacionada com a velocidade do som c_j da componente j. De referir igualmente que, para $\gamma_j = 4/3$, a respectiva função $S_j = S_j\left[\gamma_j = 4/3\right]$ é independente do tempo e portanto constante, isto é:

$$S_j\left[\gamma_j = 4/3\right] \equiv c_{s_j}^2 . \tag{7.18}$$

Podemos também verificar que, uma vez que suposemos $\Omega = \Omega_B + \Omega_D = 1$, qualquer que seja o valor do número de onda co-móvel k^*, o radicando da expressão (7.16) é sempre positivo e portanto a função R é sempre real. É imediato portanto concluir, como seria de esperar que os pares de valores próprios (λ_1, λ_2) e (λ_3, λ_4), quando complexos são conjugados.

Os 4 vectores próprios $\xi_i(k^*, t)$ associados aos valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}$, podem ser escritos na forma:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(\beta_1, \beta_1\lambda_1, 1, \lambda_1\right)^{\mathrm{T}} \tag{7.19}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \left(\beta_2, \beta_2\lambda_2, 1, \lambda_2\right)^{\mathrm{T}} \tag{7.20}$$

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \left(\beta_3, \beta_3\lambda_3, 1, \lambda_3\right)^{\mathrm{T}} \tag{7.21}$$

$$\boldsymbol{\xi}_4 = \left(\beta_4, \beta_4\lambda_4, 1, \lambda_4\right)^{\mathrm{T}} \tag{7.22}$$

onde as funções β_i são dadas por:

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4\Omega_D}(\eta + R) \tag{7.23}$$

e

$$\beta_3 = \beta_4 = \frac{1}{4\Omega_D}(\eta - R), \tag{7.24}$$

sendo η a seguinte função do número de onda co-móvel k^*:

$$\eta = 2(\Omega_D - \Omega_B) + 3(S_B - S_D)k^{*2} \tag{7.25}$$

7.3.1 Escalas críticas para o sistema

De forma a caracterizar os modos próprios de oscilação do sistema dinâmico (7.7) teremos que estudar as raízes dos radicandos nas expressões dos 4 valores próprios, equações (7.11) – (7.14). Cada uma destas raízes dar-nos-á o valor da escala para a qual ocorre a transição entre os regimes real e complexo do modo próprio associado ao valor prório considerado.

Devemos igualmente determinar as raízes das partes reais dos 4 valores próprios de forma a obter a escala para a qual ocorre a transição entre o regime estável (valor próprio com parte real negativa) e o regime instável (valor próprio com parte real positiva), para o modo considerado.

Os resultados deste estudo analítico, e que a seguir decrevemos mais em pormenor, encontram-se sumariamente descritos na Tabela 7.1 e estão também ilustrados numericamente nos gráficos das figuras 7.1 e 7.2. Este gráfico foi obtido utilizando valores dos parâmetros que se aplicam imediatamente após a época da recombinação, (considerando que a matéria escura é quente).

Convém referir que o valor numérico da parte real de cada um dos valores próprios pode fornecer indicações importantes acerca do crescimento, ou decaimento, relativo da perturbação em cada um dos modos, enquanto que o valor da parte imaginária se encontra associado à frequência da oscilação no modo considerado.

Os valores próprios λ_1 e λ_2 passam dum regime real para um regime complexo para um valor do número de onda co-móvel k^*, que representaremos por k_2^*, e que é dado por:

$$k_2^*(t) = \left[\frac{B + (B^2 - 160\,S_B S_D)^{1/2}}{18\,S_B S_D}\right]^{1/2} \tag{7.26}$$

Tabela 7.1: Sinais das partes real e imaginária, $\Re$ e $\Im$ respectivamente, para cada um dos 4 valores próprios da matriz **A** em função do número de onda co-móvel k^*. Notar que $\Im(\lambda_3) = -\Im(\lambda_4) \neq 0$ para qualquer $k^* \neq 0$. (Ver a discussão no texto.)

		0	$0 < k^* \leq k_1^*$	$k_1^* < k^* < k_M^*$	k_M^*	$k_M^* < k^* \leq k_2^*$	$k_2^* < k^*$
λ_1	$\Re$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
	$\Im$	0	0	0	0	0	$+$
λ_2	$\Re$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
	$\Im$	0	0	0	0	0	$-$
λ_3	$\Re$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
	$\Im$	0	0	$+$	$+$	$+$	$+$
λ_4	$\Re$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
	$\Im$	0	0	$-$	$-$	$-$	$-$

onde B é a seguinte função:

$$B = 3\,(\Omega_D - \Omega_B)\,(S_B - S_D) + 7\,(S_B + S_D)\,. \tag{7.27}$$

Os outros dois valores próprios, λ_3 e λ_4, sofrem uma transição de regime idêntica para $k^* = k_1^*$ dado por:

$$k_1^*(t) = \left[\frac{B - \left(B^2 - 160\,S_B S_D\right)^{1/2}}{18\,S_B S_D}\right]^{1/2} \tag{7.28}$$

Este valor do parâmetro k^* estabelece a escala acima da qual o amortecimento, devido à expansão do Universo, se torna efectivamente importante. De facto, como mais à frente se verá, para este valor de k^* o período de oscilação dos modos próprios associados aos valores próprios λ_3 e λ_4 é igual ao tempo característico de expansão e portanto tendo períodos de oscilação superiores ao tempo característico de expansão estes modos passam a ser efectivamente modos de decaimento uma vez que não têm tempo para efectuar qualquer oscilação. Por outras palavras, podemos dizer que os modos próprios associados aos valores

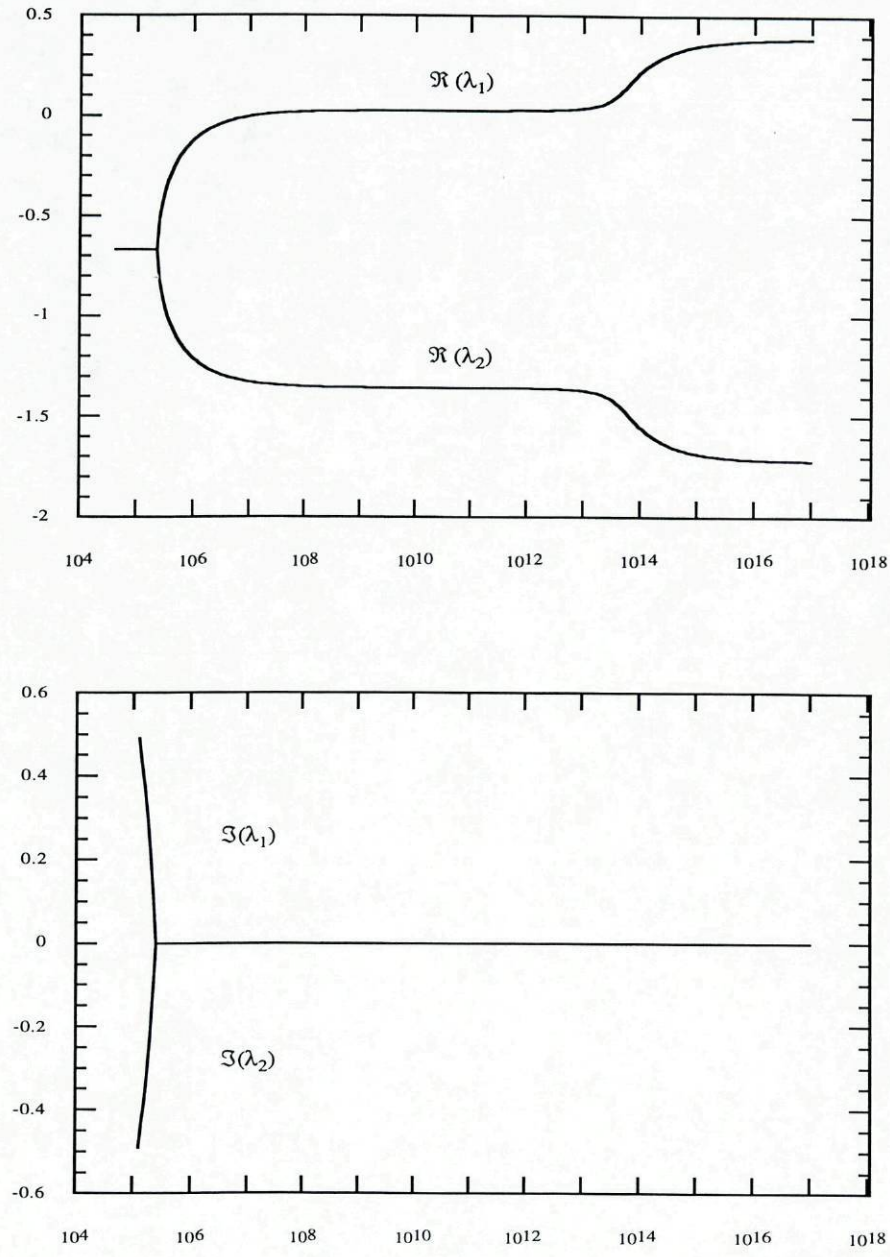


Figura 7.1: Dependência com a escala (em $M_\odot$) das partes real e imaginária dos valores próprios λ_1 e λ_2, calculadas para a época imediatamente após a recombinação ($t^{\rm rec}$) e para o caso particular de um Universo dominado por partículas de matéria escura quente, supondo que a massa em repouso destas partículas é de 30 eV. No painel superior representam-se as partes reais enquanto que no painel inferior se ilustra a variação das partes imaginárias.

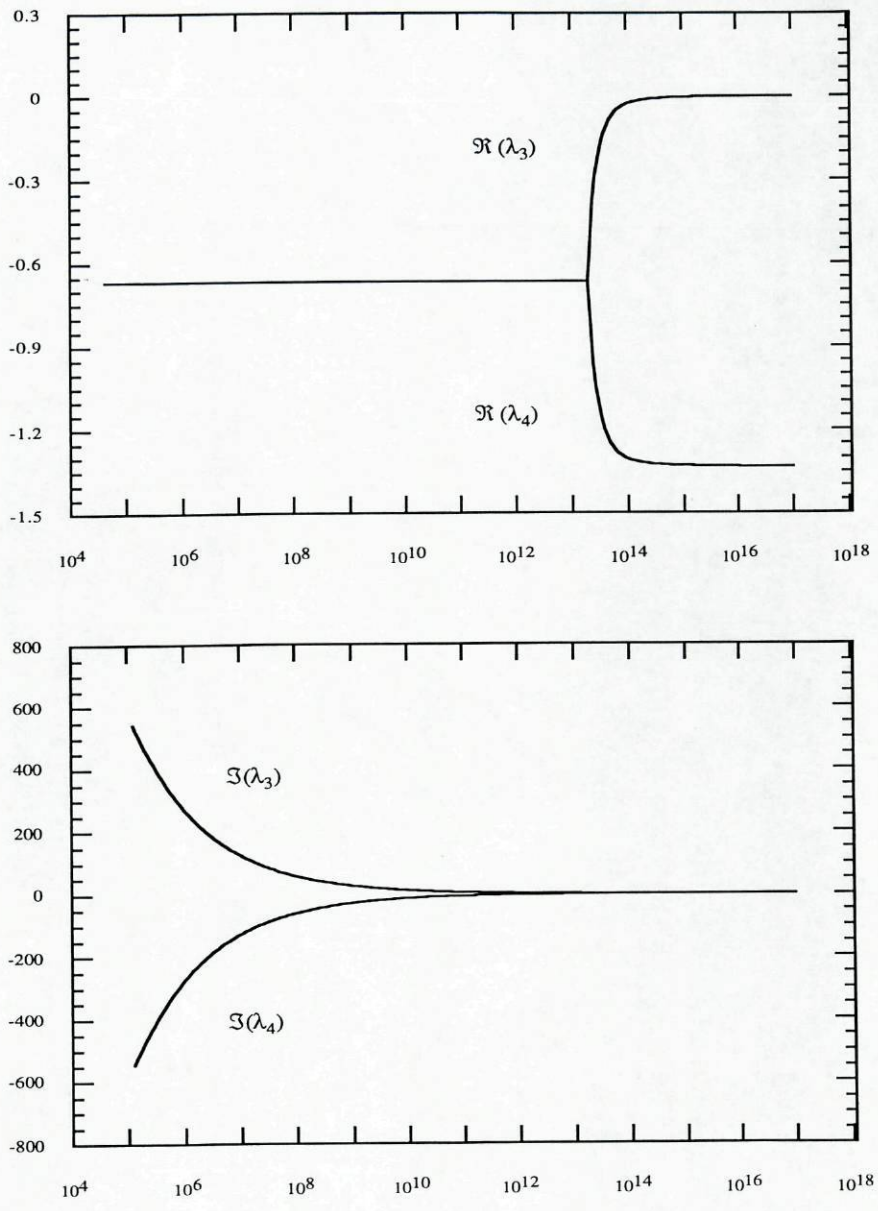


Figura 7.2: O mesmo que na figura anterior para λ_3 e λ_4. Notar nestas duas figuras a existência das três escalas críticas referidas no texto: a primeira M_2, para $\sim 10^5\,\mathrm{M}_\odot$ ocorre quando os valores próprios λ_1 e λ_2 passam do regime complexo para o regime real. A segunda M_M, ocorre quando λ_1 passa de um valor real negativo para um positivo, o que se verifica para uma escala de cerca de $10^7\,\mathrm{M}_\odot$; a terceira M_1 acontece para $\sim 10^{13}\,\mathrm{M}_\odot$ quando λ_3 e λ_4 passam de valores próprios complexos a reais. De referir finalmente que os valores numéricos do eixo vertical foram multiplicados nas duas figuras por t^{rec}.

próprios λ_3 e λ_4, que sem o efeito da expansão estariam naturalmente a oscilar para qualquer valor da escala (como se mostrou no Capítulo 5), passam, devido a este efeito, a modos de decaimento para valores de $k^* < k_1^*$.

Por outro lado, verificamos que apenas o valor próprio λ_1 se anula no seu regime real. Isto acontece para um valor de k^*, que passamos a representar por k_M^*, e que é dado por:

$$k_M^*(t) = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\Omega_B}{S_B} + \frac{\Omega_D}{S_D}\right)\right]^{1/2} \tag{7.29}$$

Uma vez que é este valor de $k^*(t)$ que estabelece a transição entre o regime estável e o regime instável do sistema gravitacional, é ele que define a escala de Jeans da mistura, (relembrar a definição da escala equivalente para o caso de um meio estático analisado no Capítulo 5).

A partir das equações (7.2) e (7.3) podemos verificar que os números de onda ("co-móveis") de Jeans para as componentes escura e bariónica, quando tomadas desacopladas, são respectivamente dados por

$$k_D^* = \left(\frac{2}{3}\,\frac{\Omega_D}{S_D}\right)^{1/2} \tag{7.30}$$

e

$$k_B^* = \left(\frac{2}{3}\,\frac{\Omega_B}{S_B}\right)^{1/2} \tag{7.31}$$

Notar ainda que a equação (7.29), que define o número de onda de Jeans da mistura k_M^*, pode ser escrita na forma seguinte:

$$k_M^* = \left({k_B^*}^2 + {k_D^*}^2\right)^{1/2} \tag{7.32}$$

Analogamente ao que já foi visto no Capítulo 6 na equação (6.19), a qualquer valor do número de onda próprio k pode ser associada a massa M interior a uma região esférica cujo diâmetro próprio é dado por:

$$l = 2\pi\,\frac{a}{k_{\rm cm}}. \tag{7.33}$$

onde $k_{\rm cm}$ é o número de onda co-móvel que se encontra relacionado com k e com k^* através das relações escritas em (3.27) no Capítulo 3.

O valor de M vem então dado por:

$$M = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{l}{2}\right)^3 \rho = \frac{4}{3}\pi \left(\pi \frac{a}{k_{\rm cm}}\right)^3 \rho \tag{7.34}$$

Uma vez que, no período que nos interessa, a densidade ρ decresce com a^{-3}, o valor da massa M permanece constante para um valor arbitrário do número de onda co-móvel $k_{\rm c}$.

