

Joaquim de Fontes Marques

**Inversão Numérica da Transformada de Laplace à custa
dos Polinómios de Laguerre**



Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Dezembro / 1998

Joaquim de Fontes Marques

Inversão Numérica da Transformada de Laplace à custa dos Polinómios de Laguerre



Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Dezembro / 1998

Dissertação realizada sob a orientação do
Professor Doutor Manuel Rogério de Jesus da Silva
Professor Catedrático da Universidade do Porto

Agradecimentos

Desejo agradecer a todos aqueles que de uma forma ou de outra me apoiaram e incentivaram na realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Manuel Rogério agradeço o facto de me ter dado o tema da tese, inversão numérica da transformada de Laplace, a forma dedicada como me orientou, a disponibilidade demonstrada e os padrões de qualidade e exigência que sempre me transmitiu.

À Universidade do Porto pelo excelente acolhimento e bom ambiente de trabalho proporcionado.

Agradeço também a todos os meus colegas e amigos pelo apoio e excelente camaradagem.

Aos meus pais e irmão, pelo seu apoio, dedicação e bom ambiente familiar sempre proporcionado.

Índice

Agradecimentos	i
Índice	ii
Capítulo 1 - Introdução: enquadramento, objectivo e organização do trabalho	1
1.1 - Enquadramento.....	1
1.2 - Objectivo	1
1.3 - Organização.....	1
Capítulo 2 - Transformada de Laplace	3
2.1 - Definição, exemplos e propriedades básicas.....	3
2.2 - Condições suficientes de existência	5
2.3 - Propriedades operatórias	6
2.4 - Transformação inversa	8
2.4.1 - Inversão por integração	8
2.4.2 - Inversão por decomposição em fracções simples.....	9
2.4.3 - Inversão por derivação.....	10
2.4.4 - Inversão por convolução.....	10
Capítulo 3 - Polinómios e funções de Laguerre	11
3.1 - Polinómios de Laguerre: definição e propriedades	11
3.2 - Funções de Laguerre: definição e propriedades.....	12
Capítulo 4 - Inversão numérica da transformada de Laplace recorrendo aos polinómios de Laguerre: método de Brochet.....	13
4.1 - Função geradora do desenvolvimento da função original em série de funções de Laguerre: definição e propriedades	13
4.2 - Aproximação numérica dos coeficientes de Taylor da função geradora.....	17
4.3 - Sobre a escolha do parâmetro α e a minimização do erro	22

Capítulo 5 - Implementação do algoritmo de Brochet e exemplos de aplicações	29
5.1 - Inversão numérica de $\bar{u}(p) = \frac{1}{p+1}$	31
5.2 - Inversão numérica de $\bar{u}(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$	34
5.3 - Inversão numérica de $\bar{u}(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$	37
Capítulo 6 - Conclusões e trabalho futuro	40
6.1 - Conclusões.....	40
6.2 - Perspectivas de trabalho futuro	40
Anexos	
Listagem do programa “Inversão Numérica da Transformada de Laplace”	42
Listagem do ficheiro “ESTRUT.H”	52
Referências	54

Capítulo 1

Introdução: Enquadramento, Objectivo e Organização do Trabalho

1.1 - Enquadramento

Muitos problemas de Matemática, envolvendo funções transcendentais, podem ser transformados em problemas algébricos usando a transformada de Laplace. Para obter a solução procurada é suficiente inverter a transformada de Laplace. Infelizmente, nem sempre é possível calcular a sua inversa por métodos exactos. Além disso, quando os problemas algébricos obtidos têm graus elevados, a função que precisamos de inverter é já uma aproximação. Assim sendo, e se a sua inversa não puder ser calculada facilmente, não faz muito sentido calcular uma inversa exacta de uma solução aproximada. Calcula-se, neste caso, uma solução numérica da transformada inversa procurada.

1.2 - Objectivo

Pretende-se fazer a inversão numérica da transformada de Laplace recorrendo aos polinómios de Laguerre pelo método de Brochet.

1.3 - Organização

O capítulo 2 começa com uma breve introdução à transformada de Laplace. Define-se a transformada de Laplace e apresentam-se algumas das suas propriedades bem como algumas condições que asseguram a existência da sua inversa. São ainda apresentadas as propriedades operatórias da transformada de Laplace. Por fim, define-se e caracteriza-se a transformada inversa de Laplace.

No capítulo 3 são definidas algumas das propriedades dos polinómios e das funções de Laguerre, posteriormente utilizadas na inversão numérica da transformada de Laplace pelo método de Brochet.

No capítulo 4 descreve-se o método de Brochet para a inversão numérica da transformada de Laplace. Este baseia-se na função geradora do desenvolvimento da função original em série de funções de Laguerre. Descreve-se também um método de cálculo dos coeficientes de Taylor da função geradora à custa do Operador de Fourier Discreto. Faz-se ainda uma análise sobre o valor do parâmetro α que permite minimizar o erro da aproximação para algumas funções a inverter.

No capítulo 5 apresentam-se os resultados obtidos na inversão numérica da transformada de Laplace pelo método de Brochet descrito no capítulo 4. Faz-se também uma comparação entre a solução numérica encontrada e a solução exacta do problema.

No capítulo 6 são apresentadas algumas conclusões sobre o estudo efectuado e algumas perspectivas de trabalho a desenvolver no seguimento desta dissertação.

Finalmente, em anexo, é apresentada a listagem do programa utilizado na inversão numérica da transformada de Laplace pelo método de Brochet.

