José Manuel Teixeira Correia

A Evolução do Conceito de Função na Segunda Metade do Século XVIII



Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Outubro / 1999

José Manuel Teixeira Correia

A Evolução do Conceito de Função na Segunda Metade do Século XVIII

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática

Orientada por
Carlos Manuel Monteiro Correia de Sá

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Outubro / 1999

Agradecimentos

Obrigado, pela ajuda prestada, aos colegas de curso João Caramalho e Vera Lopes.

Um grande obrigado à disponibilidade da excelente profissional, a Bibliotecária Doutora Helena Barbosa.

Um agradecimento especial ao apoio dos colegas e amigos Ana Inês Azevedo, José Manuel dos Santos dos Santos e Maria José Bahia.

Obrigado à mãe da Ana Inês, a Doutora Áurea de Jesus Pimenta, e ao Padre António Torres, cuja ajuda foi fundamental na tradução de alguns textos do latim.

Agradeço, finalmente, ao meu Orientador, o Professor Doutor Carlos Correia de Sá, todo o apoio e disponibilidade que sempre demonstrou. Uma orientação perfeita.

Obrigado a todos.

Resumo

O presente trabalho parte do conceito de função tal como foi estabelecido por Euler em (1748) *Introductio in analysin infinitorum*. Nesta obra, uma função era entendida como uma expressão analítica, como uma fórmula (capítulo 1). A *Introductio* inaugurou um período, que se estendeu por toda a segunda metade do século XVIII e que se prolongou pelo primeiro quarto do século XIX, durante o qual vigorou 'a visão algébrica da análise'. A questão chave da análise algébrica dizia respeito ao significado e à importância das séries infinitas formais (capítulo 2).

Para os matemáticos setecentistas, a continuidade era uma noção essencialmente geométrica. Era uma propriedade que caracterizava uma determinada classe de curvas: as curvas definidas por uma única expressão analítica, isto é, por uma função. Havia, neste sentido, uma paridade entre o conceito analítico de função e o conceito geométrico de curva contínua, denotando uma falta de separação entre a noção de função e a noção de continuidade. A insuficiência deste modelo foi revelada pelo problema da vibração das cordas sonoras (capítulo 3). Este problema, para além de ter evidenciado a necessidade de estender o conceito de função da *Introductio*, levando Euler a enunciar uma nova definição em 1755, acabou por conduzir a uma distinção clara entre o conceito de função e o conceito de continuidade (capítulo 4).

Índice

Abreviaturas e Convenções.....5
Introdução.....6
1. A Concepção Algébrica da Análise: A Teoria de Funções.....9
2. A Concepção Algébrica da Análise: A Teoria de Séries.....18
3. O Problema da Vibração das Cordas Sonoras.....45
4. A Evolução do Conceito de Função.....65
Bibliografia.....83

Abreviaturas e Convenções

Abreviaturas

Obras de Jean Le Rond d'Alembert:
Opuscules = Opuscules mathématiques.

Obras de Augustin-Louis Cauchy:
Cours d'analyse = Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. 1re partie: analyse algébrique.

Obras de Leonhard Euler:
Introductio = Introductio in analysin infinitorum.
Institutiones calculi differentialis = Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum.

Obras de Sylvestre François Lacroix:
Traité = Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.

Convenções

A notas incluídas nas citações, salvo menção em contrário, são da nossa autoria.

Introdução

O presente trabalho procura mostrar o evoluir do conceito de função ao longo da segunda metade do século XVIII. Durante esse período, as concepções dominantes na análise eram substancialmente distintas das actuais. O conjunto dessas concepções designou-se como 'a visão algébrica da análise'. Esse período foi inaugurado em 1748, com a publicação da *Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler (1707-1783). Com esta obra, o conceito de função estabeleceu-se como o conceito central da análise.

No primeiro capítulo, tomando a *Introductio* como o nosso guia, procuramos dar a conhecer a teoria de funções que veio a prevalecer durante toda a segunda metade do século XVIII. Na época, uma função era entendida prioritariamente como uma fórmula.

Um dos aspectos principais da teoria de funções euleriana era a noção de continuidade. Esta noção era essencialmente geométrica. Assim, a continuidade era uma propriedade que caracterizava uma certa classe de curvas, as curvas representáveis por uma única expressão analítica, por uma única fórmula. A correspondência entre esta classe de curvas e o conjunto das funções era biunívoca, pelo que a noção de continuidade se tornava inseparável da noção de função.

O segundo capítulo, dedicado à teoria das séries infinitas, é o que melhor retrata o espírito do século XVIII. Neste período, a primeira questão que se colocava no estudo de uma série infinita não era a da sua convergência, mas a de encontrar um processo que permitisse atribuir-lhe uma soma. A teoria das séries fazia parte da álgebra, a qual era vista como uma aritmética generalizada. De acordo com esta visão, acreditava-se que os métodos válidos no domínio finito continuavam válidos após passagem ao infinito. Na base dessa crença estava o princípio de continuidade de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Em particular, as séries de potências eram encaradas como polinómios, sobre as quais poderiam ser efectuadas, sem restrições, as mesmas operações.

O segundo capítulo inicia-se com uma exposição da "Lettre au très illustre Christian Wolf, professeur de mathématiques à Halle, sur la Science de l'Infini" de 1713, onde Leibniz considerou o caso paradoxal da série divergente $1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$. Leibniz misturou considerações metafísicas com considerações matemáticas.

Entramos no espírito do século XVIII com o trabalho que Euler, em 1734-5, dedicou ao estudo da série dos recíprocos dos quadrados dos números naturais: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$. Os métodos utilizados na descoberta da soma desta série surpreenderam os matemáticos da

época. Logo que recuperaram da estupefacção, criticaram a falta de fundamentação dos métodos de Euler no tratamento das expressões infinitas, principalmente a utilização das séries divergentes. Um dos críticos foi Nikolaus Bernoulli (1687-1759). Uma polémica foi disputada por carta entre os dois matemáticos durante os anos quarenta. Numa carta de 1745 a Christian Goldbach (1690-1764), Euler deu a sua célebre definição para a soma de uma série divergente.

Com o intuito de esclarecer definitivamente todas as dúvidas relativamente à utilização das séries divergentes, Euler escreveu, em 1754-5, o artigo "De seriebus divergentibus". Pretendendo salvaguardar a utilidade das séries divergentes, Euler procurou atribuir um significado à soma de uma série divergente. Isso levou-o a escrever expressões como $-1=1+2+4+8+16+\cdots$. A concepção subjacente à interpretação desta igualdade era essencialmente algébrica, por oposição a uma concepção aritmética, que só fazia sentido quando a série em consideração era convergente.

O segundo capítulo termina com uma breve referência à tentativa protagonizada por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) de fundar o cálculo infinitesimal na álgebra das séries de potências. As ideias de Lagrange eram muito próximas das de Euler no que dizia respeito à concepção algébrica da análise; contudo, as suas preocupações com questões de fundamentos não tinham paralelo em todo o século XVIII. A tradição algébrica da análise entrou em decadência a partir dos anos vinte do século XIX, com o trabalho de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

O terceiro capítulo é dedicado ao problema da vibração das cordas sonoras. Este problema esteve na origem de uma importante polémica que se estendeu por toda a segunda metade do século XVIII. Os protagonistas dessa polémica foram Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler, Daniel Bernoulli (1700-1782) e Joseph-Louis Lagrange. A disputa, originada pela resolução da equação da onda $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, dizia respeito, mais geralmente, ao que era entendido por «funções arbitrárias» no contexto da resolução das equações diferenciais parciais. D'Alembert pretendia restringir as soluções às funções 'contínuas', com base no pressuposto de que os métodos da análise apenas se aplicavam validamente a este tipo de funções. Euler, interessado em encontrar uma solução tão geral quanto possível para o problema fisico em questão, era de opinião que, ao contrário do que se tinha crido até aí, eram perfeitamente admissíveis as soluções dadas por funções 'descontínuas'. Lagrange, inicialmente próximo da posição de Euler, acabou por adoptar a posição de d'Alembert.

Outro ponto em disputa respeitava à forma de solução. D'Alembert e Euler preferiam a

forma funcional. Esta era a forma preferida pelos matemáticos do século XVIII. No entanto, D. Bernoulli defendia que, no caso geral, a solução podia ser dada por uma série trigonométrica. Isso sugeria que uma «função arbitrária», ainda que 'descontínua', podia ser representada por uma série trigonométrica, uma ideia combatida com afinco tanto por d'Alembert como por Euler. A ideia de Bernoulli seria retomada no início do século XIX por Joseph Fourier (1768-1830), no contexto de um outro problema físico: o problema da propagação do calor nos corpos sólidos.

A disputa sobre o problema da corda vibrante pôs em evidência a insuficiência do velho conceito de função. Euler foi o mais consciente desta realidade e também o autor de uma definição mais abrangente de função. A nova definição surgiu em 1755, nas *Institutiones calculi differentialis*. É neste ponto que se inicia o quarto capítulo do nosso trabalho.

A nova definição de Euler pretendia estender o conceito de função de modo a incorporar em si uma nova classe de funções: as funções 'descontínuas'. É de salientar que, na época, não só as funções 'contínuas', mas também as funções 'descontínuas' eram, em geral, contínuas no sentido actual. De qualquer modo, a nova definição foi um passo importante na separação entre o conceito de função e o conceito de continuidade. A última palavra de Euler sobre a utilização de funções 'descontínuas' em análise surgiu em 1763, no artigo "De usu functionum discontinuarum in analysi".

A nova definição de Euler era suficientemente geral para englobar, se adequadamente interpretada, funções descontínuas no sentido moderno. Estas surgiram pela primeira vez em 1787, no ensaio *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles* de Louis Arbogast (1759-1803). Este ensaio pretendia responder ao problema de saber o que se entendia por «funções arbitrárias» no contexto da resolução das equações diferenciais parciais, que a Academia de St. Petersburgo tinha lançado a concurso. Arbogast introduziu a noção de função descontígua, ou seja, função com 'saltos' e portanto descontínua em termos modernos. O ensaio de Arbogast foi premiado, mas nunca foi publicado.

Uma definição com um grau de generalidade pelo menos equivalente à da definição de Euler foi publicada, em 1797, por Sylvestre François Lacroix (1765-1843) no seu *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. É de supor que esta obra, por ser muito divulgada, tenha contribuído activamente para a disseminação do novo conceito geral de função.

O capítulo, e com ele o nosso trabalho, finaliza com uma breve referência a dois matemáticos da primeira metade do século XIX, cujo nome é indissociável da evolução do conceito de função: Joseph Fourier e Peter Lejeune-Dirichlet (1805-1859).

1. *A Concepção Algébrica da Análise: A Teoria de Funções*

No prefácio de *Introductio in analysin infinitorum*, publicada em 1748, Leonhard Euler expressou a ideia essencial de que toda a análise se ocupava de quantidades variáveis e de funções de tais variáveis ([55], I, vi). Antes da publicação desta obra, desde a época de Isaac Newton (1643-1727) e Wilhelm Leibniz, o cálculo infinitesimal tinha-se desenvolvido como um conjunto de métodos analíticos para resolver problemas de geometria e de física. As dependências funcionais resultavam usualmente de considerações de natureza geométrica, quando um determinado lugar geométrico era representado por uma fórmula, ou de considerações de natureza cinemática, quando objectos geométricos como uma linha, uma superfície ou um sólido eram concebidos como gerados, respectivamente, pelo movimento de um ponto, de uma linha ou de uma superfície[1]. Com o tempo, à medida que os problemas enfrentados se tornavam mais complicados, a origem geométrica das fórmulas foi-se esbatendo, e os matemáticos foram concentrando a sua atenção na refinação das técnicas que permitiam a manipulação cada vez mais intrincada dessas fórmulas. A primazia da curva deu lugar à primazia da fórmula[2].

Em 1718, Johann Bernoulli (1667-1748), professor de Euler, publicou no artigo *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions de problèmes sur les isopérimètres* a seguinte definição:

> "Chamamos função de uma grandeza variável a uma quantidade composta de um modo qualquer a partir desta grandeza variável e de constantes."[3] (em [109], 60).

---

[1] A ideia de representar um objecto geométrico, e em particular uma curva, por uma fórmula analítica está associada aos nomes de René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). Em (1637) *La Géométrie* de Descartes, podemos ler: «Tomando sucessivamente uma infinidade de diversas grandezas para a linha y, encontraremos também infinitas para a linha x, e assim teremos uma infinidade de diversos pontos (...) por meio dos quais é descrita a linha curva procurada.» (em [109], 52). Pela mesma altura, em *Ad locus planos et solidos isagoge* (publicado postumamente em 1679), Fermat escreveu: «Assim que na equação final duas quantidades desconhecidas aparecem, existe um lugar geométrico, e o ponto final de uma das duas quantidades descreve uma linha recta ou curva.» ([105], 145). A concepção de grandezas geométricas como produtos de um movimento contínuo remonta à antiguidade e encontrou expressão em (1670) *Lectiones Geometricae* de Barrow, cujas ideias foram desenvolvidas pelo seu aluno Newton. Em (1693) *Tractatus de quadratura curvarum* (publicado em 1704), podemos ler como Newton opunha esta concepção a uma concepção cavalieriana/leibniziana de grandeza como composta de partes infinitesimais: «Não considero as quantidades matemáticas como compostas de partes infinitamente pequenas, mas como geradas por um movimento contínuo. As linhas são descritas, e desse modo são geradas, não por aposição de partes, mas pelo movimento de pontos; as superfícies pelo movimento de linhas; os sólidos pelo movimento de superfícies; os ângulos pela rotação dos seus lados; porções de tempo por um fluxo contínuo; e assim com outras quantidades.» ([105], 303).

[2] A transição da primazia da curva para a primazia da fórmula iniciou-se, aparentemente, com Newton em (1669) *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (publicado em 1711), cujo principal objecto de estudo eram fórmulas do tipo $y = f(x)$, introduzidas sem quaisquer considerações geométricas ([96], 36-7). Numa carta de 24 de Outubro de 1676 dirigida a Leibniz, ao mencionar o cálculo de integrais de ordenadas (este termo referia-se às expressões analíticas que definiam y), Newton foi significativo: «não seria, claro, capaz de obter nenhum destes resultados antes de renunciar à contemplação de figuras e reduzir todo o assunto ao estudo das ordenadas apenas.» (em [96], 39).

[3] No mesmo artigo, J. Bernoulli usou a notação φx para denotar uma função, chamando a φ a característica da função ([16], II, 268). A palavra 'função' foi utilizada por Leibniz em 1673 e uma primeira definição foi publicada em artigos seus de 1692 e 1694 ([109], 56-7; [105], 367). A concepção latente na definição de J. Bernoulli remontava a 1694-8 (cf. [16], II, 267-8). De acordo com Medvedev ([96], 40), o significado do termo 'ordenada' de Newton encontrava-se mais próximo da definição de J. Bernoulli do que a definição de Leibniz (cf. [109], 57).

A palavra 'composta' tinha um significado ambíguo ([26], 121); contudo, esta definição tornava possível pensar numa função como uma entidade própria, não necessariamente ligada a considerações geométricas ou cinemáticas. Uma tal ideia encontrou a sua melhor expressão quando Euler utilizou a definição do mestre, com algumas alterações de sua lavra, como ponto de partida da *Introductio*. Foi este conceito de função, entendida como uma expressão analítica liberta de quaisquer considerações geométricas, que moldou e orientou o conteúdo desenvolvido nos dois volumes da *Introductio*; é, por isso, frequente afirmar-se que foi com a publicação desta obra que o conceito de função se tornou no conceito central da análise. Eis a definição apresentada por Euler:

> "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer a partir da quantidade variável e de números ou de quantidades constantes."[4] ([55], I, 3; [43], VIII, 18).

Uma função em geral tomava valores em todo o plano complexo pois «uma quantidade variável compreende em si absolutamente todos os números (...); nem mesmo o zero e os números imaginários são excluídos do significado de uma quantidade variável» ([55], I, 3; [43], VIII, 18). Contudo, na *Introductio*, Euler não foi no geral além das funções de valor real, usualmente de variável real[5] ([96], 43). Euler considerava que as funções deste tipo estavam definidas em toda a extensão do seu domínio, isto é, nenhum valor que desse significado à expressão podia ser excluído do seu domínio: «o significado da quantidade variável não é exaurido até ela ser substituída por todos os valores definidos» ([55], I, 3; [43], VIII, 18); «uma quantidade variável é uma grandeza considerada em geral e, por esta razão, contém todas as quantidades determinadas; de forma similar, em geometria a quantidade variável é representada do modo mais conveniente por uma linha recta» ([55], II, 3). Isso significava que toda a função, em certo sentido, era inseparável da totalidade em que tomava valores; o domínio nunca era restringido. Por exemplo, uma função polinomial era entendida como estando definida em toda a recta real; de igual modo, uma função como $y=\sqrt{x}$ era associada

---

[4] A palavra 'quantidade', usada na definição de J. Bernoulli, foi substituída pelas palavras 'expressão analítica'. Euler já utilizara o termo 'função' no artigo [37], introduzindo a notação $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ para uma função arbitrária de $\frac{x}{a}+c$ (cf. [16], II, 268). No artigo (1747) *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*, de que falaremos adiante quando discutirmos o problema da vibração das cordas sonoras (capítulo 3), Jean Le Rond d'Alembert utilizara o termo 'função' no mesmo sentido, o que não era então inusual, mas recorrendo ainda à notação sem parênteses de J. Bernoulli ([105], 353, n. 3 e 355, n. 9).

[5] A análise complexa permaneceu pouco desenvolvida durante o século XVIII. O entendimento algébrico do cálculo fez supor que a sua extensão ao domínio complexo não trazia novas questões. Também nenhuma nova linha de investigação foi sugerida pelas aplicações da análise. Os métodos do cálculo setecentista foram sistematicamente desenvolvidos para funções de variável real. A criação da teoria das funções de variável complexa e a ideia de separar duas teorias, a de funções de variável real e a de funções de variável complexa, foi em grande parte obra de Augustin-Louis Cauchy, durante a primeira metade do século XIX ([60], 327).

com todos os valores $x \geq 0$ em que estava definida. Confirmemos o que estamos a dizer com um exemplo e palavras do próprio Euler. Em 1749, referindo-se à regra $d(\log x) = \frac{dx}{x}$, que Leibniz defendera ser válida apenas para valores positivos de x, Euler afirmou:

> "(...) como este cálculo diferencial diz respeito a quantidades variáveis, isto é, quantidades consideradas em geral, se não fosse geralmente verdadeiro que $d \cdot lx = \frac{dx}{x}$, independentemente do valor que atribuímos a x, seja positivo, seja negativo ou mesmo imaginário, nunca seríamos capazes de fazer uso desta regra, sendo a verdade do cálculo diferencial fundada na generalidade das regras que contém." ([45], 143-4; citado em [60], 330-1)[6].

Para os matemáticos do século XVIII, uma função era entendida prioritariamente como uma fórmula. Eles trabalhavam com expressões e funções de uma forma global e, usualmente, estavam interessados nas expressões como um todo e não no comportamento dessas expressões para certos valores das variáveis. As regras e os procedimentos do cálculo infinitesimal eram considerados válidos na generalidade. Quando uma dificuldade local não afectava um determinado resultado no seu todo, isso não constituía motivo de grande preocupação. Um exemplo referido por Engelsman ([32], 11-3) permitirá compreender de um modo significativo o que queremos dizer.

Nikolaus Bernoulli em 1719 e Euler na década de trinta chegaram independentemente à conclusão[7] que, dada uma função $z = f(x,y)$, então

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Este teorema era considerado universalmente válido e várias provas foram sendo produzidas até o matemático finlandês Leonard Lindelöf, em 1867, ter mostrado a insuficiência das mesmas[8]. Em 1873, Karl H. A. Schwarz (1843-1921) apresentou[9] o contra-exemplo

---

[6] Pela mesma altura, para além de [45], Euler escreveu também o artigo [54], o qual só viria a ser publicado em 1862. Ambos os artigos se destinavam a resolver a controvérsia alimentada numa troca de cartas, em 1712-3, entre Johann Bernoulli e Leibniz. O primeiro defendia que $\log(-n) = \log n$ para todo o número natural n, enquanto o segundo defendia que os logaritmos de números negativos não podiam ser reais. A ideia de Euler consistia em considerar o logaritmo como uma função plurívoca ([9], 155, n. 2).

[7] Bernoulli em [11] e Euler em [35] e [36]. Bernoulli transcreveu o artigo [11] numa carta de 1743 a Euler, publicada por Fuss (cf. [62], II, 704-7). [35] foi um esboço de [36] que nunca chegou a ser publicado por Euler. [11] e [35] foram reproduzidos e traduzidos em língua inglesa por Engelsman em [32]. A notação de derivadas parciais, que usaremos sempre que for conveniente, não foi utilizada nem por Bernoulli nem por Euler, e só viria a ser adoptada durante a segunda metade do século XIX ([16], II, 236-8).

[8] Em "Remarques sur les différentes manières d'établir la formule $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$." *Acta societatis scientiae fennicae* **8**, 206--13. Leonard era o pai do mais conhecido Ernst Lindelöf (1870-1946).

[9] Em [Communications]. *Archives des Sciences physiques et naturelles* **48**, 33-44. Neste artigo, Schwarz provou o teorema da igualdade das derivadas parciais mistas de segunda ordem sob a condição de ambas as derivadas f_{xy} e f_{yx} existirem e

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-y^2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } x,y\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ ou } y=0 \end{cases},$$

onde $f_{xy}(0,0)=-1$, enquanto $f_{yx}(0,0)=1$. No entanto, como $f_{xy}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=f_{yx}$ para $x,y\neq 0$, este exemplo não seria encarado como um contra-exemplo pelos matemáticos do século XVIII, pois *na globalidade* ambos os membros da equação eram iguais. Segundo Fraser ([60], 331), a demonstração formal de uma relação, que não envolvesse pressupostos acerca dos valores individuais das variáveis, assegurava a sua validade global. O sucesso do cálculo infinitesimal, a verdade das suas conclusões, a grande extensão das suas aplicações eram garantidos precisamente por esta generalidade; a falha de uma determinada relação para valores particulares das variáveis não era considerada significativa.

Em resumo, uma das características básicas da teoria de funções no decorrer do século XVIII era o pressuposto de que as expressões algébricas envolvidas operavam sobre todo o domínio de definição. Esta visão, essencialmente algébrica, limitava profundamente o alcance da nova teoria, como em breve iria ser manifesto em toda a discussão acerca da vibração das cordas sonoras (ver o capítulo 3 do presente trabalho).

Ao contrário de J. Bernoulli para a sua 'quantidade', Euler teve o mérito de explicar de que modo podia ser composta uma expressão analítica, o que pode ser interpretado como uma preocupação de precisar que extensão podia ser atribuída ao conceito de função por si enunciado. Ele nomeou a adição, a subtracção, a multiplicação, a divisão, a elevação a uma potência e a extracção de raízes, e a esta classe de operações chamou operações algébricas; para além destas, referiu as operações transcendentes, como as funções exponencial e logarítmica e outras fornecidas pelo cálculo integral[10] ([55], I, 4; [43], VIII, 19). Isso permitiu-lhe dividir as funções em dois tipos: as *funções algébricas*, obtidas a partir de um número finito de operações algébricas e das soluções das equações (algébricas), e as *funções transcendentes*, quando as operações transcendentes «não só entram, mas de facto afectam a quantidade variável»[11] ([55], I, 4-5; [43], VIII, 20). Embora não fosse enunciado como uma

---

serem contínuas ([32], 12).

[10] Na *Introductio*, Euler limitou-se a discutir as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica. As funções obtidas pelo cálculo integral, incluindo a integração de equações diferenciais, foram omitidas desta obra que, como indicava o título, pretendia ser introdutória ([75], 513). Das funções transcendentes que foram sendo obtidas ao longo do século XVIII, destacam-se os integrais elípticos, a função gama e a função beta.

[11] Em (1637) *La Géométrie*, Descartes dividiu as curvas em dois tipos: as *geométricas* (leia-se algébricas), que podiam ser representadas por uma equação (leia-se equação algébrica), e as *não-geométricas* ou *mecânicas*, que no seu entendimento deveriam ser excluídas da geometria pois, não sendo passíveis de expressão analítica, não poderiam ser estudadas pelo seu método ([109], 52-3). Em 1684 e 1686, Leibniz introduziu a distinção entre as *curvas algébricas*, as quais podiam ser representadas por uma equação de grau finito, e as *curvas transcendentes*, que também podiam ser estudadas pelo cálculo diferencial, sendo no entanto representáveis por uma equação de grau infinito ([109], 59). Isso prendia-se com a descoberta

definição, era perfeitamente claro que uma função algébrica era caracterizada pelo facto de poder ser definida por uma equação algébrica ([55], II, 330). E, sem que de igual modo fosse enunciado como uma definição, toda a função transcendente era entendida como não--algébrica ([55], II, 331). A ambiguidade nas definições levou Euler a considerar a expressão $z^{\sqrt{2}}$ primeiro como uma função algébrica ([55], I, 5; [43], VIII, 20) e depois como uma função transcendente ([55], II, 331).

Conforme a variável não era ou era afectada por radicais, as funções algébricas podiam dividir-se em *funções racionais* e *funções irracionais* ([43], VIII, 20). As funções racionais subdividiam-se, por sua vez, em *inteiras* e *fraccionárias* ([43], VIII, 21). Após ter chamado a atenção para o facto de uma função algébrica nem sempre poder ser expressa explicitamente ([55], I, 5; [43], VIII, 20), Euler dividiu as funções irracionais em duas classes: as *funções explícitas*, quando eram «expressas com radicais», e as *funções implícitas*, quando resultavam «da solução de equações [algébricas]»[12] ([55], I, 6; [43], VIII, 21). Euler observou que «o valor explícito» de uma função definida de forma implícita podia «não ser exprimível mesmo com radicais, pois a álgebra ainda não se desenvolveu com tal grau de perfeição» ([55], I, 6; [43], VIII, 21). Subentendia-se que esta impossibilidade era de natureza prática: simplesmente ainda não se conheciam os processos algébricos capazes de fornecer a expressão explícita de toda a função definida implicitamente por uma equação algébrica. Na realidade, Euler estava convencido de que era possível resolver uma equação algébrica de qualquer grau usando radicais ([109], 63):

> «Por exemplo, consideremos a função Z de z definida pela equação $Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$; mesmo que esta equação não possa ser resolvida, ainda assim continua a ser verdade que Z é igual a alguma expressão composta da variável e de constantes, e por esta razão Z será uma função de z.» ([55], I, 5; [43], VIII, 20).

Euler distinguiu também entre *funções unívocas* e *funções plurívocas*. Por exemplo, a equação $y^2 = 2xy - x$ definia implicitamente uma função algébrica plurívoca, fornecida

---

recente, fruto do trabalho independente de matemáticos como Pietro Mengoli (1626-1686), Nicolaus Mercator (1619-1687), James Gregory (1638-1675) e Newton, para além do próprio Leibniz, de que era possível desenvolver uma expressão analítica numa série de potências, tornando possível representar de um modo universal toda a dependência funcional estudada na época ([109], 53).

[12] A forma implícita precedeu historicamente a forma explícita. Tanto em Fermat como em Descartes, uma dependência funcional assumia por regra a forma implícita. Uma razão para isso é o facto de o conceito de dependência funcional ter surgido como um reflexo do conceito de regularidade que era associado aos fenómenos naturais, os quais assumiam muitas vezes a forma de uma equação implícita entre variáveis. Uma outra razão é que a representação de uma dependência funcional (leia-se curva) por uma fórmula tinha tido a sua origem na álgebra e, na época, a álgebra era entendida como o estudo das equações. A transição entre a primazia da forma implícita e a primazia da forma explícita de representar uma dependência funcional iniciou-se, mais uma vez, com Newton ([96], 36).

explicitamente pela expressão $y = x \pm \sqrt{x^2 - x}$ (caso particular de um exemplo dado em [55], II, 9). Também as funções transcendentes podiam ser plurívocas, como por exemplo $\arcsin z$ ([55], I, 7; [43], VIII, 22). Euler observou que as funções algébricas racionais eram sempre unívocas, enquanto as irracionais eram todas plurívocas «porque os radicais são ambíguos e dão valores aos pares» ([55], I, 7; [43], VIII, 22); estava, obviamente, a referir-se a expressões irracionais com radicais de índice par, pois sabia muito bem que uma expressão com radicais apenas de índice ímpar definia uma função unívoca: « $z^{\frac{m}{n}}$ imita uma função unívoca de z, se n é ímpar» ([55], I, 11; [43], VIII, 24).