Podemos também associar a cada um dos três números de onda críticos, k_1^*, k_2^* e k_M^*, três massas críticas M_1, M_2 e M_M, sendo cada uma delas dada por expressões equivalentes a (7.34), substituindo apenas k^*, respectivamente por k_1^*, k_2^* e k_M^*.

Convém notar, contudo, que estas massas críticas não são constantes com o tempo. Isto deve-se à dependência temporal dos números de onda críticos k_1^*, k_2^* e k_M^*, que pode ser verificada analisando as expressões (7.26), (7.28) e (7.29), que os definem.

Assim, a dependência temporal das massas críticas M_1, M_2 e M_M pode ser estudada desde a época em que as partículas de matéria escura se tornam não relativistas até à época actual. Este tipo de comportamento é ilustrado na Figura 7.3, na qual a evolução das referidas massas críticas está representada em função da temperatura da radiação (em vez do tempo cósmico) utilizando a relação

$$t \propto \frac{1}{T_\gamma^{2/3}} \tag{7.35}$$

que é válida, no período que estamos a considerar, para um Universo de Einstein – de Sitter.

De notar também que as massas M_1, M_2 e M_M representadas são massas totais, isto é, são a soma das massas, em cada uma das duas componentes, interiores a regiões esféricas de raios próprios dados em cada instante, respectivamente por $\pi\, a/k_1^*$, $\pi\, a/k_2^*$ e $\pi\, a/k_M^*$.

Analisando as expressões que definem os três números de onda críticos, podemos concluir que dois comportamentos distintas devem ser considerados, correspondentes a diferentes períodos (antes e após a recombinação):

1. Período que medeia entre a época em que as partículas de matéria escura quente se tornam não relativistas e a época da recombinação.

   Devido ao acoplamento, através do espalhamento de Thomson, entre a radiação e o material bariónico durante este período verifica-se que a velocidade do som na componente bariónica é sempre muito maior que na componente de matéria escura, (excepto durante um breve período inicial imediatamente após $t_{\rm NR}$, em que os valores daquelas velocidades nas duas componentes são da mesma ordem de grandeza). Como consequência temos que

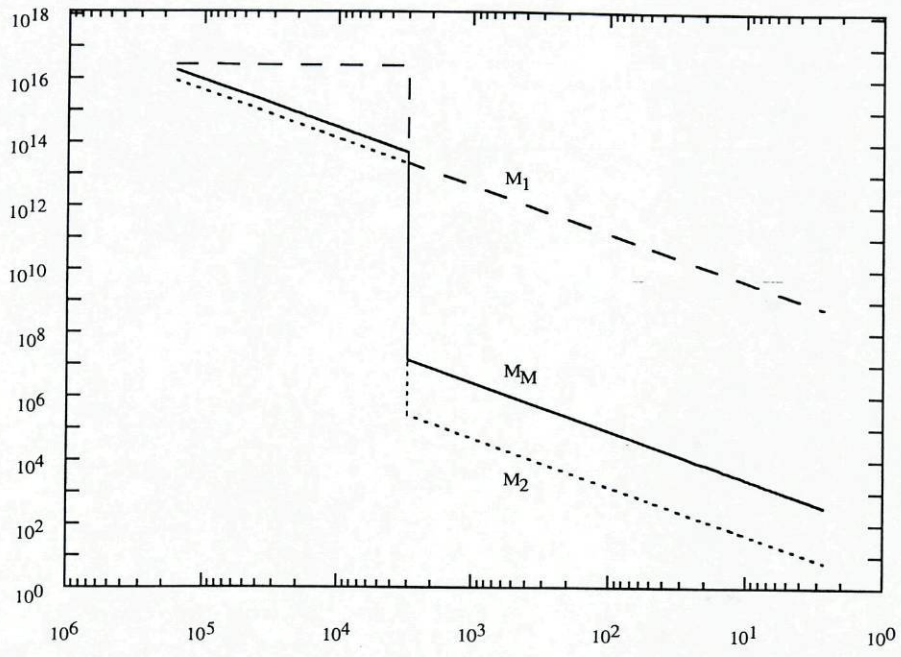


Figura 7.3: Evolução temporal das escalas críticas (em $M_\odot$), correspondentes respectivamente aos números de onda k_1^* (tracejado), k_2^* (ponteado) e k_M^*, em função da temperatura da radiação (em ° K), tal como definido no texto. A representação é feita desde a época em que as partículas de matéria escura (quente) se tornam não relativistas até à época actual. Particularmente interessante é a evolução da escala associada a k_1^*, que, depois da recombinação, percorre um intervalo, na escala de massas, que representa aproximadamente as escalas galácticas típicas, isto é, desde as galáxias gigantes até às galáxias anãs. Ver a discussão correspondente no texto.

$$S_B \gg S_D \tag{7.36}$$

Convém lembrar, equação (7.18), que durante este período S_B é uma função constante enquanto que pela equação (7.15) se pode verificar que

$$S_D \propto \frac{1}{t^{2/3}} \, . \tag{7.37}$$

Assim, se desenvolvermos até à primeira ordem o termo $\sqrt{B^2 - 160 S_B S_D}$ da equação (7.28), na pequena quantidade $160 S_B S_D$, concluimos que

$$k_1^* \sim \left(\frac{1}{S_B}\right)^{1/2}, \tag{7.38}$$

ou seja, a menos do factor $\sqrt{2\Omega_B/3}$. o valor de k_1^* é, durante este período, da mesma ordem de grandeza do número de onda de Jeans da componente bariónica, k_B^*. Portanto depois de $t_{\rm NR}$ e antes da recombinação. a massa crítica M_1 é aproximadamente constante com um valor aproximado da ordem de $10^{16}\,\mathrm{M}_\odot$.

Por outro lado, da análise das equações (7.26) e (7.32), concluimos que durante este período os valores das massas M_2 e M_M se encontram próximos do valor da massa de Jeans da componente escura, a qual decresce desde aproximadamente $10^{16}\,\mathrm{M}_\odot$ até um valor, que, imediatamente antes da recombinação, é da ordem de $10^{13}\,\mathrm{M}_\odot$. Partindo destas mesmas equações podemos ainda concluir que

$$M_2 \propto M_M \propto \frac{1}{t}\,. \tag{7.39}$$

2. Período após a recombinação. Durante este período o quadro atrás descrito altera-se substancialmente.

   Com efeito, o desacoplamento entre a radiação e o material bariónico provoca um rápido e acentuado decréscimo do valor da velocidade do som nesta componente, passando a ser bastante inferior ao da velocidade do som na componente escura. Em consequência desta brusca alteração verificada na componente bariónica podemos concluir que durante todo este período a seguinte condição é satisfeita:

$$S_B \ll S_D\,, \tag{7.40}$$

   o que implica uma quebra no valor das massas críticas M_M e M_2 de cerca de 6 e 8 ordens de grandeza respectivamente.

   Para além disto, é fácil também verificar que

$$S_B \propto S_D \propto \frac{1}{t^{2/3}}\,, \tag{7.41}$$

o que implica que, depois da referida quebra nos valores das massas M_M e M_2 durante o breve período da recombinação, aqueles valores críticos decrescem com t^{-1}. No entanto enquanto o valor de M_M é próximo do valor da massa de Jeans da componente bariónica, o valor de M_2 é cerca de duas ordens de grandeza inferior.

Quanto ao valor da massa crítica M_1, a sua evolução, durante o breve período da recombinação, é bastante diferente uma vez que ele decresce bastante menos do que os valores das outras duas massas críticas. Com efeito, durante a recombinação, M_1 decresce apenas um pouco mais de 3 ordens de grandeza, ou seja, de aproximadamente $10^{16}\,\mathrm{M}_\odot$ até cerca de $10^{13}\,\mathrm{M}_\odot$. Depois desta quebra o seu valor decresce, tal como os outros, com t^{-1}.

É ainda interessante verificar que, depois da recombinação, a curva de M_1 encontra-se no prolongamento da curva de M_2 antes da recombinação, tal como se pode ver na Figura 7.3.

A interpretação deste facto é simples. A massa crítica M_1 está associada à massa de Jeans da componente com maior velocidade do som (embora não coincidam), enquanto que M_2 se encontra associada à escala de Jeans da componente com menor velocidade do som (sem no entanto coincidirem), como se pode constatar pela análise das equações (7.26) e (7.28). Dado que antes da recombinação a componente escura é a que tem menor velocidade do som, a sua escala de Jeans deve, durante aquele período, ser próxima de M_2. Depois da recombinação a situação inverte-se, isto é, a componente escura passa a ser aquela com maior velocidade do som, e portanto a sua escala de Jeans deve então ser próxima de M_1. Por outro lado, como a componente escura não é afectada pelo desacoplamento entre a radiação e os bariões, o que se traduz pela constância do seu coeficiente adiabático antes e depois da recombinação, como expresso pela equação (6.12) do capítulo anterior, é de esperar que o valor de M_2 imediatamente antes da recombinação seja da mesma ordem de grandeza do valor de M_1 imediatamente após aquele breve período, sendo esses dois valores próximos do valor da massa de Jeans da matéria escura nessa época.

Convém notar que entre a época da recombinação e a época em que $z \sim 4-5$, (que é o valor do desvio cosmológico para o vermelho das mais distantes estruturas não lineares até hoje observadas – os quasares), a escala crítica M_1 cobre um vasto intervalo na escala de massas. É de realçar, em particular, o facto de neste intervalo estarem contidas as massas de toda a gama de galáxias conhecidas, isto é desde as galáxias gigantes (cujas massas totais são de

cerca de $\sim 10^{13}\,M_\odot$) até às anãs (com massas totais da ordem de $10^8 - 10^9\,M_\odot$).

Este facto, por si só, não teria qualquer significado especial se não existisse nenhum outro processo físico capaz de seleccionar aquelas escalas, já que a escala que determina o regime instável das perturbações é M_M e não M_1. Contudo, como veremos mais à frente, a presença, depois da recombinação, de um mecanismo ressonante para uma escala próxima da escala de Jeans da matéria escura, (e portanto próxima também de M_1), pode explicar a formação de estruturas com massas bariónicas cobrindo toda a escala de massas galácticas observada, como já referimos no capítulo anterior.

7.3.2 Os modos próprios, as amplitudes e a sua dependência com a escala

Como se mostrou na secção anterior, o sistema gravitacional acoplado tem comportamentos distintos dependentes do intervalo a que pertence a escala da perturbação que estamos a considerar, sendo os diversos intervalos definidos pelas escalas críticas do sistema dinâmico estudado, isto é, M_1, M_2 and M_M.

Estes diferentes comportamentos do sistema são consequência da existência de regimes distintos para cada um dos seus modos próprios nos intervalos referidos.

Podemos distinguir então os seguintes regimes:

- $k^* > k_2^*$.

  Neste caso, uma vez que todos os valores próprios posuem parte real negativa e parte imaginária não nula, as órbitas no espaço de fase são oscilações amortecidas.

  Como resultado as perturbações, cujas escalas pertencem a este intervalo, comportam-se como ondas acústicas amortecidas, sendo a expansão do meio a causa física deste amortecimento. Concluimos, portanto, que neste caso o espaço de fase é um espaço estável.

  Podemos ainda referir que, nesta região, todos os valores próprios têm partes reais iguais, independentemente do valor de k^*, que decorre da expansão afectar igualmente todos os modos acústicos.

- $k_2^* \geq k^* > k_M^*$.

  Neste caso o espaço de fase é o produto directo de dois sub-espaços estáveis de características distintas.

  Os valores próprios λ_1 e λ_2 são reais e negativos. No entanto, o valor absoluto de λ_1 decresce, aproximando-se de zero à medida k^* se aproxima de k_M^*, enquanto que o

valor absoluto de λ_2 é crescente. Como consequência as soluções que se encontram no sub-espaço associado aos valores próprios λ_1 e λ_2 são amortecidas sem oscilações.

Quanto a λ_3 e λ_4 o seu comportamento é idêntico ao que tinham no intervalo anterior, e portanto as soluções no sub-espaço associado a estes valores próprios são oscilações amortecidas devido à natureza complexa, com parte real negativa, de λ_3 e λ_4.

Concluimos assim que neste caso o espaço de fase é ainda um espaço estável. Isto corresponde à existência de dois modos próprios de decaimento e dois modos próprios acústicos amortecidos.

- $k_M^* > k^* > k_1^*$.

  Neste intervalo o valor próprio λ_1 é agora real e positivo o que dá origem ao aparecimento de um sub-espaço do espaço de fase que é instável. As soluções neste sub-espaço são assim soluções instáveis ou crescentes.

  O valor próprio λ_2 mantém-se real e negativo e portanto as soluções no sub-espaço que lhe está associado decrescem sem oscilações, sendo este um sub-espaço estável. No entanto, como vimos no Capítulo 5, o produto deste sub-espaço pelo sub-espaço instável que está associado a λ_1, geram um sub-espaço sela, de dimensão 2, que é instável.

  Quanto a λ_3 e λ_4 o seu comportamento mantém-se inalterado o mesmo acontecendo com as soluções no sub-espaço estável que lhes está associado.

  Como conclusão podemos dizer que o espaço de fase deixa de ser um espaço estável e passa a ser instável, e portanto as perturbações com escalas pertencentes a este intervalo crescem com o tempo, sob o efeito da sua auto-gravitação, isto é, o sistema entra em colapso gravitacional conduzindo à formação de estruturas.

  Neste caso existem portanto dois modos próprios acústicos amortecidos, um modo de decaimento e um modo de colapso.

- $k_1^* \geq k^* > 0$.

  Neste caso é o sub-espaço instável associado aos valores próprios λ_1 e λ_2, (sub-espaço sela) que se mantém sem alterações relativamente à região anterior.

  O sub-espaço estável associado aos valores próprios λ_3 e λ_4 mantém-se igualmente estável na região agora considerada. No entanto, as soluções neste sub-espaço sofrem uma alteração no que diz respeito ao seu comportamento qualitativo.

Com efeito, até a escala associada a k_1^* ser atingida, o sistema possuia sempre soluções oscilatórias, (pelo menos as que se encontravam neste sub-espaço associado a λ_3 e λ_4), as quais desaparecem a partir desta escala.

Isto é devido como já referimos, ao facto de, para estas grandes escalas, o efeito da expansão ser mais significativo e portanto as oscilações desaparecem dando lugar a soluções que decrescem sem oscilar, o que é algo diferente da situção que encontrámos aquando do estudo dos modos próprios do fluido perturbado num meio estático do capítulo anterior, para o qual as oscilações existem independentemente da escala considerada.

A expansão do meio dá assim origem a uma escala crítica k_1^*, o que altera o comportamento qualitativo do sistema dinâmico de modo a que as perturbações com números de onda inferiores a k_1^* crescem sem oscilar, isto é, neste regime o amortecimento devido à expansão domina as oscilações naturais dos modos próprios associados a λ_3 e λ_4.

- $k^* = 0$.

  Este é o caso do limite assimptótico das escalas infinitas, estudado pela primeira vez por Wasserman (1981). Referimo-nos a ele porque o espaço de fase respectivo tem uma particularidade que não se encontra para nenhum outro caso.

  De facto este é o único caso em que um dos valores próprios tem as partes real e imaginária simultaneamente nulas, o que acontece com λ_3.

  Assim, para além da presença do sub-espaço instável associado a λ_1 o dos sub-espaços estáveis associados a λ_2 and λ_4, concluimos que as soluções pertencentes ao sub-espaço associado ao valor próprio λ_3 correspondem a perturbações que permanecem com amplitude constante sem oscilar, isto é, nem crescem nem decaiem.

  Apesar disso, o comportamento global qualitativo das perturbações neste limite assimptótico é o mesmo que na região precedente.

Apesar de não ser conhecida a solução geral, analítica, do sistema dinâmico (7.7), podemos escrevê-la como função dos 4 modos próprios do sistema na forma seguinte:

$$\begin{pmatrix} \Delta_D \\ \dot{\Delta}_D \\ \Delta_B \\ \dot{\Delta}_B \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1\lambda_1 \\ 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} F_1 + \alpha_2 \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_2\lambda_2 \\ 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} F_2 + \alpha_3 \begin{pmatrix} \beta_3 \\ \beta_3\lambda_3 \\ 1 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} F_3 + \alpha_4 \begin{pmatrix} \beta_4 \\ \beta_4\lambda_4 \\ 1 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} F_4 \quad (7.42)$$

onde F_1, F_2, F_3 e F_4 constituem um conjunto fundamental de soluções do sistema dinâmico (7.7), isto é, são quatro soluções particulares linearmente independentes.