Capítulo 2

Transformada de Laplace

2.1 - Definição, Exemplos e Propriedades Básicas

Definição 2.1.1

Seja Ω o espaço das funções u de variável real t com valores complexos satisfazendo as seguintes condições:

- i) $u(t)$ está definida para todo o t real e é identicamente nula para $t < 0$;
- ii) $u(t)$ é seccionalmente contínua em \mathbb{R}^+ ;
- iii) o limite $u(0^+)$ pode não existir mas $|u(t)|$ é integrável numa vizinhança de 0.

Definição 2.1.2

Seja $u(t)$ uma função pertencente a Ω . A sua **transformada de Laplace** é definida por

$$\mathcal{L}\{u(t)\} \equiv \bar{u}(p) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-pt} dt, \quad (1)$$

para todo o complexo p para o qual o integral convirja.

O conjunto de todos os números complexos p para os quais o integral (1) converge chama-se **domínio de convergência simples** e representa-se por $C(u)$.

O conjunto de todos os números complexos p para os quais o integral $\int_0^{+\infty} |u(t)e^{-pt}| dt$ converge chama-se **domínio de convergência absoluta** e representa-se por $A(u)$.

Teorema 2.1.1 [Henrici, p. 202]

O domínio de convergência simples do integral de Laplace, se for não vazio, é todo o plano complexo ou um semiplano podendo conter alguns ou todos os pontos da recta que o delimita,

isto é, existe um $\alpha_u \in \mathbb{R}$, conhecido por abscissa de convergência simples do integral de Laplace, tal que:

$$\forall p \in \mathbb{C} \operatorname{Re}(p) > \alpha_u \Rightarrow p \in C(u)$$

$$\forall p \in \mathbb{C} \operatorname{Re}(p) < \alpha_u \Rightarrow p \notin C(u)$$

e não se pode dizer nada quanto aos pontos definidos por $\operatorname{Re}(p) = \alpha_u$.

No domínio $C(u)$, a transformada de Laplace \bar{u} de u verifica as duas seguintes propriedades fundamentais:

Propriedade 2.1.1 [Henrici, p. 203]

Se $u \in \Omega$ e $\alpha_u < \infty$, então $\bar{u}(p)$ é analítica em $\operatorname{Re}(p) > \alpha_u$ e

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \bar{u}}{dp^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Propriedade 2.1.2 [Henrici, p. 205]

Se $u \in \Omega$ e $p_0 \in C(u)$, então, qualquer que seja β tal que $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, $\bar{u}(p) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$

no cone $\{p: |\arg(p - p_0)| \leq \beta\}$.

Exemplos

$$1) \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = p^{-1}$$

$$2) \mathcal{L}\{t\} = -\frac{d}{dp}(p^{-1}) = p^{-2}$$

$$3) \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$4) \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \frac{1}{p - a}$$

$$5) \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-pt} dt = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \omega \text{ constante}$$

$$6) \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{-pt} dt = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \omega \text{ constante}$$

Os resultados dos exemplos 1), 2) e 3) são válidos para $\text{Re}(p) > 0$, o de 4) para $\text{Re}(p) > a$ e os de 5) e 6) para $\text{Re}(p) > \text{Re}(\omega)$ e se ω é real então 5) e 6) são válidos para $\text{Re}(p) > 0$.

2.2 - Condições Suficientes de Existência

Definição 2.2.1

Diz-se que uma função $u(t)$ tem uma **descontinuidade finita** em $t = t_1$ se $u(t_1^-) \neq u(t_1^+)$

Definição 2.2.2

Diz-se que uma função $u(t)$ é **seccionalmente contínua** para $t \geq 0$ se tiver, no máximo, um número finito de descontinuidades finitas no intervalo $0 \leq t \leq M$, $M > 0$.

Definição 2.2.3

Diz-se que uma função $u(t)$ é de **tipo exponencial de ordem** $e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, quando $t \rightarrow \infty$ se existirem constantes M e N reais e positivas tais que para cada $t > N$, $|u(t)| < M e^{\alpha t}$.

Propriedade 2.2.1 [Debnath, p. 87]

Se $u(t)$ é uma função de tipo exponencial de ordem $e^{\alpha t}$ para algum $\alpha > 0$ e contínua ou seccionalmente contínua para $t \geq 0$, então a sua transformada de Laplace existe para $\text{Re}(p) > \alpha$.

Propriedade 2.2.2 [Debnath, p. 88]

$\bar{u}(p) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$.

2.3 - Propriedades Operatórias

Propriedade 2.3.1 (Linearidade)

A transformada de Laplace é um operador linear.

Se $\mathcal{L}\{u(t)\} = \bar{u}(p)$ para $\text{Re}(p) > a$ e $\mathcal{L}\{v(t)\} = \bar{v}(p)$ para $\text{Re}(p) > b$, então

$$\mathcal{L}\{\lambda u(t) + \mu v(t)\} = \lambda \bar{u}(p) + \mu \bar{v}(p),$$

para quaisquer constantes λ e μ , desde que $\text{Re}(p) > \max(a, b)$.