Da classificação de funções estabelecida por Euler, de que acabamos de expor o que julgamos essencial, torna-se evidente que muitos eram os modos de expressar analiticamente uma função. No entanto, Euler pensava que havia uma forma universal que toda a expressão analítica podia adoptar: a forma de uma série de potências[13] ([109], 62). Euler achou por bem destacar a utilidade de uma tal representação:

> "Como a natureza das funções polinomiais é bem entendida, se outras funções podem ser expressas por diferentes potências de z de tal maneira que são postas na forma $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$, então parecem estar na melhor forma para que a mente humana possa agarrar a sua natureza, ainda que o número de termos seja infinito." ([55], I, 50).

As séries de potências eram especialmente importantes para o estudo das funções transcendentes:

> "(...) a natureza das funções transcendentes parece ser melhor entendida quando é expressa nesta forma, apesar de ser uma expressão infinita." ([55], I, 50).

Na impossibilidade de apresentar uma demonstração de que uma tal representação era possível para uma função em geral, Euler dedicou uma boa parte da *Introductio* a mostrar como todas as funções algébricas, assim como muitas transcendentes, podiam ser expressas por uma série de potências[14], ainda que por uma questão de maior generalidade tivesse de admitir que os expoentes do argumento pudessem ser qualquer número real:

> "(...) de modo que a exposição que se segue assuma a mais ampla generalidade, além das potências inteiras e positivas de z, admitiremos que os expoentes possam ser qualquer número real. Assim não há dúvida de que qualquer função de z pode tomar a

[13] Esta convicção foi-se instalando gradualmente a partir da segunda metade do século XVII (ver n. 11, pág. 12). Na opinião de Youschkevitch ([109], 54), foi precisamente por causa da generalidade proporcionada pelas séries de potências que a concepção de uma função como uma expressão analítica ocupou um lugar central na análise.

[14] Em menor escala, outros métodos foram utilizados por Euler no estudo das funções, como os produtos infinitos e os desenvolvimentos em fracção contínua.

forma $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \ldots$, onde os expoentes α, β, γ, δ, etc. são quaisquer números reais." ([55], I, 50-1).

Como notou Youschkevitch ([109], 63), a esmagadora maioria das funções usadas em análise no tempo de Euler eram de facto analíticas (no actual sentido do termo) em todo o seu domínio de definição, excepto talvez em valores isolados do argumento e, em casos especiais, podiam ser desenvolvidas em séries de termos contendo potências fraccionárias ou negativas do argumento.

Como demos a entender anteriormente, o propósito de Euler era preservar a noção de função de quaisquer considerações de natureza geométrica ou cinemática. Por isso, no primeiro volume da *Introductio*, Euler restringiu-se aos «assuntos respeitantes à análise pura», e apenas no segundo volume se dedicou à exposição «daquelas coisas que devem ser conhecidas da geometria, pois a análise é ordinariamente desenvolvida de tal modo que a sua aplicação à geometria é mostrada» ([55], I, v-vi). Neste segundo volume, Euler propôs uma teoria de curvas, para além de um apêndice sobre superfícies. Não é nosso propósito fazer uma apresentação do seu conteúdo. Limitar-nos-emos a descrever o modo como Euler estabeleceu a relação entre as linhas curvas e as funções.

"Apesar de muitas curvas distintas poderem ser descritas mecanicamente como o movimento contínuo de um ponto (...), ainda assim consideraremos estas curvas como tendo a sua origem em funções, pois neste caso serão mais aptas para um tratamento analítico e mais adaptadas ao cálculo infinitesimal. Toda a função de x fornece uma curva ou uma linha recta e, inversamente, uma curva pode definir uma função." ([55], II, 5-6).

A prioridade atribuída às funções estava em total consonância com a sua visão algébrica da análise. Mas seria um erro concluirmos que, para Euler, toda a curva tinha origem numa função. Na realidade, ambas as classes de objectos pareciam gozar de uma existência autónoma. Conforme podemos constatar das suas próprias palavras, uma curva podia muito bem resultar de considerações geométricas ou cinemáticas e, ainda que no plano teórico existisse a convicção e o propósito de que a análise deveria alicerçar-se na certeza da álgebra e ser independente da geometria, na verdade não parecia ser possível que toda a curva imaginável fosse abrangida por uma fórmula. Isso levou Euler a dividir as curvas em dois tipos:

"Deste conceito de curva, segue-se imediatamente uma divisão em *contínuas* e *descontínuas* ou *mistas*. Uma curva *contínua* é tal que a sua natureza pode ser expressa por uma única função de x. Se a curva é de tal natureza que para expressar as suas diferentes partes (...) são necessárias diferentes funções de x (...), chamamos a curvas

deste tipo *descontínuas* ou *mistas* e *irregulares*. Isto é porque uma tal curva não pode ser expressa por uma lei constante, mas é composta de várias partes contínuas."[15] ([55], II, 6).

Uma curva era pois contínua ou descontínua conforme podia ou não ser expressa por uma única lei analítica, por uma única fórmula. A continuidade da curva nada tinha a ver com a conexão entre as várias partes que a constituíam, mas com o facto de essas várias partes, em conjunto, poderem ser expressas por uma única fórmula. Por exemplo, a curva definida pela função plurívoca $y = x \pm \sqrt{x^2 - x}$ era considerada contínua, pois era representada de forma implícita pela equação $y^2 = 2xy - x$:

"(...) uma curva pode consistir de partes distintas entre si (...). Podem existir duas ou mais partes, no entanto, estas partes em conjunto deverão ser consideradas como uma curva contínua ou regular, pois todas as diferentes partes resultam de uma única função." ([55], II, 6).

Havia, não obstante, cuidados a ter. A equação $y^2 = ay + xy - ax$, que aparentemente definia uma curva contínua, representava na realidade uma curva descontínua, pois a factorização $(y - x)(y - a) = 0$ fornecia as rectas $y - x = 0$ e $y - a = 0$ que, em conjunto, definiam uma curva descontínua:

"Equações deste tipo, que podem ser resolvidas em factores, contêm não uma, mas várias curvas contínuas, cada uma das quais pode ser expressa pela sua própria equação, e não há ligação entre elas excepto no facto de as suas equações serem multiplicadas entre si. Como esta ligação depende de uma livre escolha, não podemos pensar nesta equação como contendo uma única curva contínua. Equações deste tipo, que antes foram chamadas complexas, produzem curvas não-contínuas." ([55], II, 32).

Algumas palavras são aqui necessárias sobre a ênfase colocada na fórmula. Euler atribuiu às curvas descontínuas o carácter de não-funções. Apenas as curvas contínuas representavam uma função e, reciprocamente, uma função definia necessariamente uma curva contínua. Uma função era pois entendida prioritariamente como uma fórmula na medida em que a classe das curvas bem comportadas (as curvas contínuas) era, claro está, a classe das curvas que podiam ser expressas por uma fórmula, tal como para Descartes o eram as que podiam ser expressas por uma equação algébrica (ver n. 11, pág. 12).

Na opinião de Medvedev ([96], 35), durante o século XVII, o estudo de curvas cada vez mais complicadas tinha conduzido a uma perda de visualização e, concomitantemente, a uma

[15] Nas palavras 'lei constante' adivinha-se a ideia leibniziana de uma lei de continuidade.

impossibilidade de estudar as suas propriedades, por exemplo, pela simples utilização de tabelas. Por um lado, a fórmula possibilitava uma grande economia de linguagem, substituindo longas e confusas descrições verbais por uma expressão analítica, que permitia muitas vezes discernir as propriedades de uma curva da sua directa representação como fórmula; por outro lado, ao tomar a forma de uma expressão algébrica finita ou de uma série de potências, a fórmula possibilitava ainda uma extraordinária flexibilidade operatória. Era precisamente esta natureza algébrica do cálculo infinitesimal, reforçada pela universalidade de representação proporcionada pelas séries de potências (ver n. 13, pág. 14), que lhe conferia toda a sua enorme capacidade, comprovada pelos sucessivos resultados produzidos na resolução de problemas de natureza aplicada.

As operações em que assentava este cálculo algébrico eram a diferenciação e a integração, operações cujo carácter inverso era conhecido desde o tempo de Newton e Leibniz. Ora, para que estas operações pudessem ser aplicadas às funções, permitindo simultaneamente toda a desejável elasticidade de manuseamento que conferia o poder reconhecido ao cálculo infinitesimal, era necessário que essas funções fossem diferenciáveis e integráveis.

De acordo com Grattan-Guiness ([65], 6-7), e podemos limitar o nosso pensamento a funções unívocas reais de variável real, tendo em conta o tipo de funções que eram então habitualmente usadas, é lícito interpretar as funções contínuas de Euler no sentido actual de diferenciáveis e as funções descontínuas (se interpretarmos as curvas descontínuas como funções) como contínuas mas não diferenciáveis em pontos isolados. Portanto, todo o enorme poder do cálculo operatório só se aplicava validamente a funções que obedecessem a uma lei de continuidade (isto é, de diferenciabilidade no sentido actual). As curvas descontínuas estavam fora do âmbito de aplicação deste cálculo algébrico:

> "Em geometria, ocupamo-nos especialmente com curvas contínuas e será mostrado que curvas descritas por movimentos mecânicos uniformes também podem ser expressas por uma única função, consequente são também curvas contínuas." ([55], II, 6).

2. *A Concepção Algébrica da Análise: A Teoria de Séries*

A descoberta de que era possível expandir uma expressão analítica numa série de potências deu aos matemáticos do século XVII – devido ao limitado leque de funções com que trabalhavam na época – a convicção de que havia um modo universal de representar toda a expressão analítica. Já no século XVIII, desde o final dos anos vinte, Euler foi o grande impulsionador do trabalho com séries. Conforme constatámos no capítulo precedente, Euler acreditava que toda a função (entendida como uma expressão analítica) podia ser expressa na forma de uma série de potências. Estas eram utilizadas pelos matemáticos do século XVIII para resolver problemas de diversos tipos, como encontrar raízes de equações algébricas, resolver equações diferenciais e calcular integrais definidos ([63], 98). As séries de potências tornaram-se pois num instrumento importante da análise setecentista[16].

A teoria das séries infinitas era considerada, durante o século XVIII, como parte integrante da álgebra. Acreditava-se que os métodos algébricos podiam ser estendidos das operações finitas da aritmética para os processos infinitos[17]. As séries de potências eram adicionadas, multiplicadas e convertidas em produtos infinitos, como se fossem polinómios. A álgebra era vista como uma aritmética generalizada ou universal, tão válida quanto a aritmética ordinária, a qual era considerada bem fundada[18]. No final do século, a crença na certeza da álgebra, bem como da existência de uma álgebra das séries de potências, deram a Joseph-Louis Lagrange a ideia, que tentou concretizar, de que seria possível estabelecer uma fundamentação rigorosa para o cálculo infinitesimal se este fosse reduzido à álgebra ([63], 49-51). Foi o período da análise algébrica[19].

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), ao comparar a opção de Newton pela síntese geométrica com as vantagens trazidas pela análise algébrica, exprimiu o espírito deste período do seguinte modo:

---

[16] A importância prática das séries de potências era já uma realidade na segunda metade do século XVII (ver n. 11, pág. 12). Por exemplo, na quadratura de curvas e no cálculo de valores de certas funções, como a função logaritmo.

[17] Na base dessa ideia estava o princípio de continuidade de Leibniz, o qual tinha dois significados. O primeiro era que não existiam saltos nos processos naturais, enquanto o segundo continha um princípio de permanência, de acordo com o qual as leis e qualidades válidas no domínio finito continuavam válidas após passagem ao infinito ([100], 318).

[18] A álgebra é «a única linguagem realmente exacta e analítica que existe», afirmava o marquês de Condorcet (1743-1794) em 1793 (citado em [64], 140).

[19] Fraser dividiu o desenvolvimento do cálculo infinitesimal no Continente em três períodos: o período geométrico, em que os problemas e as concepções geométricos predominavam; o período algébrico, que teve o seu início no tratamento de funções e do cálculo infinitesimal na *Introductio* de Euler e se concretizou especialmente nos escritos deste matemático e de Lagrange; e o período clássico, com início no princípio do século XIX nos escritos de Cauchy ([60], 317). O termo 'análise algébrica' sugere o modo como o cálculo infinitesimal era pensado e praticado na linha da tradição iniciada por Euler e Lagrange e que prosseguiu durante o século XIX. Os termos 'aritmética universal' e 'análise do infinito' podem ser considerados equivalentes linguísticos setecentistas do termo 'análise algébrica', cujo significado técnico só foi estabelecido durante o século XIX ([73], 145). A questão chave da análise algébrica dizia respeito ao significado e à importância das séries infinitas formais ([72], 269). Jahnke ([73], 145) apontou a ironia no uso do termo por Cauchy em [19], a obra que mais contribuiu para a queda desta tradição.

"A síntese geométrica tem (...) a característica de nunca perder de vista o seu objecto e de iluminar todo o caminho que conduz dos primeiros axiomas às suas derradeiras consequências; enquanto que a análise algébrica depressa nos faz esquecer o objecto principal, focando a nossa atenção em combinações abstractas, e é apenas no fim que a ele nos reconduz. Mas, ao isolar assim os objectos, após ter tomado o que é indispensável para chegar ao resultado que procuramos, ao abandonarmo-nos em seguida às operações da análise e reservando todas as nossas forças para vencer as dificuldades que se apresentam, somos conduzidos, pela generalidade deste método e pela inestimável vantagem de transformar a argumentação em procedimentos mecânicos, a resultados frequentemente inacessíveis à síntese. É tal a fecundidade da análise, que basta traduzir nesta linguagem universal verdades particulares para ver emergir das suas expressões uma multitude de novas e inesperadas verdades. Nenhuma outra linguagem é tão susceptível da elegância que resulta de uma longa sequência de expressões ligadas umas às outras e todas originadas numa mesma ideia fundamental. (...) os geómetras modernos, convencidos desta superioridade da análise, empenharam-se especialmente em estender o seu domínio e em empurrar as suas fronteiras." ([92], 465-6).

As palavras de Laplace reflectiam a confiança dos matemáticos do século XVIII na linguagem algébrica, nos símbolos. De acordo com Kline, eles confiavam mais nos símbolos do que na lógica:

"Como as séries infinitas tinham a mesma forma simbólica para todos os valores de x, a distinção entre valores de x para os quais a série converge e valores para os quais diverge não parecia exigir atenção. E ainda que reconhecessem que algumas séries, como $1+2+3+\ldots$, tinham uma soma infinita, preferiam tentar dar um significado à soma do que questionar o modo de somar." ([76], 617-8).

A manipulação quase inteiramente intuitiva das séries fez surgir alguns paradoxos. Eles resultavam da utilização, por motivos práticos mas deficientemente fundamentada, das séries divergentes. O caso mais discutido era o da série

$$1-1+1-1+1-1+\ldots,$$

que escrita na forma

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

teria soma 0, e escrita na forma

$$1-(1-1)-(1-1)-\ldots$$

teria soma 1. No entanto, diversos processos levavam os matemáticos a escrever

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}.$$

Por exemplo, Jakob Bernoulli (1654-1705), em 1696, utilizou a expansão binomial para obter

$$\frac{l}{m+n}=\frac{l}{m}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{-1}=\frac{l}{m}-\frac{ln}{m^2}+\frac{ln^2}{m^3}-\ldots$$

e, fazendo $n = m$,

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \ldots,$$

que encarou como um não deselegante paradoxo ([76], 444-5; [77], 457, n. 2). A igualdade $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$ obtinha-se fazendo $l = m = 1$.

Leibniz estudou a série em 1713, numa carta dirigida a Christian Wolf (1678-1754)[20]. Nessa carta, Leibniz mencionou uma explicação geométrica fornecida por Guido Grandi (1671-1742)[21], que parece tê-lo convencido ([94], 283; [74], 276-7). Essa explicação foi o motivo catalisador da carta de Leibniz e os restantes argumentos por ele aduzidos aparentavam apenas servir para confirmar a 'evidência' geométrica do desenho de Grandi.

Leibniz começou por escrever a expansão

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \text{etc.}$$

que atribuiu a Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) e a Nicolaus Mercator, tendo este último obtido a igualdade pelo método de divisão contínua. Ela era válida «sob a condição, naturalmente, de supor x uma quantidade mais pequena do que um» ([94], 283). Mas:

> "Observemos o que se passa se $x = 1$. Para nossa grande admiração vem então: $\frac{1}{1+1}$ ou seja $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$ até ao infinito, o que a figura empregada pelo Sr. Grandi nos põe de algum modo à frente dos olhos." ([94], 283).

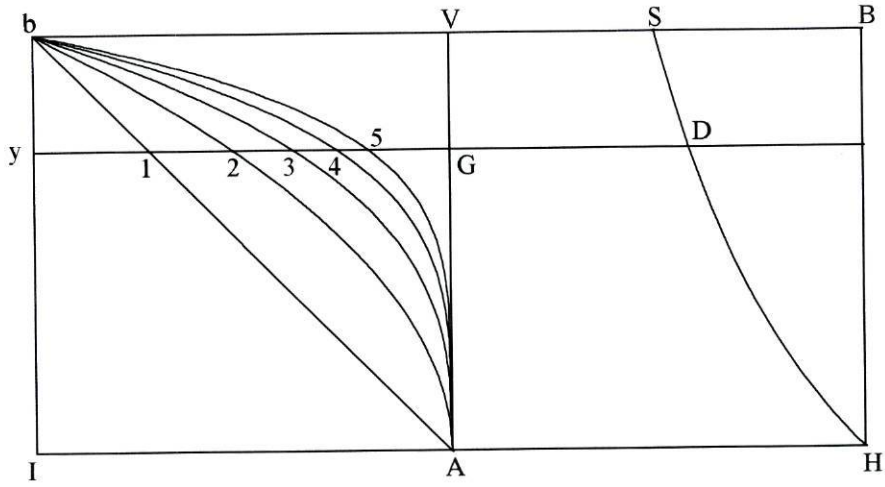


Fig. 2.1

[20] A carta [94] foi reproduzida em [24] como parte integrante do artigo [74]. Todas as menções que fizermos da carta de Leibniz reportam-se a esta reprodução. A carta também foi editada em Leibniz (1849-63) *Mathematische Schriften* **V**, 382-7.
[21] Em (1703) *Quadratura Circuli et Hyperbolae* ([76], 445).

Eis como ele explicou o raciocínio de Grandi. Considerando $AG = x$ (fig. 2.1), imaginou representada a infinidade de curvas dadas por 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, ... (tendo traçado as primeiras seis), a que correspondiam as ordenadas Gy, G1, G2, G3, G4, etc. Considerou então a curva dada pela ordenada $GD = Gy - G1 + G2 - G3 + \text{etc.}$ Tomando o lado do quadrado bIAV como unidade, tinha-se $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1+x}$. No caso em que $AG = VA = 1$ vinha $GD = \frac{1}{2} = VS = \frac{1}{2}bV$. Neste caso, as ordenadas Gy, G1, G2, G3, G4, etc. tornavam-se iguais a bV, donde $GD = bV - bV + bV - bV + \text{etc.}$ E portanto $bV - bV + bV - bV + \text{etc.} = \frac{1}{2}bV$. Essa era a série pretendida, tendo em conta que $bV = 1$.

Leibniz fez o seguinte comentário:

> "Isto está de acordo com a *Lei de Continuidade* (...). Ela acarreta que, *no contínuo, podemos considerar um limite externo como um limite interno* (...)." ([94], 283-4).

Podemos interpretar estas palavras do seguinte modo: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ era válida para $x \in [0,1[$; pela lei de continuidade – considerando o valor 1, externo ao intervalo $[0,1[$, como 'limite interno' – a igualdade estendia-se a $[0,1]$. Leibniz acrescentou:

> "De resto, a natureza, que procede sempre passo a passo e não por saltos, não poderia violar a lei de continuidade." ([94], 283).

Finalmente, invocou um argumento contrário à posição de Grandi, que atribuiu a um Sr. Marchetti, professor de Matemática em Pisa (tal como Grandi). Tomando uma soma parcial da série com um número ímpar de termos, ela era sempre 1; tomando um número par de termos, ela era sempre 0. Mas um tal argumento, afirmou Leibniz, não era válido, pois o número de termos não era par nem ímpar, mas infinito:

> "(...) quando a série é infinita (...), ao mesmo tempo que desaparece a noção de número, desaparece igualmente a determinação par ímpar.» ([94], 284).

Leibniz prosseguiu, juntando à fragilidade da sua argumentação algumas considerações metafísicas:

> "E como não há mais argumentos a favor da paridade que da imparidade, nem por consequência a favor de um resultado igual a 0 ou a 1 [isto é, tendo em conta que 'par' e

'ímpar' são igualmente prováveis, 0 e 1 também são igualmente prováveis], o génio admirável da natureza faz com que a passagem do finito ao infinito seja acompanhada da passagem de proposições disjuntivas (que desaparecem) a uma proposição única afirmativa (que subsiste), meio termo entre as duas proposições disjuntivas. Ora, aqueles que se ocuparam de estimações mostraram que, quando se trata de tomar o meio entre duas quantidades que têm a mesma razão de ser, é preciso tomar a média Aritmética, quer dizer, a metade da sua soma: é assim que a natureza observa aqui mais uma vez a sua lei de justiça (...); obtemos consequentemente $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$." ([94], 284).

Leibniz acrescentou que «mesmo que este tipo de argumentação pareça mais Metafísica que Matemática, não deixa de ser sólida.» ([94], 284). Mas essa solidez parecia estar sobretudo alicerçada no raciocínio geométrico de Grandi pois, a terminar a carta, retornou a ele como que para reforçar a sua argumentação.

Enquanto no século XVII a utilização de séries divergentes foi ocasional, no século XVIII, com o trabalho impulsionador de Euler, o seu uso foi ganhando importância[22]. À medida que a análise se desenvolvia, os matemáticos descobriram que a utilização de séries divergentes conduzia muitas vezes a importantes resultados. Umas vezes, esses resultados permitiam tornar mais plausíveis conjecturas anteriormente formuladas ou confirmar resultados que se tinham obtido por outros processos. Outras vezes, eram resultados completamente novos que os matemáticos posteriormente tentavam provar por métodos mais seguros. A pouco e pouco, e apesar das reservas de alguns, a convicção de que as séries divergentes tinham a sua utilidade foi-se instalando entre os matemáticos do século XVIII ([70], 1).

Um exemplo permitir-nos-á aflorar um pouco o espírito e o estilo (em suma, o génio) de Euler – a quem alguém chamou um dia justamente «o grande manipulador» – no trabalho com séries. Esse exemplo iria provocar uma polémica entre Euler e Nikolaus Bernoulli sobre o uso das séries divergentes, cada um deles encarnando um campo oposto: Euler o daqueles que defendiam o uso das séries divergentes, devido à sua utilidade prática; N. Bernoulli o daqueles que pretendiam banir o seu uso, devido à falta de fundamentação teórica.

Em 1673, numa carta a Leibniz, Henry Oldenburg (1615?-1677), secretário da *Royal Society* que se correspondia com os eminentes homens de ciência da época, colocou o problema de saber qual a soma da série

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots,$$

[22] James Gregory foi o primeiro, em 1668, a utilizar os termos 'convergente' e 'divergente' no contexto das séries, mas não desenvolveu o tópico ([76], 461). Como apontou Hardy ([70], 13), havia pouco sobre séries divergentes antes de Euler, excepto em certas passagens na correspondência de Leibniz e dos Bernoulli.

mas não obteve resposta de Leibniz ([15], 327). Em 1689[23], o problema foi considerado por Jakob Bernoulli, que não o conseguiu resolver ([104], 160). Bernoulli sabia, no entanto, que a soma da série era finita, pois

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\leq\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=2 \text{ ([15], 307).}$$

Euler obteve várias expressões (integrais definidos ou outras séries) para essa soma, tendo usado uma delas para obter o valor aproximado 1,6449340668482264364 ([38], 74). Em 1734-5 conseguiu obter o valor exacto.

Euler sabia que se uma equação de grau n

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$$

tivesse n raízes não nulas

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$$

então tinha-se a seguinte decomposição em factores

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

e, comparando os coeficientes de x, a relação

$$a_1=-a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Para uma equação de grau $2n$ da forma

$$a_0-a_1x^2+a_2x^4-\ldots+(-1)^na_nx^{2n}=0$$

com $2n$ raízes não nulas

$$\pm\alpha_1,\ \pm\alpha_2,\ \ldots,\ \pm\alpha_n,$$

tinha-se a decomposição

$$a_0-a_1x^2+a_2x^4-\ldots+(-1)^na_nx^{2n}=a_0\left(1-\frac{x^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\alpha_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\alpha_n^2}\right)$$

e a relação

$$a_1=a_0\left(\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n^2}\right).$$

Conjecturou então que se uma equação de grau infinito

$$a_0-a_1x^2+a_2x^4-\ldots+(-1)^na_nx^{2n}+\ldots=0$$

tivesse uma infinidade de raízes não nulas

$$\pm\alpha_1,\ \pm\alpha_2,\ \ldots,\ \pm\alpha_n,\ \ldots$$

[23] Em *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita* ([104], 160).

então

$$a_0 - a_1 x^2 + a_2 x^4 - \ldots + (-1)^n a_n x^{2n} + \ldots = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_n^2}\right)\cdots$$

e

$$a_1 = a_0 \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n^2} + \ldots\right)$$ ([97], I, 18-9).

Considerando a equação

$$\sin s = 0,$$

que não escreveu explicitamente, e usando o desenvolvimento da função seno em série de potências ímpares, descoberto por Newton em 1665 ([31], 205-6), escreveu

$$0 = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{etc.},$$

uma equação com a infinidade de raízes

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \text{ etc. ([38], 83).}$$

Para eliminar a raiz nula, dividiu ambos os membros da equação por s, obtendo

$$0 = 1 - \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{etc.}$$

com as raízes

$$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \text{ etc.}^{24}$$

Usando a conjectura acima descrita, concluiu que

$$1 - \frac{s^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{etc.} = \left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right)\text{etc.}$$

e

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \ldots$$ ([38], 84).

Portanto,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

a soma pretendida ([38], 85). Este valor estava de acordo com o valor numérico aproximado anteriormente encontrado.

Para tornar mais plausível a conjectura, Euler testou o método noutros exemplos. Assim, a

---

[24] Neste artigo Euler usou a letra p em vez de π e a letra q em vez de $\frac{\pi}{2}$. Isso ocorreu até 1738. O símbolo π, que foi introduzido com o significado actual por William Jones (1675-1746) em 1706, surgiu na obra de Euler em 1736 e foi usado por ele sistematicamente a partir de 1739 ([16], II, 9-10).

equação

$$1-\sin s=0$$

conduziu à conhecida igualdade de Leibniz[25]

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}=\frac{\pi}{4}.$$

E concluiu

> "Para o nosso método, que a alguns pode não oferecer suficiente confiança, surge aqui uma grande confirmação. Portanto, não devemos de modo nenhum duvidar dos outros casos que foram obtidos pelo mesmo método." ([38], 79; citado em [97], I, 21).

Em 1743, Euler reafirmou a confiança no seu método, explicando os motivos:

> "O método que dei para encontrar a soma desta série, quando o expoente n é um número par
>
> $$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\text{etc.}$$[26]
>
> tem qualquer coisa de extraordinário, pois é tirado de um princípio de que não fizemos ainda muito uso nas investigações desta natureza. Ele é, todavia, tão seguro e tão bem fundado como qualquer outro método de que nos servimos ordinariamente na soma das séries infinitas: o que também fiz ver pelo acordo perfeito de alguns casos já conhecidos doutras investigações e pelas aproximações, que nos fornecem uma maneira fácil de examinar a verdade na prática." ([41], 177).

Contudo, Nikolaus Bernoulli, em correspondência trocada em 1742-3, contestou os métodos de Euler.

Numa das críticas, Bernoulli dizia que não era legítimo aplicar uma propriedade das equações algébricas finitas a uma equação com um número infinito de termos, como Euler tinha feito ao estender a polinómios infinitos a relação entre as raízes e os coeficientes de um polinómio de grau finito ([62], II, 709). Apesar disso, Bernoulli não excluía que

---

[25] Leibniz referiu a descoberta desta série a amigos em 1673, mas ela era um caso particular da série $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ (pondo $x=1$), obtida por Gregory em 1671 ([105], 287), mas também por vezes atribuída a Leibniz. Deste, ver a propósito a "Letre à La Roque, Directeur du Journal des Savants" (em [74], 295-6).