Estas 4 soluções correspondem aos 4 modos próprios, do sistema gravitacional acoplado, associados aos 4 valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}$.

Ao estabelecer as condições iniciais, estas soluções podem ser escolhidas de modo que, (Wasserman 1981):

$$F_1(t_0) = F_2(t_0) = F_3(t_0) = F_4(t_0) = 1 \quad (7.43)$$

onde t_0 é o instante inicial, (arbitrário), ou seja, é o instante de tempo cósmico em que supomos que o fluido de duas componentes é perturbado.

Vamos representar os valores de Δ_j e $\dot{\Delta}_j$, no instante inicial t_0, respectivamente por:

$$\Delta_j(t_0) \equiv \Delta_j^{(0)} \quad (7.44)$$

e

$$\dot{\Delta}_j(t_0) \equiv \dot{\Delta}_j^{(0)} . \quad (7.45)$$

Especificando estes valores podemos obter as expressões dos 4 coeficientes α_i, da equação (7.42), associados aos 4 modos próprios F_i. Para isso apenas teremos que resolver, em ordem aos coeficientes α_i, o sistema de 4 equações, implícito na expressão (7.42).

Assim obtemos:

$$\alpha_1 = \Re\left[\frac{\dot{\Delta}_D^{(0)} - \dot{\Delta}_B^{(0)}\beta_3^{(0)} + \left(\Delta_B^{(0)}\beta_3^{(0)} - \Delta_D^{(0)}\right)\lambda_2^{(0)}}{\left(\beta_1^{(0)} - \beta_3^{(0)}\right)\left(\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}\right)}\right] \quad (7.46)$$

$$\alpha_2 = \Re\left[-\frac{\dot{\Delta}_D^{(0)} - \dot{\Delta}_B^{(0)}\beta_3^{(0)} + \left(\Delta_B^{(0)}\beta_3^{(0)} - \Delta_D^{(0)}\right)\lambda_1^{(0)}}{\left(\beta_1^{(0)} - \beta_3^{(0)}\right)\left(\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}\right)}\right] \quad (7.47)$$

$$\alpha_3 = \Re\left[-\frac{\dot{\Delta}_D^{(0)} - \dot{\Delta}_B^{(0)}\beta_1^{(0)} + \left(\Delta_B^{(0)}\beta_1^{(0)} - \Delta_D^{(0)}\right)\lambda_4^{(0)}}{\left(\beta_1^{(0)} - \beta_3^{(0)}\right)\left(\lambda_3^{(0)} - \lambda_4^{(0)}\right)}\right] \tag{7.48}$$

$$\alpha_4 = \Re\left[\frac{\dot{\Delta}_D^{(0)} - \dot{\Delta}_B^{(0)}\beta_1^{(0)} + \left(\Delta_B^{(0)}\beta_1^{(0)} - \Delta_D^{(0)}\right)\lambda_3^{(0)}}{\left(\beta_1^{(0)} - \beta_3^{(0)}\right)\left(\lambda_3^{(0)} - \lambda_4^{(0)}\right)}\right] \tag{7.49}$$

onde $\beta_i^{(0)}$ e $\lambda_i^{(0)}$ representam os valores das funções (dependentes do tempo) β_i e λ_i no instante $t = t_0$.

Uma vez que os valores dos coeficientes α_i são em geral complexos, apenas tomaremos a sua parte real ($\Re$), que é aquela com significado físico.

Tal como vimos (recordar a Tabela 7.1), o modo próprio associado a λ_1 é o único responsável pelo estabelecimento da instabilidade gravitacional no sistema. Assim, a evolução de perturbações em escalas l que correspondam à aproximação de grandes comprimentos de onda, estudada pela primeira vez com grande detalhe por Wasserman (1981), é conduzida sobretudo por aquele modo próprio, podendo os outros modos próprios ser considerados transientes.

Por outras palavras, no caso em que

$$l \gg l_1^* = \frac{2\pi}{k_1^*}\,, \tag{7.50}$$

onde k_1^* é dado pela expressão (7.28), podemos desprezar, o segundo, terceiro e quarto termos do membro direito das expressões (7.42), e aproximar a evolução das perturbações nas duas componentes pelas relações seguintes:

$$\Delta_D \approx \alpha_1\beta_1 F_1 \tag{7.51}$$

e

$$\Delta_B \approx \alpha_1 F_1 \tag{7.52}$$

Contudo, devido aos distintos comportamentos, com a escala, dos valores próprios λ_i, e das componentes β_i dos vectores próprios, é conveniente estudar, não apenas a evolução das perturbações no limite assimptótico dos grandes comprimentos de onda, mas também

a evolução de perturbações cujos comprimentos de onda se situam nas regiões das escalas críticas que determinámos na sub-secção anterior.

Infelizmente, como já dissemos, não é conhecida uma solução geral analítica para o sistema gravitacional acoplado descrito pelas equações (6.1) e (6.2), e apenas podemos integrar numericamente estas equações. Mesmo para os casos particulares atrás citados, (isto é, para alguns valores particulares dos parâmetros envolvidos nas equações), para os quais existem soluções analíticas exactas do sistema, devido à complexidade dessas soluções analíticas, apenas foram desenvolvidos estudos e obtidos resultados nos limites assimptóticos, (ver por exemplo Fargion 1983; Solov'eva & Starobinsky 1985 e Mathai et al. 1988),

7.4 O mecanismo ressonante – resultados numéricos

Uma forma de compreender melhor o comportamento das perturbações com diferentes comprimentos de onda, é estudar a dependência com a escala das amplitudes dos modos próprios da solução geral (7.42), e o modo como essa dependência evolui com o tempo, para cada uma das componentes da mistura.

Veremos que o estudo destas amplitudes fornece resultados particularmente interessantes. De facto vamos poder constatar que o mecanismo ressonante, descrito em detalhe no Capítulo 5 para o caso de um meio estático, se manifesta também neste caso em que a expansão do meio é considerada, como aliás seria de esperar da análise quase-estática anterior.

Uma vez que para $k^* > k_M^*$ não se observa qualquer instabilidade no sistema, nesta secção é implicitamente assumido que $k^* < k_M^*$, isto é, apenas consideramos perturbações gravitacionalmente instáveis.

Suposemos anteriormente, no Capítulo 5, que as condições presentes no instante inicial, que então considerámos ser a época da recombinação, eram tais que o sistema iniciava o colapso gravitacional a partir do repouso, ou seja, admitimos que

$$\dot{\Delta}_D^{\rm rec} = \dot{\Delta}_B^{\rm rec} = 0 \,. \tag{7.53}$$

Nesse caso esta hipótese era aceitável porque considerámos estático o estado não perturbado do fluido, e portanto era razoável supôr que o colapso se iniciava a partir do estado estático.

Para além de razoável, esta hipótese mostrou-se ainda bastante vantajosa uma vez que conduziu a uma grande simplificação das expressões que representavam o comportamento

dos coeficientes dos modos próprios, o que por seu lado permitiu efectuar um estudo completamente analítico e detalhado do processo ressonante nesse caso particular.

No caso que agora pretendemos analisar, as relações obtidas para os coeficientes dos modos próprios (α_i), são bastante mais difíceis de estudar analiticamente. Isso deve-se ao facto de que tanto os valores próprios λ_i, como as componentes β_i dos vectores próprios, de que dependem os coeficientes α_i, serem agora representados por funções mais complicadas do que eram anteriormente, para além do desconhecimento da dependência temporal das funções F_i da solução (7.42).

O estudo analítico do comportamento daqueles coeficientes torna-se ainda mais difícil se considerarmos o caso geral, isto é, supondo que todos os valores iniciais $\Delta_D^{(0)}$, $\dot{\Delta}_D^{(0)}$, $\Delta_B^{(0)}$ e $\dot{\Delta}_B^{(0)}$ são diferentes de zero.

Por isso mesmo não nos foi possível efectuar um estudo analítico do comportamento dos coeficientes α_i. No entanto especificando os valores numéricos dos parâmetros que traduzem as condições iniciais, isto é, os valores de:

$$\begin{cases} \Delta_D(t_0) \equiv \Delta_D^{(0)} \\ \dot{\Delta}_D(t_0) \equiv \dot{\Delta}_D^{(0)} \\ \Delta_B(t_0) \equiv \Delta_B^{(0)} \\ \dot{\Delta}_B(t_0) \equiv \dot{\Delta}_B^{(0)} \end{cases} \tag{7.54}$$

bem como os valores dos parâmetros de que dependem os valores próprios λ_i e as componentes β_i dos vectores próprios, podemos facilmente efectuar um estudo numérico e obter uma representação gráfica do comportamento das amplitudes dos modos próprios para cada uma das componentes.

Vamos representar por ζ_j^i a amplitude do modo próprio associado ao valor próprio λ_i, para a componente j.

Assim, a partir das relações (7.42) podemos constatar que ζ_D^i (a amplitude do modo próprio associado ao valor próprio λ_i para a componente de matéria escura), é dada por:

$$\zeta_D^i = \alpha_i \beta_i \,, \tag{7.55}$$

enquanto que para a componente bariónica as amplitudes dos modos próprios (ζ_B^i), são dadas simplesmente pelas relações (7.46) – (7.49), isto é:

$$\zeta_B^i = \alpha_i \,. \tag{7.56}$$

Convém notar que as expressões (7.48) e (7.49), que representam os coeficientes α_3 e α_4, não têm significado para $k^* = k_{c_1}$, uma vez que o factor $(\lambda_3 - \lambda_4)$, nos respectivos denominadores, se anula para este valor do número de onda.[2] Com efeito, como vimos na Secção 7.3, o radicando das expressões de λ_3 e λ_4 anula-se para este valor de k^*, e obtemos

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{2}{3\,t} \,. \tag{7.57}$$

Em consequência, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema (7.42), calculado para $k^* = k_1^*$, é nulo.

Para além disso, este resultado mostra ainda o que já haviamos afirmado antes, isto é: para $k^* = k_1^*$ o período de oscilação dos modos próprios associados a λ_3 e λ_4 é igual ao tempo característico de expansão, o que implica que a partir desta escala estes modos deixam de ter oscilações e passam a modos de decaimento.

Como vimos no Capítulo 5 a ressonância só se verifica depois da recombinação e, para além disso, só no caso em que o Universo é dominado por matéria escura quente. Por isso, no que se segue, (salvo indicação explícita em contrário), consideramos que o instante inicial é o instante da recombinação e portanto o índice superior ($^{(0)}$), das equações (7.46) – (7.49) e (7.54), será substituido por ($^{\mathrm{rec}}$), para significar recombinação.

Passemos então ao estudo numérico das amplitudes ζ_j^i dos modos próprios do sistema. Para isso, como dissemos, necessitamos de conhecer as condições iniciais representadas nas expressões (7.54), bem como os parâmetros de que dependem os valores próprios e as componentes dos vectores próprios.

Quanto a estes últimos, que são, para cada componente, as velocidades do som, os coeficientes adiabáticos e os parâmetros de densidade, eles foram já definidos na Secção 7.2.

No que diz respeito às condições iniciais para os contrastes de densidade, tal como fizemos nos capítulos anteriores, começaremos por admitir como razoável que, para cada uma das duas componentes, eles são proporcionais às respectivas densidades não perturbadas, ou seja, escreveremos:

[2] O mesmo se pode dizer a respeito do factor $(\lambda_1 - \lambda_2)$ nas expressões de α_1 e α_2 e relativamente ao número de onda $k^* = k_2^*$. No entanto, como $k_2^* > k_M^*$, este caso ocorre numa região da escala que aqui não nos interessa, pois que, como dissemos no início desta secção, apenas estamos interessados na região instável, isto é, na região em que $k^* < k_M^*$.

$$\begin{cases} \Delta_D^{\text{rec}} = \Delta_T^{\text{rec}} \Omega_D \\ \\ \Delta_B^{\text{rec}} = \Delta_T^{\text{rec}} \Omega_B, \end{cases} \tag{7.58}$$

onde Δ_T^{rec} é o contraste de densidade total na mistura constituida pelas duas componentes. Note-se que atendendo aos resultados do Capítulo 5, o valor numérico deste parâmetro Δ_T^{rec}, não é determinante para a existência ou não da ressonância.

No entanto, vimos também nesse capítulo que o mecanismo ressonante é sensível ao valor da razão entre os contrastes de densidade iniciais Δ_D^{rec} e Δ_B^{rec}. Assim, convém escrever a hipótese anterior na seguinte forma:

$$\frac{\Delta_D^{\text{rec}}}{\Delta_B^{\text{rec}}} = \frac{\Omega_D}{\Omega_B} \, . \tag{7.59}$$

De acordo com o que também já foi dito a respeito dos parâmetros de densidade para cada uma das componentes na Secção 7.2 o valor utilizado para este quociente foi 19, correspondente a considerar $\Omega_D = 0.95$ e $\Omega_B = 0.05$.

Apesar do valor absoluto de Δ_B^{rec} por si só não ser determinante para a existência da ressonância, podemos no entanto fazer uma estimativa desse valor com base nas observações a várias escalas das anisotropias da temperatura da radiação cósmica de fundo de micro-ondas. É hoje praticamente aceite que para as escalas de interesse cosmológico, isto é, para escalas superiores às escalas galácticas, esse valor não tem grande variação, sendo da ordem de 10^{-5}, tal como referido no Capítulo 3. Assim:

$$\Delta_B^{\text{rec}} \sim \frac{\Delta \, \mathrm{T}^{\text{rec}}}{\mathrm{T}^{\text{rec}}} \sim 10^{-5}, \tag{7.60}$$

e o valor de Δ_D^{rec} decorrerá então da expressão (7.59).

Passemos agora ao cálculo aproximado da ordem de grandeza das taxas de crescimento dos contrastes de densidade nas duas componentes[3], isto é, de $\dot{\Delta}_D$ e $\dot{\Delta}_B$. Primeiro podemos verificar que os valores numéricos absolutos de $\dot{\Delta}_D$ e $\dot{\Delta}_B$ são várias ordens de grandeza inferiores aos valores numéricos absolutos dos respectivos contrastes de densidade.

Vejamos o caso da componente de matéria escura, (para o caso da componente bariónica os mesmos argumentos podem ser utilizados). A partir da relação (7.42), e analisando (por comodidade), apenas o modo crescente, obtemos:

[3]Notar que esta estimativa pode ser feita para qualquer instante posterior à época em que as partículas de matéria escura se tornam não relativistas e em particular para a época da recombinação.

$$\dot{\Delta}_D = \Delta_D \lambda_1 \, . \tag{7.61}$$

Assim, uma vez que $\lambda_1 \ll 1$, (recordar a expressão de λ_1 e também que estamos apenas a considerar escalas tais que $k^* < k_M^*$ sendo portanto λ_1 real), obtém-se:

$$\dot{\Delta}_D \ll \Delta_D \, . \tag{7.62}$$

Contudo, se analisarmos a dependência temporal das equações (7.11) – (7.14), ou em alternativa utilizando métodos numéricos, podemos ser ainda mais precisos e concluir que na época da recombinação se tem:

$$\lambda_1^{\rm rec} \sim \frac{1}{t_{\rm rec}} \, , \tag{7.63}$$

obtendo-se portanto para a mesma época

$$\dot{\Delta}_D^{\rm rec} \sim \frac{\Delta_D^{\rm rec}}{t_{\rm rec}} \tag{7.64}$$

Notar que quando as perturbação na matéria escura quente se encontram no interior do horizonte, só podem começar a crescer a partir da época em que as partículas se tornam não relativistas, o mesmo acontecendo ao valor de Δ_D (Longair 1989).