Propriedade 2.3.2 (Mudança de escala)

$$\mathcal{L}\{u(kt)\} = k^{-1} \bar{u}\left(\frac{p}{k}\right), \quad k > 0.$$

Propriedade 2.3.3 (Teorema da Translação)

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} u(t)\} = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-(p-\alpha)t} dt = \bar{u}(p-\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Propriedade 2.3.4 (Teorema da Derivada)

Se $u(t)$ é contínua para $t > 0$ e de tipo exponencial de ordem $e^{\alpha t}$ e $u'(t)$ é seccionalmente contínua para $t \geq 0$, então

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = p\bar{u}(p) - u(0^+), \quad \text{Re}(p) > \alpha.$$

Propriedade 2.3.5

Se $u(t)$ satisfaz as condições do Teorema anterior excepto para uma descontinuidade finita em $t = t_1$, então

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = p\bar{u}(p) - u(0^+) - e^{-t_1 p} [u(t_1^+) - u(t_1^-)], \quad \text{Re}(p) > \alpha.$$

Esta Propriedade pode ser extendida a um número finito de descontinuidades finitas.

Propriedade 2.3.6

Se $u(t)$ é seccionalmente contínua para $t \geq 0$ com, no máximo, um número finito de descontinuidades finitas e de tipo exponencial de ordem $e^{\alpha t}$ e se $u'(t)$ é seccionalmente contínua, então

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = p\bar{u}(p) - u(0^+) - \sum_{i=1}^n e^{-t_i p} [u(t_i^+) - u(t_i^-)], \operatorname{Re}(p) > \alpha,$$

onde t_1, t_2, \dots, t_n são as abscissas positivas dos pontos de descontinuidade.

Propriedade 2.3.7

Se $u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)$ são de tipo exponencial e se $u^{(n-1)}(t)$ é contínua e $u^{(n)}(t)$ é seccionalmente contínua para $t \geq 0$, então

$$\mathcal{L}\{u^{(n)}(t)\} = p^n \bar{u}(p) - p^{n-1} u(0^+) - p^{n-2} u'(0^+) - \dots - p u^{(n-2)}(0^+) - u^{(n-1)}(0^+).$$

Propriedade 2.3.8

Se $v(t) = \int_0^t u(s) ds$, então

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = p^{-1} \bar{u}(p)$$

para $\operatorname{Re}(p) > \max(\alpha, 0)$.

Propriedade 2.3.9

Se $u(t)$ é seccionalmente contínua e de tipo exponencial de ordem $e^{\alpha t}$ e se $u(t)/t$ tiver limite quando $t \rightarrow 0^+$, então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{u(t)}{t}\right\} = \int_p^{+\infty} \bar{u}(x) dx.$$

A propriedade seguinte decorre imediatamente da anterior quando $p \rightarrow 0$:

Propriedade 2.3.10

$$\int_0^{+\infty} \frac{u(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \bar{u}(p) dp.$$

2.4 - Transformação Inversa

Se o valor de $u(t)$ for alterado num único ponto t_1 a sua transformada $\bar{u}(p)$ permanece inalterada. Consequentemente, não devemos esperar que $u(t)$ esteja definida univocamente quando $\bar{u}(p)$ é dado a não ser que imponhamos a $u(t)$ alguma outra condição como, por exemplo, a continuidade.

Relação de equivalência

Diremos que duas funções u_1 e u_2 de Ω são equivalentes, e escrevemos $u_1 \sim u_2$, se u_1 e u_2 tiverem valores idênticos em cada $t > 0$ excepto, quando muito, num conjunto de pontos de medida nula.

Com esta relação de equivalência, o conjunto Ω fica dividido em classes de equivalência, mas continuaremos a designar por Ω o conjunto Ω/\sim daquelas classes.

Propriedade 2.4.1 (Teorema da unicidade)

Se $\bar{u}_1(p) = \bar{u}_2(p)$ para $\text{Re}(p) > \alpha$, então $u_1(t) = u_2(t)$, $0 \leq t < +\infty$.

Reciprocamente, se $u_1(t) \neq u_2(t)$ (num conjunto de medida positiva em $0 \leq t < +\infty$), então $\bar{u}_1(p) \neq \bar{u}_2(p)$.

2.4.1 - Inversão por Integração

Se $u(t)$ é uma função localmente integrável em $[0, +\infty[$ tal que:

- (1) $u(t)$ é de variação limitada numa vizinhança do ponto $t_0 \geq 0$
 - (2) o integral de Laplace de $u(t)$ converge absolutamente em $\text{Re}(p) = \alpha$,
- então

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iM}^{\alpha+iM} \bar{u}(p) e^{pt_0} dp = \begin{cases} 0 & t_0 < 0 \\ u(0^+) & t_0 = 0 \\ \frac{u(t_0^+) + u(t_0^-)}{2} & t_0 > 0 \end{cases}$$

Em particular, se $u(t)$ é diferenciável em $]0, +\infty[$ e satisfaz as condições (1) e (2), então

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iM}^{\alpha+iM} \bar{u}(p) e^{pt} dp = u(t), \quad 0 < t < +\infty.$$

2.4.2 - Inversão por Decomposição em Fracções Simples

Seja $\bar{u}(p) = \frac{\bar{v}(p)}{\bar{w}(p)}$, onde $\bar{v}(p)$ e $\bar{w}(p)$ são polinómios sem zeros comuns e o grau de $\bar{w}(p)$ é maior do que o grau de $\bar{v}(p)$.