[26] Em [38], 85, Euler deu a soma para $n=2,4,6,8,10,12$. Em [41], 185, a lista foi aumentada até $n=26$. Esta lista foi repetida em [55], I, 139-40. Em geral, designando k um inteiro positivo, tem-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k-1}\frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$, onde os B_i são os chamados números de Bernoulli ([77], 237). Esta relação foi estabelecida por Euler em [49], 327. Os números de Bernoulli ocorreram pela primeira vez em Jakob Bernoulli (1713) *Ars conjectandi*. Uma tradução em língua inglesa da passagem pertinente é dada em [101], 85-90. Para referências sobre os números de Bernoulli ver [77], 183-4, n. 32. A função $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$, com z complexo, é a famosa *função zeta de Riemann*.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$$

pudesse ser deduzida de

$$s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \text{etc.} = s\left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right)\text{etc.},$$

apontando no entanto que esta igualdade só poderia ser válida se a série nela presente fosse convergente, o que ainda não tinha sido provado ([62], II, 691). Para tornear estas críticas, Euler voltou ao assunto e deu uma nova demonstração do resultado[27].

Em 1745, numa carta dirigida a Christian Goldbach, Euler clarificou as suas ideias relativamente às séries divergentes, no sentido de responder às críticas de Nikolaus Bernoulli. Para Euler, qualquer série divergente possuía um valor determinado, embora só impropriamente se pudesse chamar a esse valor 'a soma da série', pois esta expressão estava ligada à adição termo-a-termo, uma identificação que não fazia sentido no caso das séries divergentes ([62], I, 323-4).

O que se entendia por 'valor de uma série divergente' e como se podia obtê-lo foi o que Euler explicou a seguir:

> "Como qualquer série resulta do desenvolvimento de uma expressão finita, então dou esta nova definição para a soma de qualquer série dada:
>
> a soma de qualquer série é o valor da expressão finita de cujo desenvolvimento a série provém." ([62], I, 324).

Para encontrar a soma de uma série como

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.}$$

era então preciso encontrar o valor da fórmula cujo desenvolvimento originava a série ([62], I, 324). De acordo com Hardy ([70], 8), Euler estava obviamente a pensar em termos de séries de potências. Efectivamente, a série anterior resultava da série de potências

$$x - 1!x^2 + 2!x^3 - 3!x^4 + 4!x^5 - 5!x^6 + \text{etc.}$$

pondo $x = 1$. Euler investigou esta série cerca de uma dezena de anos mais tarde, no artigo [48], com maior pormenor do que na carta a Goldbach. Por isso, regressaremos a este exemplo mais adiante, quando analisarmos o referido artigo.

Nikolaus Bernoulli, ao contrário de Euler, negava que uma série divergente pudesse dar o valor exacto de uma quantidade ou função ([62], II, 701-2). A mesma série poderia ser originada por duas expressões distintas e, nesse caso, a soma não seria única ([62], II, 709).

---

[27] Em 1743, nos artigos [40] e [41], e em 1748, na *Introductio* ([55], I, 125-40).

Na já citada carta de 1745 a Goldbach, Euler considerou essa hipótese, mas apontou que Bernoulli não tinha dado nenhum exemplo, por isso:

> "(...) acredito (...) que nunca a mesma série resulta do desenvolvimento de duas expressões finitas distintas. Disto segue-se então indiscutivelmente que qualquer série, tanto divergente como convergente, deve ter um determinado valor ou soma." ([62], I, 324).

Numa carta anterior (de 1743), dirigida a N. Bernoulli, Euler tinha confessado algumas dúvidas quanto à utilização das séries divergentes, mas afirmou que nunca tinha sido induzido em erro ao usar a sua definição de soma[28].

É interessante referir que, cerca de quarenta ou cinquenta anos mais tarde, Jean-François Callet, num artigo que nunca chegou a ser publicado, mas que passou pelas mãos de Lagrange, que o aprovou para publicação, apontou que

$$\frac{1+x+\ldots+x^{m-1}}{1+x+\ldots+x^{n-1}}=\frac{1-x^m}{1-x^n}=1-x^m+x^n-x^{n+m}+x^{2n}-\ldots,$$

para qualquer $m<n$; fazendo $x=1$ e seguindo o princípio de Euler, a soma $1-1+1-1+\ldots$ seria dada por $\frac{m}{n}$, onde m e n podiam ser tomados arbitrariamente. Lagrange objectou, considerando a série de potências completa no segundo membro e usando o argumento da probabilidade devido a Leibniz. Se, por exemplo, $m=2$, $n=3$, então a série completa do segundo membro era

$$1+0.x-1.x^2+1.x^3+0.x^4-1.x^5+\ldots;$$

tomando, para $x=1$, a sucessão das somas parciais

$$1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots$$

notava-se que, por cada duas vezes que ocorria a soma 1, a soma 0 ocorria uma vez, pelo que o valor mais provável era $\frac{2}{3}$; mas este valor era, segundo Lagrange, a soma da série

$$1+0-1+1+0-1+\ldots$$

e não da série

$$1-1+1-1+\ldots,$$

pelo que, na sua opinião, o princípio de Euler não era posto em causa[29] ([76], 463-4; [70], 14--5).

Com o intuito de esclarecer de uma forma satisfatória as questões levantadas pela

---

[28] *Opera posthuma* **I**, 536 ([76], 463).

[29] Este artigo de Lagrange não se encontra em [79] (ver referência em [76], 464, n. 46). Em 1880, Ferdinand Frobenius (1849-1917) provou um teorema que permitiu tornar rigoroso o argumento de Lagrange ([108], 4-6).

utilização das séries divergentes, um assunto que, como acabamos de ver, não era pacífico entre os matemáticos da época[30], Euler escreveu em 1754-5 o artigo "De seriebus divergentibus" (publicado em 1760)[31].

No começo do artigo, Euler revelou o seu pensamento relativamente à natureza da certeza em matemática, um assunto interessante por si mesmo:

> "O autor propõe-se clarificar aqui um conceito que até agora causou as maiores dificuldades; e encontrou-se a si mesmo desenquadrado da opinião largamente difundida de que a investigação matemática está livre de toda a controvérsia. De facto, não pode ser negado que a matemática contém o género de especulações que põem eminentes geómetras em grande desacordo. Não apenas a matemática aplicada (...), mas também a própria matemática pura e abstracta, por estranho que pareça, tem fornecido notáveis fontes de discórdia (...)." ([48], 142-3).

Um exemplo era a controvérsia surgida entre Johann Bernoulli e Leibniz acerca da «perturbadora questão dos logaritmos de números negativos», uma questão que Euler tinha já examinado em dois artigos (ver n. 6, pág. 11), «de um modo tal que as duas partes, se fossem vivas, teriam aceite a sua solução» ([48], 143). Ora:

> "A questão das séries divergentes é perfeitamente similar. O autor pensa ter tratado do assunto de um modo igualmente satisfatório, pelo que daqui em diante nenhuma controvérsia é de temer. Por conseguinte, mesmo que a análise não seja isenta de ocasiões para disputa, sem embargo elas distinguem-se de outras situações no facto de, quando eventualmente toda a evidência for inteiramente ponderada, o assunto poder ser completamente resolvido." ([48], 143).

Portanto, Euler pensava que, tal como outros ramos do conhecimento, a matemática podia gerar disputas; mas acreditava que, pelo menos nesta, as disputas podiam ser resolvidas de um modo racional e sistemático ([9], 142). Era precisamente esse o objectivo que pretendia atingir no seu artigo, relativamente às questões levantadas pelo uso das séries divergentes.

No sumário do artigo, podemos ler:

> "Bastante notáveis são as controvérsias acerca da série $1-1+1-1+1-\text{etc.}$, cuja soma foi dada por Leibniz como $1/2$, ainda que outros discordem. Ninguém atribuiu todavia outro valor a essa soma, e por isso a controvérsia cai na questão de saber se as séries deste tipo têm uma certa soma. O entendimento da questão deve ser procurado na palavra 'soma'; esta ideia, se concebida nestes termos – nomeadamente, diz-se que a soma de uma série é a quantidade da qual se aproxima à medida que mais termos da

[30] De acordo com Euler: «há muita discórdia entre os matemáticos sobre tais séries divergentes, pois alguns negam e outros afirmam que elas podem ter uma soma bem definida» ([48], 145).

[31] Seguiremos aqui a tradução, em língua inglesa, do sumário e das doze primeiras secções deste artigo, incluída em [9]. Essa é a parte relevante do artigo, no que diz respeito às concepções de Euler. [9] inclui também um resumo das restantes secções do artigo.

série são tomados – tem relevância apenas para séries convergentes, e devemos em geral desistir desta ideia de soma para séries divergentes. Por conseguinte, aqueles que assim definem uma soma não podem ser censurados se reivindicam ser incapazes de atribuir uma soma a uma série." ([48], 143-4).

Mais de dez anos após a polémica com Nikolaus Bernoulli, Euler mantinha a convicção de que, caso fosse possível atribuir uma soma a uma série então, independentemente do método utilizado para a obter, essa soma seria única («Ninguém atribuiu todavia outro valor a essa soma»). Por outras palavras, se um determinado método produzisse um certo valor, então esse valor seria *a soma* da série e não *a soma relativa ao método de cálculo utilizado* ([68], 165). Em termos modernos, a assunção de Euler implicava a suposição (falsa) de que todos os métodos que permitem atribuir uma soma a uma série são regulares. Um método de sumabilidade diz-se *regular* quando a soma que atribui a uma série convergente coincide com a sua soma ordinária. A primeira pergunta que um matemático como Euler fazia sobre as séries infinitas não era 'É convergente ou divergente?', mas sim 'Qual é a sua soma?', supondo-se implicitamente que uma série ou possuía uma soma finita, podendo neste caso ser convergente ou divergente, ou possuía uma soma infinita, caso em que era divergente. Por outras palavras, o principal problema no trabalho com as séries infinitas era o de encontrar a sua soma, uma atitude que Grattan-Guiness descreveu como 'culto da soma':

"Euler era o sumo-sacerdote do culto da soma, pois era mais expedito do que qualquer outro a inventar métodos não ortodoxos para calcular somas (embora fosse perfeitamente capaz de considerar a convergência ortodoxa no tratamento de certos casos particulares). Portanto, padeceu mais do que outros da assunção leviana de que eram equivalentes à adição termo-a-termo; e a situação foi agravada pelo facto de que alguns deles eram, pelo que os resultados obtidos eram algumas vezes certos e outras vezes errados. Por isso, apenas fragmentos da teoria da convergência (ortodoxa) emergiram durante o século dezoito." ([65], 70).

De qualquer modo, Euler começou precisamente por estabelecer, no seu artigo, a distinção entre séries convergentes e séries divergentes:

"(...) as séries dizem-se convergentes quando os seu termos se tornam constantemente mais pequenos e, por fim, se dissipam completamente (...); tais séries, não há dúvida que têm de facto uma soma e que a soma que é atribuída em análise é correcta." ([48], 143).

"Se as séries convergentes são aquelas cujos termos decrescem continuamente e eventualmente, quando a série é continuada até ao infinito, se dissipam completamente, é imediatamente aceite que as séries cujos termos não tendem para zero no infinito mas ou permanecem finitos ou crescem para o infinito são incluídas, dado que não são convergentes, na classe das séries divergentes." ([48], 144).

Como se pode depreender, Euler afirmava que uma série era convergente se o seu *n*-ésimo termo convergisse para zero. Esta definição era insatisfatória, tendo em conta que uma série cujo *n*-ésimo termo converge para zero não possui necessariamente uma soma finita. O exemplo das séries harmónicas era conhecido, tendo sido estudado pelo próprio Euler em 1734-5[32]. De acordo com Grabiner ([63], 207, n. 76), matemáticos como d'Alembert e Lagrange (cf. [84], 61) também usaram 'converge' no sentido de 'os termos decrescem'. Segundo a mesma autora ([63], 99), esse era *um modo de definir* o termo 'converge'. Outras vezes, o termo era definido no sentido actual, isto é, uma série dizia-se convergente quando as somas parciais tendiam para um certo limite, chamado a soma da série. Também acontecia encontrar-se as duas definições simultaneamente, como por exemplo na *Encyclopédie*: a primeira definição no artigo "Convergent" ([8], I, 418-9), assinado por d'Alembert[33], e a segunda no artigo "Série *ou* Suite" ([8], III, 29), em parte assinado por d'Alembert, em parte assinado por Condorcet. Neste último artigo, d'Alembert denotou uma consciência mais apurada do que estava em jogo, afirmando que a soma de uma série de termos decrescentes podia ser infinita e referindo expressamente o exemplo da série harmónica ordinária ([8], III, 30). A mesma contradição podia encontrar-se no artigo de Euler, onde uma série era também entendida como convergente se possuía uma soma finita, sendo esta um valor de que se aproximavam as somas parciais da série ([48], 144 e 149).

Euler dividiu as séries divergentes em quatro tipos (tinham-se à partida dois tipos, conforme o *n*-ésimo termo tendia para um limite finito ou infinito, cada um dos quais se subdividia por sua vez em duas classes, considerando séries de termos alternadamente positivos e negativos). Para cada um deles deu os seguintes exemplos:

I. $1+1+1+1+1+1+\text{etc.}$
$1/2+2/3+3/4+4/5+5/6+6/7+\text{etc.}$

II. $1-1+1-1+1-1+\text{etc.}$
$1/2-2/3+3/4-4/5+5/6-6/7+\text{etc.}$

III. $1+2+3+4+5+6+\text{etc.}$
$1+2+4+8+16+32+\text{etc.}$

IV. $1-2+3-4+5-6+\text{etc.}$
$1-2+4-8+16-32+\text{etc.}$

Os quatro tipos traduziam uma cuidadosa distinção das séries divergentes em divergência para

---

[32] No artigo [39]. Que a soma da série harmónica ordinária $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ era infinita, tinha já sido demonstrado por vários matemáticos: no século XIV por Nicole d'Oresme (1323-1382); em 1650 por Mengoli; e em 1689 por Jakob Bernoulli. As referências, bem como os excertos relevantes de Oresme e de J. Bernoulli podem ser consultados em [105], 320-4. Kline ([76], 444) descreveu também uma 'prova' de Johann Bernoulli anterior à de Jakob.

[33] A par disso, no artigo "Divergente (*Série ou Suite*)", d'Alembert definiu uma série divergente como «aquela cujos termos vão aumentando» ([8], I, 544).

o infinito, oscilação finita e oscilação infinita ([68], 166). A controvérsia entre os matemáticos, afirmou, reduzia-se às séries dos três derradeiros tipos pois, quanto às séries do primeiro tipo, era claro que a sua soma era infinita[34]: «tomando termos suficientes, podemos chegar a uma soma excedendo qualquer número dado» ([48], 145).

Em relação à série $1-1+1-1+1-1+\text{etc.}$, após ter invocado os argumentos de Leibniz, Euler considerou a seguinte objecção, que atribuiu aos que na época negavam que uma série divergente pudesse ter uma soma[35]. Se a divisão $1/(1+x)$ fosse parada em algum momento, resultava $1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+\ldots\pm x^n\mp x^{n+1}/(1+x)$ e, «mesmo que o número n seja tomado como infinito, a fracção $\mp x^{n+1}/(1+x)$ não pode ser negligenciada, a não ser que se dissipe, o que ocorre somente se $x<1$ e a série resulte ser convergente. Em todos os outros casos, é sempre necessário ter o resto $\mp x^{n+1}/(1+x)$ em consideração» ([48], 145-6). Contra esta objecção, Euler defendeu (na linha de Leibniz) que os termos da série eram em número infinito, por isso um resto nunca seria alcançável:

> "(...) logo que se diz que uma série é continuada até ao infinito, é contrário a uma tal ideia que algum termo da série seja pensado como o último, mesmo que seja infinitesimal. Portanto, a anterior objecção concernente à adição ou subtracção de um resto após o último termo desaparece por si própria. Como, portanto, nunca atingimos o fim de uma série infinita, nunca chegamos a um lugar onde seja necessário adicionar esse resto; de acordo com isso, esse mesmo resto não apenas pode ser negligenciado, mas deve sê-lo, porque em nenhum sítio se encontra lugar para ele. Estes argumentos (...) também se aplicam às séries do quarto tipo, que usualmente estão sobrecarregadas de problemas próprios." ([48], 146).

Segundo Euler, os opositores às somas de séries divergentes julgavam encontrar nas séries do terceiro tipo o apoio mais firme. Pois:

> "(...) embora os termos destas séries aumentem continuamente e portanto seja possível juntar os termos numa soma maior do que um dado número arbitrário, sendo esta a definição de infinito, todavia os defensores de somas de tais séries são forçados a admitir que estas somas são finitas e na verdade negativas, isto é, menores do que zero." ([48], 146).

Euler deu os exemplos

$$-1=1+2+4+8+16+\text{etc.}$$

$$-\frac{1}{2}=1+3+9+27+81+\text{etc.}$$

[34] Euler considerava que as séries do terceiro tipo tinham uma soma finita. Os seus argumentos serão explicados adiante.
[35] A autoria da objecção era, com grande probabilidade, de Nikolaus Bernoulli (cf. [62], II, 702).

obtidos de $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \text{etc.}$

Para resolver o paradoxo que resultava de chegar a uma soma negativa pela adição de números positivos, Euler começou por invocar o argumento, «bastante subtil mas dificilmente correcto» ([48], 147), de alguns defensores de somas de séries divergentes, segundo o qual havia uma distinção entre o valor de -1 quando ele resultava de subtrair $a+1$ de a, e o valor de -1 quando ele era igual à série $1+2+4+8+16+\text{etc.}$ e resultava da divisão de $+1$ por -1; no primeiro caso, -1 era um número menor do que zero, no segundo caso maior do que infinito. Euler negava que $1-2 \neq 1/-1$, pois «a certeza e o uso das regras que seguimos nos cálculos seriam completamente varridos, e isto seria certamente mais absurdo do que aquilo para que a distinção foi feita.» «Contudo» – afirmava – «parece de acordo com a verdade se dissermos que as mesmas quantidades que são menores do que zero podem ser consideradas maiores do que infinito. Pois não apenas da álgebra mas também da geometria aprendemos que há dois saltos das quantidades positivas para as quantidades negativas, uma pelo nada ou zero, a outra pelo infinito»[36] ([48], 147).

O cerne do pensamento euleriano sobre o uso de séries divergentes foi exposto nas secções 11-2 de "De seriebus divergentibus":

> "Sempre que em análise chegamos a uma expressão racional ou transcendente, é costume convertê-la numa série adequada, sobre a qual podemos mais facilmente efectuar os cálculos subsequentes. Portanto, as séries infinitas encontram um lugar em análise desde que resultem da expansão de alguma expressão finita; e, conformemente, é válido num cálculo substituir no lugar da série infinita a fórmula donde resultou a série. (...) Não há série infinita para a qual a expressão finita equivalente não possa ser concebida.[37]
>
> Se, consequentemente, mudarmos a noção aceite de soma a um tal grau que dizemos que a soma de qualquer série é uma expressão finita de cujo desenvolvimento a série é formada, todas as dificuldades (...) desaparecem por si próprias. Primeiramente, a expressão de cuja expansão uma série convergente resulta exibe a soma, esta palavra sendo tomada no seu sentido ordinário; e se a série é divergente, a procura não pode ser considerada absurda se perseguimos a expressão finita que expandida produz a série de acordo com as regras da análise. Como é válido, num cálculo, substituir essa expressão no lugar da série, não podemos duvidar que é igual a ela[38]. Isto estabelecido, nem sequer

[36] Barbeau e Leah ([9], 157, n. 8), apoiando-se em Scott, J. (1938) *The Mathematical Work of John Wallis (1616-1703)*, 44-5, fizeram recuar a Wallis (1616-1703) a ideia da passagem dos números positivos aos números negativos pelo infinito.

[37] Condorcet tinha uma opinião contrária, conforme exprimiu na *Encyclopédie*: «Nem toda a série é o desenvolvimento de uma função finita, nem mesmo do integral duma equação diferencial dada.» ([8], III, 33).

[38] Esta convicção tinha o seu apoio na evidência empírica de que a substituição descrita permitia obter resultados válidos. Antes, Euler tinha afirmado: «se, num cálculo, chego a esta série $1-1+1-1+1-1$ etc. e se, no seu lugar, substituo $1/2$, ninguém com justiça me imputará um erro, o que toda a gente faria se eu tivesse posto algum outro número no lugar da série. Logo, nenhuma dúvida pode restar que, de facto, a série $1-1+1-1+1-1+\text{etc.}$ e a fracção $1/2$ são quantidades equivalentes e que é sempre permitido substituir uma pela outra sem erro.» ([48], 148). Como apontou Grattan-Guiness ([68], 165), Euler e os seus contemporâneos estavam a obter (usualmente) resultados correctos em sumabilidade e séries de potências formais sem terem teorias gerais dentro das quais os resultados pudessem ser situados. Essas teorias só chegariam

nos afastamos do que é usual se chamamos a essa expressão, que é igual a alguma série, a sua soma, desde que para séries divergentes não associemos esta noção com aquela ideia de soma, para cujo valor a série se deve aproximar cada vez mais, à medida que mais termos são adicionados." ([48], 148-9).

Encontramos as mesmas ideias tão tarde como 1810, na segunda edição do divulgadíssimo *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Sylvestre François Lacroix, que as explicou recorrendo a um exemplo. Embora Lacroix se tenha limitado a fazer eco das concepções eulerianas, traduzimos quase em pleno a passagem em questão, porque nos parece de algum modo clarificar e completar o pensamento de Euler:

"(...) [As séries] podem todas (...) ser encaradas como o desenvolvimento das funções desconhecidas de que derivam.
É conveniente dar atenção à palavra *desenvolvimento*, que empregamos aqui no lugar de *valor*; pois uma série não dá sempre o valor da função à qual pertence: às vezes, em vez mesmo de se aproximar mais dela, à medida que tomamos mais termos, afasta-se dela sem cessar, como o podemos notar a respeito da função $\frac{a}{a-x}$, desenvolvida segundo as potências de x. A série

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}$$

que dela resulta, dá resultados convergentes para o verdadeiro valor no caso onde $x<a$[39]; (...) todavia, a expressão

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}$$

(...) está de tal modo ligada com a função $\frac{a}{a-x}$, que se uma questão nos conduzisse à série

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}$$

estaríamos no direito de concluir que a função procurada não é outra senão $\frac{a}{a-x}$; ou, se descobríssemos alguma propriedade relativa a uma série de termos tais como $1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\text{etc.}$, poderíamos afirmar que ela pertencia à função $\frac{a}{a-x}$. Para sentir a verdade desta asserção, é suficiente observar que o desenvolvimento regular de uma função, considerado em toda a sua extensão, verifica a equação que caracteriza esta função. No exemplo que escolhi, se fizermos $\frac{a}{a-x}=y$, daí concluiremos a equação

$$a-(a-x)y=0$$

e se substituirmos, no lugar da função y, o seu desenvolvimento

---

cerca de cento e cinquenta anos mais tarde, a partir do final do século XIX (ver [108]).

[39] Lacroix pretendia dizer $|x|<|a|$, mas não possuía a notação adequada. A noção de valor absoluto («valeur numérique») seria adoptada somente em 1821 por Cauchy, no seu *Cours d'Analyse* (cf. [19], 18). A notação viria a ser introduzida em 1841 por Karl Weierstrass (1815-1897) ([16], II, 123-4; cf. [12], 74).

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.},$$

veremos que, por muito longe que avancemos o cálculo, os termos destruir-se-ão sempre. Concebemos sem custo que aconteceria o mesmo com qualquer outro exemplo (...)." ([78], I, 4-5).

As palavras de Euler e de Lacroix traduziam uma das características básicas da análise algébrica setecentista: as séries infinitas nunca eram introduzidas de modo arbitrário; elas resultavam da expansão de expressões formadas num número finito de passos usando os processos da álgebra ordinária e do cálculo diferencial e integral ([60], 321). Havia portanto algum cuidado na utilização das séries divergentes. No entanto, segundo Knopp ([77], 458), os matemáticos do século XVIII não tinham consciência das razões por que um determinado resultado deveria ser admitido, e não outro. Segundo o mesmo autor, «foi apenas o instinto inusitado de Euler para o que é matematicamente correcto que, no geral, o salvou de falsas conclusões, a despeito do copioso uso que fez das séries divergentes» ([77], 459). Em contraposição, Barbeau e Leah consideraram que a atribuição por Euler de uma soma a uma série divergente foi «uma questão de decisão consciente, assente em razões programáticas e defensável pela consistência da análise matemática» ([9], 142). Do mesmo modo, para Hardy, «é um erro pensar em Euler como um matemático 'descuidado', embora a sua linguagem possa por vezes parecer descuidada a ouvidos modernos; e mesmo a sua linguagem sugere por vezes um ponto de vista muito além das ideias gerais do seu tempo. (...) Aqui, como noutros lados, Euler estava substancialmente correcto. As perplexidades da época sobre as séries divergentes resultavam, na maioria, não de algum mistério nas séries divergentes enquanto tais, mas duma falta de tendência para dar definições formais e da desadequação da corrente teoria de funções. É impossível estabelecer rigorosamente o princípio de Euler sem ideias claras sobre funções de variável complexa e prolongamento analítico» ([70], 15).

A definição de Euler para a soma de uma série infinita era sobretudo uma tentativa de fundamentar de um modo tão consistente quanto possível a utilização das séries divergentes, tendo em vista os frutos que o seu uso permitia produzir:

"(...) por meio desta definição, podemos preservar a utilidade das séries divergentes e salvaguardar o seu uso de todas as objecções." ([49], 82; citado em [9], 142).

A alternativa era rejeitar por completo os resultados obtidos por meio das séries divergentes ou, o que ia dar ao mesmo, os processos que permitiam obter esses resultados, uma posição que Euler encarava como dogmática:

"Aqueles que afirmam que as somas que são usualmente atribuídas a séries divergentes estão incorrectas, não apenas não avançam nenhuma alternativa como estão totalmente determinados a resistir a tanto como a imaginação da soma de uma série divergente. (...) Eles concluem que nem mesmo a ideia de soma pode ser transferida para as séries divergentes e que o trabalho dissipado em investigar somas de séries divergentes é claramente desperdiçado e contrário aos verdadeiros princípios da análise." ([48], 147--8).

Para sustentar as opiniões emitidas em "De seriebus divergentibus", Euler considerou de utilidade investigar a soma da série

$$1-1+2-6+24-120+720-5040+40320-\ldots,$$

um exemplo a que já fizera referência na anteriormente citada carta de 1745 a Goldbach. Abstemo-nos de fornecer aqui uma descrição pormenorizada dos diversos métodos utilizados por Euler, limitando-nos aos aspectos que julgamos mais significativos.

Euler considerou a função

$$s = x - x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \ldots,$$

que satisfazia à equação diferencial

$$ds + \frac{sdx}{x^2} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando esta equação ($e^{-1/x}$ é um factor integrante), obteve

$$s = e^{\frac{1}{x}} \int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx.$$

Para Euler, esta era a expressão analítica finita cuja expansão era dada pela série anterior. Assim, a soma da série

$$1-1+2-6+24-120+\ldots$$

era dada por

$$e \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx.$$

Observando que o integrando era limitado, Euler utilizou a regra do trapézio para computar o valor aproximado 0,59637255 ([9], 151).

Euler conseguiu obter por outros processos valores aproximados para a soma da série, todos bastante próximos do anterior. Num deles, utilizou fracções contínuas. Para a série

$$1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \ldots$$

forneceu a expansão em fracção contínua ([9], 151):

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cdots}}}}}}}.$$

Já em 1745, na citada carta a Goldbach, tinha obtido esta expansão para o caso $x=1$:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\text{etc.}}}}}}}}$$

observando que

$$s<1;\ \ s>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};\ \ s<\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}=\frac{2}{3};\ \ s<\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+2}}}=\frac{4}{7}\ \text{etc.}$$

Isso significava que os sucessivos convergentes tomavam valores alternadamente inferiores e superiores à soma da série, convergindo «fortemente» para ela, o que lhe permitiu computar o valor aproximado 0,596347922 ([62], I, 325). Em "De seriebus divergentibus", utilizando uma sofisticação deste método (tomando a média aritmética dos convergentes consecutivos), obteve o valor aproximado 0,5963473621372 ([9], 152-3), onde «o erro não afecta sequer o último dígito» ([48], 144).

Segundo um ponto de vista devido a Speiser em [102], e referido por Jahnke ([72], 269--71), podemos discernir duas concepções no modo como Euler encarava o tratamento das séries infinitas: uma concepção aritmética e uma concepção algébrica. De acordo com a concepção aritmética, os termos da série eram encarados como números, sendo exigida a convergência; segundo a concepção algébrica, os sinais + e − eram apenas símbolos de combinação, pelo que a questão da convergência não se colocava.