No entanto, devido à proximidade entre aquela época e a época da recombinação (para valores das massas das partículas de acordo com os limites estabelecidos no final do capítulo anterior), e ao facto de que num Universo de Einstein-de Sitter as perturbações lineares crescem muito lentamente, é de esperar que na época da recombinação as perturbações na matéria escura tenham um contraste de densidade da mesma ordem de grandeza do que tinham na época $t_{\rm NR}$, e portanto podemos escrever:

$$\dot{\Delta}_D^{\rm rec} \sim \frac{\Delta_D^{\rm NR}}{t_{\rm rec}} \, . \tag{7.65}$$

No que diz respeito à componente bariónica se se considerar (de uma forma pouco realista), que antes da recombinação as perturbações nesta componente não sofrem nenhum tipo de amortecimento, obtemos uma relação equivalente à equação anterior, escrita agora para a componente bariónica, isto é:

$$\dot{\Delta}_B^{\rm rec} \sim \frac{\Delta_B^{\rm rec}}{t_{\rm rec}} \sim \frac{\Delta_B^{\rm NR}}{t_{\rm rec}} \, . \tag{7.66}$$

Notar que o índice superior ($^{\mathrm{NR}}$) continua a significar a época em que as partículas de matéria escura se tornam não relativistas (não confundir com a época em que os bariões se tornam não relativistas que pode ser considerada a época da recombinação).

Se pelo contrário admitirmos a hipótese mais realista de que as perturbações na componente bariónica decaem fortemente devido por exemplo ao amortecimento de Silk (Silk 1967; Peebles & Yu 1970), apenas sobrevivendo as que ocorrem às maiores escalas, podemos concluir que na época da recombinação esta componente tem um contraste de densidade muito menor que a componente de matéria escura que cresceu desde a época t_{NR}. Em virtude das relações (7.64) e (7.66). o mesmo se pode afirmar a respeito das taxas de crescimento dos contrastes de densidade e podemos escrever

$$\dot{\Delta}_B^{\mathrm{rec}} \ll \frac{\Delta_D^{\mathrm{rec}}}{t_{\mathrm{rec}}}. \tag{7.67}$$

Estamos agora em condições de efectuar o referido estudo numérico do comportamento das amplitudes ζ_j^i, dos modos próprios do sistema dinâmico (7.7) e representar graficamente os resultados. Assim, nos gráficos das figuras 7.4 – 7.7 representamos a variação com a escala dessas amplitudes, respectivamente para as componentes bariónica e de matéria escura calculada para a época da recombinação.

Para além da ressonância observada na amplitude do modo de colapso da componente bariónica, ζ_B^1, é igualmente visível o facto atrás referido de que as amplitudes ζ_j^3 e ζ_j^4 não estão definidas para a escala crítica M_1, como se pode constatar pela descontinuidade observada nos respectivos gráficos para essa escala.

Contudo isto não significa que haja uma descontinuidade na amplitude das oscilações do sistema gravitacional. De facto, os modos próprios não são mais do que uma decomposição da "oscilação" física do sistema.

Assim, à semelhança do que fizemos no Capítulo 5, se combinarmos num só modo físico, os dois modos próprios associados a λ_3 e λ_4, as relações (7.42) mostram que no instante inicial a amplitude desse modo é a soma das amplitudes dos modos próprios. Dito de outra forma, as soluções do sistema que se encontram no sub-espaço estável de dimensão 2, associado aos valores próprios λ_3 e λ_4, têm, no instante inicial, amplitudes que são dadas por:

$$\zeta_D^{3,4} = \beta_3 \left(\alpha_3 + \alpha_4\right) \tag{7.68}$$

para a componente de matéria escura, e

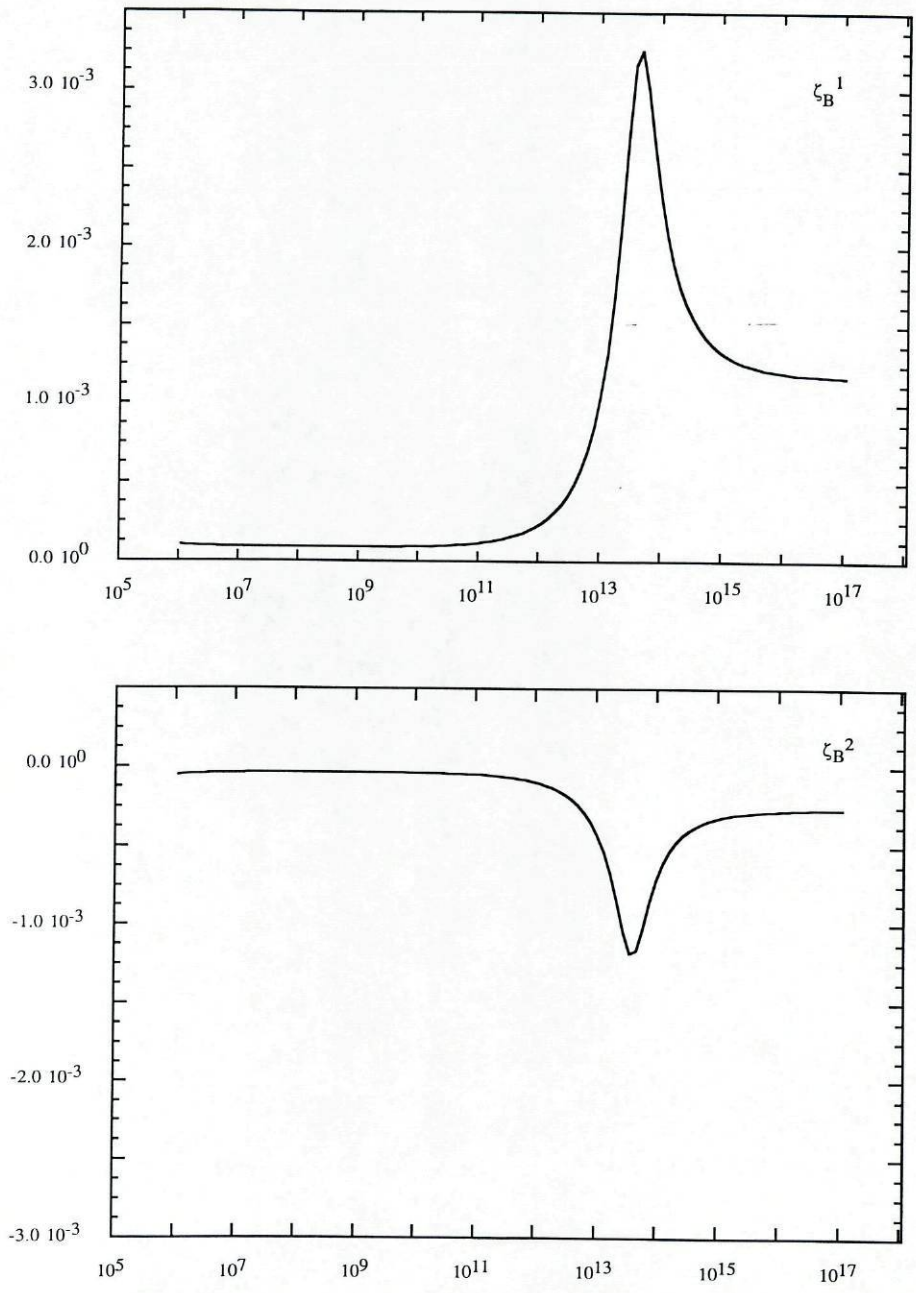


Figura 7.4: Variação com a escala (em Massas Solares) das amplitudes dos modos próprios para a componente bariónica ζ_B^1 e ζ_B^2 na época da recombinação. A escala vertical está em unidades arbitrárias. Notar o comportamento ressonante da amplitude do modo de colapso ζ_B^1.

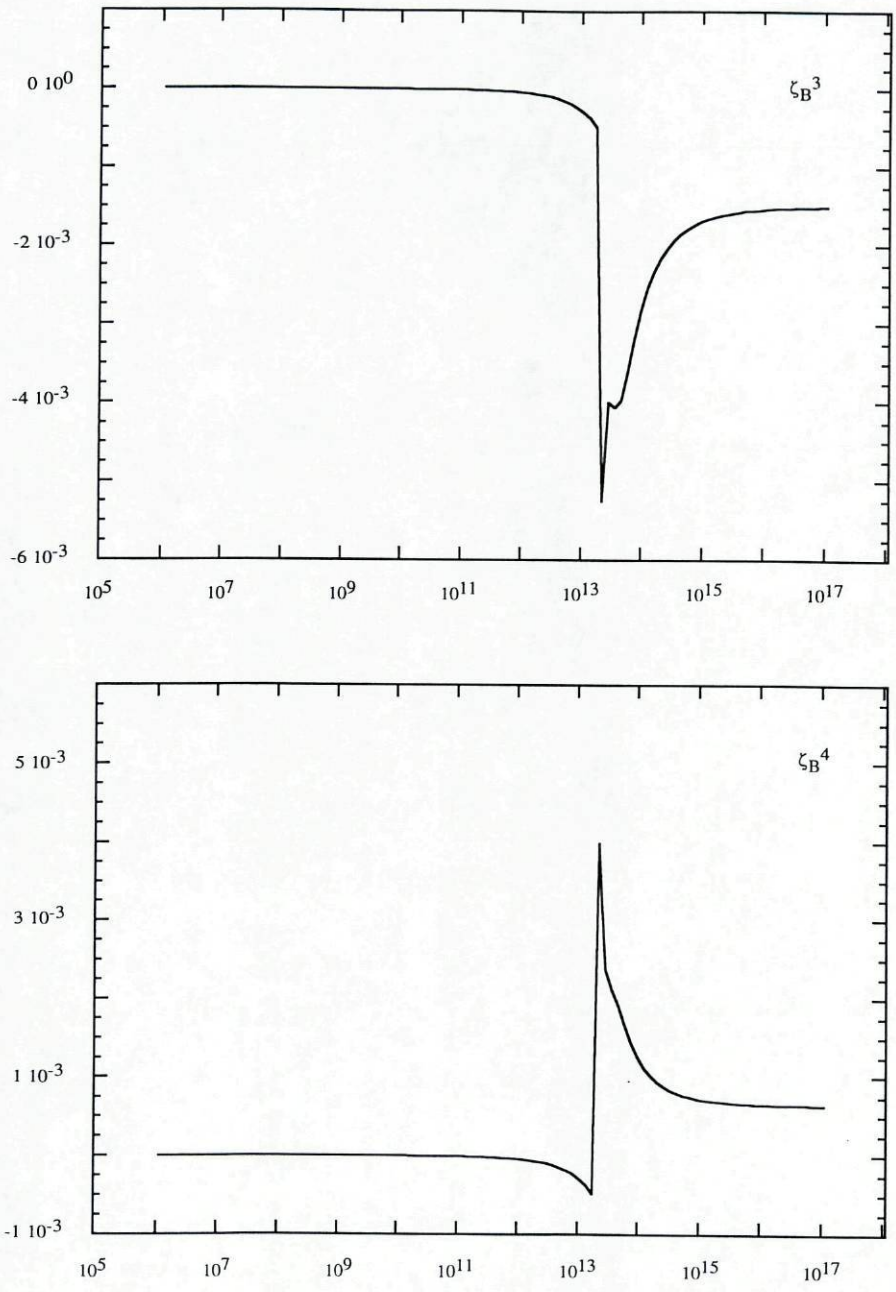


Figura 7.5: O mesmo que na figura anterior mas para as amplitudes ζ_B^3 e ζ_B^4. É visível a mudança de regime nos modos próprios associados a λ_3 e λ_4 (ver no texto a discussão respectiva).

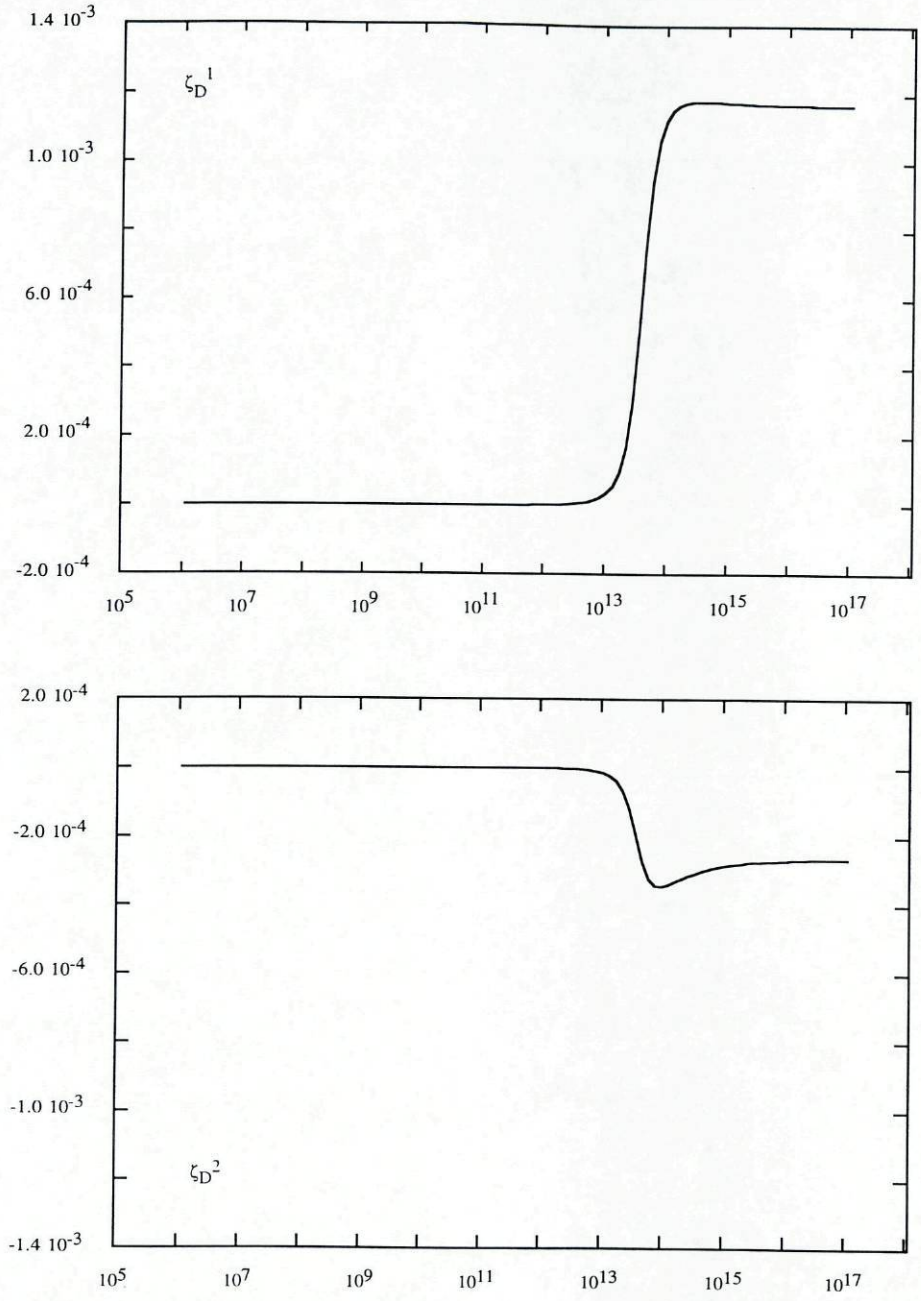


Figura 7.6: O mesmo que nas figuras anteriores para as amplitudes ζ_D^1 e ζ_D^2 dos modos próprios para a componente de matéria escura. A nota de maior realce é a inexistência de qualquer ressonância.