1º caso: $\bar{w}(p)$ só tem zeros simples em a_1, \dots, a_n

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{u}(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{v}(p)}{\bar{w}(p)}\right\} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{v}(a_i)}{\bar{w}'(a_i)} e^{a_i t}$$

2º caso: $\bar{w}(p)$ tem zeros de ordens $k_1 + 1, \dots, k_n + 1$ em a_1, \dots, a_n

Seja $\Phi_i(p)$ tal que

$$\bar{u}(p) = \frac{\Phi_i(p)}{(p - a_i)^{k_i + 1}}$$

então

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{u}(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\bar{v}(p)}{\bar{w}(p)}\right\} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i!} \left\{ \frac{\partial^{k_i}}{\partial p^{k_i}} \Phi_i(p) e^{pt} \right\}_{p=a_i}$$

2.4.3 - Inversão por Derivação (Fórmula de Post-Widder)

Seja u uma função localmente integrável, se

$$\bar{u}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(t) dt$$

converge para algum $p > 0$, então

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \bar{u}^{(n)} \left(\frac{n}{t} \right) \left(\frac{n}{t} \right)^{n+1}.$$

2.4.4 - Inversão por Convolução

Definição 2.4.4.1

Sejam $u(t)$ e $v(t)$ duas funções localmente integráveis em $[0, +\infty[$ e tais que $\bar{u}(p)$ e $\bar{v}(p)$ convergem absolutamente nalgum semi-plano $\text{Re}(p) > \alpha$.

A convolução de u e v ou produto convolutivo de u por v , define-se por

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(x)v(t-x)dx.$$

É uma função localmente integrável em $[0, +\infty[$ e contínua se u ou v o for.

Teorema 2.4.4.1

Seja $u(t)$ e $v(t)$ duas funções localmente integráveis em $[0, +\infty[$ e tais que $\bar{u}(p)$ e $\bar{v}(p)$ convergem absolutamente nalgum semi-plano $\text{Re}(p) > \alpha$, então

$$(u * v)(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{u}(p) \bar{v}(p) \}.$$

Capítulo 3

Polinómios e Funções de Laguerre

3.1 - Polinómios de Laguerre: Definição e Propriedades

Definição 3.1.1

Chama-se **polinómio de Laguerre de grau m** ao polinómio L_m definido por

$$L_m(t) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \frac{t^r}{r!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Propriedade 3.1.1 (Função geradora)

$$\frac{e^{-tw}}{1-w} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(t) w^m.$$

Propriedade 3.1.2 (Fórmula de Rodrigues)

$$L_m(t) = \frac{e^t}{m!} \frac{d^m}{dt^m} (t^m e^{-t}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Propriedade 3.1.3 (Ortonormalidade)

Os polinómios de Laguerre são ortonormais em $[0, +\infty[$ para a função peso e^{-t} :

$$\int_0^{+\infty} L_m(t) L_n(t) e^{-t} dt = \delta_{m,n}.$$

Propriedade 3.1.4 (Fórmulas de recorrência)

$$\begin{cases} (m+1)L_{m+1}(t) = (2m+1-t)L_m(t) - mL_{m-1}(t); m \geq 1 \\ L_0 = 1 \\ L_1 = 1-t \end{cases}$$

$$t \frac{d}{dt} (L_m(t)) = mL_m(t) - mL_{m-1}(t); \quad m \geq 1$$

$$\frac{d}{dt}(L_m(t)) = \frac{d}{dt}(L_{m-1}(t)) - L_{m-1}(t); m \geq 1$$

Propriedade 3.1.5 (Equação diferencial)

Os polinômios de Laguerre $y = L_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ verificam a equação diferencial

$$ty'' + (1-t)y' + my = 0.$$

Propriedade 3.1.6 (Transformada de Laplace)

$$\mathcal{L}\{L_m(t)\} = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \mathcal{L}\left\{\frac{t^r}{r!}\right\} = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \frac{1}{p^{r+1}} = \frac{(p-1)^m}{p^{m+1}}.$$

3.2 - Funções de Laguerre: Definição e Propriedades

Definição 3.2.1

Chama-se **função de Laguerre de ordem m** a função $\mathbf{l}_m(t)$ assim definida:

$$\mathbf{l}_m(t) = \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t), \forall \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Propriedade 3.2.1

As funções de Laguerre formam um sistema ortonormal total em $L^2]0, +\infty[$.

Propriedade 3.2.2

$$\mathcal{L}\{\mathbf{l}_m(t)\} = \sqrt{2\alpha} \frac{(p-\alpha)^m}{(p+\alpha)^{m+1}} \quad \forall p: \operatorname{Re}(p) > -\alpha,$$

consequência imediata das Propriedades 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3.

Capítulo 4

Inversão Numérica da Transformada de Laplace Recorrendo aos Polinômios de Laguerre: Método de Brochet

4.1 - Função Geradora do Desenvolvimento da Função Original em Série de Funções de Laguerre: Definição e Propriedades

Para que uma dada função \bar{u} da variável complexa p seja a transformada de Laplace de uma função $u \in \Omega$, $\bar{u}(p)$ deverá satisfazer as seguintes condições:

- i) Existe um β real tal que $\bar{u}(p)$ é analítica no semi-plano $\text{Re}(p) > \beta$.
- ii) Neste semi-plano, $\bar{u}(p) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$.

Supomos, doravante, que estas duas condições estão sempre satisfeitas e que β é o menor real, podendo eventualmente ser $\beta = -\infty$, tal que $\bar{u}(p)$ é analítica em $\text{Re}(p) > \beta$.