Assim, na igualdade

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

o símbolo '=' podia ter duas interpretações. De acordo com a interpretação numérica, o

símbolo '=' significava que ambos os membros da igualdade tinham o mesmo valor numérico no domínio de convergência da série do segundo membro. Esta interpretação do símbolo '=' pressupunha a convergência das expressões infinitas envolvidas, que podiam ser séries, fracções contínuas ou produtos infinitos. Uma igualdade podia, no entanto, ser obtida por um algoritmo puramente simbólico, isto é, um algoritmo que operava somente com os símbolos e sem consideração pelas relações numéricas. No exemplo dado, a série $1-x+x^2-x^3+...$ podia ser obtida de $\frac{1}{1+x}$ por divisão contínua. Esta era a interpretação simbólica ou formal do símbolo '=', subjacente à concepção algébrica. Na *Encyclopédie*, Condorcet explicou tudo isto de uma forma que não podia ser mais explícita:

> "Podemos olhar uma *série* sob dois aspectos, primeiro como sendo o valor duma certa quantidade; então é preciso que a *série* seja convergente; e, neste caso, quanto mais termos tomamos, mais a sua soma se aproxima da grandeza procurada. Podemos ainda olhar uma *série* como a expressão duma quantidade qualquer; expressão sujeita a uma certa forma. Se a quantidade não é realmente susceptível de tomar esta forma, o número de termos da *série* não pode ser finito; mas eles seguem entre si uma certa lei, e é do conhecimento desta lei que podemos partir para encontrar a função finita que, desenvolvida em *série*, teria produzido a *série* dada."[40] ([8], III, 32-3).

Segundo Jahnke ([72], 270), Euler estava principalmente interessado na concepção algébrica.

A noção de que podiam existir equações envolvendo séries de potências que podiam não ter uma interpretação numérica era um lugar comum no século XVIII e princípio do século XIX ([72], 271). Eis como Lacroix, no seu monumental *Traité*, expôs estas mesmas ideias:

> "Se, para empregar com segurança um desenvolvimento analítico, apenas necessitamos de nos assegurar da regularidade da série que o exprime, quer dizer, de verificar bem a lei segundo a qual se formam os seus termos, é [todavia] preciso discutir com cuidado a convergência das séries numéricas, para delas [podermos] tirar os valores aproximados das quantidades de que elas derivam (...)." ([78], I, 5).

A concepção algébrica apoiava-se na evidência de que a utilização das séries divergentes se revelava proveitosa, sem que no entanto se soubesse muito bem porquê. Continha um elemento especulativo, na medida em que, sem uma fundamentação teórica segura, admitia a existência de relações mais abstractas do que a ordinária igualdade numérica entre uma função dada por uma fórmula e a respectiva expansão em série. Speiser, no prefácio à *Introductio* de Euler, legitimou este espírito especulativo:

---

[40] Condorcet acrescentou, em seguida, a afirmação da n. 37, pág. 32.

"Pela expansão numa série, a lei de uma função é enviada numa lei para os termos da série, que traz à luz propriedades escondidas da função. Desta maneira, o número π transporta uma relação oculta com os números naturais ímpares, log2 com todos os números naturais (...). Nas suas imensas expedições pelo reino das séries, Euler fez a importante descoberta de que as séries divergentes providenciam o meio mais poderoso de detectar factos inesperados. A passagem pela divergência é ainda mais frutuosa do que a passagem pelos complexos na teoria de funções (...). Que apenas as séries convergentes devem ter um significado, é uma asserção não matemática (...)." ([102], ix-x; citado em [72], 270).

As concepções algébricas eulerianas foram adoptadas por Joseph-Louis Lagrange. Em 1798, na introdução de um tratado sobre a resolução de equações numéricas, descreveu a sua concepção da álgebra:

"O carácter essencial [da álgebra] consiste no facto de os resultados das suas operações não darem os valores individuais das quantidades que são procuradas, como os das operações aritméticas ou construções geométricas, mas representarem apenas as operações (...), que devem ser efectuadas nas primeiras quantidades dadas, de modo a obter os valores procurados (...).
O objecto [da álgebra] não é encontrar valores particulares das quantidades procuradas, mas o sistema de operações a ser efectuadas nas quantidades dadas de modo a obter delas os valores das quantidades procuradas. O quadro destas operações representadas por caracteres algébricos é o que em álgebra é chamado uma *fórmula*; e quando uma quantidade depende de outras quantidades, de tal modo que pode ser expressa por uma fórmula que contém estas quantidades, dizemos então que é uma *função* destas mesmas quantidades." ([87], 14-5; citado em [59], 39).

Para nos apercebermos da proximidade de Lagrange às ideias de Euler, vejamos a resposta que deu em 1760-1 a uma crítica de d'Alembert sobre o uso de séries divergentes. Este estava mais próximo da posição de Nikolaus Bernoulli do que da posição de Euler, como revelam as seguintes palavras, escritas em 1768:

"Por mim, confesso que todas as considerações e cálculos baseados em séries que não são convergentes ou que podemos supor não o serem, me parecerão sempre muito suspeitos, mesmo quando os resultados destas considerações estão de acordo com verdades conhecidas por outros meios." ([6], 183).

Não nos deteremos em pormenor nas críticas que d'Alembert dirigiu a Lagrange (ver [4], 70--2); elas ressaltam da própria resposta que este lhe concedeu:

"Pergunto-me se todas as vezes que numa fórmula algébrica se encontre por exemplo uma série geométrica infinita, tal como $1+x+x^2+x^3+\ldots$, não teremos o direito de a substituir por $\frac{1}{1-x}$, embora esta quantidade não seja realmente igual à soma da série

proposta, a não ser que se suponha o derradeiro termo x^{∞} nulo[41]. Parece-me que não poderemos contestar a exactidão de uma tal substituição sem derrubar os princípios mais comuns da análise.

O Sr. d'Alembert alega ainda um argumento particular para provar que a soma da série

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots$$

não pode ser $-\frac{1}{2}$, tal como eu achei pelo meu cálculo[42]. Ele supõe $x = 45°$, e considera que esta série se torna

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ +\frac{1}{\sqrt{2}},\ +1,$$

após o que recomeça: «Ora, diz ele, a soma desta série finita é, ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou 0, ou -1, ou $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, segundo tomamos mais ou menos termos (...).»[43]

Eu respondo que com um raciocínio similar sustentaríamos também que $\frac{1}{1+x}$ não é a expressão geral da série infinita $1-x+x^2-x^3+\ldots$, porque, fazendo $x=1$, temos $1-1+1-1+\ldots$, que é, ou 0, ou 1, segundo o número de termos que tomamos é par ou ímpar, enquanto que o valor de $\frac{1}{1+x}$ é $\frac{1}{2}$. Ora eu não creio que algum Geómetra queira admitir esta conclusão." ([82], 323).

Tal como Euler, Lagrange acreditava que toda a função, entendida como uma expressão analítica, podia ser expandida numa série de potências. Lagrange adoptou essa ideia como ponto de partida para a fundamentação de toda a análise.

Os matemáticos setecentistas, ao contrário de Lagrange, não estavam muito interessados em questões de fundamentos, tomadas por si mesmas, embora estivessem dispostos a discuti--las quando isso fosse necessário para resolver satisfatoriamente um problema ([63], 21). Por exemplo, o problema da corda vibrante, que abordaremos mais adiante (capítulo 3), originou acaloradas opiniões sobre o tipo de curvas (leia-se 'funções') que deveriam ser admitidas em análise. É de salientar que, no século XVIII, as questões de fundamentos eram vistas mais como um assunto filosófico ou pedagógico do que matemático. Lagrange foi o primeiro grande matemático a tratar os fundamentos do cálculo infinitesimal como um problema matemático sério, embora as suas preocupações com essas questões tenham nascido da necessidade de ensinar, como o deu a entender, sem referir os detalhes, numa carta de 1759 dirigida a Euler ([79], XIV, 173).

O primeiro artigo ([83]) sobre questões de fundamentos apareceu em 1760-1, mas aí

---

[41] Isto significava, na linguagem da época, que o resto da série tendia para zero.
[42] Cf. [80], 111.
[43] A citação é tirada de [4], 72.

Lagrange defendeu que o cálculo newtoniano era totalmente rigoroso, embora o método das primeiras e últimas razões pudesse tornar demasiado longas as demonstrações. A suposição e a utilização dos infinitamente pequenos leibnizianos, que enquadrou na teoria da compensação de erros, foi descrita como uma abreviação que servia para facilitar as demonstrações.

Foi em 1772 que Lagrange advogou pela primeira vez a ideia de que os conceitos do cálculo infinitesimal poderiam ser estabelecidos rigorosamente se este fosse reduzido à álgebra. De acordo com Lagrange, considerando uma qualquer função u de variável x, então, pela «conhecida teoria das séries», $u(x+\xi)$ seria dada pela expansão

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi^3 + p'''\xi^4 + \ldots,$$

onde $p, p', p'', \ldots$ eram novas funções de x ([85], 442).

Lagrange generalizou:

> "De igual modo, se u fosse uma função de três variáveis x, y, z, pondo $x+\xi$, $x+\psi$, $x+\zeta$ no lugar de x, y, z, e desenvolvendo pelas séries, esta função tornar-se-ia da forma
>
> $$\begin{aligned} & u + p\xi + q\psi + r\zeta \\ & + p'\xi^2 + q'\xi\psi + r'\psi^2 + \alpha'\xi\zeta + \beta'\psi\zeta + \gamma'\zeta^2 \\ & + p''\xi^3 + q''\xi^2\psi + r''\xi\psi^2 + s''\psi^3 + \alpha''\xi\zeta^2 + \cdots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$
>
> e assim sucessivamente, se a função u contivesse quatro variáveis, ou cinco, etc." ([85], 443).

Em seguida, declarou:

> "O Cálculo diferencial, considerado em toda a sua generalidade, consiste em encontrar directamente, e por procedimentos simples e fáceis, as funções $p, p', p'', \ldots$, $q, q', q'', \ldots$, $r, r', r'', \ldots$ derivadas da função u; e o Cálculo integral consiste em encontrar a função u por meio destas últimas funções.
> Esta noção dos Cálculos diferencial e integral parece-me a mais clara e a mais simples que alguma vez foi dada; ela é, como vemos, independente de toda a metafísica e de toda a teoria das quantidades infinitamente pequenas ou evanescentes." ([85], 443).

Lagrange apresentou uma demonstração (que não pretendemos discutir aqui) do teorema de Brook Taylor (1685-1731):

$$u(x+\xi) = u(x) + u'(x)\xi + \frac{u''(x)\xi^2}{2} + \frac{u'''(x)\xi^3}{2\cdot 3} + \frac{u^{\mathrm{IV}}(x)\xi^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots,$$

«onde as funções $u', u'', u''', u^{\mathrm{IV}}, \ldots$ [as funções derivadas de u de ordem sucessiva] resultam uma da outra por uma mesma lei, de modo que podemos encontrá-las facilmente por uma

mesma operação repetida»[44] ([85], 445).

O programa de Lagrange, que em [85] estava ainda em fase embrionária, mas que se desenvolveu em [86] e [89], era claro: como o objecto central da análise, a função, era representável por uma série de potências (a série de Taylor), toda a análise, juntamente com as suas aplicações, poderia ser fundada rigorosamente numa base puramente algébrica, liberta dos conceitos de infinitamente pequeno, limite, fluxão e outros conceitos polémicos ([96], 44); em 1799 escreveu:

> "A consideração das curvas deu origem ao método dos infinitamente pequenos, que em seguida foi transformado em método dos evanescentes ou dos limites, e a consideração do movimento deu origem ao das fluxões. Transferiram-se para a Análise os princípios que resultavam destas considerações e não se notou em primeiro lugar, ou pelo menos não parece que se tenha notado, que os problemas que dependem destes métodos, encarados analiticamente, reduzem-se simplesmente à procura das funções derivadas que formam os primeiros termos do desenvolvimento das funções dadas, ou à procura inversa das funções primitivas por meio das funções derivadas. (...)
> É pois mais natural e mais simples considerar imediatamente a formação dos primeiros termos do desenvolvimento das funções, sem empregar o circuito metafísico dos infinitamente pequenos ou dos limites; e é tornar a trazer o Cálculo diferencial a uma origem puramente algébrica, fazê-lo depender unicamente deste desenvolvimento." ([88], 326-7).

Lagrange reconhecia que a expansão em série de Taylor podia falhar para valores isolados de x, mas era válida na generalidade, ou seja, algebricamente ([59], 41). Uma vez introduzidas, as funções derivadas podiam ser consideradas independentemente do processo da série de Taylor:

> "O desenvolvimento das funções, encarado duma maneira geral, dá origem às funções derivadas de diferentes ordens; e, uma vez encontrado o algoritmo destas funções, podemos considerá-las em si mesmas e independentemente das séries donde resultam. Assim, dada uma função encarada como *primitiva*, podemos deduzir, por regras simples e uniformes, outras funções a que chamo *derivadas*; e, tendo uma equação qualquer entre várias variáveis, podemos passar sucessivamente às equações derivadas, e regressar destas às equações primitivas. Estas transformações correspondem às diferenciações e integrações; mas, na teoria de funções, elas dependem apenas de operações puramente algébricas, fundadas sobre os simples princípios do cálculo infinitesimal." ([88], 327).

Como explicou Fraser ([59], 44), o ponto chave para compreender a passagem de uma

[44] A série de Taylor foi publicada pela primeira vez em Taylor (1715) *Methodus incrementorum directa & inversa*, 21-3, mas era já conhecida por Newton, Leibniz e outros. O primeiro a conhecê-la parece ter sido James Gregory. Uma tradução em língua inglesa da passagem crucial de Taylor, bem como uma cópia do original em latim, encontram-se em [105], 329-33. A série de Taylor com $x = 0$ é conhecida como série de Maclaurin, por ter sido dada nesse caso especial por Colin Maclaurin (1698-1746) em (1742) *Treatise of Fluxions*.

função $u(x)$ para a sua função derivada $u'(x)$ é que a relação em questão era uma relação de natureza *algébrica*. Segundo o mesmo autor, a teoria de Lagrange deve ser contrastada com o cálculo moderno, onde $u'(x)$ é definida em cada valor numérico de x por um processo de limite, sendo a relação de $u(x)$ com $u'(x)$ essencialmente *aritmética*. Segundo as próprias palavras de Lagrange:

> "A Álgebra não é, em geral, mais do que a teoria das funções. Na Aritmética, procuramos números por meio de condições dadas entre estes números e outros números; e os números que encontramos satisfazem a estas condições sem conservar nenhum vestígio das operações que serviram à sua formação. Na Álgebra, ao contrário, as quantidades que procuramos devem ser funções das quantidades dadas, quer dizer, expressões que representam as diferentes operações que é necessário efectuar para obter os valores das quantidades procuradas.
> Na Álgebra propriamente dita, apenas consideramos as funções primitivas que resultam das operações algébricas ordinárias; é o primeiro ramo da teoria das funções. No segundo ramo, consideramos as funções derivadas, e é este ramo que designamos simplesmente pelo nome de *Teoria das funções analíticas*[45], e que compreende tudo o que diz respeito aos novos cálculos." ([88], 327-8).

Em conformidade com o espírito da época e com a sua visão algébrica, Lagrange não esboçou nenhuma tentativa para se assegurar da convergência da série de Taylor ([14], 53), embora tenha deduzido a forma diferencial do resto que actualmente leva o seu nome, um «teorema novo e notável pela sua simplicidade e generalidade» ([86], 83). Deste modo, Lagrange foi mais cuidadoso do que os seus predecessores na manipulação das séries de potências e, para o final da sua vida, também começou a prestar maior atenção ao problema da convergência ([63], 98; [70], 17).

Não podemos concluir o capítulo sem mencionar um exemplo, clássico, fornecido por Augustin-Louis Cauchy[46]. Começamos por transcrever a famosa passagem de 1823, onde se referiu à série de Maclaurin de uma função $F(x)$:

> "Poderíamos julgar que a série (...) tem sempre $F(x)$ por soma, quando ela é convergente, e que, no caso onde os seus diferentes termos se dissipam um após outro, a própria função $F(x)$ se dissipa; mas, para nos assegurarmos do contrário, é suficiente observar que a segunda condição se cumpre, se supusermos
>
> $$F(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

[45] Esta designação deu o título a [86], a primeira obra que tinha como objectivo primordial, não produzir novos resultados, mas dar uma nova fundamentação aos resultados conhecidos e, desse modo, estabelecer o rigor do cálculo infinitesimal ([63], 45). A designação 'função analítica' parece ter sido empregada pela primeira vez por Condorcet, em 1778, para denotar uma função de natureza arbitrária ([109], 75-6). Daremos a definição de função, de Condorcet, no capítulo 4 do presente trabalho.
[46] O exemplo foi apresentado primeiramente em 1822, em [20], 276-8, conforme referiu Grattan-Guiness em [68], 735. No entanto, Cauchy repetiu-o em 1823, em [21]. Como não tivemos acesso ao artigo [20], recorremos a seguir ao mais conhecido texto de 1823.

e a primeira, se supusermos

$$F(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Contudo, a função $e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ não é identicamente nula, e a série deduzida da última suposição tem por soma, não o binómio $e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$, mas o seu primeiro termo e^{-x^2}."[47] ([21], 229-30).

O exemplo de Cauchy apontava que duas funções distintas podiam ter a mesma série de Taylor. «Portanto» – escreveu Cauchy no artigo [20] – «não é permitido substituir indistintamente séries por funções» (citado em [68], 735). Isso não só punha em causa o princípio de sumabilidade de Euler, como destruía um dos pressupostos teóricos de base do edifício lagrangiano[48]. Cauchy salientou a necessidade de nos restringirmos a séries convergentes para somas conhecidas. Assim, o seu exemplo conduzia à questão de saber sob que condições era possível representar uma função por uma série convergente para essa função, sendo essa uma das mais importantes e difíceis questões que se colocava à análise do século dezanove[49] ([14], 121-2).

Com o trabalho de Cauchy nos anos vinte do século XIX, a tradição algébrica da análise entrou em decadência. Em 1821, na Introdução do seu *Cours d'analyse*, podemos ler a sentença de morte dessa tradição:

> "Quanto aos métodos, procurei dar-lhes todo o rigor que exigimos em geometria, de modo a nunca recorrer às razões tiradas da generalidade da álgebra. As razões desta espécie, ainda que bastante habitualmente admitidas, sobretudo na passagem das séries convergentes às séries divergentes, e das quantidades reais às expressões imaginárias, não podem ser consideradas, parece-me, senão como induções apropriadas a fazer pressentir algumas vezes a verdade, mas que estão pouco de acordo com o rigor tão gabado das ciências matemáticas. Devemos mesmo observar que elas tendem a fazer atribuir às fórmulas algébricas uma extensão indefinida, enquanto que, na realidade, a maior parte destas fórmulas subsiste unicamente sob certas condições, e para certos valores das quantidades que elas englobam. Ao determinar estas condições e estes valores, e ao fixar de uma maneira precisa o sentido das notações de que me sirvo, faço desaparecer toda a incerteza; e então, as diferentes fórmulas não representam mais do que relações entre as quantidades reais, relações que é sempre fácil de verificar pela substituição dos números às próprias quantidades. É verdade que, para permanecer

[47] Cauchy repetiu este texto, quase palavra por palavra, em [22], 394, acrescentando: «As mesmas considerações são aplicáveis à série de Taylor».

[48] O artigo [20] de Cauchy foi publicado em Abril de 1822 no *Bulletin des sciences, par la Société Philomatique de Paris*, 49-54. Dois meses depois, no artigo "Remarques sur les intégrales des équations aux différences partielles" da publicação de Junho do mesmo *Bulletin*, 81-5, Siméon-Denis Poisson (1781-1840) procurou refutar as asserções de Cauchy. Grattan-Guiness, que forneceu estas referências (cf. [68], 735-6), afirmou que os argumentos de Poisson convenceram Lacroix tão tarde como 1837.

[49] A questão assumiu um particular interesse no caso das séries de Fourier. O assunto será aflorado no final do quarto capítulo do presente trabalho.

constantemente fiel a estes princípios, vi-me forçado a admitir várias proposições que parecerão talvez um pouco duras na primeira abordagem. Por exemplo, enuncio no capítulo VI que *uma série divergente não tem soma* (...). Assim, antes de efectuar a soma de qualquer série, tive de examinar em que casos as séries podem ser somadas, ou, noutros termos, quais são as condições da sua convergência (...)." ([19], ii-v).

A par da afirmação da ilegitimidade das séries divergentes, as palavras de Cauchy assumiam, mais geralmente, um abandono das concepções algébricas, dando lugar ao que se designou por 'aritmetização da análise'. De acordo com Kline ([76], 974), a rejeição das séries divergentes por parte de Cauchy foi aceite pelos matemáticos franceses, mas não pelos ingleses ou alemães, que prosseguiram a tradição algébrica pelo século XIX[50]. O primeiro grande matemático a seguir Cauchy na rejeição radical das séries divergentes foi, todavia, não um francês, mas o jovem matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829). Numa carta de 16 de Janeiro de 1826 ao seu ex-professor Bernt Holmboe (1795-1850), afirmou:

"As séries divergentes são em geral diabólicas, e é uma pena que se ouse basear nelas qualquer demonstração. Podemos obter tudo o que queremos, quando as usamos. Foram elas que originaram tantos desastres e tantos paradoxos." (em [10], 5; cf. [1], II, 256-7).

Contudo, o próprio Abel se interrogava sobre as razões que explicavam o facto de a utilização das séries divergentes conduzir, muitas vezes, a resultados correctos:

"Muitas coisas estão correctas, é verdade, o que é extremamente surpreendente. Estou a trabalhar muito a procurar a razão por detrás disto. Um assunto muito interessante." (em [10], 5; cf. [1], II, 257).

A resposta a esta interrogação teria de esperar por uma nova teoria de séries, que surgiria pelo final do século XIX[51].

[50] Abstemo-nos de dar aqui quaisquer pormenores sobre esse assunto. Para referências, ver Kline ([76], 974-7) e Jahnke ([72] e [73]).
[51] Sobre este assunto, consultar [76], 1096-121, [108] e [70].

3. O Problema da Vibração das Cordas Sonoras

A ideia de que uma função podia ser pensada como uma expressão analítica definida por uma série de potências foi sendo posta em causa, ainda no século XVIII, à medida que vários problemas da matemática aplicada mostravam o carácter restrito de um tal conceito de dependência funcional. O estudo das regularidades mecânicas, tal como o movimento dos corpos celestes, a teoria das vibrações ou a teoria do calor, exigiam a utilização de novos métodos de descrição analítica, uma vez que essas regularidades já não podiam ser expressas numa forma tão simples como uma série de potências. A partir da segunda metade do século XVIII, um novo método foi sendo crescentemente utilizado para definir as dependências funcionais que expressavam essas regularidades: as séries trigonométricas[52] ([96], 45). Uma importante aplicação neste contexto, pela disputada polémica que gerou e pela influência que exerceu na evolução do conceito de função, foi o problema da vibração das cordas sonoras[53].

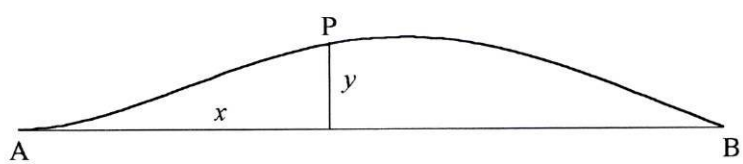


Fig. 3.1

O problema consiste no seguinte. Uma corda elástica uniforme é presa em dois pontos A e B, a uma distância l um do outro (fig. 3.1). Considera-se o referencial cartesiano em que A é a origem, AB é o eixo Ox e a linha perpendicular a AB por A é o eixo Oy. A corda assume a sua posição de equilíbrio ao longo do eixo Ox. Se se desloca a corda da sua posição inicial, ela inicia um movimento vibratório, em virtude das tensões que se exercem nos seus pontos. Considera-se que esse movimento consiste de pequenas oscilações, ou seja, que os pontos da corda sofrem pequenos desvios da sua posição inicial. Podemos portanto admitir que, durante o movimento, cada ponto P da corda permanece na mesma recta vertical, perpendicular ao eixo Ox, isto é, tem abcissa x constante (resumidamente, podemos dizer que as oscilações são transversais). Também podemos supor que a força de tensão é idêntica em cada ponto da corda. Pretende-se encontrar uma equação que represente o movimento ondulatório da corda, sendo o deslocamento y de cada ponto uma função da abcissa x e do tempo t; de seguida, resolver a equação de modo a encontrar explicitamente uma expressão para y.

---

[52] Uma lista dos principais artigos setecentistas onde se inclui algum trabalho com séries trigonométricas é dada em [65], 19, n. 44. Para uma descrição sucinta de cada um deles, ver [76], 454-9.

[53] A polémica opôs os mais famosos matemáticos da época, estendendo-se por toda a segunda metade do século XVIII.

O problema foi discutido primeiramente por Brook Taylor[54]. Após uma analogia pouco fundamentada entre o movimento de cada ponto da corda e o movimento de um pêndulo simples, Taylor obteve para a forma da corda em qualquer instante

$$y = A\sin\frac{x}{a}$$

onde $a = \frac{l}{\pi}$ ([107], 130-1).

Em 1747[55], d'Alembert propôs-se mostrar que «existe uma infinidade de curvas diferentes da ciclóide alongada[56] que satisfazem o problema em consideração» ([105], 352). Pondo $dy = pdt + qdx$, onde p e q, tal como y, eram funções de t e x, concluiu que se $dp = \alpha dt + \nu dx$, então $dq = \nu dt + \beta dx$, onde o coeficiente ν era igual em dp e dq pelo «teorema do Sr. Euler»[57], sendo α, ν, β «funções desconhecidas de t e x» ([105], 353). Conseguiu então estabelecer que

$$\alpha = \beta\frac{2aml}{\theta^2}$$

onde m era a massa da corda e a era o espaço percorrido por um corpo pesado sob a acção da gravidade num determinado tempo θ ([105], 354)[58]. Tomando a unidade de tempo adequada para que $\theta^2 = 2aml$, a igualdade $\alpha = \beta$ conduziu ao sistema diferencial

$$\begin{cases} dp = \alpha dt + \nu dx \\ dq = \nu dt + \alpha dx \end{cases},$$

do qual deduziu a solução

$$y = \Psi(t + x) + \Gamma(t - x)$$

onde Ψ e Γ eram funções arbitrárias[59]. «É fácil de ver» – afirmou d'Alembert – «que esta

---

[54] Em (1713) *De motu nervi tensi* e em (1715) *Methodus incrementorum directa & inversa* ([105], 351).

[55] No artigo *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*. Uma parte deste artigo encontra-se em [105], 352-6.

[56] Trata-se da curva que Gilles Personne de Roberval (1602-1675) baptizou de 'companheira da ciclóide', que é uma sinusóide (cf. [105], 234).

[57] D'Alembert referia-se ao teorema da igualdade das derivadas parciais mistas de segunda ordem ([105], 353; ver n. 7, pág. 11). $p = \frac{\partial y}{\partial t}$ e $q = \frac{\partial y}{\partial x}$, pelo que $dp = \frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial x}dx = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dt + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}dx$ e $dq = \frac{\partial q}{\partial t}dt + \frac{\partial q}{\partial x}dx = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}dt + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$. D'Alembert pôs $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \beta$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \nu$; apenas a segunda igualdade foi escrita explicitamente ([105], 353).

[58] Tendo em conta o significado de α e β, a equação deduzida era equivalente à equação unidimensional da onda $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (essa equivalência foi explicada posteriormente pelo próprio d'Alembert: cf. [3], 2-3). Nas palavras de Truesdell, «após tantos falhanços [de Taylor e J. Bernoulli (ver n. 66 adiante, pág. 50)], a *equação da onda finalmente aparece*» ([107], 238). A equação da onda foi escrita explicitamente pela primeira vez em 1753, por Euler (cf. [46], 241).

[59] Assim, d'Alembert considerou a equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. A notação de derivadas parciais não foi usada nem por d'Alembert

equação engloba um número infinito de curvas» (em [26], 130).