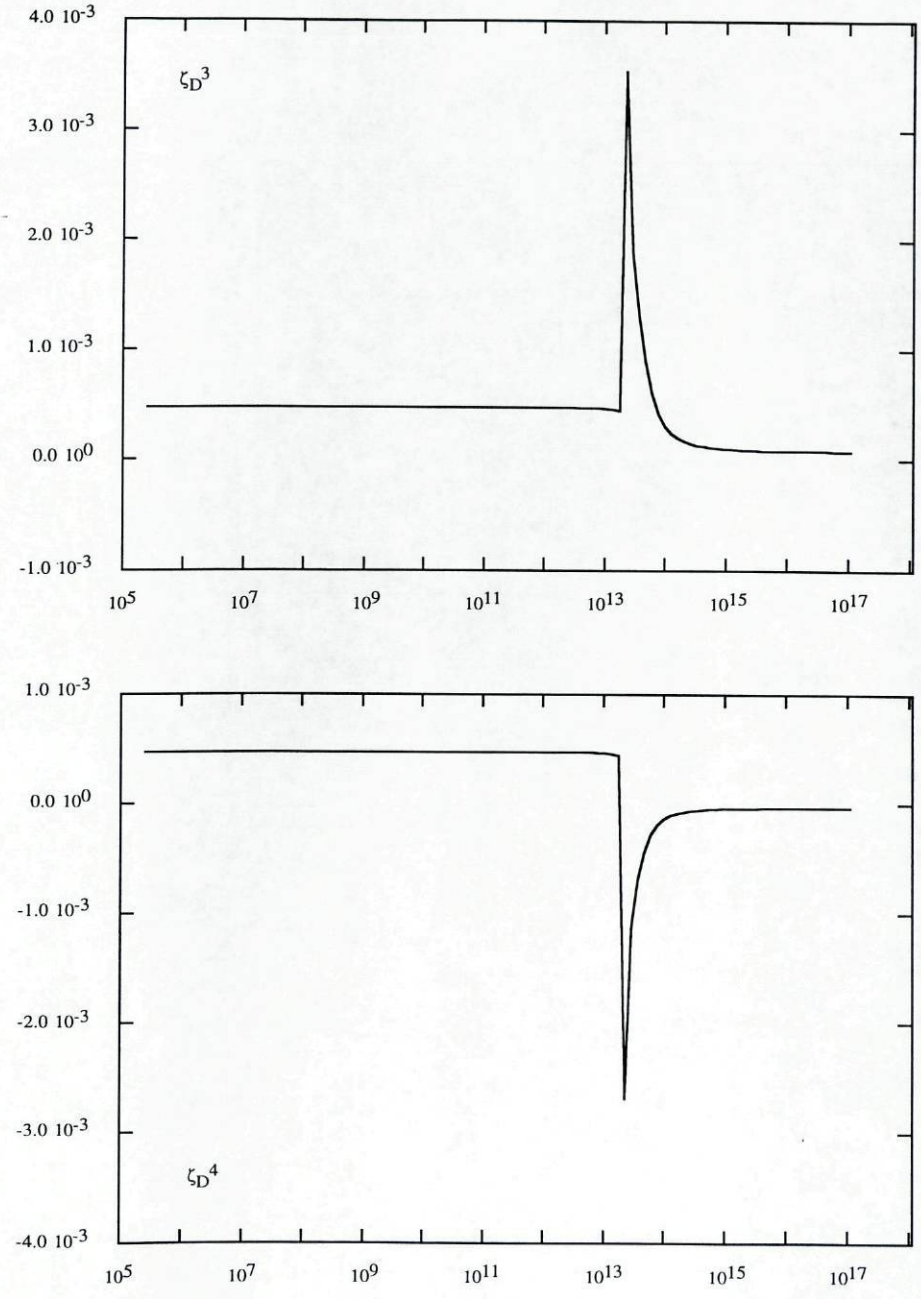


Figura 7.7: O mesmo que na figura anterior só que agora relativamente às amplitudes ζ_D^3 e ζ_D^4. Notar nestas duas últimas figuras a alteração de comportamento das amplitudes na região da escala ressonante.

$$\zeta_B^{3,4} = \alpha_3 + \alpha_4 \tag{7.69}$$

para a componente bariónica.

O comportamento destas amplitudes com a escala está ilustrado na Figura 7.8, na qual se pode constatar, como era de esperar, a semelhança com o comportamento das amplitudes ζ_2 e ζ_4 do sistema gravitacional estudado no Capítulo 5, (ver as figuras 5.8 e 5.9). Tudo o que então foi dito se aplica igualmente a este caso.

Como dissemos, a razão entre os valores iniciais dos contrastes de densidade nas duas componentes tem uma influência de certa forma importante no comportamento dos coeficientes ζ_j^i.

Por isso vamos definir o parâmetro q_1 como sendo a razão entre os contrastes de densidade no instante inicial, (que pode ser qualquer um a partir da época de igualdade entre matéria e radiação e em particular a época da recombinação), isto é:

$$q_1 = \frac{\Delta_D^0}{\Delta_B^0} \tag{7.70}$$

Do mesmo modo definimos o parâmetro q_2 como sendo o quociente entre as taxas de crescimento dos contrastes de densidade no instante inicial, ou seja:

$$q_2 = \frac{\dot{\Delta}_D^0}{\dot{\Delta}_B^0} \tag{7.71}$$

O caso analisado anteriormente refere-se assim a valores destes dois parâmetros que são $q_1 = q_2 = 19$.

Para além deste caso, foram ainda consideradas outras possibilidades realistas sem que tivessem sido notadas alterações significativas no comportamento das amplitudes dos modos próprios ζ_j^i.

Foram analisados, em particular, os casos seguintes:

1. Caso em que os contrastes de densidade nas duas componentes são da mesma ordem de grandeza, isto é:

$$\frac{\Delta_B^{\mathrm{rec}}}{\Delta_D^{\mathrm{rec}}} \sim 1\,. \tag{7.72}$$

2. Diversos casos em que a razão entre os contrastes de densidade nas componentes bariónica e escura é muito menor que a razão entre as densidades não perturbadas das respectivas componentes, ou seja:

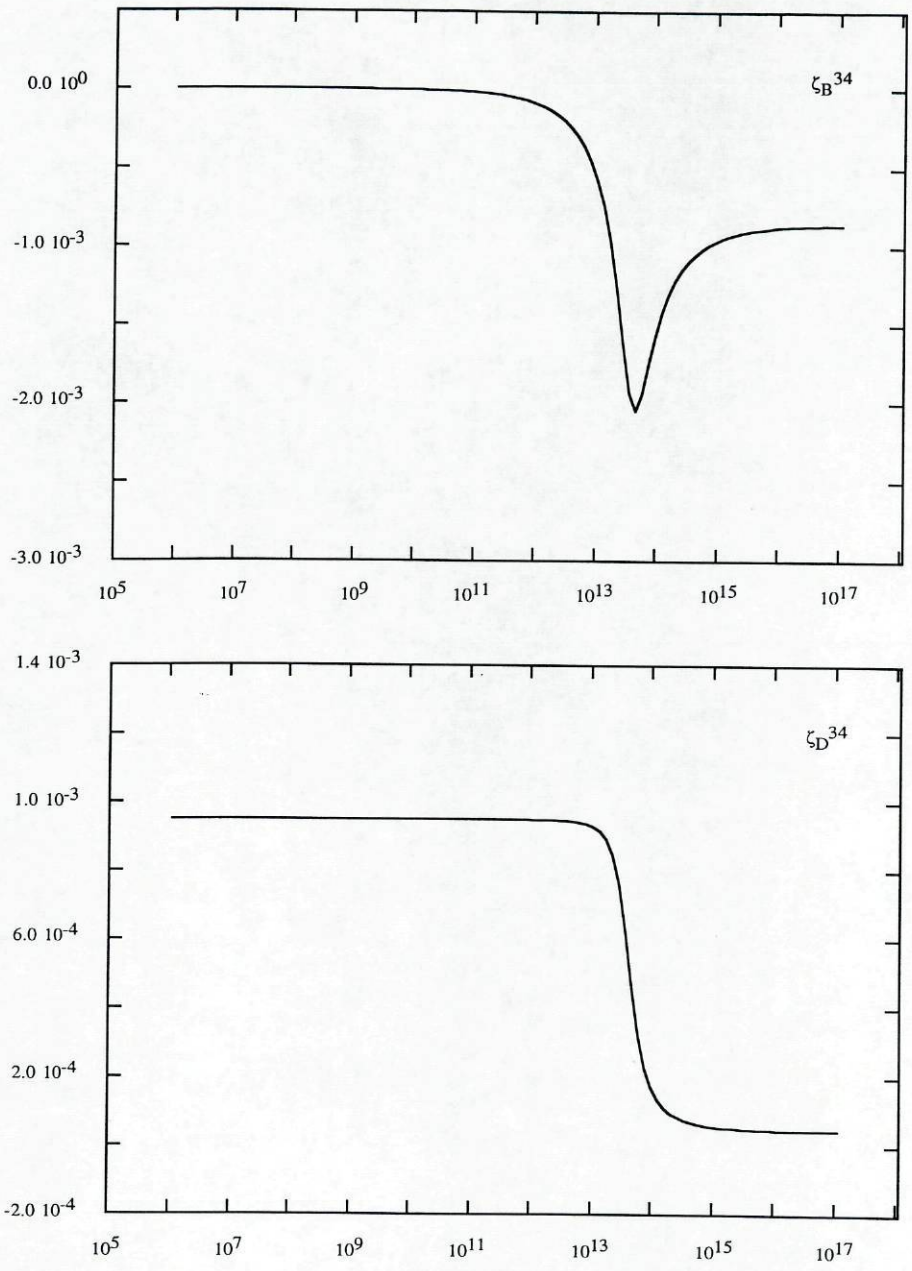


Figura 7.8: Variação com a escala das amplitudes dos modos próprios associados a λ_3 e λ_4 quando combinados de modo a representarem um só modo físico, $\zeta_B^{3,4}$ e $\zeta_D^{3,4}$. Como se pode verificar, a descontinuidade nas amplitudes daqueles modos próprios, visíveis nas figuras anteriores, são eliminadas. Para além disso fica clara a participação activa destes modos da componente bariónica no processo ressonante, traduzida pelo acentuado mínimo da amplitude $\zeta_B^{3,4}$.

$$\frac{\Delta_B^{\rm rec}}{\Delta_D^{\rm rec}} \ll \frac{\Omega_B}{\Omega_D}\,, \tag{7.73}$$

o que numericamente equivale a considerar

$$\Delta_B^{\rm rec} \sim 0\,. \tag{7.74}$$

Em todos os casos foi observado um comportamento ressonante da amplitude do modo de colapso na componente bariónica, ζ_B^1.

Convém contudo referir que foi ainda analisado um caso em que a ressonância ocorre na amplitude do modo de colapso da componente escura ζ_D^1, em vez de ζ_B^1. Este tipo de comportamento é verificado para o caso

$$\frac{\Delta_B^{\rm rec}}{\Delta_D^{\rm rec}} \gg 1\,. \tag{7.75}$$

No entanto este caso corresponde ao caso mais irrealista de todos os analisados, porque enquanto as perturbações na componente escura podem crescer a partir da época em que as partículas respectivas se tornam não relativistas, o que acontece antes da recombinação para massas superiores a cerca de 1 eV, as perturbações na componente bariónica (no caso de não serem completamente amortecidas antes da recombinação), apenas podem começar a crescer depois desta época devido ao acoplamento entre bariões e radiação em épocas anteriores.

Assim o caso representado pela condição (7.75) é muito pouco razoável, se não de todo irrealista. Podemos pois concluir que para os casos com as condições iniciais mais realistas o processo ressonante ocorre no modo de colapso da componente bariónica, muito embora, como é natural, haja a participação activa de outros modos para que a ressonância seja possível, particularmente dos modos associados aos valores próprios λ_3 e λ_4 (ver o comportamento de $\zeta_B^{3,4}$ na Figura 7.8), mas também do modo associado a λ_2 (ver o comportamento de ζ_B^2 na Figura 7.4).

Nos gráficos das figuras 7.9 – 7.11 ilustramos o comportamento com a escala das amplitudes ζ_D^1 e ζ_B^1 para diversos valores dos parâmetros q_1 e q_2 (indicados em cada um dos gráficos), que simulam distintas condições iniciais. De referir que o instante inicial é aqui tomado imediatamente após a época da recombinação.

Por fim estudemos a evolução temporal da escala ressonante desde a época da recombinação até à época actual. Este estudo foi efectuado numericamente utilizando a expressão

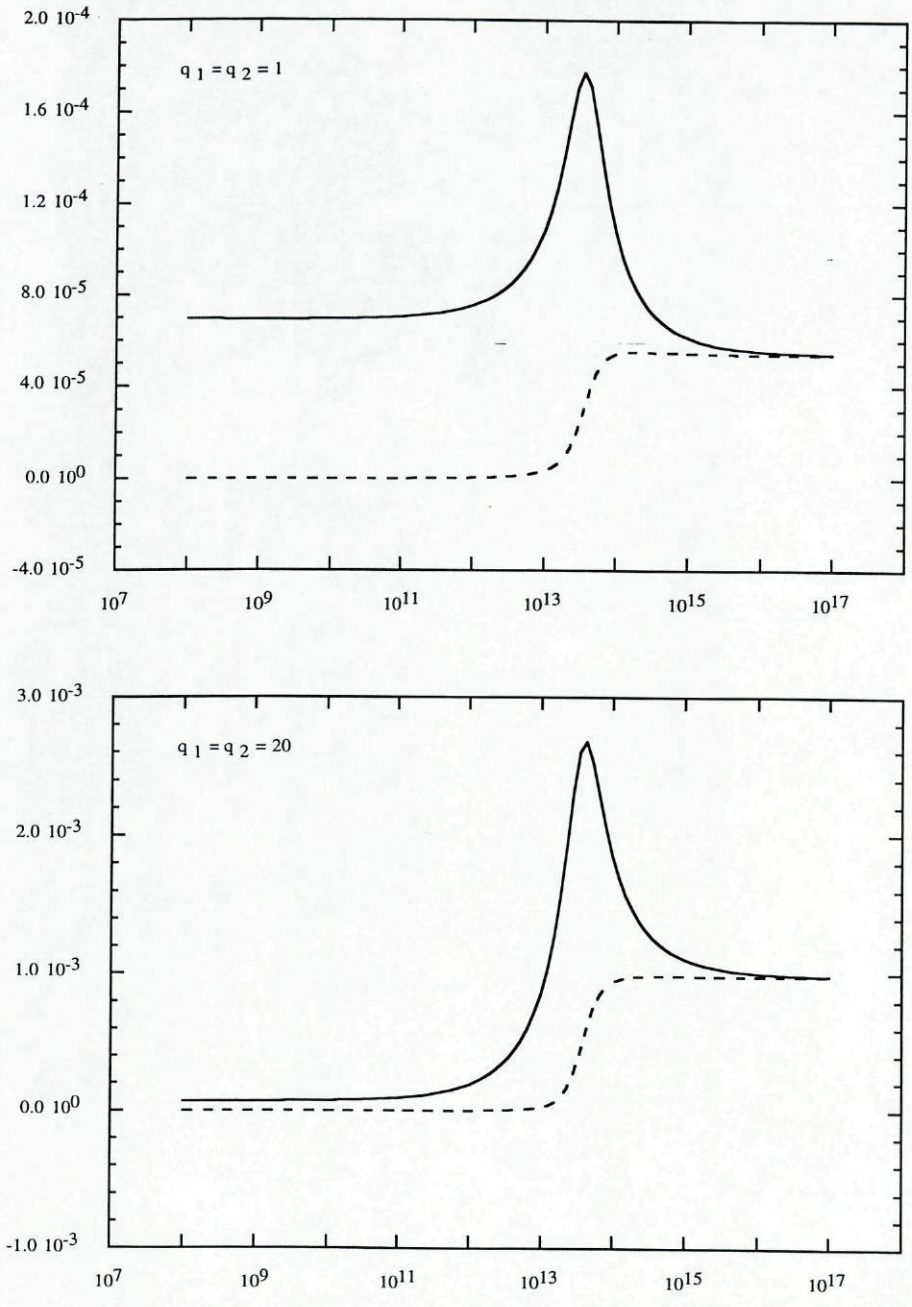


Figura 7.9: Representação gráfica ilustrando o comportamento com a escala em Massas Solares ($M_\odot$), das amplitudes dos modos de colapso na componente bariónica ζ_B^1 (a cheio) e na componente escura ζ_D^1 (a tracejado). O instante inicial é imediatamente após a recombinação. Cada painel representa condições iniciais distintas definidas pelos parâmetros q_1 e q_2.