Facilmente se reconhece que a aplicação

$$p \mapsto z = \frac{p - \alpha}{p + \alpha}, \quad \alpha > 0$$

transforma bijectivamente o semi-plano $\text{Re}(p) > 0$ ($\text{Re}(p) < 0$) no interior (exterior) do disco $|z| < 1$ e o eixo imaginário $\text{Re}(p) = 0$ na circunferência $|z| = 1$, que a função

$$g(z) = (p + \alpha)\bar{u}(p) = \frac{2\alpha}{1-z} \bar{u}\left(\alpha \frac{1+z}{1-z}\right) \quad (1)$$

é analítica pelo menos em $|z| < 1$, então

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \quad |z| < 1 \quad (2)$$

e que

$$\bar{u}(p) = \frac{g(z)}{p + \alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(p - \alpha)^m}{(p + \alpha)^{m+1}}$$

(a convergência é uniforme em cada compacto de $\text{Re}(p) > 0$) é a transformada de Laplace de

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t) \quad (3)$$

Destas considerações ressalta a importância da função $g(z)$ definida em (1), que passaremos a designar por **função geradora do desenvolvimento da função original $u(t)$ em série de funções de Laguerre**.

No caso em que $\beta < 0$, a função geradora e as que lhe estão associadas têm as seguintes propriedades (Brochet [1]):

Propriedade 4.1.1

Se a função $(p + \alpha)\bar{u}(p)$ for analítica em $p = \infty$, então $g(z)$ é analítica num disco com centro na origem e raio $R > 1$.

Propriedade 4.1.2

A soma parcial

$$\bar{u}_N(p) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \frac{(p - \alpha)^m}{(p + \alpha)^{m+1}}, \text{Re}(p) > -\alpha,$$

é tal que

$$\bar{u}(p + \alpha) - \bar{u}_N(p + \alpha) = O(p^N), \quad p \rightarrow 0,$$

e converge uniformemente para $\bar{u}(p)$ em cada semi-plano fechado $\text{Re}(p) \geq \lambda > 0$.

Propriedade 4.1.3

Se a função $(p + \alpha)\bar{u}(p)$ for analítica em $p = \infty$, então $\bar{u}(p)$ é a transformada de Laplace da função $u(t) \in L_2(0, \infty)$, definida em (3), e a soma parcial

$$u_N(t) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t) \quad (4)$$

é tal que

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_{L_2(0,\infty)} &\rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty, \\ \|u - u_N\|_{L_2(0,\infty)}^2 &= \frac{1}{2\alpha} \sum_{m=N}^{\infty} |a_m|^2, \end{aligned} \quad (5)$$

e converge uniformemente para $u(t)$ em cada compacto $[0, T]$ de \mathbb{R}^+ .

A analiticidade da função $(p + \alpha)\bar{u}(p)$ em $p = \infty$ é uma condição suficiente, mas não necessária, para a existência do original $u(t)$.

Propriedade 4.1.4

Sendo $(p + \alpha)\bar{u}(p)$ singular em $p = \infty$ e $\bar{u}(p)$ a transformada de Laplace de uma função $u(t) \in L_2(0, \infty)$, então $u(t)$ é representável pela série (3), a soma parcial (4) é o elemento do subespaço gerado pelas N primeiras funções de Laguerre que melhor aproxima $u(t)$ em média quadrática, satisfaz (5) e converge para $u(t)$ em média quadrática quando $N \rightarrow \infty$.

No caso em que $\beta \geq 0$, escolhamos um $\gamma > \beta$ e, para função geradora, em vez de (1), tomamos

$$g(z) = (p + \alpha)\bar{u}(p + \gamma) = \frac{2\alpha}{1-z} \bar{u}\left(\gamma + \alpha \frac{1+z}{1-z}\right), \quad (6)$$

analítica pelo menos em $|z| < 1$, então

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \quad |z| < 1,$$

e

$$\bar{u}(p + \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(p - \alpha)^m}{(p + \alpha)^{m+1}},$$

portanto

$$\bar{u}(p) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(p - \gamma - \alpha)^m}{(p - \gamma + \alpha)^{m+1}}$$

(a convergência é uniforme em cada compacto de $\text{Re}(p) > \gamma$) é a transformada de Laplace de

$$e^{-\gamma t} u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t) \quad (7)$$

Propriedade 4.1.5

Se $(p + \alpha)\bar{u}(p)$ for analítica em $p = \infty$, $(p + \alpha)\bar{u}(p + \gamma)$ também o é e $g(z)$ é analítica num disco com centro na origem e raio $R > 1$.

Propriedade 4.1.6

A soma parcial

$$\bar{u}_N(p) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \frac{(p - \gamma - \alpha)^m}{(p - \gamma + \alpha)^{m+1}}$$

é tal que

$$\bar{u}(p + \gamma + \alpha) - \bar{u}_N(p + \gamma + \alpha) = O(p^N), \quad p \rightarrow 0,$$

e converge uniformemente para $\bar{u}(p)$ em cada semi-plano fechado $\text{Re}(p) \geq \lambda > \gamma$.

Propriedade 4.1.7

Se $(p + \alpha)\bar{u}(p)$ for analítica em $p = \infty$, então, para cada $\gamma > \beta$, $\bar{u}(p)$ é a transformada de Laplace da função $e^{-\gamma t} u(t)$ em (7) e a soma parcial

$$e^{-\gamma t} u_N(t) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t) \quad (8)$$

é tal que

$$\int_0^{\infty} e^{-2\gamma t} |u(t) - u_N(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty,$$

$$\|e^{-\gamma t} (u(t) - u_N(t))\|_{L_2(0, \infty)}^2 = \frac{1}{2\alpha} \sum_{m=N}^{\infty} |a_m|^2,$$

e converge uniformemente para $e^{-\gamma t} u(t)$ em cada compacto $[0, T]$ de \mathbb{R}^+ .