D'Alembert considerou em seguida o caso especial em que a corda, no instante inicial, se encontrava em linha recta, isto é, $y=0$ quando $t=0$ (para todo o x). Além disso, como a corda estava presa em A e em B, tinha-se $y=0$ para $x=0$ e $x=l$ (para todo o t). Resultavam, além da equação

$$\Gamma(-x)=-\Psi(x), \text{ para todo o } x,$$

as equações

$$\Gamma(t)=-\Psi(t) \text{ e } \Psi(t+l)+\Gamma(t-l)=0, \text{ para todo o } t.$$

Das duas primeiras equações vinha que $\Psi(-x)=-\Gamma(x)=\Psi(x)$, isto é, Ψ era par. Das duas últimas, resultava que $\Psi(t+l)=-\Gamma(t-l)=\Psi(t-l)$, o que expressava o facto de Ψ ser periódica de período $2l$. A solução do problema reduzia-se então a

$$y=\Psi(t+x)-\Psi(t-x)$$

onde Ψ era par de período $2l$ ([105], 352-6). D'Alembert não tinha a certeza se esta equação descrevia todas as formas que a corda em movimento podia adoptar ([105], 368; cf. [46], 237--8).

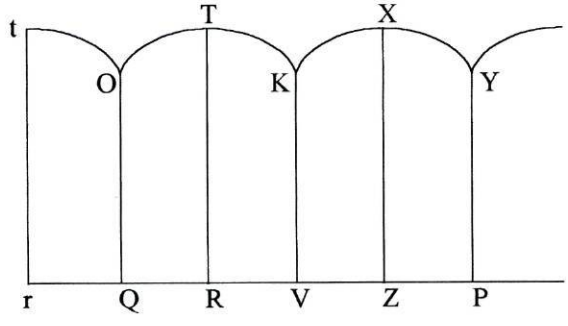


Fig. 3.2

Construiu então a curva da fig. 3.2[60], «que é composta (...) duma infinidade de porções semelhantes e iguais, e cujas ordenadas, correspondentes às abcissas x, são iguais a $\Psi(x)$" (em [26], 130). A curva, periódica, era obtida pela repetição da parte OTK, com $QV=2l$. D'Alembert comparou uma tal curva com a ciclóide. O conhecimento da parte OTK permitia obter a curva que dava a forma assumida pela corda num dado instante. Por isso, d'Alembert chamou à curva OTK a «curva geradora» ([105], 355-6).

No mesmo artigo, acrescentou:

---

nem por Euler (ver n. 7, pág. 11). A equação anterior escrevia-se $\frac{ddy}{dt^2}=\frac{ddy}{dx^2}$. D'Alembert usou a letra s em vez da letra x.

[60] Esta figura foi baseada em [105], 355.

"$\Psi(x)$ deve ser uma função de x onde só entram potências pares, quando a tenhamos reduzido a uma série." (em [26], 130).

Ora, se Ψ era uma série inteira de potências pares, Ψ' seria uma série inteira de potências ímpares, pelo que:

"(...) a expressão para a velocidade inicial (...) deve ser tal que, quando reduzida a uma série, inclua somente potências ímpares de x. Se a função de x, que exprime esta velocidade inicial, não fosse uma função ímpar de x, o problema seria impossível." (em [14], 23; [26], 131).

As palavras de d'Alembert traduziam uma limitação prática introduzida na manipulação explícita das funções: a redução destas ao desenvolvimento em série de potências. As condições aduzidas eram essenciais para d'Alembert, não porque o movimento da corda fosse impossível sob outras condições, mas porque doutro modo, no seu entender, não seria possível traduzir o movimento da corda por uma função, pelo menos de um tipo que fosse aceitável do seu ponto de vista:

"Não poderíamos obter uma função de t e de x, que representasse em geral o valor das ordenadas da curva para uma abcissa x e para um tempo t quaisquer." (em [26], 131).

Num artigo do mesmo ano[61], «de modo a tornar a solução (...) mais extensiva e mais geral» (em [14], 23), d'Alembert considerou uma posição inicial da corda $Y(x)$ e uma velocidade inicial $V(x)$. Resultavam as equações[62]

$$Y(x) = \Psi(x) - \Psi(-x)$$

$$V(x) = \Psi'(x) - \Psi'(-x)$$

e, desta última,

$$\int V(x)dx = \Psi(x) + \Psi(-x).$$

D'Alembert concluiu que «o problema é impossível, a não ser que $Y(x)$ e $V(x)$ sejam funções ímpares de x, isto é, funções onde só entram potências ímpares de x» (em [107], 240). Da primeira e terceira equações, obteve

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\int V(x)dx + \frac{1}{2}Y(x)$$

$$\Psi(-x) = \frac{1}{2}\int V(x)dx - \frac{1}{2}Y(x)$$

---

[61] *Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*. Uma parte deste artigo encontra-se em [105], 356-7.

[62] D'Alembert utilizou Δ no lugar de Ψ' (cf. [105], 356) mas, por uma questão de clareza, seguiremos Truesdell ([107], 240) e usaremos a conhecida notação de Lagrange.

e, da condição inicial na extremidade $x = l$,

$$\Psi(x + 2l) = \Psi(x) \text{ ([107], 240).}$$

Para d'Alembert, a solução geral do problema da corda vibrante reduzia-se a duas coisas:

> "1°, determinar a curva geradora do modo mais geral; 2°, encontrar a curva a partir dos valores de Y e V." (em [107], 240).

O primeiro problema iria estar na base da polémica que, em breve, se desencadearia entre alguns dos principais matemáticos da época. Adiemos, de momento, a sua discussão. O segundo problema resolvia-se a partir das três últimas equações: dadas $Y(x)$ e $V(x)$ no intervalo $0 \le x \le l$, a primeira equação definia a curva geradora $z = \Psi(x)$ em $0 \le x \le l$; a segunda equação permitia obter a curva geradora em $-l \le x \le 0$; e, por fim, a terceira equação permitia determinar $z = \Psi(x)$ fora do intervalo $-l \le x \le l$ ([107], 243-4).

No mesmo artigo, d'Alembert encontrou a solução particular

$$y = A\frac{e^{\frac{\pi i}{l}(t+x)} + e^{\frac{-\pi i}{l}(t+x)}}{-4} - A\frac{e^{\frac{\pi i}{l}(t-x)} + e^{\frac{-\pi i}{l}(t-x)}}{-4}$$

sob a hipótese de a corda «se encontrar em linha recta no início do movimento e receber o impulso conveniente para que tome a forma de uma companheira da ciclóide extremamente alongada»[63] (em [105], 356). Constatando que neste, e noutro caso,

$$\Psi(t + x) - \Psi(t - x) = \Delta(t)\Gamma(x),$$

afirmou que se tratavam dos únicos casos em que isso acontecia ([26], 131; [107], 240). Obteve

$$\Gamma(x) = \frac{e^{Mxi} - e^{-Mxi}}{2i}$$

o que equivalia a

$$\Gamma(x) = \sin Mx,$$

e

$$\Delta(t) = A\sin Mt \text{ ou } A\cos Mt,$$

soluções que correspondiam, para a posição inicial da corda, a uma linha recta ou a uma «companheira da ciclóide extremamente alongada» ([105], 356-7).

A obtenção do produto $\Delta(t)\Gamma(x)$ conduziu d'Alembert , em 1750[64], a introduzir o método de separação de variáveis, um método usual no contexto das equações diferenciais ordinárias,

---

[63] Usamos i onde d'Alembert pôs $\sqrt{-1}$. O símbolo i foi introduzido somente em 1777, por Euler ([16], II, 128).

[64] No artigo *Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*. Uma parte deste artigo encontra-se em [105], 359-61.

mas não no contexto das equações diferenciais parciais ([65], 7), o qual, «sob um ponto de vista mais geral», lhe fornecia «um modo directo de resolver o problema»[65] ([105], 359-60). Partindo directamente da equação

$$\Psi(t+x)-\Psi(t-x)=\Delta(t)\Gamma(x),$$

deduziu soluções idênticas às obtidas anteriormente ([107], 241).

Euler também se ocupou do problema, num artigo do ano seguinte[66]. Seguindo o seu próprio caminho, obteve uma equação equivalente à de d'Alembert[67]:

$$y=\frac{1}{2}f(x+v)+\frac{1}{2}f(x-v)$$

onde $v=t\sqrt{b}$, sendo b uma constante que dependia da tensão, bem como do comprimento e da massa da corda ([44], 73; cf. 65, 69). Fazendo $t=0$ (donde $v=0$), obtinha-se $y=f(x)$. Assim, a própria função $f(x)$ representava, em $0\le x\le l$, «a forma dada à corda no começo do movimento» ([44], 72). Euler mostrou que, reciprocamente, o conhecimento da forma que a corda tomava no instante inicial era suficiente para determinar a forma da corda num instante t qualquer: se $f(x)$ descrevia, na parte $0\le x\le l$, a forma inicial da corda, então a forma da corda ao fim de um tempo t era dada pela equação anterior.

À semelhança do que d'Alembert tinha feito para obter a sua curva geradora, Euler usou f e as condições iniciais para construir uma curva ímpar e periódica, de período $2l$, ao longo de todo o eixo Ox. Tomando $0\le x\le l$, $f(x)$ definia a curva em $[0, l]$ e $-f(x)$ definia a curva no intervalo $[-l,0]$. A determinação da curva fora do intervalo $[-l,l]$ resultava da sua periodicidade. Euler descreveu-a como uma curva

> "(...) que é continuada de uma e outra parte até ao infinito por partes semelhantes e iguais a ela mesma (...), e que estão situadas alternadamente acima e abaixo [do eixo Ox] (...)." ([44], 72).

---

[65] A técnica de separação de variáveis para as equações diferenciais ordinárias foi descoberta e comunicada por Leibniz a Christiaan Huygens (1629-1695) numa carta de 1691 ([76], 474). Convém referir também que, de acordo com Kline ([76], 503), foram as investigações motivadas pelo problema da corda vibrante que trouxeram o primeiro passo importante na teoria das equações diferenciais parciais, embora estas já estivessem presentes em 1734 na obra de Euler e em 1743 no *Traité de dynamique* de d'Alembert. Para pormenores sobre a origem das equações diferenciais parciais, prévios ao problema da corda vibrante, ver [32].

[66] Euler produziu duas versões do mesmo artigo: a original [42] em latim e a sua tradução francesa [44]; o que pode ser interpretado como uma evidência do interesse em si exercido pelo problema. No que se segue usaremos a versão [44]. Euler começou a estudar problemas de vibrações em 1725-6, sob a orientação do seu professor Johann Bernoulli ([107], 142-3). Este, em 1727 e 1728, publicou dois artigos sobre o problema da corda vibrante (ver [107], 132, n. 2 e 133, n. 1). Neles, considerou um modelo discreto em que era imaginada uma corda sem peso carregada por n massas iguais e equidistantes (cf. [107], 132-5). Como Bernoulli impôs as mesmas restrições de Taylor, o tratamento do caso contínuo conduziu-o à mesma conclusão: «a curva (...) é uma companheira alongada da trocóide» (em [107], 135). Johann comunicou por carta as suas investigações ao filho Daniel Bernoulli ([107], 132), que na época era professor de Matemática em St. Petersburgo ([76], 507); este, como veremos adiante, viria também a ocupar-se do problema, algumas décadas mais tarde.

[67] No artigo "Cordes (*vibration des*)" da *Encyclopédie*, d'Alembert escreveu depreciativamente: «o Sr Euler resolveu-o [o problema da corda vibrante] depois de mim, empregando quase exactamente o mesmo método, com a única diferença de que o seu método parece um pouco mais longo.» ([8], III, 424).

Em seguida, Euler provou que se desde o início do movimento tiver decorrido um tempo t tal que $v = 2l$, então a corda voltará à posição inicial. Isso permitiu-lhe contestar a ideia de que as vibrações da corda poderiam sempre ser supostas regulares[68]:

> "Seja qual for a forma dada inicialmente à corda, ela retoma-a a cada uma das vibrações, tanto quanto o permite a diminuição causada pela resistência; o que mostra bem claramente que não existe qualquer verdade na afirmação (...) de que as vibrações da corda, por muito irregulares que sejam no início, depressa entram na uniformidade, de modo que a curva degenera numa trocóide prolongada." ([44], 74).

Para que a solução do problema pudesse ter «a mais ampla generalidade» ([44], 69), Euler admitia que a forma inicial da corda podia ser arbitrária:

> "(...) a primeira vibração depende da nossa boa vontade, pois podemos, antes de largar a corda, dar-lhe uma forma qualquer; o que faz com que o movimento vibratório da mesma corda possa variar até ao infinito, segundo damos à corda esta ou aquela forma no início do movimento." ([44], 64).

A curva correspondente à forma assumida pela corda, em cada instante, poderia ser «seja regular, contida numa certa equação, seja irregular, ou mecânica» ([44], 72). Por outras palavras, a curva em questão poderia ser 'contínua' ou 'descontínua'. Uma ideia que, como veremos adiante, continha profundas implicações e que iria sofrer a oposição de d'Alembert.

Após ter encontrado a «solução geral», Euler considerou o caso especial duma «curva contínua, na qual as partes estão ligadas segundo a lei de continuidade, de tal modo que a sua natureza pode ser expressa por uma equação»[69] ([44], 76). Designando por u uma abcissa qualquer, Euler apontou que a equação

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{l} + \delta \sin \frac{4\pi x}{l} + \text{etc.}$$

fornecia uma curva da forma requerida, salientando quer o facto de a expressão se anular para os pontos cuja abcissa era um múltiplo de l, quer a imparidade: «pondo u negativo, a própria aplicada se transforma no seu negativo» ([44], 76). Se fosse esta a forma primitiva da corda, ao fim de um tempo t tinha-se

$$y = \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{\pi}{l}(x+v) + \frac{1}{2}\beta \sin \frac{2\pi}{l}(x+v) + \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{l}(x+v) + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{\pi}{l}(x-v) + \frac{1}{2}\beta \sin \frac{2\pi}{l}(x-v) + \frac{1}{2}\gamma \sin \frac{3\pi}{l}(x-v) + \text{etc.}$$

---

[68] Esta ideia remontava a Taylor, como Euler indicou no início do seu artigo (cf. [44], 63).

[69] Euler referiu que a curva era necessariamente transcendente, pois cortava o eixo numa infinidade de pontos ([44], 76). Não esqueçamos que, para Euler, a curva que descrevia a forma tomada pela corda, em cada instante t, estava definida em todo o eixo Ox. A função correspondente possuía uma infinidade de zeros nos pontos cuja abcissa era um múltiplo de l.

e, tendo em conta que $\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin a\cos b$, obtinha-se

$$y=\alpha\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi v}{l}+\beta\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi v}{l}+\gamma\sin\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{3\pi v}{l}+\text{etc.}$$

No instante inicial (o que implicava $v=0$) a forma da curva seria, evidentemente, descrita por

$$y=\alpha\sin\frac{\pi x}{l}+\beta\sin\frac{2\pi x}{l}+\gamma\sin\frac{3\pi x}{l}+\delta\sin\frac{4\pi x}{l}+\text{etc.}$$

Não é claro se as equações indicadas por Euler admitiam ou não um número infinito de termos ([76], 507). Euler acrescentou:

> "(...) devemos observar que quando $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$, etc., obtemos o caso que se crê usualmente ser o único na vibração das cordas, nomeadamente $y=\alpha\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi v}{l}$, no qual a curvatura da corda é perpetuamente a linha dos senos, ou uma trocóide prolongada até ao infinito. Mas se apenas os termos β, ou γ, ou δ, etc., ocorrem, então estes formam casos onde o tempo de vibração é menor, ou pelo dobro, ou pelo triplo, ou pelo quádruplo, etc.» ([44], 77).

A posição de d'Alembert distanciava-se claramente da de Euler quanto ao tipo de curvas que podiam ser admitidas para descrever a forma inicial da corda. No já citado artigo de 1750 (ver n. 64, pág. 49), escreveu:

> "(...) em ordem a obter esta curva geradora não é suficiente transportar a curva inicial alternadamente acima ou abaixo do eixo. É também necessário que esta curva satisfaça as condições que expressei no meu artigo. Estas condições são que, se supusermos $y=\Sigma$ para a equação da curva inicial, então Σ deve ser uma função ímpar de x, e em geral as ordenadas que diferem entre si pela quantidade $2l$ devem ser iguais. E isto só pode ser se a curva não é mecânica e tal como eu a determinei na minha *Memória*. Em qualquer outro caso o problema não pode ser resolvido, pelo menos pelo meu método, e não estou certo se não ultrapassará o poder da análise conhecida. De facto, parece-me que não podemos expressar y analiticamente de modo mais geral que supondo tratar-se de uma função de t e x. Mas sob esta suposição encontramos a solução do problema apenas para os casos em que as diferentes formas da corda vibrante podem ser compreendidas por uma mesma equação. Parece-me que em todos os outros casos é impossível dar a y uma forma geral." (em [105], 360-1).

D'Alembert insistia em impor restrições ao tipo de curvas a admitir na solução do problema. Na sua opinião, a forma inicial da corda só poderia ser dada legitimamente por uma curva 'contínua'. Na base dessa posição estava a ideia leibniziana de uma lei de continuidade. Essa lei traduzia uma posição filosófica sobre a natureza geral das leis físicas, segundo a qual não existiam saltos nos fenómenos naturais e, consequentemente, estes eram expressos

matematicamente por funções 'contínuas'. A noção de continuidade prevalecente no século XVIII foi, como vimos, estabelecida pelo próprio Euler em 1748 na *Introductio*. No entender de Speiser, as funções contínuas de Euler podem ser interpretadas em termos modernos como funções analíticas: «Por uma *função contínua* Euler, tal como Leibniz antes dele, quer dizer uma função definida por uma lei analítica, justamente como as que actualmente são chamadas funções analíticas. Elas possuem a propriedade de serem determinadas em toda a sua extensão por uma parte arbitrariamente pequena.» ([103], xxii; cf. [77], 408).

Já vimos como, a partir do conhecimento da curva inicial $y = \Psi(x)$, para $0 \leq x \leq l$, d'Alembert e Euler construíam uma curva, a que d'Alembert chamou geradora[70], ao longo de toda a extensão do eixo Ox: essa construção resultava imediatamente de a curva ser ímpar e periódica de período $2l$. Por outro lado, $y = \Psi(x)$ definia naturalmente, por prolongamento analítico, uma curva em toda a extensão do eixo. O que d'Alembert pretendia dizer, ao afirmar que «encontramos a solução do problema apenas para os casos em que as diferentes formas da corda vibrante podem ser compreendidas por uma mesma equação», era que o problema era solúvel apenas quando os dois prolongamentos coincidissem ([107], 244). Um exemplo, utilizado por Truesdell, permitir-nos-á compreender de um modo mais claro a posição de d'Alembert:

> "(...) quando $V = 0$, suponhamos que a forma inicial é o arco parabólico $Y = \alpha x(l - x)$, $0 \leq x \leq l$[71]. Por conseguinte, $\Psi(x) = \frac{1}{2}\alpha x(l - x)$ para $0 \leq x \leq l$. O prolongamento analítico é
>
> $$\Psi(x) = \frac{1}{2}\alpha x(l - x) \text{ para } -\infty < x < +\infty .$$
>
> Este prolongamento é não periódico, logo não satisfaz as condições do problema mecânico. Por outro lado, o prolongamento (...) [obtido usando a imparidade e a periodicidade] requerido pelo problema mecânico não é dado pela mesma 'equação'. Logo, de acordo com o ponto de vista de d'Alembert, o problema é insolúvel para esta figura inicial." ([107], 244, n. 1).

Para Euler, a forma inicial da corda vibrante não precisava de ser dada por uma única equação e, consequentemente, a curva que deveria ser tida em consideração era a curva obtida por utilização da imparidade e da periodicidade e não a curva obtida 'naturalmente' por prolongamento analítico. Em 1753, escreveu:

> "Traçaremos a curva (...), igual e semelhante à figura inicial da corda, e repetiremos a construção, tanto para a esquerda, para lá do ponto A, como para a direita, para lá do

[70] Estamos a referir-nos ao significado atribuído à palavra por d'Alembert no início da última citação.

[71] Este exemplo foi usado por d'Alembert em [3], 15, sendo α definido como um «coeficiente extremamente pequeno».

ponto B, alternadamente acima e abaixo do eixo, de modo que sejam sempre os mesmos os extremos que unimos. Esta construção tem sempre lugar, seja qual for a natureza da figura inicial (...); mesmo quando ela tenha outras continuações, de uma e outra parte, em virtude da sua natureza, elas não entram em nenhuma consideração. (...)
As diferentes partes semelhantes desta curva não estão ligadas entre elas por nenhuma lei de continuidade, e é apenas pela descrição que elas são reunidas. Por esta razão, é impossível que toda esta curva esteja compreendida em alguma equação, a menos que por acaso a figura (...) [inicial da corda] seja tal que a sua continuação natural acarrete as outras partes repetidas; (...) não é necessário que a curva directriz seja expressa por alguma equação, e a simples consideração do traço da curva é suficiente para nos fazer conhecer o movimento da corda, sem o sujeitar ao cálculo."[72] ([46], 249-50).

De acordo com os pressupostos da teoria de funções a que o próprio Euler deu forma na *Introductio*, as operações do cálculo infinitesimal eram consideradas válidas apenas quando aplicadas às funções 'contínuas', ou seja, segundo a opinião de Grattan-Guiness, às funções diferenciáveis: «esta era a fundamentação da teoria de funções que d'Alembert e os seus contemporâneos aprenderam e criaram, e que assumiram ser verdadeira sob a extensão a várias variáveis, a qual era requerida por problemas como o da corda vibrante." ([65], 4-5; cf. [52], 428). Não que d'Alembert negasse que a forma da corda, no instante inicial, pudesse corresponder a uma curva 'descontínua'[73]:

"A maneira ordinária, para não dizer a única, de fazer sair uma corda do seu estado de repouso, é tomá-la por um dos seus pontos e esticá-la, puxando-a, o que lhe dá a forma de duas linhas rectas que fazem um ângulo entre elas. Ora, o Sr. Euler acredita que, neste caso, a sua construção possa ser admitida e dê o verdadeiro movimento da corda? Duvido que ele tenha esta pretensão, tanto mais que a equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ não terá lugar nesse caso." ([3], 41).

Portanto, o caso natural, o mais simples a considerar na vibração das cordas sonoras era o de uma posição inicial poligonal (cf. [5], 149). Mas as curvas desse tipo eram 'descontínuas', e portanto intratáveis pelos métodos da análise. Como notou d'Alembert, a admissão deste tipo de soluções (linhas poligonais) por parte de Euler parecia pôr em causa a equação diferencial da corda vibrante pois, nos pontos onde a curva formava 'bicos', a função não era diferenciável[74]. Euler argumentou que, considerando o facto de as vibrações serem pequenas, os ângulos nos pontos em questão eram igualmente pequenos e portanto a curva diferia

[72] Em 1765, reiterando o mesmo argumento, Euler afirmou: «Por muito chocante que isso possa parecer a alguns Geómetras, espero que não se encontre mais nada a censurar à minha construção, à qual não mais se poderá recusar a maior generalidade, pois se estende igualmente a todas as figuras possíveis de que a corda AB é susceptível no começo.» ([52], 447).
[73] Em cartas de 1765 dirigidas a Lagrange, d'Alembert chamou ilusórias às soluções dadas por curvas 'descontínuas' ([79], XIII, 24 e 32).
[74] Este ponto de vista foi defendido recorrendo a uma noção incipiente de derivadas laterais num ponto. O assunto é exposto de um modo obscuro em [3], art. X, e de um modo mais claro em [7].

infinitesimalmente de uma curva 'contínua' ([65], 8): «um tal erro, cometido em um ou em alguns elementos, é sempre infinitamente pequeno, e não poderá perturbar o resultado total do cálculo.»[75] ([52], 428; cf. 447-50).

Em 1844, Cauchy referiu precisamente um exemplo do tipo referido por d'Alembert (linha poligonal) para mostrar a contradição existente na definição euleriana de continuidade. Segundo Cauchy, «esta definição (...) está longe de oferecer uma precisão matemática (...) [pois] uma simples mudança de notação será com frequência suficiente para transformar uma função contínua numa função descontínua, e reciprocamente» ([23], 145). Cauchy indicou o exemplo da função

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dt}{t^2+x^2}=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$$

que, definida como nas duas primeiras expressões, podia ser encarada como 'contínua' e, definida como na última expressão, podia ser entendida como 'descontínua' ([23], 145-6).

No caso do problema da corda vibrante, levado pelas próprias características da situação física, Euler afastava-se de d'Alembert e da perspectiva que ele mesmo tinha assumido na *Introductio*, ao admitir que podiam ser consideradas como solução do problema curvas 'descontínuas'. Euler acreditava que, ao contrário do que se tinha crido até aí, era possível aplicar certas operações do cálculo infinitesimal a esse tipo de curvas, e explicava:

> "Até aqui não se acreditou que a Análise fosse aplicável a linhas curvas mecânicas, que não estão contidas em nenhuma equação, ou que são destituídas de toda a lei de continuidade. Isso é realmente verdade no que diz respeito a essa parte da análise que apenas se ocupa das funções duma só variável, à qual nos dedicámos quase exclusivamente até agora; mas a partir do momento em que tratamos de funções de duas ou mais variáveis, como no caso das cordas vibrantes, a aplicada y deve ser considerada como uma função não apenas de x, mas também do tempo t; esta parte da Análise é essencialmente muito diferente da precedente, e estende-se mesmo a funções destituídas de toda a lei de continuidade."[76] ([52], 442).

---

[75] Segundo Truesdell, Euler considerava que a sua equação funcional, e não a equação diferencial de d'Alembert donde provinha, exprimia matematicamente na totalidade o princípio físico da propagação da onda no plano: «Logo que obtém [a equação funcional], ele descarta completamente a equação diferencial. (...) Os seus resultados referem-se à equação da onda apenas incidentalmente; antes, é a equação funcional (...) que ele estuda» ([106], xliii). Podemos confirmar esta afirmação recorrendo às palavras do próprio Euler: «poderemos duvidar da bondade de uma construção, quando ela está perfeitamente de acordo com a equação integral, que contém a solução do problema, e isso sob o pretexto de que ela não convém perfeitamente à equação diferencial, donde a integral é tirada? Já resolvemos muitos problemas por meio das integrações, e ainda ninguém pensou em pôr a solução em dúvida; e tanto mais que são sempre as equações integrais que fornecem as construções e, enquanto não as obtemos, não nos podemos vangloriar duma solução perfeita.» ([52], 448). Não resistimos a citar uma interessante associação de ideias notada por Truesdell: «Ainda que Euler nos deixe a tarefa de adivinhar as suas intenções, facilmente discernimos aqui uma analogia com a sua famosa definição da soma de uma série divergente. Podemos formalizá-la como o *princípio da extensão para as leis físicas*: Em regiões de suficiente suavidade, as leis físicas devem ser estabelecidas por equações diferenciais; suponhamos conhecida a solução geral por funções arbitrárias; então, são as equações funcionais resultantes, com as funções arbitrárias talvez apenas suaves por pedaços, que devem ser tomadas como o princípio matemático geral das leis físicas originais. Por causa do método actualmente usual e mais geral das equações integrais, este princípio de extensão tem apenas interesse histórico.» ([106], xliii).

[76] Podemos estranhar a posição de Euler quanto à admissão de funções 'descontínuas' na análise, tendo em conta que essa posição foi assumida logo no artigo [44], de 1748, e estava em contradição com o ponto de vista adoptado na *Introductio*,

A admissão de soluções dadas por funções que não obedeciam à lei de continuidade foi, como notou Speiser, «uma das mais importantes descobertas de Euler, tendo abalado as fundações do sistema físico de Leibniz» ([103], xxii-iii). Para Truesdell, «a refutação, por Euler, da lei de Leibniz foi *o maior avanço na metodologia científica* em todo o século» ([107], 248). Disso estava consciente, em parte, o próprio Euler pois, em 1765, escreveu:

> "(...) se a Teoria nos conduz a uma solução tão geral que se estende tanto às figuras descontínuas como às contínuas, é preciso confessar que esta investigação nos abre uma nova carreira na análise, colocando-nos em estado de aplicar o cálculo a curvas que não estão sujeitas a nenhuma lei de continuidade e, se isso pareceu impossível até agora, tanto mais importante será a descoberta." ([51], 379).

Em 1753 foi a vez de Daniel Bernoulli entrar na polémica[77]. O modo como tratou o problema foi moldado pelas suas investigações anteriores em acústica ([14], 28; [76], 508). Bernoulli começou por seguir os passos de Brook Taylor. Quando a corda produzia vibrações uniformes, os diferentes casos eram caracterizados pelo número de ondas (*ventres*) que a corda formava durante a sua vibração[78].