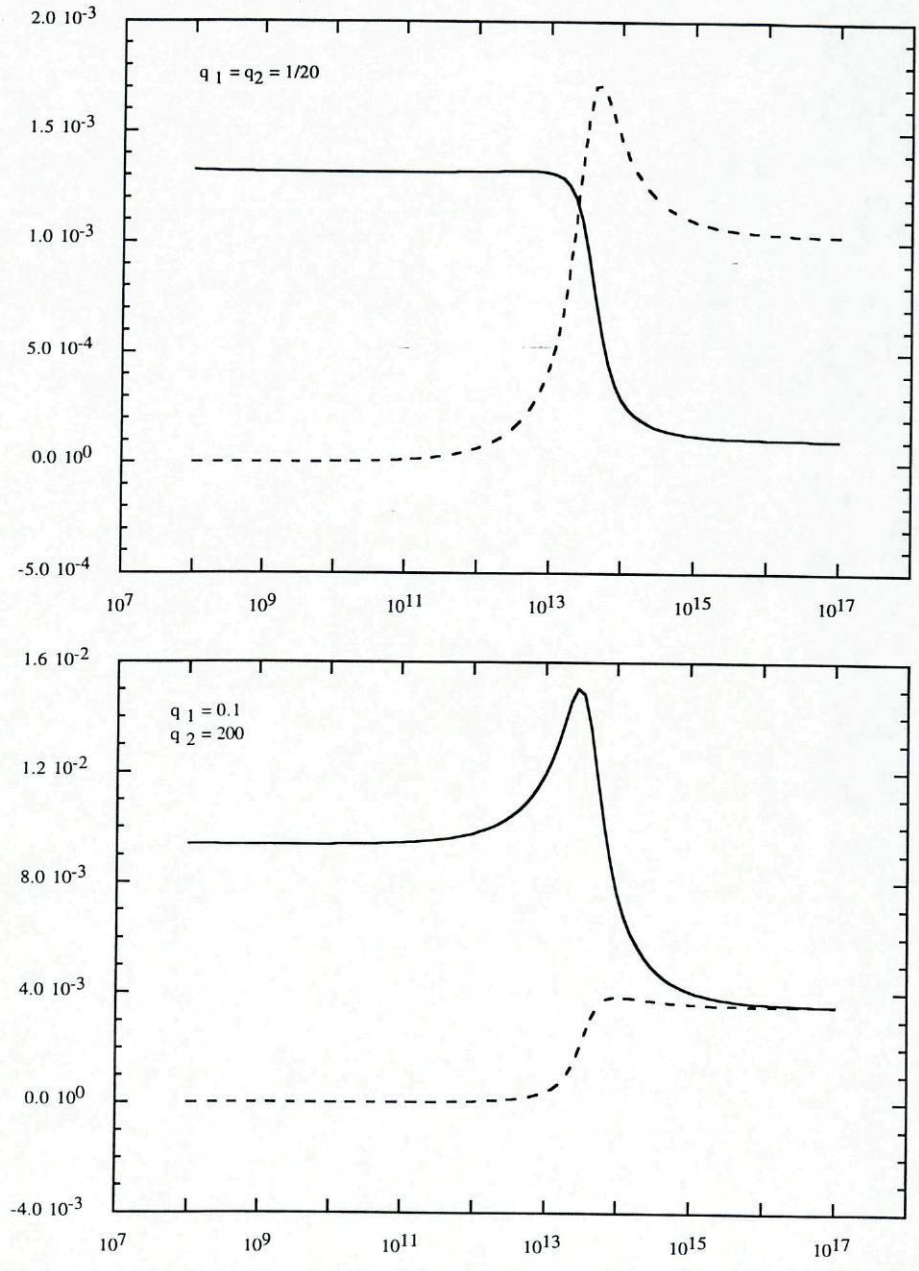


Figura 7.10: O mesmo que para a figura anterior mas para condições iniciais distintas, tal como indicado em cada painel. Notar que nas condições do gráfico do painel superior desta figura a ressonância (embora não muito pronunciada) ocorre na componente escura. Contudo este é um dos casos mais irrealista, de acordo com o que se pensa que são as condições presentes na época da recombinação.

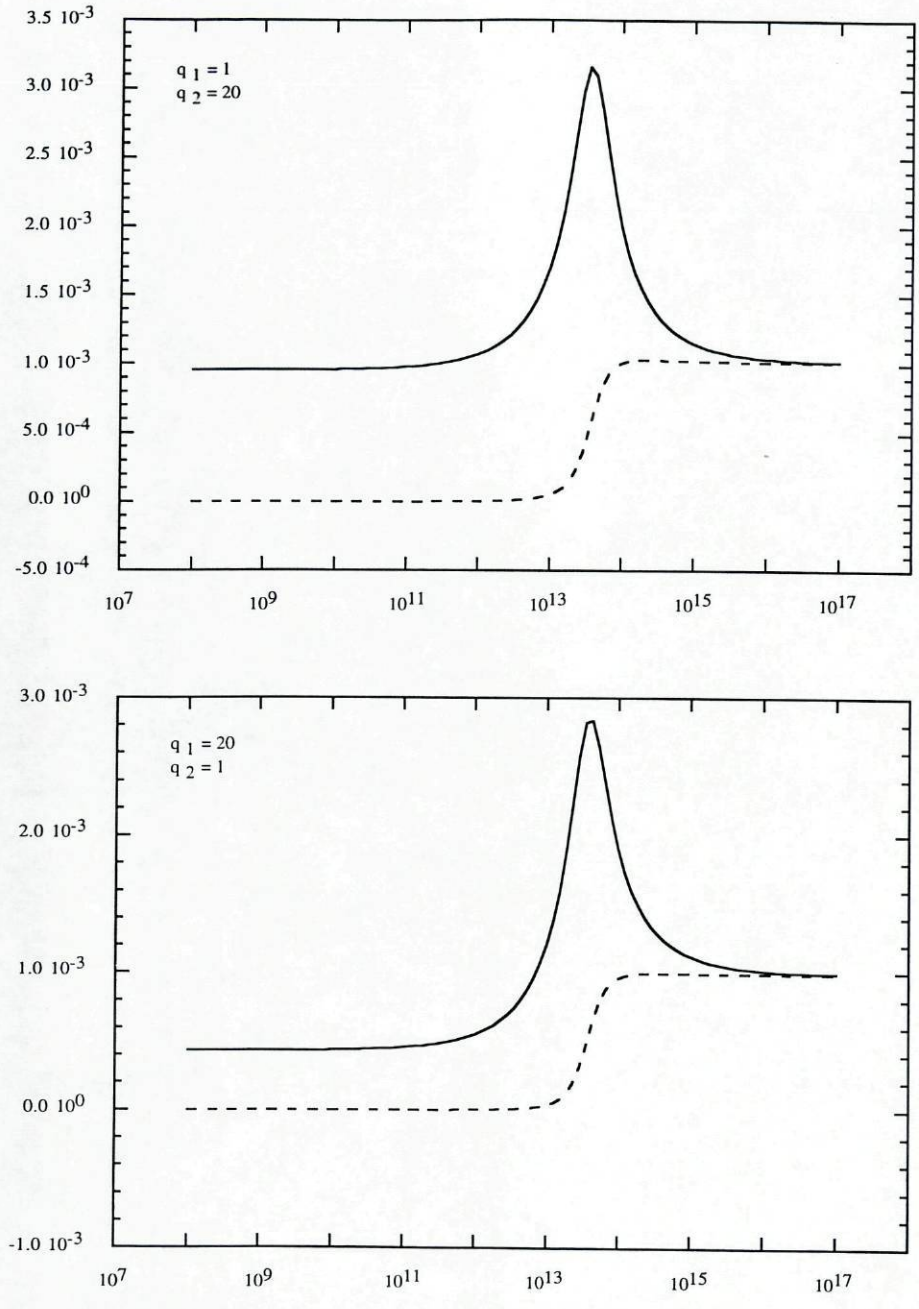


Figura 7.11: O mesmo que nas figuras anteriores para condições iniciais distintas tal como indicado pelos respectivos valores dos parâmetros q_1 e q_2. Notar que para grandes escala as amplitudes dos modos de colapso nas duas componentes tendem para o mesmo limite, o que significa um acoplamento bastante forte entre as componentes.

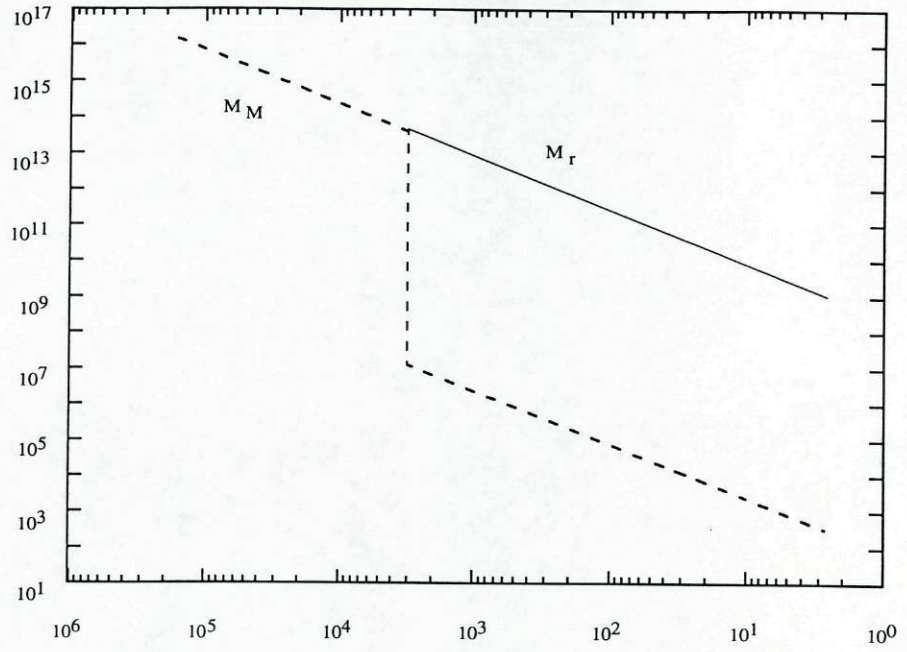


Figura 7.12: Evolução temporal, desde a época em que as partículas de matéria escura se tornam não relativistas até à época actual, da escala crítica M_M (a tracejado), em $M_\odot$ e como função da temperatura da radiação de fundo de micro-ondas em ° K. Mostra-se igualmente a evolução temporal da escala ressonante no período pós-recombinação. Notar que esta escala dá continuidade (depois da recombinação) à escala de Jeans da mistura (antes da recombinação). Notar ainda o intervalo de variação da escala ressonante, (ver no texto a discussão respectiva).

do coeficiente α_1 e fazendo o gráfico da evolução temporal da escala a que ocorre o seu ponto de máximo.

Verificamos assim numericamente que a escala ressonante (M_r) tem a mesma dependência temporal que as outras escalas críticas, isto é, M_1, M_2 e M_M, ou seja:

$$M_r \propto \frac{1}{t} \,. \tag{7.76}$$

Para além disso podemos concluir que a escala ressonante é, depois da recombinação, o prolongamento natural da escala de Jeans da mistura antes da recombinação, tal como se pode observar pelo gráfico da Figura 7.12.

Este facto constitui por si só um resultado que nos parece bastante importante.

Com efeito, é verdade que imediatamente após a recombinação as perturbações com massas superiores à escala de Jeans da mistura M_M que é da ordem de $10^7\,\mathrm{M}_\odot$, podem começar a crescer. Contudo, esse não é um crescimento eficiente dado que a amplitude do modo de colapso é muito pequena até que seja atingida uma escala da ordem de grandeza da escala ressonante ($\sim 10^{13}\,\mathrm{M}_\odot$), tal como se encontra ilustrado nos gráficos da Figura 7.9.

O que acabamos de afirmar é válido para as duas componentes. No entanto assume particular significado no caso da componente bariónica que é aquela em que ocorre o mecanismo ressonante. Isto significa que para as perturbações com comprimento de onda no intervalo $\sim 10^7 - \sim 10^{13}\,\mathrm{M}_\odot$ a maior parte do material, de qualquer das componentes, se encontra no modo de decaimento ou nos modos acústicos.

Por outras palavras podemos dizer que a *escala crítica efectiva* para a formação de estruturas materiais, que antes da recombinação é a escala de Jeans para a mistura (M_M), não tem uma quebra abrupta aquando da recombinação do hidrogénio, como acontece para todas as outras escalas críticas (e em particular também para M_M). Pelo contrário, depois da recombinação esta escala crítica tem uma continuação natural na escala ressonante.

Como consequência destes resultados acreditamos que este mecanismo ressonante induz uma continuidade no processo de formação de estruturas, no que diz respeito à escala efectiva gravitacionalmente instável. Assim, o breve período da recombinação não deve ser entendido como uma época de descontinuidade como usualmente é referido. Pelo menos no que diz respeito ao valor da escala crítica efectiva para a formação de estruturas.

Em vez de provocar uma descontinuidade, a recombinação permite o aparecimento de uma ressonância na componente bariónica que é responsável pela formação de estruturas bariónicas com massas que preenchem toda a escala de massas que hoje podemos observar nas estruturas galácticas. Isto deve-se ao facto de que, desde a recombinação até à época de formação dos primeiros quasares (o que ocorre para um valor do desvio para o vermelho da ordem de $4-5$), a escala ressonante decresce de um valor próximo de $10^{13}\,\mathrm{M}_\odot$ (a escala das galáxias gigantes), até cerca de $10^8\,\mathrm{M}_\odot$ (a massa das mais pequenas galáxias anãs), como se pode ver na Figura 7.12.

Notar ainda que estes valores se referem à massa total, isto é, à soma das massas de cada uma das duas componentes, considerando ainda que as partículas de matéria escura têm uma massa de 30 eV. Para obter apenas a massa bariónica correspondente, apenas temos que considerar os valores acima referidos, e multiplicá-los pelo parâmetro de densidade da componente bariónica Ω_B.

7.5 Conclusões

A formação e evolução de estruturas cósmicas em geral e das galáxias em particular tem sido desde sempre uma das áreas da cosmologia de mais aceso debate e controvérsia. Isso não é mais do que o reflexo da nossa ignorancia relativamente ao conhecimento correcto e detalhado dos complicados processos envolvidos.

A razão pela qual as estruturas bariónicas se formam com determinadas escalas de massa, por exemplo, não é ainda conhecida, independentemente de se considerar que a matéria escura é quente ou fria ou uma mistura das duas. Em nossa opinião, isto deve-se em parte ao facto de em todos os modelos até hoje desenvolvidos e aperfeiçoados, analíticos ou numéricos, se ter sempre prestado pouca atenção a um ponto que pensamos ser de importância crucial – o estudo das amplitudes dos modos de "oscilação" dos sistemas gravitacionais que se consideram.

Foi esse estudo que aqui desenvolvemos. Para isso partimos dos dois pressupostos básicos seguintes:

1. O nosso Universo pode ser bem representado por um modelo de Einstein-de Sitter, de acordo com as teorias inflacionárias.

2. O conteúdo material do Universo sob a forma de bariões é muito menor que o seu conteúdo sob a forma de partículas massivas de matéria escura, de acordo com a nucleosíntese primordial do modelo padrão e o pressuposto anterior.

Assim, usando um formalismo de Sistemas Dinâmicos, estudámos os modos próprios de oscilação de um sistema material constituido por duas componentes, sujeito apenas à sua auto-gravitação e a dependência das suas amplitudes com a escala.

Ao contrário do caso de um meio estático (estudado no Capítulo 5) em que o sistema possui apenas uma escala crítica que é a escala de Jeans da mistura, verificamos que ao considerar um meio em expansão o sistema passa a ter em qualquer instante três escalas críticas (para além da escala ressonante que é comum aos dois casos). Duas dessas escalas estão associadas à mudança de regime (de complexo a real) verificada nos dois pares de valores próprios conjugados da matriz dos coeficientes do sistema dinâmico considerado. A terceira, que se situa entre as duas anteriores, é a escala de Jeans para a mistura e que separa os regimes estável e instável do sistema.