Propriedade 4.1.8

Sendo $(p + \alpha)\bar{u}(p)$ singular em $p = \infty$ e $\bar{u}(p)$ a transformada de Laplace de uma função $u(t)$ tal que $e^{-\beta t}u(t) \in L_2(0, \infty)$, então, para cada $\gamma > \beta$, $e^{-\gamma t}u(t)$ é representável pela série (7), a soma parcial (8) é o elemento do subespaço gerado pelas N primeiras funções de Laguerre que melhor aproxima $e^{-\gamma t}u(t)$ em média quadrática e

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} |u(t) - u_N(t)|^2 dt = \sum_{m=N}^{+\infty} |a_m|^2.$$

Propriedade 4.1.9

As séries (3) e (7) são uniformemente convergentes em qualquer compacto se e só se $(p + \alpha)\bar{u}(p)$ for analítica em $p = \infty$.

4.2 - Aproximação Numérica dos Coeficientes de Taylor da Função Geradora

Seja $\bar{u}(p)$ uma função periódica de período 1 e da qual são conhecidos os seus valores nos pontos $\tau_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$.

Seja c_k o k -ésimo coeficiente do desenvolvimento de $\bar{u}(p)$ em série de Fourier,

$$c_k = \int_0^1 \bar{u}(\tau) e^{-2\pi i k \tau} d\tau, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e \hat{c}_k a aproximação de c_k dada pela regra dos trapézios com passo $h = \frac{1}{n}$,

$$\hat{c}_k = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} \bar{u}(\tau_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \bar{u}(\tau_j) e^{-2\pi i k \tau_j} + \frac{1}{2} \bar{u}(\tau_n) e^{-2\pi i k \tau_n} \right].$$

Pondo $w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\bar{u}(\tau_j) = \bar{u}_j$, $j = 0, \dots, n$, e tendo em conta que $\bar{u}_0 = \bar{u}_n$, obtém-se

$$\hat{c}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{u}_j w_n^{-kj}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Imediatamente se verifica que as sucessões $\{\hat{c}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ são periódicas de período n .

Definição 4.2.1

Chama-se **Operador de Fourier Discreto** à aplicação linear \mathcal{F}_n do espaço vectorial das sucessões periódicas de período n em si próprio que a uma sucessão $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ faz corresponder a sucessão $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$y_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j w_n^{-kj}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

e representa-se por

$$y = \mathcal{F}_n x.$$

Propriedade 4.2.1

\mathcal{F}_n é uma aplicação bijectiva e a sua inversa é

$$x = \mathcal{F}_n^{-1} y, \quad x_r = \sum_{m=0}^{n-1} y_m w_n^{rm}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

O Operador de Fourier Discreto permite-nos calcular valores aproximados dos coeficientes de Fourier duma função periódica. Se representarmos por $\{\bar{u}\}_n$ a sucessão periódica de período n dos valores tomados pela função $\bar{u}(p)$, de período 1, nos pontos $\tau_k = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ e por \hat{c} a sucessão dos valores aproximados (pela regra dos trapézios) dos coeficientes de Fourier da função $\bar{u}(p)$, então:

$$\hat{c} = \mathcal{F}_n \{\bar{u}\}_n.$$

A partir de agora, se $\beta < 0$ escolhe-se $\gamma = 0$; caso contrário, escolhe-se $\gamma > \beta$.

Quer $\bar{u}(p)$ seja ou não singular no infinito, a função geradora $g(z)$ é sempre analítica no interior do disco unitário,

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \quad |z| < 1,$$

série que converge uniformemente em $|z| \leq r < 1$.

Pondo $\rho = |z| \leq r < 1$ e $z = \rho e^{i\theta}$ e considerando $G(\theta) = g(\rho e^{i\theta})$, ρ fixo, então $G(\theta)$ é uma função periódica de período 2π e

$$G(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m e^{im\theta},$$

série que converge uniformemente relativamente a $\theta \in [0, 2\pi]$.

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{2\pi} e^{-in\theta}$ e integrando termo a termo, vem

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta,$$

donde

$$a_m \rho^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta) e^{-im\theta} d\theta.$$

Propriedade 4.2.2

Sendo $0 \leq \rho \leq r < 1$, a_m é o m -ésimo coeficiente de Fourier da função periódica de período 2π

$$G(\theta) = \frac{2\alpha}{1 - \rho e^{i\theta}} \bar{u} \left(\gamma + \alpha \frac{1 + \rho e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} \right)$$

dividido por ρ^m , $m \geq 0$.

Considerando a sucessão periódica $h = \{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de período n dos valores de $G(\theta)$ nos

pontos $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$,

$$h_k = \frac{2\alpha}{1 - \rho w_n^k} \bar{u} \left(\gamma + \alpha \frac{1 + \rho w_n^k}{1 - \rho w_n^k} \right), k \in \mathbb{Z},$$

então um valor aproximado \hat{a}_m de a_m , $m \geq 0$, é dado por

$$\hat{a}_m = \frac{\hat{c}_m}{\rho^m}$$

onde

$$\hat{c} = \mathcal{F}_n h,$$

isto é,

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\rho^m} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_k w_n^{-mk} \right), \quad m \geq 0.$$

Propriedade 4.2.3

Existe q , $0 < q < 1$, tal que $|\hat{a}_m - a_m| = O(q^n)$, $m \geq 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Suponhamos que, conhecendo os valores h_k , $k = 0, \dots, n$, calculamos os coeficientes \hat{a}_m , $m = 0, \dots, n-1$.