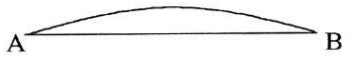


Fig. 3.3

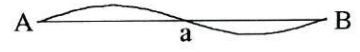


Fig. 3.4



Fig. 3.5

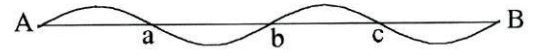


Fig. 3.6

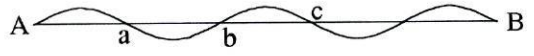


Fig. 3.7

De acordo com Taylor, tinha-se:

"(...) para a primeira figura $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l}$

para a segunda figura $y = \beta \sin \frac{2\pi x}{l}$

para a terceira figura $y = \gamma \sin \frac{3\pi x}{l}$

---

publicada no mesmo ano. A aparente brusquidão na mudança de opinião pode ser explicada pelo facto de o manuscrito da *Introductio* ter sido completado por Euler em 1744 ([109], 65).

[77] Com *Réflexion et éclaircissemens sur les nouvelles vibration des cordes exposés dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748*. Uma parte deste artigo encontra-se em [105], 361-4.

[78] As figuras que se seguem foram baseadas em [105], 362.

para a quarta figura $y = \delta \sin \frac{4\pi x}{l}$

e o mesmo daí por diante." ([105], 363).

Na opinião de Bernoulli, «todos os corpos sonoros» continham «potencialmente uma infinidade de sons, e uma infinidade de correspondentes modos de produzir as suas vibrações regulares» ([105], 363). Baseando-se na suposição de que os movimentos que existiam na natureza se reduziam a somas de movimentos isócronos simples ([96], 46), argumentou que a forma tomada pela corda durante o movimento podia ser obtida a partir da combinação de todas as soluções sinusoidais, convicto de que o som total produzido pela vibração da corda resultava da mistura, possivelmente infinita, dos sons harmoniosos correspondentes a cada componente tayloriana (cf. [80], 69-70):

> "(...) assinalamos que a corda AB não apenas pode produzir vibrações correspondentes à primeira figura ou à segunda ou à terceira, e assim por diante até ao infinito, mas que pode produzir uma combinação destas vibrações de todas as maneiras possíveis, e que todas as novas curvas dadas por d'Alembert e Euler são apenas combinações das vibrações de Taylor." (citado em [76], 509).

Assim:

> "(...) combinando todas estas curvas (...), teremos no caso geral a seguinte equação (...)
>
> $$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{l} + \delta \sin \frac{4\pi x}{l} + \text{etc.}$$
>
> onde as quantidades α, β, γ, δ, etc. são quantidades positivas ou negativas.
> Aqui encontramos pois esta infinidade de curvas sem qualquer computação, e a nossa equação é a mesma que a do Sr. Euler. Ele não trata esta multiplicidade como sendo o caso geral, e apenas o dá (...) como um dos casos particulares, mas isto é certo – apesar de eu não estar ainda muito esclarecido sobre isso –: se existem ainda outras curvas, então não vejo em que sentido elas podem ser admitidas." ([105], 364).

As considerações de Bernoulli eram de natureza física e as suas opiniões não eram apoiadas em argumentos matemáticos.

Euler, no mesmo ano, apressou-se a responder. A crítica principal reportava-se à falta de generalidade da solução apresentada por Daniel Bernoulli, o que o levou a considerar e a descartar logo de seguida um argumento a favor dessa solução:

> "(...) talvez se argumente que a solução $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \text{etc.}$, devido à infinidade de coeficientes indeterminados, é tão geral que engloba todas as curvas possíveis; e é preciso confessar que, se isso fosse verdade, o método do Sr. Bernoulli forneceria uma solução completa. Mas, para além de este grande geómetra não ter feito esta objecção,

todas as curvas compreendidas nesta equação, ainda que aumentemos o número de termos até ao infinito, têm certas características que as distinguem de todas as outras curvas." ([46], 236-7).

Numa carta posterior dirigida a Euler, e escrita entre 1754 e 1766[79], Bernoulli voltou a considerar o argumento:

"(...) demonstrámos que toda a curva exprimida pela equação

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{l} + \delta \sin \frac{4\pi x}{l} + \text{etc.}$$

satisfaz às condições do problema. Mas não podemos dizer que esta equação engloba todas as curvas possíveis? Não podemos forçar a curva a passar por um número arbitrário de pontos, cuja localização é prefixada, usando a arbitrariedade dos coeficientes α, β, γ, ...? Uma equação desta natureza possui menor generalidade do que a equação indefinida

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \text{ etc.?}$$

(...) Logo, para resolver o Seu problema: *Data figura qualicunque initiale, invenire motum secuturum* [*Dada qualquer posição inicial, achar o movimento subsequente*], afirmo que é preciso determinar os coeficientes α, β, γ que identificam a curva dada com a nossa equação indefinida, e obteremos então imediatamente as vibrações isócronas particulares de que o movimento procurado é composto." ([62], II, 654).

Euler contestou esta linha de pensamento:

"(...) por muito convincente que seja este argumento, só consigo encarar esta solução como muito particular; e isso pela mesma razão que consideraríamos, a propósito, com muito esforço todas as curvas possíveis como englobadas nesta equação parabólica

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.},$$

ainda que possamos fazer passar esta curva por uma infinidade de pontos dados." ([51], 385).

Euler referia-se às curvas 'descontínuas', que ele pretendia admitir na solução do problema:

"(...) como a primeira curva que damos à corda é absolutamente arbitrária, pode acontecer, e acontecerá mesmo frequentemente, que esta primeira curva não possa ser expressa por nenhuma equação, seja algébrica, seja transcendente, e que não esteja contida em nenhuma lei de continuidade. Uma tal curva não será pois (...) compreendida pela equação alegada." ([46], 237).

Seria somente em 1765 que Euler oporia um exemplo concreto à série trigonométrica de Bernoulli: o de uma curva formada por uma corda que, no começo do movimento, apenas era estimulada numa parte, a cujo estado inicial correspondia pois uma função nula na parte

[79] Truesdell datou esta carta de 1754-5 ([107], 257, n. 2).

restante da corda[80]. Segundo Euler, o movimento que a corda receberia neste caso jamais seria representado pela equação trigonométrica de Bernoulli, por causa da natureza não sinusoidal da parte nula: «o movimento da corda não poderá de nenhuma maneira ser encarado como uma composição ou mistura de várias oscilações simples e regulares; o que constitui a essência da solução do Sr. Bernoulli» ([52], 430; cf. [51], 385).

Por outro lado, Bernoulli não tinha apresentado nenhum método para calcular os coeficientes da sua equação. Uma tarefa cuja execução, a ser possível, e no dizer de Euler, «estaria sujeita a dificuldades inultrapassáveis», «uma obra que o mais hábil calculador jamais conseguiria terminar»[81] ([52], 429). Em vez disso, Bernoulli escudou-se no caso finito. Em 1758[82], assegurou que, por sobreposição de sinusóides, «podemos fazer a curva final passar por tantos pontos dados quantos quisermos e assim identificar esta curva com a proposta, com qualquer grau de precisão» (em [107], 262). Afirmou ainda não ter encontrado dificuldades em fazer passar um polinómio trigonométrico de grau 2, 3, ..., 7 por 1, 2, ..., 6 pontos equidistantes; contudo, embora afirmando que o seu método «é geral e exacto, apenas enquanto quantidades finitas estão envolvidas», não deu nenhum exemplo nem nenhuma indicação de como resolver o problema da interpolação finita ([107], 262-3).

Em 1775, numa carta a Nicolas Fuss, Bernoulli escreveu:

> "O esboço que me fez do método do Sr. Euler [«para a determinação das vibrações das cordas»] deu-me prazer; mas não mudou em nada as minhas ideias sobre o assunto. Continuo persuadido de que o meu método dá *in abstracto* todos os casos possíveis; confesso no entanto que, sob certos pontos de vista, o do Sr. Euler é bastante preferível ao meu; mas há também outros pontos de vista para o contrário, pois o meu método aplica-se a um número qualquer de corpos finitos dados (...)." ([62], II, 662-3).

As palavras de Bernoulli punham a hipótese de as curvas classificadas como descontínuas, por exemplo as linhas poligonais, poderem ser representadas por uma expressão analítica, dada não já por uma série de potências, como se pensava ser possível para toda a curva

---

[80] Em 1765, Euler dedicou todo um artigo ([52], especialmente 430-1, 435-42) à consideração das variantes deste caso.

[81] Contudo, Euler estava em condições de obter as chamadas fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes (ver n. 103 adiante, pág. 80). Em 1729, trabalhando num problema de interpolação (de acordo com Kline, foi este problema que lançou o uso das séries trigonométricas), obteve uma fórmula formalmente idêntica à série de Fourier de uma função, onde os coeficientes eram dados pelas fórmulas de Euler-Fourier ([76], 454-6; cf. [34], 511). O artigo [34] foi publicado em 1753, mas Euler nunca o relacionou com o problema da corda vibrante e, mais geralmente, com a questão da representação de uma função arbitrária por uma série trigonométrica. O mesmo aconteceu em 1777 quando, trabalhando num problema de astronomia em [53] (publicado postumamente em 1798), obteve pelo método actual a fórmula para os coeficientes da série de co-senos de Fourier, que aliás já tinha sido obtida em 1754 por Alexis Clairaut (1713-1765), embora por outro processo ([76], 456-7). É provável que o argumento da periodicidade avançado por Euler (ver pág. seguinte) tenha convencido os seus contemporâneos a descartar de imediato a hipótese de uma função arbitrária poder ser representada por uma série trigonométrica, sendo esse presumivelmente o motivo que explica o facto de as duas linhas de investigação terem permanecido separadas.

[82] Em *Lettre de Monsieur Daniel Bernoulli, de l'Académie royale des sciences, à M. Clairaut de la même Académie, au sujet des nouvelles découvertes faites sur les vibrations des cordes tendues* ([107], 262).

contínua, mas por uma série trigonométrica ([96], 46). Já vimos que a palavra 'contínua', empregada por Euler para designar uma curva dada por uma única expressão analítica, referia-se à propriedade de a função estar automaticamente determinada em todo o seu domínio por uma fórmula que a definisse num pequeno intervalo, por muito pequeno que fosse. Pensava-se, por isso, que duas expressões analíticas definiam a mesma função se fossem iguais num determinado intervalo. O que estava em jogo pode ser entendido pelas seguintes palavras de Lebesgue, que se referem precisamente às soluções dadas por linhas poligonais:

> "Se a afirmação de Bernoulli fosse exacta, seria preciso que uma série trigonométrica pudesse igualar uma função linear num intervalo e uma outra função linear noutro intervalo; ou, se quisermos, seria preciso que duas expressões analíticas fossem iguais num intervalo e desiguais noutro. Tudo isso parecia impossível." ([93], 21).

A crítica de Euler à generalidade da solução proposta por D. Bernoulli não se limitava à consideração das curvas 'descontínuas'. Para Euler, o carácter demasiado trigonométrico da série excluía logo à partida um conjunto de outras curvas, mesmo 'contínuas', que poderiam descrever a forma da corda no início do movimento. A série trigonométrica avançada por Bernoulli só poderia ser encarada como «muito particular» ([46], 237), quer devido à imparidade quer devido à periodicidade da função seno presente em cada um dos termos da série:

> "(...) se tomarmos a abcissa x negativa, a aplicada torna-se também negativa, e igual àquela que corresponde à abcissa positiva x; de igual modo, a aplicada que corresponde à abcissa $l + x$ é negativa e igual à que corresponde à abcissa x. Logo, se a curva que tivermos dado à corda no começo não possui estas propriedades, é certo que não está contida na dita equação. Ora, nenhuma curva algébrica poderia ter estas propriedades, sendo então necessário excluir todas desta equação; e não há qualquer dúvida que é também inevitável excluir uma infinidade de curvas transcendentes." ([46], 237).

Esta crítica de Euler estava completamente fora de contexto ([65], 10). A análise do problema aplicava-se apenas à porção AB do eixo Ox sobre a qual a corda estava esticada. A imparidade da função seno implicava apenas o semi-eixo negativo do eixo Ox e não a porção AB. A questão da periodicidade era igualmente irrelevante, na medida em que funções periódicas de período $l = \mathrm{AB}$ eram perfeitamente adequadas para tratar um fenómeno físico que ocorria precisamente na porção AB.

O erro de Euler estava alicerçado numa das características básicas da sua visão algébrica da análise, e que já anteriormente salientámos: a pressuposição de que as expressões algébricas de que se ocupava a análise operavam em todo o seu domínio de definição. Isso

impediu Euler de dar um passo essencial, o qual poderia ter sido sugerido pela sua consideração das curvas 'descontínuas', pois estas já deixavam entrever a possibilidade de associar intervalos distintos a cada uma das diferentes partes 'contínuas' da curva ([14], 29). Como notou Grattan-Guiness:

> "(...) quando Euler introduziu a sua teoria de funções 'descontínuas' definidas por meio dos seus segmentos 'contínuos', não se apercebeu adequadamente que, a cada expressão que dava um segmento 'contínuo', teria que dar o passo revolucionário de atribuir um intervalo de definição correspondente ao segmento, *e completamente independente da forma algébrica.*" ([65], 10-1).

Para dar este «passo revolucionário», era necessário um retorno a uma abordagem geométrica, liberta das restrições algébricas setecentistas, um caminho que viria a ser trilhado por Louis Arbogast e Joseph Fourier. Euler apercebera-se de que a nova teoria abria «uma nova carreira na análise» ([51], 379) mas, excessivamente preso à velha teoria, não fora capaz de perceber a direcção que essa carreira tomaria ([65], 11).

Um outro contendor na polémica da corda vibrante foi Joseph-Louis Lagrange. Em 1759, a publicação de um artigo sobre a natureza e a propagação do som deu fama imediata ao então jovem e desconhecido matemático italiano. Para Lagrange, «sendo conhecida a teoria do movimento das cordas, dela poderemos deduzir, por uma simples aplicação, a do movimento do ar que produz o som; estes dois problemas estão pois ligados entre si»[83] ([80], 60).

Relativamente à questão da continuidade, que dividia d'Alembert e Euler, a sua opinião era que nenhum deles tinha fornecido «nenhuma razão particular» para apoiar as respectivas posições, «donde se segue que a questão permanece indecisa» ([80], 67). Lagrange concordava com o ponto de vista de Euler, segundo o qual eram admissíveis na solução do problema curvas 'descontínuas' ([14], 30). Todavia, rejeitava a validade dos métodos de Euler, alinhando numa das críticas de d'Alembert:

> "Parece indubitável que as consequências que se deduzem pelas regras do Cálculo diferencial e integral serão sempre ilegítimas em todos os casos onde não é suposto esta lei [de continuidade] ter lugar. Resulta daí que, como a construção do Sr. Euler é deduzida imediatamente da integração da equação diferencial dada, esta construção é aplicável, pela sua própria natureza, somente às curvas contínuas." ([80], 68).

Na opinião de Lagrange, as provas fornecidas por d'Alembert e Euler «são absolutamente insuficientes, e é apenas por um cálculo, como aquele que temos em vista, onde consideramos os movimentos dos pontos da corda, cada um em particular, que podemos esperar chegar a

[83] A analogia foi explicada em [80], 44, 60.

uma conclusão que esteja ao abrigo de toda a suspeita» ([80], 68).

Relativamente à série trigonométrica avançada por Daniel Bernoulli, Lagrange era de opinião que «nem o Sr. Bernoulli, nem o Sr. Euler mostraram directamente se todas as curvas que pode formar uma corda esticada estão compreendidas ou não na equação referida; pois, como nesta equação cada termo corresponde, por assim dizer, ao movimento de cada ponto da corda, seria preciso para tal dar primeiro uma solução geral do problema da corda vibrante na hipótese de ela estar carregada de um número indefinido de corpos; solução que o próprio Sr. Bernoulli confessa nunca ter visto, e que ele crê que nunca ninguém ainda tenha dado» ([80], 71).

Eis o que Lagrange se propunha fazer:

> "Empreendo pois esta solução cuja análise me parece interessante em si mesma, pois há um número indefinido de equações a resolver simultaneamente. (...) Considero em primeiro lugar (...) o caso onde o número de corpos móveis é finito, e daí extraio facilmente toda a teoria da mistura das vibrações simples e regulares, que o Sr. Daniel Bernoulli apenas encontrou por meios particulares e indirectos. Passo, em seguida, ao caso de um número infinito de corpos móveis, e, após ter provado a insuficiência da teoria precedente neste caso, extraio das minhas fórmulas a mesma construção do problema *de chordis vibrantibus*, que foi dada pelo Sr. Euler, e que foi tão fortemente contestada pelo Sr. d'Alembert. Dou ainda a esta construção toda a generalidade de que ela é susceptível (...)." ([80], 45).

Lagrange estava convencido de que a única maneira de estabelecer a solução no caso da corda contínua era por passagem ao limite da solução no caso discreto[84]. De acordo com Truesdell ([107], 266), «a ideia de Lagrange parece ser que, enquanto a *dedução* de Euler é restrita às funções 'contínuas' porque emprega o cálculo diferencial e integral, sem embargo o *resultado* de Euler possui validade irrestrita como uma fórmula limite do caso discreto». Contudo, como notou o mesmo autor, é actualmente óbvio que a validade de uma tal passagem ao limite, se correcta, está dependente de hipóteses que são, essencialmente, idênticas às necessárias para justificar o uso directo de apropriadas diferenciações e integrações; portanto, a pretensão de Lagrange carecia de fundamento ([107], 263). A sua atitude mostrava, apesar de tudo, que ele já procurava abordagens alternativas às de Euler ([68], 149).

Não é nossa pretensão aqui apresentar uma análise, nem sequer sucinta, da demonstração

[84] Para tratar o caso da corda contínua, supunha-se que, ao mesmo tempo que o número de corpos se tornava infinito, a massa de cada um deles diminuía, de modo a que a massa do número crescente de corpos se aproximasse da massa total da corda contínua ([76], 503; cf. [80], 44). Embora Lagrange tenha reclamado a originalidade do seu método, é de toda a conveniência referir que a ideia da passagem ao limite no modelo discreto foi, em primeiro lugar, utilizada por Huygens e a mesma abordagem foi também tentada, no caso da corda vibrante, por Johann Bernoulli em 1727-8 (ver n. 66, pág. 50) e por Euler em 1747 ([107], 49, 133, 231). Lagrange referiu, no entanto, que a ideia lhe foi sugerida por d'Alembert, o qual, em 1750, a atribuiu a si próprio ([80], 108; [107], 265, n. 3).

de Lagrange. Qualquer tentativa séria nesse sentido ocuparia algumas dezenas de páginas. Daremos conta, somente, da ideia que esteve na base dessa demonstração e focaremos uma passagem onde Lagrange obteve uma expressão que se aproximava bastante da representação de uma função por uma série de Fourier. Uma proximidade que, no entanto, escapou a Lagrange.

Lagrange começou por estabelecer a seguinte sequência de n equações:

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = c(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}), \text{ com } \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, n \\ y_0 \equiv y_{n+1} \equiv 0 \end{cases}$$

onde c era uma constante e y_k era a ordenada da k-ésima massa ([80], 72). Seguiu-se então uma longa e complicada análise[85], durante a qual Lagrange provou, em apoio da pretensão de Daniel Bernoulli, que um polinómio trigonométrico de n termos poderia ser ajustado de modo a passar por n pontos arbitrários ([107], 269; cf. [80], 89-91). Tendo pois conseguido chegar a uma expressão para y no caso discreto finito ([80], 89), a certa altura fez $n = \infty$ ([80], 97), acabando por obter a solução no caso discreto infinito:

$$y(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty} \sin\frac{r\pi x}{l} \sum_{q=1}^{\infty} \sin\frac{r\pi X_q}{l} dX_q \cdot \left[Y_q \cos\frac{cr\pi t}{l} + \frac{l}{r\pi c} V_q \sin\frac{cr\pi t}{l} \right],$$

onde X_q, Y_q e V_q correspondiam às condições iniciais (posição e velocidade) da q-ésima massa[86] ([107], 270; cf. [80], 99-100). Encarando $\sum_{q=1}^{\infty} \ldots dX_q$ como um integral, substituindo Y_q e V_q por $Y(X)$ e $V(X)$, e trocando a posição do integral com a do $\sum_{r=1}^{\infty}$, obteve a solução para a corda vibrante no caso contínuo ([107], 270; cf. [80], 100):

$$y = \frac{2}{l}\int_0^l \sum_{r=1}^{\infty} \sin\frac{r\pi X}{l} \sin\frac{r\pi x}{l} \cos\frac{r\pi ct}{l} Y(X)dX + \frac{2}{\pi c}\int_0^l \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin\frac{r\pi X}{l} \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\frac{r\pi ct}{l} V(X)dX .$$

Neste ponto, se Lagrange tivesse considerado a condição inicial $y = Y(X)$, quando $t = 0$, $0 \le x \le l$, teria obtido

$$Y(X) = \frac{2}{l}\int_0^l \sum_{r=1}^{\infty} \sin\frac{r\pi X}{l} \sin\frac{r\pi x}{l} Y(X)dX ,$$

---

[85] Truesdell classificou o artigo como elaborado e obscuro ([107], 266, n. 1). E, para Grattan-Guiness: «Alguns comentadores consideraram esta prova de Lagrange cheia de "poder", "beleza" e "virtuosidade" – mas pelo menos este leitor sente-se impressionado pelo facto de Lagrange saber a resposta que procurava antes de começar, e considera que ele a obteve criando uma linha de pensamento superficial e sofisticada que, na verdade, se desenvolve com considerável fraqueza, entrelaçada como está com afortunadas aproximações e simplificações e uma vacilação contínua quanto aos estatutos, em incessante mudança, das suas quantidades como constantes e variáveis» ([65], 17, n. 41).

[86] Estamos a seguir as notações que foram utilizadas por Truesdell em [107].

o que daria, invertendo as posições de $\int_0^l$ e $\sum_{r=1}^{\infty}$ (uma troca que Lagrange, no habitual estilo do século XVIII, não teria hesitado em fazer), uma representação da função $Y(X)$ em série de senos de Fourier ([65], 16). Mas, como vimos, Lagrange pretendia obter a solução funcional de Euler[87], e portanto não se deteve na exploração de tais detalhes. Na verdade, ele tinha feito antes a troca entre $\int_0^l$ e $\sum_{r=1}^{\infty}$ precisamente porque estava interessado na representação integral $\int_0^l \sum_{r=1}^{\infty} \ldots$, que permitia resolver o problema físico, e não na representação em série $\sum_{r=1}^{\infty} \int_0^l \ldots$, que respondia ao problema analítico teórico de representar uma função arbitrária por meio de uma série trigonométrica, o qual ele não tinha em mente. Portanto, para Lagrange, este foi apenas mais um passo, não mais importante do que outro qualquer, no caminho da busca da solução funcional de Euler. De acordo com Grattan-Guiness ([65], 17), a representação em série nem sequer foi tomada em consideração logo à partida, na medida em que Lagrange foi sensível ao argumento da periodicidade avançado por Euler. A opinião de Lagrange sobre tais séries não mudou quando, meio século mais tarde, Fourier as reavivou ([68], 149; ver n. 99 adiante, pág. 77).

[87] O que finalmente acontece na secção 40 do seu artigo (cf. [80], 107), após vários passos duvidosos, como por exemplo considerar $n\left(\frac{x}{l} \pm ct\right)$ um número inteiro, sendo n infinito ([107], 270; cf. [80], 102). D'Alembert criticou esta e outras passagens do artigo de Lagrange em [4]. Este respondeu em [82].

4. *A Evolução do Conceito de Função*

A discussão em torno do problema da vibração das cordas sonoras prosseguiu durante o resto do século XVIII. Cada um dos intervenientes manteve, no essencial, os seus pontos de vista e, nos pontos polémicos, as opiniões continuaram divididas ([98], 19). Conforme foi apontado por vários historiadores, a polémica conduziu Euler a um conceito mais abrangente de função do que aquele que tinha sido estabelecido por ele na *Introductio*. Em 1755, no prefácio de *Institutiones calculi differentialis*, Euler deu ao conceito de função uma forma mais universal e abstracta:

> "Se algumas quantidades dependem de outras quantidades, de modo que se estas variam as primeiras variam, então chamamos às primeiras quantidades funções das últimas. Esta designação é da natureza mais ampla e compreende qualquer método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de algum modo de x, ou por ele são determinadas, são chamadas funções de x." ([49], 4; citado em [109], 70).

Como vemos, Euler já não exigia que uma função fosse dada por uma expressão analítica; ou seja, uma função já não precisava de ser analítica no sentido moderno (tendo em conta que, no plano conceptual, Euler confundia 'expressão analítica' com o que actualmente designamos por 'função analítica'). No entanto, no próprio livro, dedicado ao cálculo diferencial, Euler restringiu a sua análise às funções analíticas ou, no máximo, a funções não-analíticas em pontos isolados ([14], 33). Como notou Bottazzini ([14], 34), isso não implicava uma limitação, à priori, às funções analíticas; apenas significava que as funções comuns na época eram desse tipo. Podemos, no entanto, interrogar-nos sobre o que significava, para Euler, «qualquer método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras».

Na prática, a nova definição traduzia-se por uma incorporação no conceito de função das chamadas *curvas* 'descontínuas', doravante encaradas como *funções* 'descontínuas'. Até aí, as palavras 'contínua' e 'descontínua' eram associadas à palavra 'curva' e não à palavra 'função', embora possamos dizer que, muitas vezes, durante o século XVIII, quando algum matemático escrevia 'curva', na verdade pensava em 'função'[88]. É difícil precisar o momento em que se verificou essa mudança conceptual. Numa carta de 23 de Outubro de 1759 dirigida a Lagrange, referindo-se ao artigo [80] que este lhe enviara, Euler falou explicitamente em

[88] Um bom exemplo é o artigo [52], onde Euler, ao referir-se à forma tomada pela corda vibrante, ora usou a palavra 'curva', ora usou a palavra 'função'.

«funções irregulares e descontínuas»:

> "Estou-vos infinitamente grato de ter posto a minha solução [do problema da corda vibrante] ao abrigo de todas as chicanas e é após os vossos profundos cálculos que todo o mundo deve agora reconhecer o uso das funções irregulares e descontínuas na solução deste género de problemas." ([79], XIV, 165).

As menções às funções 'descontínuas' prosseguiram na correspondência entre Euler e Lagrange, sempre relacionadas com o problema da corda vibrante. No artigo [81], de 1760-1, Lagrange referiu

> "(...) a necessidade de admitir no cálculo outras curvas para além daquelas que os Geómetras consideraram até ao presente, e de empregar um novo género de funções variáveis, independentes da lei de continuidade, e que podemos muito bem chamar *funções irregulares* e *descontínuas*. (...) elas são necessárias para um grande número de questões importantes de Dinâmica e de Hidrodinâmica (...). O Sr. Euler foi, creio, o primeiro a introduzir na Análise este novo género de funções, na sua solução do problema *de chordis vibrantibus* (...)." ([81], 158).

Em 1763, em plena polémica da corda vibrante, Euler escreveu "De usu functionum discontinuarum in analysi", onde desenvolveu expressamente os seus pontos de vista sobre a utilização das funções 'descontínuas' em análise. Aí podemos ler a seguinte explicação sobre o princípio de continuidade:

> "Na verdade, é já bem reconhecido que em Geometria sublime não costumam ser consideradas outras curvas para além daquelas cuja natureza é definida por uma relação precisa entre as coordenadas expressa por uma equação, de modo que todos os seus pontos sejam determinados por uma mesma equação, como por uma lei. E porque pensamos que esta lei contém nela própria o princípio de continuidade, pois todas as partes da curva estão tão firmemente ligadas entre si que se torna impossível qualquer mudança nelas sem perturbar o nexo de continuidade, por essa razão chamamos curvas contínuas a essas curvas, e nada interessa que a equação que contém a natureza destas seja algébrica, transcendente, conhecida ou mesmo desconhecida, desde que compreendamos que seja dada uma certa equação por meio da qual se exprime a natureza das curvas deste género." ([50], 75-6).

Dhombres ([26], 136) apontou a utilização da palavra 'lei', onde se esperaria a palavra 'função'. Esta palavra, na sequência da definição de 1755, cobria agora claramente um campo mais vasto do que o designado por 'expressão analítica'. O conceito de função tinha-se libertado das grilhetas do restrito conceito leibniziano de 'lei de continuidade'.

Para reforçar a ideia de que a continuidade tinha a ver com o facto de a função ser definida por uma única expressão analítica e não com a conexão ao longo do curso da curva, Euler deu o exemplo dos dois ramos de uma hipérbole:

"(...) a continuidade é atribuída a estas hipérboles separadas, visto que ambas estão contidas numa mesma equação, e dela podem ser formadas." ([50], 76).