De referir que a análise efectuada é válida dentro dos limites da aproximação newtoniana, o que acontece depois de as partículas de matéria escura se tornarem não relativistas, ou

seja, depois de a densidade do Universo passar a ser dominada pela matéria, o que acontece um pouco antes da recombinação no modelo de Universo utilizado (Weinberg 1972).

O estudo das amplitudes dos modos próprios do sistema dinâmico permitiu-nos concluir que num Universo dominado por matéria escura quente, existe uma quarta escala crítica associada a um mecanismo ressonante que surge no período que se segue à época da recombinação. Este processo ressonante manifesta-se sempre na amplitude do modo de colapso, independentemente das condições iniciais escolhidas. Contudo este estudo permitiu-nos ainda concluir que para condições iniciais realistas a ressonância afecta sobretudo a componente bariónica, apesar da sua importância poder variar ligeiramente com essas mesmas condições iniciais.

Muito importante também é o facto de se verificar que, no período pós-recombinação, a escala ressonante prolonga naturalmente e sem descontinuidades a evolução temporal da escala de Jeans da mistura que antes da recombinação é a escala crítica efectiva para o colapso gravitacional do sistema.

Um outro ponto que convém referir é o que diz respeito à relação entre a massa das partículas de matéria escura quente e a massa (bariónica) das galáxias. De facto se a massa dessas partículas for da ordem de 30 eV, podemos concluir que a escala ressonante (em unidades de massa) decresce desde um valor que é imediatamente após a época da recombinação da ordem de grandeza da massa das galáxias gigantes isto é, cerca de $10^{12}M_{\odot}$, até à escala das pequenas galáxias anãs que é da ordem de $10^{7-8}M_{\odot}$ quando se atingm épocas bastante mais recentes.

De acordo com estes resultados, é de concluir que as galáxias mais massivas devem ser bastante mais velhas que as galáxias de pequena massa, que devem ser jovens (em particular as galáxias anãs).

Devido à importância que este processo ressonante pode ter na formação de estruturas bariónicas no período pós-recombinação, pensamos analisar detalhadamente no futuro próximo as implicações deste mecanismo na forma do espectro das perturbações primordiais, estudando para isso a função de transferência para as duas componentes.

8

Conclusões

O que quer que aconteça
dar-se á de hoje a dez biliões de anos,
e não espero estar cá para descobrir que me enganei.
(S. Hawking)

Neste capítulo final faremos uma síntese dos resultados obtidos, e que foram sendo apresentados e de certa forma comentados ao longo dos capítulos precedentes.

Faremos também uma análise das suas possíveis implicações cosmológicas no que diz respeito à formação de estruturas no período pós recombinação.

Abordaremos igualmente algumas das questões que os resultados obtidos levantam e que para já se encontram em aberto. Pensamos que uma reflexão sobre estas questões constitui um bom ponto de partida para projectos de investigação a realizar nesta área e que podem prolongar e aprofundar o estudo iniciado com este projecto.

8.1 Discussão dos resultados

Na primeira parte desta tese fizemos uma apresentação, resumida mas que julgámos necessária, dos modelos cosmológicos de Friedman, do formalismo utilizado na elaboração de um dos critérios de instabilidade gravitacional mais utilizados nos modelos de formação de estruturas (o critério de Jeans) e de dois dos mais elaborados modelos de formação de estruturas a duas componentes até hoje desenvolvidos (os modelos de matéria escura quente e de matéria escura fria).

Na segunda parte, aquela em que são apresentados os resultados originais deste trabalho, começámos por fazer o estudo da forma como se estabelecem pequenas perturbações de densidade (perturbações lineares) num fluido de duas componentes, considerando que o fluido se mantém num estado estático quando não perturbado. Convém salientar que o estudo da evolução dinâmica das perturbações não era neste caso um dos nossos objectivos. Por duas razões:

1. Uma vez que o nosso Universo se encontra em expansão não fazia sentido estar a fazer um estudo dinâmico considerando estático o estado não perturbado do fluido.

2. Mesmo considerando o caso de um meio em expansão a dependência temporal das

perturbações era já conhecida, embora apenas para alguns casos particulares dos valores dos parâmetros envolvidos. Em particular, é bem conhecido o comportamento dinâmico das perturbações para o limite assimptótico das grandes escalas, isto é, para escalas bastante maiores que a escala crítica gravitacionalmente instável.

Em vez do estudo da evolução dinâmica, e utilizando o formalismo de Sistemas Dinâmicos, interessou-nos prioritariamente efectuar o estudo das escalas críticas para o sistema gravitacional acoplado, bem como o estudo das amplitudes dos modos próprios de oscilação de cada uma das componentes e a sua dependência com a escala. Esse tipo de estudo centrou-se em particular no modo de colapso, que é o que conduz ao aparecimento das estruturas que hoje observamos.

Assim, verificámos que o sistema gravitacional acoplado apenas possui uma escala crítica: a escala a partir da qual ele se torna gravitacionalmente instável, a que chamámos a *escala de Jeans da mistura*. No entanto, o estudo da amplitude do modo de colapso mostrou que a escala crítica efectiva para o sistema (no que diz respeito à formação de estruturas), não deveria ser considerada a escala de Jeans da mistura mas sim uma escala próxima da escala de Jeans da matéria escura, (quando desacoplada), se esta fosse matéria escura quente.

De facto, ao considerar um modelo de Universo com a densidade crítica, dominado gravitacionalmente por matéria escura quente, mostrou-se que o modo de colapso para a componente bariónica apresentava uma ressonância para uma escala próxima da escala de Jeans da matéria escura. Mostrou-se ainda que se as partículas de matéria escura quente tiverem uma massa da ordem de 30 eV esse processo ressonante ocorre, na época da recombinação, para uma escala de massas da mesma ordem de grandeza da massa de grandes galáxias, favorecendo assim preferencialmente nessa época o crescimento de estruturas a esta escala.

Por outro lado, sendo a formação galáctica um processo que apenas pode ter início após a recombinação, (devido ao desacoplamento entre bariões e radiação), e se as galáxias se formam, como acreditamos, devido a este mecanismo ressonante, uma implicação importante deste resultado é a de que ele permite colocar restrições aos modelos de matéria escura, no sentido de que, como se mostrou, a ressonância apenas existe se a componente gravitacionalmente dominante for a que possuir a maior velocidade do som.

Assim, num modelo de matéria escura fria tal ressonância não será possível, isto é, nesse caso a ressonância apenas se observa para um valor imaginário da escala, o que não tem

significado físico. Como consequência, num modelo de matéria escura fria, a formação de estruturas com as massas galácticas observadas, não será mais provável do que a formação de qualquer outra estrutura a uma outra escala qualquer. Por outro lado não explica a inexistencia de estruturas com massas entre as dos enxames globulares e as das galáxias anãs. Não explica igualmente porque é que as galáxias tem um limite máximo de massas tão bem definido, ou seja a razão pela qual não há galáxias com massas superiores às das galáxias gigantes $\sim 10^{13}\,\mathrm{M}\odot$ (massa total).

Mostrámos que este tipo de problemas pode ser resolvido com um modelo de matéria escura quente no qual ocorre o mecanismo ressonante na época pós-recombinação.

O estudo da estrutura geométrica do espaço de fase, bem como o estudo das órbitas nesse espaço, permitiu ainda concluir que o crescimento das perturbações de densidade, (independentemente do conhecimento da sua dependência temporal exacta), é distinto nas duas componentes.

O estudo efectuado numa aproximação quase-estática permitiu obter resultados importantes acerca do comportamento (com a escala e com o tempo cósmico) da amplitude do modo de colapso da componente bariónica. Mostrou-se, como aliás seria de esperar, que a escala ressonante decresce com o tempo o que permitiu efectuar um ajuste entre as escalas observadas para as galáxias e a escala ressonante, de modo a poder inferir limites para o valor da massa das partículas de matéria escura quente. Estes limites apesar de não serem muito rigorosos permitem contudo fazer uma estimativa da ordem de grandeza desse valor.

Assim para valores da massa das partículas entre 25 e 50 eV verificou-se que a escala ressonante varia entre cerca de $10^{13}\,\mathrm{M}\odot$, na época da recombinação, e $\sim 10^{8}\,\mathrm{M}\odot$ em épocas recentes. Este intervalo de massas corresponde aproximadamente áquele que é observado para as galáxias, desde as gigantes até às galáxias anãs, sugerindo assim que as maiores galáxias devem ser mais velhas do que por exemplo as anãs.

Considerámos em seguida, utilizando o mesmo formalismo de Sistemas Dinâmicos, o caso em que os termos devidos à expansão do Universo são considerados nas equações que descrevem o comportamento do sistema gravitacional. Ao contrário do caso anterior, em que apenas uma escala crítica existia para o sistema, verificamos que surgem três escalas que determinam os distintos regimes do novo sistema, isto é:

- A escala a partir da qual o sistema se torna gravitacionalmente instável - a escala de Jeans da mistura - e que está associada à escala de Jeans da componente bariónica.
- Uma escala, no regime estável, que separa dois sub-regimes, ou seja, separa o regime

em que o sistema sofre oscilações amortecidas em dois dos seus modos próprios, daquele em que esse amortecimento, nos mesmos modos, se dá sem oscilações.

- Uma escala no regime instável a partir da qual o sistema deixa de ter oscilações em qualquer dos seus modos próprios. Esta escala está associada à escala de Jeans da matéria escura (no caso de matéria escura quente).

Verificamos ainda que, se forem verificadas as mesmas condições que no caso anterior, o mecanismo ressonante continua a manifestar-se no mesmo modo próprio (o de colapso) e para a mesma componente (a bariónica) que anteriormente, como aliás seria de esperar. Como resultado concluimos que, para além das três escalas críticas referidas, continua a existir uma escala ressonante que é da mesma ordem de grandeza da escala de Jeans da matéria escura.

O estudo da evolução temporal destas três escalas críticas, juntamente com o da escala ressonante, mostra que depois da recombinação, esta escala é a continuação natural da escala efectiva para o colapso gravitacional - a escala de Jeans da mistura - antes da recombinação.

Devido às características da ressonância, isto é, à forma como varia a amplitude do modo de colapso com a escala, concluimos que depois da recombinação a escala crítica efectiva para o colapso gravitacional é a escala ressonante e não a escala de Jeans da mistura.

Em consequência destes resultados começa a emergir um cenário de formação de estruturas que podemos resumidamente descrever do modo seguinte:

Até à época da recombinação tudo se passa como em qualquer modelo de matéria escura quente. Em particular, naquela época, o espectro de perturbações, quer na matéria escura quer na componente bariónica, é o espectro clássico previsto por aqueles modelos, (ver no Capítulo 4 a Secção 4.3.1). No entanto este espectro deverá ser alterado a partir da época da recombinação, particularmente na componente bariónica, em consequência não só do desacoplamento entre bariões e radiação mas também devido ao efeito do mecanismo ressonante que mostrámos existir.

Assim, e muito embora as perturbações na matéria escura continuem a evoluir quase que independentemente da presença da componente bariónica, o mesmo já não acontece em relação a esta componente, que, uma vez desacoplada da radiação, sente mais fortemente a presença da matéria escura e altera o seu comportamento. Dito de outra forma: enquanto que na ausência de matéria escura a escala a partir da qual o material bariónico se torna gravitacionalmente instável para o crescimento efectivo das perturbações é a escala de Jeans dos bariões (isto é, aproximadamente a escala dos enxames globulares $\sim 10^5\,M_\odot$), com

a presença da componente de matéria escura quente e devido ao mecanismo ressonante observado, essa escala passa a ser uma escala próxima da escala de Jeans da matéria escura, o que na época da recombinação é da mesma ordem de grandeza da de grandes galáxias, isto é, $\sim 10^{12}\,M_{\odot}$ considerando apenas o material bariónico.

É este processo que achamos deverá alterar significativemente o espectro das perturbações na componente bariónica, no período que se segue à recombinação, e que conduz à seleção preferencial de estruturas com as escalas galácticas observadas. Tanto mais que, como se viu, a escala ressonante cobre desde a recombinação até à época dos mais afastados quasars, ($z \sim 4$), toda o espectro de massas que vai desde as galáxias gigantes até às galáxias anãs com massas que variam aproximadamente entre $\sim 10^{7}$ e $\sim 10^{8}\,M_{\odot}$. Como também se mostrou estes valores são válidos se a massa das partículas de matéria escura for da ordem de 30 eV. Diminuindo a massa das partículas naturalmente aumentará o valor da escala ressonante, de acordo com a figura 6.5.

Ainda de acordo com este cenário um outro mecanismo poderá ser explicado através da ressonância. Esse mecanismo é o que é vulgarmente designado em inglês por *bias*[1] (Dekel & Rees 1987).

Uma vez que não é de prevêr que o espectro das perturbações na componente escura seja significativamente alterado pela ressonância, já que ela se verifica fundamentalmente na componente bariónica, é de esperar que esta ressonância seja responsável por uma distribuição espacial bastante distinta nas duas componentes, isto é, a distribuição do material que hoje observamos como luminoso (bariónico) não é representativa da distribuição da matéria escura existente no Universo, ou se se preferir a distribuição de luminosidade não representa a distribuição de massa total à escala cosmológica. Esta seria uma forma natural de explicar um processo, que muitas vezes se admite existir apenas por conveniência dos modelos.

8.2 Questões em aberto – Pistas para trabalhos futuros

De alguma forma falámos já, na secção anterior, de algumas das questões que a descoberta da ressonância gravitacional veio levantar. Nomeadamente a questão de saber exactamente a forma como este processo, que se manifesta no período que se segue à recombinação, irá modificar o espectro das perturbações que existia imediatamente antes daquela época.

De facto a ressonância que no período pós-recombinação afecta significativamente o

[1] opatamos por não traduzir o termo bias para não correr o risco de o sentido original poder ser alterado.

modo de colapso da componente bariónica deve alterar significativamente o espectro das perturbações que esta componente possuia antes da recombinação. No que diz respeito à componente de matéria escura é de esperar que o espectro das suas perturbações não sofra grandes alterações já que esta componente não é muito afectada pela ressonância; por isso interessa sobretudo estudar a função de transferência para a componente bariónica desde a recombinação até à época actual. Este é o trabalho que pensamos efectuar prioritariamente.

Contudo há outras questões que no futuro nos interessa analisar:

- Uma vez que a ressonância se manifesta fundamentalmente na componente bariónica é também de esperar que este mecanismo possa fornecer uma explicação natural para uma distribuição espacial distinta das duas componentes.[2] Por outras palavras pensamos que a ressonância poderá explicar porque é que a distribuição de massa no Universo não acompanha a distribuição de luminosidade.

  Esta diferente distribuição é habitualmente caracterizada por um parâmetro (o parâmetro de *bias*) que mede o grau de afastamento entre as duas distribuições. Contudo, este parâmetro é introduzido nos modelos de uma forma artificial, isto é, não surge como uma consequência do próprio modelo.

  Por isso pensamos que a ressonância para além de poder ser uma explicação natural para esse parâmetro poderá eventualmente permitir determinar o seu valor numérico. Este é outro ponto importante que pensamos dever analisar no futuro.

- Como dissemos, existe actualmente uma certa tendência para desenvolver modelos de formação de estruturas em que a componente de matéria escura é constituida por uma mistura de partículas de matéria escura quente e de matéria escura fria. Assim, estes modelos são modelos com três componentes.

  Pensamos que será importante estudar como se comporta um sistema deste tipo. Sobretudo no que diz respeito à percentagem de cada uma das componentes de matéria escura, já que, como vimos, no caso de duas componentes a resonância apenas é possível se a componente com maior velocidade do som for gravitacionalmente dominante.

- Vimos que a escala ressonante decresce com t^{-1} e que na época da recombinação tem um valor da ordem de $\sim 10^{12}\,M_{\odot}$ se considerarmos apenas o material bariónico.

[2] Este fenómeno é usualmente designado na literatura inglesa por *bias*.

Esta é a escala das galáxias gigantes, normalmente observadas nas regiões centrais de enxames galácticos. Aquela dependência temporal da escala ressonante tem como consequência que quando se atingem épocas recentes a ressonância ocorre para escalas da ordem de $\sim 10^7\,M_\odot$ (massa bariónica) escala esta representativa das massas de algumas galáxias anãs.