Com estes coeficientes podemos construir o aproximante racional

$$\hat{u}_n(p) = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{a}_m \frac{(p - \gamma - \alpha)^m}{(p - \gamma + \alpha)^{m+1}}$$

da função

$$\bar{u}(p) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(p - \gamma - \alpha)^m}{(p - \gamma + \alpha)^{m+1}}.$$

Propriedade 4.2.4

O aproximante \hat{u}_n interpola \bar{u} nos pontos

$$p_k + \gamma, \quad p_k = \frac{1 + \rho w_n^k}{1 - \rho w_n^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

isto é,

$$\hat{u}_n(p_k + \gamma) = \bar{u}(p_k + \gamma), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

O inconveniente desta aproximação é que os graus do numerador e do denominador crescem simultaneamente e à medida que, procurando melhorar a precisão dos valores calculados \hat{a}_m , aumentamos o número n de valores de $G(\theta)$ utilizados. Além disso, a Propriedade 4.2.3 mostra que n deverá ser muito maior do que m . Isto justifica que separemos o grau da aproximação, N , do número n de valores de $G(\theta)$ utilizados pelo Operador de Fourier Discreto.

Consideremos então a seguinte aproximação

$$\hat{u}_{N,n}(p) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m \frac{(p - \gamma - \alpha)^m}{(p - \gamma + \alpha)^{m+1}}$$

definida para $\text{Re}(p) > 0$ e obtida a partir de

$$\bar{u}_N(p) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \frac{(p - \gamma - \alpha)^m}{(p - \gamma + \alpha)^{m+1}}$$

substituindo os coeficientes a_m pelos valores calculados à custa do Operador de Fourier Discreto.

A diferença entre estes dois aproximantes tem as seguintes propriedades:

Propriedade 4.2.5

A sucessão $\hat{u}_{N,n}(p)$ converge para $\bar{u}_N(p)$ para todo o p de $\text{Re}(p) > 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e existe q , $0 < q < 1$, tal que

$$\left| \hat{u}_{N,n}(p + \gamma) - \bar{u}_N(p + \gamma) \right| = O(q^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Propriedade 4.2.6

Existe q , $0 < q < 1$, tal que

$$\left| \hat{u}_{N,n}^{(i)}(\alpha + \gamma) - \bar{u}^{(i)}(\alpha + \gamma) \right| = O(q^n), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Para cada p de $\text{Re}(p) > 0$, $\hat{u}_{N,n}$ é a transformada de Laplace de

$$\hat{u}_{N,n}(t) = e^{\gamma t} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t),$$

função que fornece um valor aproximado da transformada inversa de $\bar{u}(p)$ no ponto t e tem a seguinte

Propriedade 4.2.7

Existe q , $0 < q < 1$, tal que

$$|u_N(t) - \hat{u}_{N,n}(t)| = O(q^n), \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \rightarrow \infty.$$

4.3 - Sobre a Escolha do Parâmetro α e a Minimização do Erro

Neste parágrafo é nosso propósito minimizar

$$e_N = \left\| e^{-\gamma} (u(t) - u_N(t)) \right\|_{L_2(0,\infty)}^2, \quad N \text{ fixo}$$

(recordemos que, sendo β o menor real tal que $\bar{u}(p)$ é analítica em $\text{Re}(p) > \beta$, então $\gamma = 0$ se $\beta < 0$ e $\gamma > \beta$ se $\beta \geq 0$).

Quer $\bar{u}(p)$ seja ou não singular no infinito,

$$\begin{aligned} e_N &= \left\| e^{-\gamma} u(t) \right\|_{L_2(0,\infty)}^2 - \sum_{m=0}^{N-1} |b_m|^2, \quad b_m = \frac{a_m}{\sqrt{2\alpha}} \\ &= \sum_{m=N}^{\infty} |b_m|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

O erro e_N depende do parâmetro α por intermédio dos coeficientes a_m . Os valores de α que minimizam e_N são tais que

$$\frac{d}{d\alpha} e_N = -2 \sum_{m=0}^{N-1} b_m \cdot \frac{d}{d\alpha} b_m = 0.$$

Ora

$$b_m = \int_0^{+\infty} \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t} L_m(2\alpha t) u(t) dt,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} b_m &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} L_m(2\alpha t) - t\sqrt{2\alpha} L_m(2\alpha t) + \sqrt{2\alpha} \frac{d}{d\alpha} L_m(2\alpha t) \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} - t\sqrt{2\alpha} \right) L_m(2\alpha t) + \sqrt{2\alpha} \cdot \frac{m}{\alpha} [L_m(2\alpha t) - L_{m-1}(2\alpha t)] \right\} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) \left[\frac{2m+1-2\alpha t}{\sqrt{2\alpha}} L_m(2\alpha t) - \frac{m\sqrt{2\alpha}}{\alpha} L_{m-1}(2\alpha t) \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} [(m+1)L_{m+1}(2\alpha t) - mL_{m-1}(2\alpha t)] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha t} u(t) \left[\frac{m+1}{2\alpha} L_{m+1}(2\alpha t) - \frac{m}{2\alpha} L_{m-1}(2\alpha t) \right] dt \\
&= \frac{m+1}{2\alpha} b_{m+1} - \frac{m}{2\alpha} b_{m-1},
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha} e_N &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{N-1} [(m+1)b_m b_{m+1} - m b_{m-1} b_m] \\
&= -\frac{N}{\alpha} b_{N-1} b_N \\
&= -\frac{N}{2\alpha^2} a_{N-1} a_N.
\end{aligned}$$