Em seguida, explicou o que entendia por uma função 'descontínua':

"Constituído o critério de continuidade, é de imediato patente o que é uma função descontínua, ou seja, destituída da lei de continuidade: com efeito, todas as linhas curvas não determinadas por nenhuma equação definida, delineadas habitualmente pelo livre traço da mão, engrossam tais funções descontínuas, visto que nestas não é lícito definir os valores das aplicadas por nenhuma lei constante das abcissas." ([50], 76).

Entre as curvas que correspondiam a funções 'descontínuas', Euler incluiu também as chamadas curvas mistas, como as linhas poligonais:

"Com efeito, embora aqui qualquer porção definida esteja contida numa determinada equação, todavia nenhuma equação única pode ser exibida para toda a extensão [da curva] (...)." ([50], 76).

Euler explicou, depois, a razão que levava alguns matemáticos a banir as funções 'descontínuas' da análise:

"(...) nenhum lugar foi concedido na Análise geométrica às linhas e funções descontínuas (...), pois o assunto de modo nenhum pode ser tratado a não ser que a natureza das linhas esteja contida numa certa lei ou equação. Daí que muitos geómetras, induzidos por esta razão, não duvidassem que todas estas linhas e funções descontínuas, tanto da Geometria, como da Análise universal, deveriam ser totalmente banidas de entre os objectos de que esta ciência se ocupa."[89] ([50], 76-7).

Inevitavelmente, Euler aludiu ao problema da corda vibrante e às posições que ele e d'Alembert tinham assumido relativamente à admissão de funções 'descontínuas' em análise, não deixando de mencionar o «ilustre Lagrange» que «defendeu a minha solução tão solidamente que não deixou lugar para mais nenhuma dúvida» ([50], 77). Euler reafirmou a sua posição de que, quer a forma inicial da corda fosse compreendida por uma equação, quer não, aquela deveria sempre descrever um movimento e, por isso, fossem os conhecimentos existentes suficientes ou não para tratar o problema, o estudo deste, por muito difíceis que parecessem as questões levantadas, seria sempre digno da nossa atenção. Além disso, como o problema versava sobre quantidades, certamente pertencia ao âmbito da análise.

Que foi a resolução do problema da corda vibrante que levou Euler a estender a noção de função de modo que esta abarcasse a 'descontinuidade', não restava a mínima dúvida;

[89] Cf. n. 11, pág. 12.

referindo-se à sua solução do problema, afirmou:

"(...) nela está contida, com feliz sucesso, a razão das funções descontínuas." ([50], 78).

De acordo com Euler, nenhum problema poderia considerar-se completamente resolvido «a não ser que funções perfeitamente arbitrárias, ainda que descontínuas, sejam introduzidas na solução» ([50], 78).

A razão para as frequentes querelas quanto ao que deveria ou não ser admitido em análise encontrava-se no facto de que

> "(...) a maior parte das definições são muitíssimo vagas e confusas e não explicam com suficiente lucidez e distinção a natureza do assunto de que se trata [na análise]." ([50], 78).

Na parte restante do artigo, Euler sustentou que as funções 'descontínuas' tinham lugar na parte da análise que se ocupava de funções de várias variáveis, pois as funções «completamente indeterminadas» que ocorriam nas soluções das equações diferenciais parciais dependiam «de tal maneira do nosso arbítrio que no lugar dela[s] também funções descontínuas podem ser assumidas» ([50], 86). A mesma ideia foi defendida no terceiro volume de *Institutiones calculi integralis*, publicado em 1770 e em grande parte dedicado à resolução das equações diferenciais parciais ([109], 69). Este ponto era o mais controverso em toda a polémica sobre o problema da corda vibrante. Em 1771, referindo-se a este problema, Condorcet afirmou que a solução funcional de uma equação diferencial poderia ser constituída por partes de curvas definidas por diferentes fórmulas (e portanto descontínuas no sentido euleriano), mas que essas mesmas partes deveriam estar ligadas entre si ([63], 91).

Condorcet foi o autor de uma definição de função tão ou mais geral do que a de Euler. A definição apareceu numa revisão do seu *Traité du calcul intégral*, de 1765. Esta revisão, que permaneceria incompleta e nunca viria a ser publicada, foi apresentada à *Académie des Sciences* em 1778-82, tendo as suas páginas circulado em Paris entre os matemáticos da época ([109], 76). Traduzimos da transcrição que Youschkevitch deu do original em francês:

> "Suponho que tenho um certo número de quantidades $x, y, z, ..., F$, e que para cada valor determinado de $x, y, z, ...$ etc., F tem um ou vários valores determinados que lhes correspondem; digo que F é uma função de $x, y, z, ...$
> (...)
> Enfim, se eu sei que quando x, y, z forem determinadas, F também o será, ainda que não conheça nem a maneira de exprimir F em x, y, z, nem a forma da equação entre F e x, y, z; eu saberei que F é uma função de x, y, z." (em [109], 75).

Condorcet salientava expressamente que uma função não precisava de ser definida seja explicitamente, por uma expressão analítica, seja implicitamente, por uma equação. Na realidade, Condorcet distinguiu entre três tipos de funções: as funções cuja forma era conhecida (funções definidas explicitamente); as funções introduzidas por equações entre F e $x, y, z, \ldots$ (funções definidas implicitamente); e as funções dadas por certas condições ([109], 75). Entre as deste terceiro tipo incluíam-se as funções que resultavam da resolução das equações diferenciais, bem como as

> "(...) funções que são conhecidas apenas porque em geral sabemos que uma certa quantidade será determinada quando as outras quantidades o forem." (em [109], 76).

Condorcet referia-se a funções que resultavam de fenómenos físicos, mas cuja descrição matemática era desconhecida ([109], 76).

Outros matemáticos advogaram a ideia de que era permitido admitir funções 'descontínuas' nas soluções das equações diferenciais parciais[90]. Por exemplo, em 1779, Pierre-Simon Laplace, que tentou resolver o problema da corda vibrante recorrendo a uma equação de diferenças finitas, escreveu:

> "Esta análise da corda vibrante estabelece (...) de uma forma incontestável a possibilidade de admitir funções descontínuas neste problema (...)." ([91], 81).

Em 1780, o próprio d'Alembert, o cruzado da exclusão das funções 'descontínuas', chegou a admitir que estas poderiam ocorrer nas soluções das equações diferenciais parciais. Conforme vimos anteriormente, o famoso enciclopedista defendera, contra a opinião de Euler, a exclusão absoluta das funções 'descontínuas' do âmbito de aplicação dos métodos da análise[91]. Contudo, no artigo "Sur les fonctions discontinues", incluído no oitavo volume dos seus *Opuscules*, d'Alembert alterou – como era seu hábito, sem se retractar – o seu ponto de vista: «Já provei, parece-me, em vários dos volumes precedentes (...), que as funções descontínuas não satisfazem (*pelo menos sempre*) à integração das equações diferenciais parciais.» ([7], 302; o itálico é nosso). Mais à frente: «há casos onde a função, ainda que descontínua, satisfaz à equação» ([7], 306).

Para mostrar o que pretendia, d'Alembert considerou uma função $f(z)$ definida por uma fórmula $\varphi(z)$ para $z \leq a$ e por outra fórmula $\Delta(z)$ para $z \geq a$, com $\varphi(a) = \Delta(a)$[92] ([7], 302).

---

[90] Para referências ver [65], 18, n. 43.

[91] Lagrange, inicialmente próximo da posição de Euler, acabou por recuar e adoptou uma posição próxima da de d'Alembert ([107], 279 e 289).

[92] No original, em lugar de f, d'Alembert usou a letra φ. Fizemos a substituição com o intuito de evitar confusões. No modo como d'Alembert definiu $f(z)$ encontrava-se já em germinação a ideia, mais tarde utilizada por Arbogast, de definir uma

A função $f(Ax+Cy)$ era descontínua no sentido euleriano para $z=Ax+Cy=a$. D'Alembert utilizou então um argumento em que se serviu de uma noção incipiente de derivadas laterais num ponto. Afirmou que $f(Ax+Cy)$ seria solução da equação $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}=B\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$, onde $B=\frac{A^n}{C^n}$, se $\frac{d^k\varphi}{dz^k}(a)=\frac{d^k\Delta}{dz^k}(a)$ para $k=1,\ldots,n$ ([7], 307), o que pode ser comprovado pelos cálculos. Portanto, para d'Alembert, uma função 'descontínua' num ponto – $f(Ax+Cy)$ para $z=Ax+Cy=a$ – poderia ser solução de uma equação diferencial parcial – $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}=B\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ – se as derivadas laterais até à ordem da equação – $\frac{d^k\varphi}{dz^k}(a)$ e $\frac{d^k\Delta}{dz^k}(a)$ para $k=1,\ldots,n$ – fossem iguais, ou seja, se as derivadas até à ordem da equação não possuíssem 'saltos' ([109], 71).

As divergências quanto ao que era entendido por «funções arbitrárias» no contexto da resolução das equações diferenciais parciais permaneceram durante o século XVIII. Isso levou a Academia de St. Petersburgo a propor em 1787 um prémio para quem apresentasse a melhor resposta à seguinte questão[93]:

> "Determinar se as funções arbitrárias que são obtidas por integração das equações diferenciais com mais de duas variáveis representam quaisquer curvas ou superfícies, sejam algébricas ou transcendentes, sejam mecânicas, descontínuas ou produzidas por um movimento livre da mão; ou se essas funções apenas incluem legitimamente as curvas contínuas e susceptíveis de ser expressas por equações algébricas ou transcendentes." (em [61], 332).

A própria linguagem em que era proposta a questão reflectia o estado mais ou menos caótico em que tinha mergulhado a teoria de funções na época: bastava reparar na profusão de termos como 'algébrica', 'transcendente', 'mecânica', 'descontínua', 'produzida por um movimento livre da mão', e outros então em voga como 'regular', 'obedecendo a uma lei de continuidade', etc., provenientes de campos tão diversos como a geometria, a álgebra, a mecânica e a própria análise. O mesmo termo era utilizado para designar diferentes classes de funções e diferentes termos eram usados para designar a mesma classe. As distinções, úteis noutras situações, eram irrelevantes para o problema da generalidade de funções no contexto da resolução das equações diferenciais parciais ([65], 11-2). A maneira como a Academia de St. Petersburgo exprimiu a questão foi traduzida de um modo que nos parece particularmente

---

função por associação de funções distintas a intervalos de definição distintos.

[93] Nesta altura, dos vários contendores da polémica em torno da corda vibrante, apenas Lagrange era vivo.

agudo por Grattan-Guiness: «teremos necessariamente que nadar neste mar de confusão, ou poderemos retirar-nos para a segurança das curvas contínuas representadas por uma equação algébrica ou transcendente?» ([67], 136).

O prémio foi atribuído em 1790 ao ensaio *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles* de Louis Arbogast. Este apoiante das ideias de Lagrange, no tocante à fundamentação do cálculo infinitesimal, abordou a questão de uma forma mais geométrica que algébrica[94]. Foi precisamente este regresso a uma abordagem geométrica que permitiu não só simplificar a taxinomia das funções, introduzindo uma terminologia consistente, como a sua extensão para lá das restrições da continuidade.

Uma das questões que resultavam do problema colocado pela Academia de St. Petersburgo era a seguinte: o que é que se entendia exactamente por 'lei de continuidade'? Arbogast deu uma caracterização das propriedades que, no seu entender, eram englobadas por este conceito. Antes de mais, referiu a propriedade dos valores intermédios:

> "A lei de continuidade consiste em que uma quantidade não poderá passar de um estado a outro sem passar por todos os estados intermédios sujeitos à mesma lei. (...) [A variável] não passará de um valor a outro sem passar também por todos os valores intermédios." (em [61], 334).

A noção de continuidade estabelecida por Euler na *Introductio* – uma função era contínua se fosse definida por uma única lei analítica – também não foi esquecida. Referindo-se às funções algébricas, afirmou:

> "As funções algébricas são olhadas como contínuas porque os diferentes valores destas funções dependem da mesma maneira dos valores da variável; (...) todos os valores sucessivos de y devem ser encadeados por uma mesma lei, que faz com que as suas extremidades formem parte do curso de uma curva regular e contínua." (em [61], 334).

Uma outra propriedade resultava da ideia de que uma função contínua era uma função que não apresentava 'saltos':

> "Supondo que a variável cresce continuamente, a função receberá variações correspondentes (...). Assim, a ordenada y de uma curva algébrica, quando a abcissa x varia, não poderá passar bruscamente de um valor a outro, não poderá haver saltos entre uma ordenada e outra de modo que estas difiram entre si de uma quantidade assinável [assignable[95]]." (em [61], 334).

---

[94] Arbogast era, contudo, um pensador essencialmente algébrico ([68], 148).
[95] Os matemáticos portugueses da época utilizavam o termo 'assignável'.

Arbogast explicou em seguida de que modo a continuidade poderia ser rompida. Isso poderia acontecer de duas maneiras. Uma delas resultava da destruição da continuidade no sentido de Euler ([61], 336):

> "A função pode mudar de forma, isto é, a lei segundo a qual a função depende da variável pode mudar de repente. Uma curva formada da reunião de várias porções de curvas diferentes está neste caso. Seja a curva ABCD uma porção de parábola de A a B, de B a C uma porção de elipse, de C a D uma porção de círculo [ver fig. 4.1]; a continuidade será rompida nos pontos B e C. Para esta curva, a ordenada y, que é em geral uma função de x, não pode ser determinada para todos os pontos por uma mesma equação, mas por equações diferentes, em que uma começa onde a outra deixa de ter lugar." (em [61], 334-5).

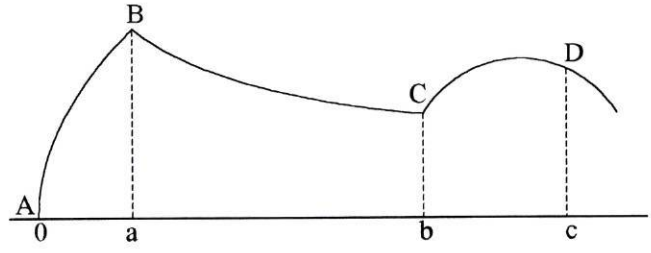


Fig. 4.1

Segundo Arbogast, a curva descrita poderia ser representada algebricamente por:

$$\sqrt{mx} \text{ de } x=0 \text{ até } x=a$$
$$\frac{1}{k}\sqrt{n^2-(x-p)^2}+q \text{ de } x=a \text{ até } x=b$$
$$\sqrt{k^2-(x-r)^2}+b \text{ de } x=b \text{ até } x=c.$$

Conforme podemos constatar, o retorno à geometria permitiu a Arbogast dar o passo essencial que Euler, demasiadamente arreigado à crença na generalidade da álgebra, não tinha sido capaz de dar no contexto da discussão motivada pelo problema da corda vibrante: o de atribuir um intervalo de definição a cada uma das partes contínuas que constituíam as suas curvas descontínuas. Recordemos: a ideia de que uma expressão algébrica operava sobre todo o seu domínio de definição tinha impedido Euler de compreender que somente o que se passava na porção AB do eixo Ox – onde a corda era esticada – era relevante; guiado pelo seu espírito algébrico, Euler tinha invocado o argumento da periodicidade sobre todo o eixo Ox para criticar as séries trigonométricas propostas por Daniel Bernoulli. O passo dado por Arbogast, permitido em grande medida pela sua abordagem geométrica, foi pois, neste sentido, revolucionário.

Mas Arbogast foi mais longe do que a simples definição de uma função por junção de troços contínuos (no sentido euleriano, isto é, definidos por uma expressão analítica):

"Nem sequer é necessário que a função *y* seja expressa, para um certo intervalo (...), por uma equação; ela pode mudar continuamente de forma, e a linha ABCD, em vez de ser uma reunião de curvas regulares, pode ser tal que, em cada um dos seus pontos, se torne uma curva diferente; quer dizer, ela pode ser inteiramente irregular e não seguir nenhuma lei em nenhum intervalo, por pequeno que seja. Tal seria uma curva traçada ao acaso, pelo movimento livre da mão. Este género de curvas não pode ser representado nem por uma só nem por várias equações, sejam algébricas, sejam transcendentes." (em [61], 335).

Arbogast deu então o nome a este tipo de curvas:

"Chamaremos *curvas descontínuas* tanto aquelas que são formadas pela reunião de várias porções de curvas, como aquelas que, traçadas pelo movimento livre da mão, não estão submetidas a nenhuma lei, em nenhuma parte do seu curso; desde que todas as partes destas curvas se liguem umas às outras sem interrupção. Chamaremos *superfícies descontínuas* aquelas que passam por curvas descontínuas, ou planas, ou com dupla curvatura. Por *funções descontínuas* entenderemos as funções que representam este género de curvas ou superfícies." (em [61], 335).

Até aqui, Arbogast fez um aproveitamento das noções eulerianas de continuidade e descontinuidade; as funções descontínuas incluíam funções definidas por leis distintas ou por nenhuma lei em absoluto ([67], 137). Tratava-se, em qualquer caso, de funções contínuas, no sentido moderno do termo; o género de funções que, pelas próprias características da situação física, eram as únicas que podiam ser contempladas na descrição da posição da corda vibrante em cada instante. Mas Arbogast deu outro passo revolucionário: a consideração de funções com 'saltos', e portanto descontínuas na actual acepção desta palavra. Esse era o outro modo de romper a continuidade, do qual resultava a destruição da propriedade dos valores intermédios ([61], 336):

"A lei de continuidade é ainda rompida quando as diferentes partes de uma curva não estão ligadas umas às outras. (...)
Chamaremos, às curvas desta espécie, *curvas descontíguas*, porque todas as suas partes não estão ligadas, ou não são contíguas umas às outras; e daremos o nome de *funções descontíguas* às funções que correspondem a curvas desta natureza. As porções (...) [que constituem a curva] podem de resto ser sujeitas à lei de continuidade ou ser traçadas sem lei." (em [61], 335-6).

Salientamos o facto de a descontinuidade (o sentido moderno em que podemos enquadrar a palavra 'descontiguidade') se tornar aqui na descontinuidade num ponto. Assim, ao dar diversas caracterizações que pretendiam descartar a descontinuidade 'por saltos', Arbogast chamou a atenção para a propriedade essencial da continuidade num ponto ([63], 92).

Na esteira de Euler, Arbogast advogou a ideia de que as funções que resultavam da

integração das equações diferenciais parciais poderiam ser tanto 'contínuas' como 'descontínuas' ([65], 18). Em relação à equação diferencial da corda vibrante, por exemplo, Arbogast defendeu que um 'salto' poderia ocorrer nos valores de $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, desde que o mesmo 'salto' ocorresse nos valores de $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ([14], 35). Arbogast concluiu dizendo que «em geral, nem todas as funções arbitrárias (...) estão sujeitas seja à lei de continuidade, seja à de contiguidade» (em [67], 137).

O ensaio de Arbogast revela-nos que, na época, um grande número de propriedades eram associadas à noção de continuidade. De acordo com Bottazzini ([14], 70), no início do século XIX, as ideias dos matemáticos sobre o conceito de continuidade tinham-se tornado muito confusas. Como explicou Grabiner:

> "Uma função podia ser chamada contínua se possuía a propriedade do valor intermédio; se era diferenciável; se era representada por uma única fórmula; se dava 'saltos'; se, dada uma mudança 'insensível' na variável independente, sofria ela própria uma mudança 'insensível'. Por vezes, estas propriedades – que agora olhamos como distintas – eram encaradas como equivalentes; por vezes, embora partilhando um nome, eram vistas como diferentes." ([63], 88).

A tarefa de distinguir, de entre todas, a propriedade essencial que caracterizava a continuidade (essencial no sentido de poder ser transformada numa definição capaz de servir de base à prova de outras propriedades) seria empreendida por dois matemáticos no primeiro quarto do século XIX: em 1817 por Bernhard Bolzano (1781-1848) e em 1821 por A. L. Cauchy[96]. Ambos deram definições que se aproximavam bastante do conceito moderno de continuidade e usaram-nas para provar, entre outros teoremas importantes, o teorema dos valores intermédios. Esta evolução não teria sido possível sem uma distinção clara entre o conceito de função e o conceito de continuidade.

Vimos como, em 1748, na *Introductio* de Euler, a continuidade era pensada como uma propriedade que caracterizava uma certa classe de curvas, as curvas representáveis por uma única função, isto é, por uma única expressão analítica; a noção de continuidade tornava-se, desse modo, numa noção intrínseca ao conceito de função. Os métodos da análise apenas se aplicavam validamente a esta classe restrita de funções. Depois, um problema físico, o problema da vibração das cordas sonoras, levou Euler a pensar que seria possível estender os métodos da análise a uma nova classe de funções, doravante designadas por funções

[96] Em [13] e [19], respectivamente.

descontínuas, uma designação que antes apenas se aplicava a curvas. O conceito de função tinha alargado as suas fronteiras, pela incorporação da ideia de descontinuidade. As funções em causa eram, de qualquer modo, contínuas no sentido moderno. Apesar disso, um conceito de função suficientemente geral para abarcar a noção moderna de descontinuidade estava presente, pelo menos em potência, na nova definição que Euler, em 1755, publicou nas *Institutiones calculi differentialis*. Esta definição correspondia a uma mudança conceptual que, no ensaio de Arbogast, se materializou na noção de descontinuidade num ponto, designada por descontiguidade.

Podemos colocar a seguinte questão: até que ponto se exerceu a influência da nova definição de Euler? Os historiadores não estão de acordo sobre este ponto. Na opinião de Fraser:

> "Embora o debate sobre o conceito de função tocasse o próprio fundamento do cálculo infinitesimal, as questões em discussão permaneceram curiosamente isoladas da corrente principal da análise matemática contemporânea. A função geral advogada por Euler levantou problemas de fundamentos que não podiam ser resolvidos, dadas as correntes direcções de investigação." ([60], 326).

Fraser acrescentou que, no máximo, o conceito geral de função de Euler se constituiu numa visão irrealizada de uma futura matemática. Em apoio desta posição, podemos citar a definição de função que o influente Lagrange manteve até ao final da sua vida. Na segunda edição da *Théorie des fonctions analytiques*, datada de 1813, podemos ler:

> "Chamamos *função* de uma ou de várias variáveis a toda a expressão de cálculo onde estas quantidades entram de alguma maneira, misturadas ou não com outras quantidades que encaramos como tendo valores dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis." ([86], 15).

Esta definição correspondia ao velho conceito euleriano de função como uma expressão analítica.

Youschkevitch e Medvedev adoptaram uma posição diferente da de Fraser. Ambos apontaram a definição de função que Lacroix deu em 1797 no seu *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (no mesmo ano em que também foi publicada, pela primeira vez, a definição de Lagrange) como a prova de que pelo menos alguns matemáticos entenderam a definição de Euler no seu sentido mais geral. É de referir que Lacroix era amigo e colaborador de Condorcet, pelo que pode também ter tido acesso ao manuscrito não publicado onde este dava uma definição de função com um grau de generalidade pelo menos equivalente ao da definição de Euler (cf. [78], I, xxii-iv). A definição de Lacroix dizia o seguinte (esta definição

foi salientada do resto do texto, em itálico, pelo próprio Lacroix):

> "*Toda a quantidade cujo valor depende de uma ou várias outras quantidades é dita* função *destas últimas, quer saibamos quer ignoremos por quais operações é preciso passar para ascender destas à primeira.*" ([78], I, 1).

Medvedev ([96], 48) apontou que, sendo esta uma reformulação da definição euleriana de 1755, colocava todavia maior ênfase na falta de restrições quanto às operações que deveriam ser efectuadas nos valores do argumento para obter o valor da função.

Por ser muito divulgado, é de supor que o *Traité* tenha contribuído substancialmente para a disseminação do novo conceito de função. A importância deste facto foi assinalada por Medvedev:

> "(...) se não fosse a definição de Euler, amplamente publicitada por Lacroix, muito provavelmente não teríamos o conceito de função contínua devido a Bolzano e Cauchy." ([96], 56).

É no entanto de ter em conta que o grau de generalidade que mais tarde foi atribuído ao conceito de função estabelecido por Euler existia mais em potência do que de facto. Bottazzini salientou este aspecto:

> "(...) é necessário enfatizar o aspecto 'nominal' desta definição, no sentido em que aquelas funções que então eram usadas na prática eram basicamente as funções algébricas e transcendentes elementares."[97] ([14], 36).

Em muitos livros de texto da época, o velho conceito de função como uma expressão analítica ainda prevalecia. Youschkevitch ([109], 76-7) referiu mesmo, contrariando aqui as opiniões de Kline ([76], 950) e de Medvedev ([96], 57), que a definição de função que Cauchy deu em 1821 no fundamental *Cours d'analyse* não implicava mais do que funções definidas por uma expressão analítica. Grattan-Guiness ([65], 50-1) foi ainda mais longe, ao referir que a definição de continuidade de Cauchy, que já referimos como próxima da moderna, não tinha, ao contrário da de Bolzano, a pretensão de estender o uso da palavra 'continuidade' a uma classe de funções mais vasta do que a das funções contínuas no sentido euleriano, ou seja, a das funções definidas por uma única expressão analítica. Em favor da sua opinião, Grattan-Guiness referiu que os exemplos fornecidos por Cauchy eram «expressões algébricas eulerianas», estando a única diferença no facto de Cauchy ter reformulado «*o velho*

[97] Medvedev ([96], 56) reportou a Hermann Hankel (1839-1873) a opinião de que a definição de Euler era 'nominal', em [69], 67, embora Hankel tenha associado à definição o nome de Dirichlet e não o de Euler (ver n. 106 adiante, pág. 82).

significado algébrico euleriano em termos aritméticos» ([65], 50). A este respeito, não resistimos a citar uma reflexão de Medvedev:

> "Deve ser feita uma distinção entre o significado geral que um matemático dá a um conceito geral que formula e o conceito com o qual ele de facto trabalha nas suas investigações. Para discorrer sobre um conceito, não basta entendê-lo em toda a generalidade concebível no período correspondente. Ele também deve estar sujeito às regras de argumentação e aos cálculos analíticos e ser expresso na linguagem matemática geralmente aceite nesse tempo. É pois natural que alguns matemáticos, por exemplo no século dezoito, tenham sido capazes de ter um conceito bastante geral de função e, no entanto, tenham trabalhado com uma classe mais restrita de funções, dado que as ferramentas matemáticas disponíveis não eram aplicáveis a funções de um tipo mais geral. Seria incorrecto negar que tinham uma noção mais geral de função, especialmente quando estabeleciam explicitamente tal noção, simplesmente porque nas suas obras eles falavam constantemente sobre funções de uma classe comparativamente pequena." ([96], 56).

Na primeira metade do século XIX, a definição geral de Euler foi adoptada por vários matemáticos. Entre estes, e no sentido de aflorarmos algumas das ramificações brotadas da fértil semente setecentista, faremos referência, de uma forma muito sucinta, a Joseph Fourier e a Peter Lejeune-Dirichlet.

Em 1807, na sua *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, a primeira versão de [58], Fourier manifestou a convicção de que qualquer função, mesmo 'descontínua', podia ser representada por uma série trigonométrica, uma pretensão que Euler, contra a sugestão de Daniel Bernoulli, tinha rejeitado (cf. [56], 183). Fourier não provou nem podia provar esta afirmação, mas deu inúmeros exemplos que mostravam que Euler não tinha razão[98].

As conclusões de Fourier punham em causa a teoria de funções herdada do século XVIII. Os seus exemplos mostravam que funções descontínuas no sentido euleriano (e, nalguns casos, se interpretadas convenientemente, no sentido moderno) podiam ser representadas por uma única expressão analítica: uma série trigonométrica[99]. Assim, Fourier pensava, em concordância com D. Bernoulli, que a forma assumida pela corda vibrante podia ser descrita, em todos os casos, por uma série trigonométrica:

> "(...) convenci-me, com efeito, que o movimento da corda sonora é tão exactamente

[98] Por exemplo, Fourier mostrou que uma função nula em parte do seu intervalo de definição podia ser representada por uma série trigonométrica, uma possibilidade que, como vimos, tinha sido categoricamente negada por Euler, o qual tinha dedicado expressamente a esse caso (a função representava a posição inicial da corda vibrante) o artigo [52]. Para os exemplos de Fourier, ver [56], arts. 70-2, 88.