É importante pois analisar se, por observação, se pode estabelecer uma relação entre a idade e a massa das galáxias e se essa relação, caso exista, confirma ou não o previsto pelo modelo ressonante, isto é, se está de acordo com a evolução temporal da escala ressonante – a idade dos sistemas galácticos deve crescer com a massa.

Finalmente devemos notar que apesar dos processos ressonantes entre modos periódicos de sistemas acoplados serem bastante comuns em todos os ramos da física, este tipo de ressonância envolvendo um modo não periódico (o modo de colapso) não era até agora conhecido (pelo menos por nós). Pensamos que em outros ramos da física, como por exemplo nos plasmas onde temos um fluido constituido por duas componentes acopladas pela interacção electromagnética, podem ocorrer processos ressonantes semelhantes ao que estudámos e que podem igualmente estar na origem de instabilidades.

Esta é mais uma pista para trabalho a realizar no futuro.

Referências

Akhmedov E.K., Lanza A., Petcov S., (1993), Phys. Lett., **B 303**, 85

Albrecht A., Steinhardt P.J., (1982), Phys. Rev. Lett., **48**, 1220

Arnold V.I. (1973), *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, Cambridge MA

Bahcall N.A., (1977), Ann. Rev. Astron. Astrophys., 15, 505

Bahcall J.N., (1989), *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge

Bardeen J., Steinhardt P., Turner M.S., (1983), Phys. Rev. D, **28**, 679

Barger V., Whisnant K., Cline D., Phillips R.J.N., (1980), Phys. Lett. B, **93**, 194

Bertin G., Pignatelli E., Saglia R.P., (1993), A.A., **271**, 381

Bilenky S.M., Pontecorvo B., (1976), Phys. Lett. B, **61**, 248

Bilenky S.M., Pontecorvo B., (1978), Phys. Rev. C, **41**, 225

Binney J., Tremaine S., (1987), *Galactic Dynamics*, Princeton Series in Astrophysics, Princeton University Press, ed. Ostriker J.P., Princeton, New Jersey

Blumenthal G.R., Faber S.M., Primack J.R., Rees M.J., (1984), Nature, **311**, 517

Boesgaard A., Steigman G., (1985), Ann. Rev. Astron. Astrophys., **23**, 319

Bond J.R. & Efstathiou G., (1984), Ap. J. Lett., **285**, L45

Bond J.R., Efstathiou G., Silk J., (1980), Phys. Rev. Lett., **45**, 1980

Bond J.R., Szalay A.S., (1983), Ap. J., **274**, 443

Bosma A., (1981 a), A. J., **86**, 1791

Bosma A., (1981 b), A. J., **86**, 1825

Brandenberger R.H., (1985), Rev. Mod. Phys., **57**, 1

Brandenberger R.H., (1989a), *in* "Physics of the Early Universe", ed. J.A. Peacock, A.F. Heavens & A.T. Davies, Pub. Sussp Place, Edinbourgh

Brandenberger R.H., (1989b), J. Phys. G., **15**, 1

Burbidge G.R., (1972), *in* "External Galaxies and Quasars", IAU Symp. 44, ed. D.S. Evans, D. Wills & B.J. Wills, Reidel, Dordrecht, p. 492

Carr B.J., (1990), Comments Ap., **14**, 257

Cen Y., Ostriker J.P., (1992a), Ap. J. Lett., **399**, L113

Cen Y., Ostriker J.P., (1992b), Ap. J., **399**, 331

Cen Y., Jameson A., Lin F., Ostriker J.P., (1990), Ap. J. Lett., **362**, L41

Centrella J.M., Gallagher J.S.III, Melott A.L., Bushouse H.A., (1988), Ap. J., **333**, 24

Cheng E.S. et al. (1993), Ap. J. Lett.,

Davies R.D., Lasenby A.N., Watson R.A., Daintree E.J., Hopkins J., Beckman J., Sanchez-Almeida J., Rebolo R., (1987), Nature, **326**, 462

Davis M., Efstathiou G., Frenk C.S., White S.D.M., (1985), Ap. J., **292**, 371

Davis M., Efstathiou G., Frenk C.S., White S.D.M., (1992), Nature, **365**, 489

Davis M., Summers F.J., Schlegel D., (1992), Nature, **359**, 393

de Bernardis P., Masi S., Melchiorri F., Melchiorri B., Vittorio N., (1992), Ap. J. Lett., **396**, L57

de Carvalho J.P.M., Macedo P.G., (1993), *in* "Evolution of the Universe and its Observational Quest", Proceedings of the Yamada Conference XXXVII, ed. K. Sato, Universal Academy Press, Inc., Tokyo

Dekel A., Rees M.J., (1987), Nature, **326**, 455

Domínguez-Tenreiro R., Yepes G., (1991), *in* "The Distribution of Matter in the Universe", Proceedings of the 2nd DAEC Meeting, ed. G. A. Mamon & D. Gerbal, DAEC, Observatoire de Paris-Meudon

Doroshkevich A.G., Zel'dovich Ya. B., Novikov I.D., (1967), A.J., **11**, 233

Doroshkevich A.G., Klypin A.A., Khlopov M.Yu, (1988), Sov. Astron., **32(2)**, 127

Dressler A., (1984), Ann. Rev. Astron. Astrophys., **22**, 185

Ellis J.F.R., (1988), Class. Quantum Grav., **5**, 891

Faber S.M., Gallagher J.S., (1979), Ann. Rev. Astron. Astrophys., **17**, 135

Fang L.Z., Li S.X., Xiang S.P., (1984), A.A., **140**, 77

Fang L.Z., Xiang S.P., Yan L., (1990), A.A., **233**, 1

Fargion D., (1983), Nuovo Cimento B, **77**, 111

Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M., (1966), *The Feynman Lectures on Physics*, Vol.I, Addison-Wesley Pub. Comp., Massachusetts

Field G.B., (1971), Ap. J., **165**, 29

Field G.B., (1972), Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**, 227

Fisher K.B., Davis M., Strauss M.A., Yahil A., Huchra J.P., (1993), Ap. J., **402**, 42

Forman W., Jones C., Tucker W., (1985), Ap. J., **293**, 102

Frenk C.S., (1991), Phys. Scripta, **T36**, 70

Frenk C.S., (1992), *in* "Current Topics in Astrofundamental Physics", First International School of Astrophysics D. Chalonge, ed. N. Sanchez & A. Zichichi, World Scientific, p. 345

Fukugita M., Hogan C.J., Peebles P.J.E., (1993), Nature, **366**, 309

Gaier T. et al. (1992), Ap. J. Lett., **398**, L1

Gao J.G., Ruffini R., (1981), Phys. Lett., **100B**, 47

Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., (1980), *Table of Integrals, Series and Products*

Gribov V., Pontecorvo B., (1969), Phys. Lett., **28B**, 493

Grishchuk L.P., Zel'dovich Ya. B., (1981), Sov. Astron., 25(3), 267

Guth A.H., (1981), Phys. Rev. D, **23**, 347

Guth A.H., Pi S.-Y., (1982), Phys. Rev. Lett., **49**, 1110

Guth A.H., Weinberg E., (1983), Nucl. Phys. B, **212**, 321

Harrisson E.R., (1981), *Cosmology: the science of the universe*, Cambridge University Press, Cambridge

Hasinger G., Schmidt M., Trümper J., (1991), A.A., **246**, L2

Hawking S.W., (1982), Phys. Lett. B, **115**, 295

Hawking S.W., Moss I., Stewart J., (1982), Phys. Rev. D, **26**, 2681

Henry J.P., Briel U.G., Nulsen P.E.J., (1993), A.A., **271**, 413

Holtzman J.A., (1989), Ap. J. Lett., **399**, L109

Holzschuch E., (1992), Rep. Prog. Phys., **55**, 1035

Inagaki, S., Saslaw, W.C., (1985), Ap. J., **292**, 339

Jacoby G. et al., (1992), Publ. Astr. Soc. Pac., **104**, 599

Jeans J., (1902), Phil. Trans. R. Soc., **199**, 49

Jeans J., (1928), *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge University Press, Cambridge

Kazanas D., (1980), Ap. J. Lett., **241**, L59

Kibble T.W.B., (1976), J. Phys., A**9**, 1387

Kibble T.W.B., (1980), Phys. Rep., **67**, 183

Kolb E., Turner M., (1990), *Early Universe*, Addison-Wesley, Massachusetts

Koyama K., Takano S., Tawara Y., (1991), Nature, **350**, 135

Lifshitz E.M., (1946), J. Phys., USSR Academy of Sciences, **10**, 116

Linde A., (1982), Phys. Lett., **108B**, 389

Longair M.S., (1989), *in* "Origin, Structure and Evolution of Galaxies and Astronomical Observations", ed. I. Appenzeller, H.J. Habing & P. Lena, Lecture Notes in Physics, Vol. 333.

Lyubimov V.A., Novikov E.G., Nozik V.Z., Tretyakov E.F., Kozik V.S., (1980), Phys. Lett. B, **94**, 266

Maddox S.J., Efstathiou G., Sutherland W., Loveday J., (1990), M.N.R.A.S., **242**, 43p

Mathai A.M., Haubold H.J., Mücket J.P., Gottlöber S., Müller V., (1988), J. Math. Phys., **29**(9), 2069

Mather J.C. et al., (1990), Ap. J. Lett., **354**, L37

McCrea W.H., Milne E.A., (1934), Quart. J. Math., **5**, 73

Meinhold et al., (1993), Ap. J. Lett., **409**, L1

Milne E.A., (1934), Quart. J. Math., **5**, 64

Moniz P.V., (1993), *Modelos Cosmológicos Homogéneos na Presença de Campos Escalares e de Yang-Mills: Simetrias e Soluções*, Tese de Doutoramento, Dep. de Física da Faculdade de Ciências da Universidade Clássica de Lisboa

Moore B., Frenk C.S., Weinberg D.H., Saunders W., Lawrence A., Rowan-Robinson M., Kaiser N., Efstathiou G., Ellis R., (1992), M.N.R.A.S., **256**, 477

Mulchaey J.S., Davis D.S., Mushotzky R.F., Burstein D., (1993), Ap. J. Lett., **404**, L9

Myers S.T., Readhead A.C.S., Lawrence C.R., (1993), Ap. J., **405**, 8

Narlikar J.V., Padmanabhan T., (1991), Ann. Rev. Astron. Astrophys., **29**, 325

Olive K.A., Schramm D.N., Steigman G., Walker T.P., (1990), Phys. Lett. B, **236**, 454

Oort J., (1932), Bull. Astr. Inst. Neth., **6**, 249

Ostriker J.P., Suto Y., (1990), Ap. J., **348**, 378

Padmanabhan T., (1993), *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press, Cambridge

Padmanabhan T., Seshadri T.R. (1988), Class. Quantum Grav., **5**, 221

Partridge R.B., (1988), Rep. Prog. Phys., **51**, 647

Peebles P.J.E., (1971), *Physical Cosmology*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey

Peebles P.J.E., (1980), *The Large Scale Structure of The Universe*, Princeton Series in Physics, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey

Peebles P.J.E., (1982), Ap. J. Lett., **263**, L1

Peebles P.J.E., (1984), Ap. J., **284**, 439

Peebles P.J.E., (1993), *Principles of Physical Cosmology*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey

Peebles P.J.E., Yu J.T., (1970), Ap. J., **162**, 815

Penzias A.A., Wilson R.W., (1965), Ap. J., **142**, 419

Pierce M.J. et al., (1994), Nature, **371**, 385

Polyachenko V.L., Fridman A.M., (1981), Sov. Phys. JETP, 54(1), 7

Ponman T.J., Bertram D., (1993), Nature, **363**, 51

Readhead A.C.S., Lawrence C.R., (1992), Ann. Rev. Astron. Astrophys., **30**, 653

Rees M., Ostriker J.P., (1977), M.N.R.A.S. **179**, 541

Reines F., Sobel H.W., Pasierb E., (1980), Phys. Rev. Lett., **45**, 1307

Rubin V.C., Ford Jr.W.K., Thonnard N., (1980), Ap. J., **238**, 431

Rubin V.C., Ford Jr.W.K., Thonnard N., Burstein D., (1982), Ap. J., **261**, 439

Rubin V.C., Burstein D., Ford Jr.W.K., Thonnard N., (1985), Ap. J., **289**, 81

Sá P.S., (1993), *Inflação na Presença de Campos Materiais*, Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa

Saha A. et al., (1994), Ap. J., **425**, 14

Salvador-Solé E., (1991), *in* "The Distribution of Matter in the Universe", Proceedings of the 2nd DAEC Meeting, ed. G. A. Mamon & D. Gerbal, DAEC, Observatoire de Paris-Meudon

Sandage A. et al., (1994), Ap. J. Lett., **423**, L13

Sato K., (1981), M.N.R.A.S., **195**, 467

Schaefer R.K., Shafi Q., Stecker F.W., (1989), Ap. J., **347**, 578

Sciama D. W., (1990a), M.N.R.A.S. **246**, 191

Sciama D.W., (1990b), Nature **348**, 617

Sciama D.W., (1992), Intern. J. Mod. Phys. D **1**, 161

Sciama D.W., (1993), Ap. J. Lett., **409**, L25

Shafi Q., Stecker F.W., (1984), Phys. Rev. Lett., **53**, 1292

Silk J., (1967), Nature, **215**, 1155

Silk J., (1968), Ap. J., **151**, 459

Silk J., Vilenkin A., (1984), Phys. Rev. Lett., **53**, 1700

Smoot G.F. et al., (1992), Ap. J. Lett., **396**, L1

Solov'eva L.V., Starobinsky A.A., (1985), Sov. Astron., **29(4)**, 367

Saslaw W.C., (1985), *Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, ed. P.V. Landshoff, W.H. McCrea, D.W. Sciama & S. Weinberg, Cambridge

Spitzer L. Jr., (1969), Ap. J. Lett., **158**, L139

Starobinsky A.A., (1982), Phys. Lett. B, **117**, 175

Subrahmanyan et al., (1993), M.N.R.A.S., **263**, 416

Trimble V., (1987), Ann. Rev. Astron. Astrophys., **25**, 425

Turner M.S., (1986), in *Gauge Theory and the Early Universe*, ed. P. Galeotti & D.N. Schramm, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, Vol. **248**, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht

Turok N., (1985), Phys. Rev. Lett., **55**, 1801

van Dalen A., Schaefer R.K., (1992), Ap. J., **398**, 33

Vilenkin A., (1981), Phys. Rev. Lett., **46**, 1169

Vilenkin A., Shellard E.P.S., (1993), *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge

Walker T.P., Steigman G., Schramm D.N., Olive K.A., Kang H., (1991), Ap. J., **376**, 51

Wasserman I., (1981), Ap. J., **248**, 1

Watson et al., (1992), Nature, **357**, 660

Watt M.P., Ponman T.J., Bertram D., Eyles C.J., Skinner G.K., Willmore A.P., (1992), M.N.R.A.S., **258**, 738

Weinberg S., (1971), Ap. J., **168**, 175

Weinberg S., (1972), *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley, New York

White S.D.M., Frenk C.S., (1991), Ap. J., **379**, 52

Wilkinson D.T., (1987), em in "13th Texas Symp. on Relativistic Astrophysics", ed. M.P. Ulmer, World Scientific, Singapore

Wright E.L. et al., (1992), Ap. J. Lett., **396**, L13

Yang J., Turner M.S., Steigman G., Schramm D.N., Olive K., (1984), Ap. J., **281**, 493

Yepes G., Domínguez-Tenreiro R., Del-Pozo-Sanz R., (1991), Ap. J., **373**, 336

Zel'dovich Ya. B., Kobzarev I. Yu., Okun L.B., (1974), Sov. Phys. JETP, **40**, 1

Zel'dovich Ya. B., (1980), M.N.R.A.S., **192**, 663

Zel'dovich Ya. B., Novikov I.D., (1983), *Relativistic Astrophysics* (Vol. 2), The University of Chicago Press, Chicago

Zeng N., White S.D.M., (1991), Ap. J., **374**, 1

Zwicky F., (1933), Helv. Phys. Acta, **6**, 110