[99] O ensaio de Fourier foi apresentado ao *Institut de France* em 1807 e sofreu a oposição de Lagrange, um dos examinadores do manuscrito. De acordo com Grattan-Guiness: «ele [Lagrange] levantou tão fortes objecções sobre estas séries que o ensaio nunca foi publicado.» ([65], 20). O ensaio só veio de facto a ser publicado em 1972 como parte de [66], por Grattan-Guiness e J. R. Ravetz.

representado em todos os casos possíveis pelos desenvolvimentos trigonométricos como pelo integral que contém as funções arbitrárias." ([56], 252).

Para reforçar a sua posição e revelar o carácter inovador da sua descoberta, Fourier forneceu expressamente desenvolvimentos em série trigonométrica para uma grande variedade de funções mistas, o que punha em evidência as insuficiências da concepção euleriana de continuidade. Como apontou Youschkevitch:

"(...) a discriminação entre funções *mistas* e *contínuas* mostrou-se teoricamente insustentável." ([109], 73).

Portanto, a crise aberta por Fourier mostrou a necessidade de uma nova abordagem do conceito de continuidade. Não admira que essa nova abordagem tenha surgido pouco tempo depois, com Bolzano e Cauchy.

O próprio Fourier tinha uma concepção contraditória da continuidade, pois oscilava entre o tradicional significado euleriano e o significado moderno ([14], 70). O que não oferece dúvidas é que Fourier possuía um conceito de função suficientemente geral para englobar as funções descontínuas no sentido actual pois, em 1822, em *La théorie analytique de la chaleur*, publicou a seguinte definição:

"Em geral, a função $f(x)$ representa uma sequência de valores ou ordenadas, cada uma das quais é arbitrária. (...) De modo nenhum é assumido que estas ordenadas estão sujeitas a alguma lei geral; elas podem suceder-se de uma maneira completamente arbitrária, e cada uma delas é definida como se fosse uma única quantidade." ([58], 500).

Fourier dava às igualdades envolvendo séries uma interpretação numérica. Por isso, uma das questões que imediatamente se colocavam era a da convergência das séries trigonométricas envolvidas. O tratamento que Fourier deu a esta questão foi muito mais cuidadoso do que era habitual. Em 1807, Fourier adoptou a posição nada usual de que a soma de uma série deveria ser considerada *apenas* no âmbito da sua convergência, isto é, em termos do comportamento das somas parciais à medida que o número de termos aumentava. Ele já tinha abordado questões de convergência cerca de dez anos antes, nas suas lições na *École Polytechnique*, tendo então constatado o facto, usualmente não reconhecido, de que, para além das séries que possuíam uma soma finita ou infinita, existiam séries que (do ponto de vista da adição termo-a-termo) não possuíam soma[100] ([66], 170).

---

[100] Esta atitude austera, para a época, não o impediu de, a dado passo, utilizar a fórmula $1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$ (cf. [56], 210).

Nesta ordem de ideias, Fourier afirmou que uma função era representada pelo desenvolvimento em série trigonométrica apenas em parte do seu domínio, o que punha em causa uma das características básicas da visão algébrica setecentista do cálculo infinitesimal, aquilo a que se convencionou chamar a 'generalidade da álgebra':

> "Em geral, estas séries apresentam-se por elas mesmas, e é fácil formá-las por diversos meios; mas o ponto essencial é distinguir os limites entre os quais devemos tomar o valor da variável. Por exemplo, a equação dada por Euler[101]
>
> $$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x \ldots \&c.$$
>
> só tem lugar quando o valor de x está compreendido entre 0 e π ou entre 0 e $-\pi$. Para todos os outros valores de x, o segundo membro tem um valor determinado bem diferente de $\frac{1}{2}x$.
>
> Devemos empregar com muita reserva os procedimentos de cálculo que fornecem estas séries sem dar a conhecer os limites para lá dos quais a equação deixa de subsistir. Com efeito, não sendo estes limites os mesmos para diversas equações, poderíamos obter, pela combinação de diferentes séries, resultados completamente erróneos. É por esta observação que devemos explicar as consequências contraditórias que resultam da combinação de diferentes séries de senos e de co-senos." ([56], 169).

A importância do «ponto essencial» a que Fourier se referia (precisamente porque sabia que estava em contradição com as concepções e a prática corrente da análise algébrica setecentista) pode ser avaliada pelas seguintes palavras de Fraser:

> "Histórias da matemática atribuíram a ênfase colocada na convergência por Cauchy, Gauss e Abel ao movimento oitocentista para instilar o rigor na análise. Contudo, a mudança significativa na teoria das séries infinitas não resultou tanto de a análise clássica ter trazido o rigor ao assunto por prestar atenção à convergência, mas de uma série arbitrária cujos termos fossem especificados à vontade se ter tornado agora, sujeita à convergência sobre um determinado domínio, implicitamente um objecto de estudo matemático." ([60], 323-4).

Em 1807, Fourier não ofereceu uma prova geral da convergência das suas séries, tendo considerado esta questão apenas em casos particulares. Durante a década de 1820, vários foram os estudos dedicados a este problema. Os autores destes estudos foram Camille Deflers, Poisson, Cauchy, E. H. Dirksen (1792-1850) e Dirichlet, para além do próprio Fourier em [58][102]. A abordagem de Dirichlet no artigo "Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données", publicado em 1829 no quarto volume do recente *Journal für die reine und angewandte Mathematik*

[101] Em [47], 584.
[102] Para referências e um resumo deste assunto ver [68], 777-81, 1131-2.

(conhecido como 'Jornal de Crelle'), distinguiu-se das anteriores[103].

Para Dirichlet, o problema da convergência das séries de Fourier não consistia em provar a sua convergência dada uma função arbitrária (o caminho seguido pelas abordagens anteriores), mas em encontrar condições suficientes não apenas para que a série de Fourier de uma função convergisse mas que também assegurassem que a sua soma igualasse de facto a função[104]. Dirichlet provou que isso acontecia, entre $-\pi$ e π, para as funções que neste intervalo tomassem apenas valores finitos, possuíssem um número finito de descontinuidades (de primeira espécie), bem como um número finito de máximos e de mínimos. Mais precisamente, Dirichlet provou que a série de Fourier de uma função $f(x)$ que obedecesse a estas condições convergia (entre $-\pi$ e π) para $\frac{f(x-\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2}$, onde ε designava «uma quantidade infinitamente pequena» ([29], 167-8). Portanto, Dirichlet demonstrou que a série de Fourier de uma função que obedecesse às condições atrás enunciadas convergia para ela nos seus pontos de continuidade, enquanto nos pontos de descontinuidade convergia para a média aritmética dos limites da função à esquerda e à direita. O problema da representação de uma função por uma série trigonométrica estava formulado correctamente pela primeira vez. Posteriormente, poder-se-ia tentar estender a solução de Dirichlet a uma classe mais vasta de funções.

Registamos aqui uma opinião de Grattan-Guiness:

> "O entendimento de Dirichlet acerca da teoria de funções era extraordinariamente agudo para o seu tempo, e foi dele mais do que de qualquer outro que aprendemos como as manusear." ([65], 104).

---

[103] No título do artigo, Dirichlet escreveu 'séries trigonométricas', embora na realidade se referisse mais concretamente às 'séries de Fourier'. Um série diz-se *trigonométrica* quando é da forma $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, onde os coeficientes a_n e b_n são constantes. $\frac{1}{2}a_0$ é escrito em vez de a_0 por razões técnicas. Se, dada uma função $f(x)$ definida no intervalo $-\pi\le x\le\pi$, os coeficientes a_n e b_n forem calculados pelas fórmulas $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$ e $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$, chamadas as *fórmulas de Euler-Fourier*, então a série é chamada a *série de Fourier* gerada por $f(x)$ e os coeficientes a_n e b_n são chamados os *coeficientes de Fourier* da função $f(x)$. Fourier obteve as fórmulas para os coeficientes em 1807 pelo método que usamos actualmente ([56], 217, 224, 264), mas Euler já as tinha obtido anteriormente (ver n. 81, pág. 59). A distinção entre as séries de Fourier e outras séries trigonométricas foi introduzida em 1854 por Bernard Riemann (1826-1866) na sua *Habilitationsschrift* ([98]). A esperança de estender a uma classe mais vasta de funções a possibilidade de representação por uma série trigonométrica motivou Riemann, neste trabalho, a refinar a noção de integral, criando o integral que é conhecido pelo seu nome ([25], 12-19).

[104] Como notou Bottazzini ([14], 210, n. 13), a atitude de Dirichlet relativamente às séries de Fourier foi semelhante à de Cauchy relativamente às séries de Taylor. Conforme referimos no final do capítulo 2, Cauchy tinha apontado a imperfeição teórica da construção lagrangiana ao mostrar que a série de Taylor de uma função, mesmo quando converge, não converge necessariamente para essa função.

Uma amostra desse entendimento, bem como um sinal de como a teoria de funções tinha evoluído, é-nos dado pelo exemplo que forneceu no final do seu artigo. Dirichlet mostrou-se convicto de que a representação de uma função por uma série de Fourier seria possível sob certas condições, mesmo que o número de descontinuidades e o número de máximos e de mínimos fossem infinitos. No caso de um número infinito de descontinuidades, afirmou que uma tal representação seria possível se entre duas quantidades quaisquer a e b $(a<b)$, compreendidas entre $-\pi$ e π, existissem sempre duas quantidades r e s $(r<s)$ de modo que a função permanecesse contínua no intervalo de r a s[105] ([29], 169). Dirichlet apresentou então o exemplo de uma função que não satisfazia esta condição:

> "Teríamos um exemplo duma função que não preenche esta condição se supuséssemos $\varphi(x)$ igual a uma constante determinada c quando a variável x tem um valor racional, e igual a uma outra constante d, quando esta variável é irracional." ([29], 169).

Tinha-se aqui pela primeira vez a função característica dos racionais, uma função descontínua em todos os pontos.

Em 1837, num artigo que pretendia estender os resultados obtidos em 1829, Dirichlet procurou vincar de uma forma bastante acentuada até que ponto o seu entendimento da continuidade se opunha à concepção euleriana:

> "Entendam-se por a e b dois valores fixos e por x uma grandeza variável que assuma progressivamente todos os valores situados entre a e b. Ora, se a cada x corresponder um único y finito de tal modo que, enquanto x percorre continuamente o intervalo de a a b, $y=f(x)$ também varia gradualmente, então y chama-se uma função contínua [stetige oder continuirliche] de x para este intervalo. Não é aqui de modo nenhum necessário que y dependa de x segundo a mesma lei em todo o intervalo, nem sequer é preciso pensar-se numa dependência exprimível através de operações matemáticas. Represen--tada geometricamente, quer dizer, quando x e y são pensadas como abcissa e ordenada, uma função contínua aparece como uma curva conexa da qual apenas um ponto corresponde a cada abcissa compreendida entre a e b. Esta definição não prescreve nenhuma lei comum para as partes individuais da curva; esta pode pensar-se como composta de partes dos géneros mais diversos, ou desenhada inteiramente sem lei. Daqui decorre que uma tal função só deve ser encarada como completamente definida para um intervalo quando, ou for graficamente dada para toda a extensão do mesmo, ou satisfizer leis matemáticas válidas para as partes individuais do mesmo. Enquanto se tiver apenas definido uma função para uma parte do intervalo, o género de prolongamento para o resto do intervalo permanece deixado inteiramente ao arbítrio." ([30], 135-6).

---

[105] Usando uma terminologia moderna: o conjunto dos pontos de descontinuidade não era denso em nenhuma parte. Dirichlet não justificou esta afirmação. Uma prova foi apresentada em 1864, por Rudolf Lipschitz (1832-1903), em [95]. Lipschitz não impôs nenhuma restrição ao número de máximos e de mínimos possuídos pela função ([71], 14-5).

Embora não apresentasse aqui nenhuma definição geral de função, foi ao espírito desta passagem que Dirichlet ficou a dever, até hoje, a associação do seu nome ao conceito geral de função de uma só variável[106].

[106] O responsável por essa associação foi H. Hankel que, em 1870, apresentando a seguinte definição:

> "y é chamada uma função de x quando a cada valor da quantidade variável x num certo intervalo corresponde um valor definido de y, não importando se y depende ou não de x de acordo com a mesma lei em todo o intervalo, ou se a dependência pode ou não ser expressa por uma operação matemática." ([69], 67; citado em [14], 197);

comentou tratar-se de uma «definição puramente nominal, que no que se segue associarei ao nome de Dirichlet, pois reverte fundamentalmente para a sua obra sobre as séries de Fourier, a qual demonstrou claramente a indefensabilidade de todos os velhos conceitos» ([69], 67; citado em [14], 198). Seria, no entanto, uma extrapolação abusiva atribuir a Dirichlet uma definição que ele não deu, como o fizeram alguns autores: por exemplo, Boyer ([15], 405), Kline ([76], 950), Zigmund ([110], 591) e Dugac (em [27], I, 349).

Bibliografia

1. **Abel, N. H.** (1881) *Oeuvres complètes*. 2 vols. Christiania (Oslo): L. Sylow e S. Lie.
2. **d'Alembert, J. le R.** (1761-80) *Opuscules mathématiques*. 8 vols. Paris.
3. **d'Alembert, J. le R.** (1761) "Recherches sur les vibrations des cordes sonores." Em [2], **I**, 1-64.
4. **d'Alembert, J. le R.** (1761) "Supplément au Mémoire précédent sur les cordes vibrantes." Em [2], **I**, 65-73.
5. **d'Alembert, J. le R.** (1768) "Nouvelles réflexions sur les vibrations des cordes sonores." Em [2], **IV**, 128-55.
6. **d'Alembert, J. le R.** (1768) "Réflexions sur les suites et sur les racines imaginaires." Em [2], **V**, 171-215.
7. **d'Alembert, J. le R.** (1780) "Sur les fonctions discontinues." Em [2], **VIII**, 302-8.
8. **d'Alembert, J. le R.; Bossut, C.; La Lande, J. J. de; Condorcet, M. de** (1987) *Encyclopédie Méthodique: Mathématiques*. 3 tomos. Paris: Albert Blanchard. [Orig.: (1784-9) *Encyclopédie Méthodique: Mathématiques*. 3 tomos. Paris/Liège: Pancroucke, Plomteux.]
9. **Barbeau, E. J.; Leah, P. J.** (1976) "Euler's 1760 Paper on Divergent Series." *Historia Mathematica* **3**, 141-60.
10. **Bekken, O.** (1992) "Niels Henrik Abel and Uniform Convergence." Apresentado numa sessão do ICME-7, Québec, 1992. Entre outros documentos, contém uma tradução inglesa, que usámos, do original norueguês da carta de 16 de Janeiro de Abel a Holmboe, sob o título "The Berlin Letter". Uma tradução francesa desta carta é dada em [1], **II**, 256-8.
11. **Bernoulli, N.** (1719) "Demonstratio analytica constructiones curvarum, quae alias positione datas ad angulos rectos secant, traditae in actis lips." Em [32], 199-201. Tradução inglesa em [32], 202-3.
12. **Birkhoff, G. (Ed.)** (1973) *A Source Book in Classical Analysis*. New York : Harvard University Press.
13. **Bolzano, B.** (1817) *Rein Analytisher Beweis des Lehrsatzes dass Zwischen je zwey Werthen, die ein Entgegengesetztes Resultat Gewaehren, Wenigstens eine Reele Wurzel der Gleichung Liege*. Praga. [Tradução em língua inglesa: (1980) *Purely Analytic Proof of the Theorem that Between any two Values Which Give Results of Opposite Sign there Lies at Least one Real Root of the Equation*. Em [99], 159-81.]
14. **Bottazzini, U.** (1986) *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag.
15. **Boyer, C.** (1974) *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher. [Orig.: (1968) *A History of Mathematics*. Jonh Wiley & Sons.]
16. **Cajori, F** (1993) *A History of Mathematical Notations*. New York : Dover. [Orig.: (1928--9) --- . 2 vols. Chicago: Open Cort.]
17. **Calinger, R. (Ed.)** (1996) *Vita Mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*. MMA Notes Nº 40.
18. **Cauchy, A. L.** (1882-974) *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*. 2 séries. Paris: Académie des Sciences.
19. **Cauchy, A. L.** (1821) *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. 1re partie: analyse algébrique*. Em [18], (II)**III**.
20. **Cauchy, A. L.** (1822) "Sur le développement des fonctions en séries, et sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles." Em [18], (II)**II**, 276-82.
21. **Cauchy, A. L.** (1823) *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique, sur le calcul infinitésimal*. Em [18], (II)**IV**, 5-261.

22. **Cauchy, A. L.** (1829) *Leçons sur le calcul différentiel*. Em [18], (II)**IV**, 263-609.
23. **Cauchy, A. L.** (1844) "Mémoire sur les fonctions continues." Em [18], (I)**VIII**, 145-60.
24. **Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques** (1994) *Histoire D'Infini. Actes du 9ème Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques. Landerneau, 22-23 mai 1992*. IREM de Brest.
25. **Dauben, J. W.** (1979) *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge: Harvard University Press. [As páginas que indicámos referem-se à reimpressão de 1990. Princeton: Princeton University Press.]
26. **Dhombres, J.** (1986) "Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction." *Archive for History of Exact Sciences* **36**, 91-181.
27. **Dieudonné, J. (Ed.)** (1978) *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*. 2 vols. Paris: Hermann.
28. **Dirichlet, P. Lejeune-** (1889-97) *Gesammelte Werke*. 3 vols. Berlin: L. Kronecker e L. Fuchs.
29. **Dirichlet, P. Lejeune-** (1829) "Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **IV**, 157-69. = [28], **I**, 117-32.
30. **Dirichlet, P. Lejeune-** (1837) "Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen nach Sinus- und Cosinusreihen." Em [28], **I**, 133-60.
31. **Edwards Jr., C. H.** (1979) *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.
32. **Englesman, S.** (1984) *Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation*. Amsterdam: North-Holland.
33. **Euler, L.** (1911-) *Opera Omnia*. 4 séries. Leipzig/Berlin/Zürich/Basel: Societas Scientarum Naturalium Helveticae.
34. **Euler, L.** (1729) "De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi generalis serierum." Em [33], (I)**XIV**, 463-515.
35. **Euler, L.** (c. 1730) "De differentiatione functionum duas pluresve variabilis quantitates involventium." Em [32], 205-12. Tradução inglesa em [32], 214-22.
36. **Euler, L.** (1734-5) "De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis." Em [33], (I)**XXII**, 36-56.
37. **Euler, L.** (1734-5) "Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis." Em [33], (I)**XXII**, 57-75.
38. **Euler, L.** (1734-5) "De summis serierum reciprocarum." Em [33], (I)**XIV**, 73-86.
39. **Euler, L.** (1734-5) "De progressionibus harmonicis observationes." Em [33], (I)**XIV**, 87--100.
40. **Euler, L.** (1743) "De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur." Em [33], (I)**XIV**, 138-55.
41. **Euler, L.** (1743) "Démonstration de la somme de cette suite $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$." Em [33], (I)**XIV**, 177-86.
42. **Euler, L.** (1748) "De vibratio chordarum exercitato." Em [33], (II)**X**, 50-62.
43. **Euler, L.** (1748) *Introductio in analysin infinitorum*. 2 vols. Em [33], (I)**VIII-IX**.
44. **Euler, L.** (1748) "Sur la vibration des cordes." Tradução francesa de [42]. Em [33], (II)**X**, 63-77.
45. **Euler, L.** (1749) "De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires." Em [33], (I)**XVII**, 195-232.
46. **Euler, L.** (1753) "Remarques sur les mémoires précédens de M Bernoulli." Em [33], (II)**X**, 233-54.
47. **Euler, L.** (1754-5) "Subsidium calculi sinuum." Em [33], (I)**XIV**, 542-84.

48. **Euler, L.** (1754-5) "De seriebus divergentibus." Em [33], (I)**XIV**, 585-617. [Extractos do sumário e das doze primeiras secções traduzidos em língua inglesa em [9], 142-9. As páginas que indicámos referem-se a estes extractos.]
49. **Euler, L.** (1755) *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*. Em [33], (I)**X**.
50. **Euler, L.** (1763) "De usu functionum discontinuarum in analysi." Em [33], (I)**XXIII**, 74--91.
51. **Euler, L.** (1765) "Éclaircissemens sur le mouvement des cordes vibrantes." Em [33], (II)**X**, 377-96.
52. **Euler, L.** (1765) "Sur le movement d'une corde, qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie." Em [33], (II)**X**, 426-50.
53. **Euler, L.** (1777) "Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdem anguli progredientibus." Em [33], (I)**XVI-1**, 333-55.
54. **Euler, L.** (1862) "Sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires." *Opera posthuma* **I**, 269-81. Em [33], (I)**XIX**, 417-38.
55. **Euler, L.** (1990) *Introduction to Analysis of the Infinite*. 2 vols. New York: Springer--Verlag. Tradução inglesa de [43].
56. **Fourier, J.** (1807) *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*. Em [66], 33--440.
57. **Fourier, J.** (1888-900) *Oeuvres*. 2 vols. Paris: G. Darboux.
58. **Fourier, J.** (1822) *La théorie analytique de la chaleur*. Em [57], **I**.
59. **Fraser, C.** (1987) "Joseph Louis Lagrange's Algebraic Vision of the Calculus." *Historia Mathematica* **14**, 38-53.
60. **Fraser, C.** (1989) "The Calculus as Algebraic Analysis: Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century." *Archive for History of Exact Sciences* **39**, 317-35.
61. **Friedelmeyer, J.-P.** (1993) *Le Calcul des Dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrization de l'analyse à la fin du dix-huitième siècle*. Thèse de Doctorat. Faculté de Sciences et des Techniques. Université de Nantes.
62. **Fuss, P. H. (Ed.)** (1843) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle*. 2 vols. St. Petersburg.
63. **Grabiner, J. V.** (1981) *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge: MIT Press.
64. **Grabiner, J. V.** (1996) "The Calculus as Algebra, the Calculus as Geometry: Lagrange, Maclaurin and their Legacy." Em [17], 131-43.
65. **Grattan-Guinness, I.** (1970) *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge: MIT Press.
66. **Grattan-Guinness, I.; Ravetz, J. R.** (1972) *Joseph Fourier 1768-1830: a survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut de France in 1807*. Cambridge: MIT Press.
67. **Grattan-Guinness, I. (Ed.)** (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial. [Orig.: (1980) *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*. London: Duckworth.]
68. **Grattan-Guinness, I.** (1990) *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*. 3 vols. Basel: Birkhäuser.
69. **Hankel, H.** (1870) "Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen." Em (1882) *Mathematische Annalen* **20**, 63-112 = (1905) *Ostwalds Klassiker der Exacten Wissentschaften* **153**, 44-102. As páginas que indicámos referem-se à reprodução de 1882.
70. **Hardy, G. H.** (1949) *Divergent Series*. Oxford: Clarendon Press.

71. **Hawkins, T.** (1970) *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Developments*. New York: Chelsea Publishing Company. As páginas que indicámos referem-se à segunda edição, de 1975, reimpressa em 1979.
72. **Jahnke, H.** (1993) "Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840: Some Mathematical and Philosophical Issues." *Historia Mathematica* **20**, 265-84.
73. **Jahnke, H.** (1996) "The Development of Algebraic Analysis from Euler to Klein and its Impact on School Mathematics in the 19th Century." Em [17], 145-51.
74. **Jozeau, M.; Hallez, M.; Bühler, M.** (1992) "Séries et quadratures chez Leibniz." Em [24], 273-97.
75. **Katz, V. J.** (1993) *A History of Mathematics. An Introduction*. New York: HarperCollins.
76. **Kline, M.** (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.
77. **Knopp, K.** (1990) *Theory And Application of Infinite Series*. New York : Dover. [Orig.: (1947) *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*. 4ª ed. alemã (1ª ed.: 1921).]
78. **Lacroix, S. F.** (1797-800) *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. 3 tomos. Paris. [2ª edição: 1810-9. As páginas que indicamos referem-se a esta edição.]
79. **Lagrange, J. L.** (1867-92) *Oeuvres de Lagrange*. 14 vols. Gauthier-Villars: Paris.
80. **Lagrange, J. L.** (1759) "Recherches sur la nature et la propagation du son." Em [79], **I**, 39-148.
81. **Lagrange, J. L.** (1760-1) "Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son." Em [79], **I**, 151-316.
82. **Lagrange, J. L.** (1760-1) "Addition aux premières recherches sur la nature et la propagation du son." Em [79], **I**, 319-32.
83. **Lagrange, J. L.** (1760-1) "Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal." Em [79], **VII**, 597-9.
84. **Lagrange, J. L.** (1768) "Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries." Em [79], **III**, 5-73.
85. **Lagrange, J. L.** (1772) "Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation des quantités variables." Em [79], **III**, 439-70.
86. **Lagrange, J. L.** (1797) *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différential, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduites à l'analyse algébrique des quantités finis*. Em *Journal de L'École Polytechnique* **III**, cahier IX, 1-277. [2ª edição: 1813. Em [79], **IX**. As páginas que indicámos referem-se a esta edição.]
87. **Lagrange, J. L.** (1798) *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. [2ª edição: 1808. Em [79], **VIII**. As páginas que indicámos referem-se a esta edição.]
88. **Lagrange, J. L.** (1799) "Discours sur l'object de la théorie des fonctions analytiques." *Journal de L'École Polytechnique* **II**, cahier VI, 232-5 = [79], **VII**, 325-8.
89. **Lagrange, J. L.** (1801) *Leçons sur le calcul des fonctions*. Em *Journal de L'École Polytechnique*: *Leçons* 1-20: **V**, cahier XII, 1-324; *Leçons* 21-2: **VII**, cahier XIV, supplément, 1-90. [2ª edição: 1806. Em [79], **X**.]
90. **Laplace, P. S.** (1878-1912) *Oeuvres complètes de Laplace*. 14 vols. Paris: Gauthier--Villars.
91. **Laplace, P. S.** (1779) "Mémoire sur les suites." Em [90], **X**, 1-89.
92. **Laplace, P. S.** (1796) *Exposition du système du monde*. 2 vols. [6ª edição: 1835. Em [90], **VI**. As páginas que indicámos referem-se a esta edição.]
93. **Lebesgue, H.** (1906) *Leçons sur les séries trigonométriques*. Paris: Gauthier-Villars.
94. **Leibniz, G. W.** (1713) "Lettre au très illustre Christian Wolf, professeur de mathématiques à Halle, sur la Science de l'Infini." Em [74], 283-4 = [24], 283-4.

95. **Lipschitz, R.** (1864) "De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipe earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum habent infinitum, disquisitio." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **LXIII**, 296-308.
96. **Medvedev, F.** (1991) *Scenes from the History of Real Functions*. Berlin: Birkhäuser. [Orig.: (1975) *Ocherki istorii teorii funktsii deistvitel'nogo peremennogo*. Moskva: Nauka.]
97. **Polya, G.** (1954) *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. New Jersey: Princeton University Press.
98. **Riemann, B.** (1854) "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe." *Habilitationsschrift*, Göttingen. Publicada postumamente em 1867. Em (1892) *Gesammelte mathematische Werke*, 2ª ed., 227-71. [Extractos traduzidos em língua inglesa em "Riemann on Fourier Series and the Riemann Integral." Em [12], 16-23. As páginas que indicámos referem-se a estes extractos.]
99. **Russ, S. B.** (1980) "A Translation of Bolzano's Paper on the Intermediate Value Theorem." *Historia Mathematica* **7**, 156-85.
100. **Schubring, G.** (1994) "Evolution du concept d'infiniment petit aux 18ème et 19ème siècles." Em [24], 317-26.
101. **Smith, D. E.** (1929) *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw Hill.
102. **Speiser, A.** (1945) "Vorwort des Herausgebers." Em [33], (I)**IX**, vii-xxxii.
103. **Speiser, A.** (1952) "Vorwort." Em [33], (I)**XXV**, vii-xxvi.
104. **Stäckel, P.** (1907-8) "Eine Vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der Reziproken Quadrate der Natürlichen Zahlen." Em [33], (I)**XIV**, 156-76 = *Bibliotheca Mathematica* (3)**8**, 37-60.
105. **Struik, D. J. (Ed.)** (1986) *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Princeton: Princeton University Press.
106. **Truesdell, C.** (1956) "Editor's Introduction." Em [33], (II)**XIII**, ix-cv.
107. **Truesdell, C.** (1960) "The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638--1788." Em [33], (II)**XI-2**.
108. **Tucciarone, J.** (1973) "The Development of the Theory of Summable Divergent Series from 1880 to 1925." *Archive for History of Exact Sciences* **10**, 1-40.
109. **Youschkevitch, A. P.** (1976) "The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century." *Archive for History of Exact Sciences* **16**, 37-85.
110. **Zigmund, A.** (1975) "The Role of Fourier Series in the Development of Analysis." *Historia Mathematica* **2**, 591-4.