Os valores de α que minimizam e_N , N fixo, são os zeros de a_{N-1} e de a_N e, tendo em conta

(1), os valores óptimos são os que maximizam $\sum_{m=0}^{N-1} |b_m|^2$, mas vamos desistir desta pesquisa,

pelo excesso de trabalho numérico e de tempo que ele envolveria, em favor da alternativa que passamos a expôr com o seguinte exemplo:

A função

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{p + \beta}, \quad \beta > 0,$$

analítica em $\text{Re}(p) > -\beta$, é a transformada de Laplace da função

$$u(t) = e^{-\beta t}.$$

Os coeficientes do desenvolvimento desta função em série de funções de Laguerre são os mesmos do desenvolvimento em série de Taylor da função geradora

$$g(z) = \frac{2\alpha}{1-z} \bar{u}\left(\alpha \frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{2\alpha}{\beta + \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \cdot z}.$$

Para $\alpha = \beta$ é $g(z) = 1$, cujos coeficientes de Taylor são

$$a_0 = 1, \quad a_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

e, para cada $N > 0$,

$$u_N(t) = a_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot L_0(2\beta t) = e^{-\beta t} = u(t),$$

sendo, portanto, nulo o erro da aproximação de $u(t)$ por $u_N(t)$.

Para $\alpha \neq \beta$ é

$$g(z) = \frac{2\alpha}{\beta + \alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^m z^m, \quad |z| < \left| \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} \right|.$$

Sendo $\alpha > 0$, o raio de convergência desta série, $\frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}$, é maior do que 1 e tende para ∞ quando $\alpha \rightarrow \beta$.

Sendo

$$a_m = \frac{2\alpha}{\beta + \alpha} \cdot \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^m, \quad m = 0, 1, \dots,$$

então

$$\begin{aligned} e_N &= \sum_{m=N}^{\infty} |b_m|^2 \\ &= \frac{1}{2\alpha} \cdot \sum_{m=N}^{\infty} \left(\frac{2\alpha}{\beta + \alpha} \right)^2 \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^{2m} \\ &= \frac{2\alpha}{(\beta + \alpha)^2} \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^{2N} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^{2m} \\ &= \frac{2\alpha}{(\beta + \alpha)^2} \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^{2N} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2\beta} \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^{2N}, \end{aligned}$$

portanto o valor óptimo do parâmetro α é $\alpha = \beta$.

Acabámos de ver que o estudo da expressão do coeficiente a_m pode conduzir ao valor óptimo do parâmetro α . Se aquela expressão for complicada, poderemos estudar o seu comportamento assintótico e obter um valor de α que aproximará o que minimiza o erro e_N , N fixo.

Seja $\bar{u}(p)$ uma função racional com q pólos simples p_1, \dots, p_q , cujo grau do denominador seja superior ao do numerador, de modo que $\bar{u}(p) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$,

$$\bar{u}(p) = \sum_{i=1}^q \frac{a_i}{p - p_i}.$$

Supondo que $\operatorname{Re}(p_q) \geq \operatorname{Re}(p_i)$, $i = 1, \dots, q$ e tomando

$$\gamma = 0 \text{ se } \operatorname{Re}(p_q) < 0, \quad \gamma > \operatorname{Re}(p_q) \text{ se } \operatorname{Re}(p_q) \geq 0,$$

então $\bar{u}(p + \gamma)$ tem q pólos simples, $p'_i = p_i - \gamma$, $i = 1, \dots, q$, com partes reais estritamente negativas, e a função geradora assume a forma

$$g(z) = \frac{2\alpha}{1-z} \bar{u}\left(\gamma + \alpha \frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{i=1}^q \frac{\gamma_i}{1 - \frac{z}{z_i}},$$

onde

$$\gamma_i = 2\alpha \cdot \frac{a_i}{\alpha - p'_i}, \quad z_i = \frac{p'_i - \alpha}{p'_i + \alpha}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Sendo $\operatorname{Re}(p'_i) < 0$ e $\alpha > 0$, então

$$|z_i| > 1, \quad i = 1, \dots, q,$$

portanto

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \quad |z| < \min\{|z_1|, \dots, |z_q|\},$$

$$a_m = \sum_{i=1}^q \frac{\gamma_i}{z_i^m}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Deste caso particular decorre a seguinte

Propriedade 4.3.1

Para que a transformada inversa de $\bar{u}(p)$ seja real é necessário e suficiente que os pólos de $\bar{u}(p)$ sejam reais e/ou complexos conjugados dois a dois.

Supondo agora que

$$|z_1| = \dots = |z_r| < |z_{r+1}| \leq \dots \leq |z_q|$$

e pondo

$$z_j = R e^{i\theta_j}, \quad j = 1, \dots, r,$$

de (2) obtem-se

$$a_m = \frac{1}{R^m} \left[\gamma_1 e^{-im\theta_1} + \dots + \gamma_r e^{-im\theta_r} + \sum_{j=r+1}^q \gamma_j \left(\frac{R}{z_j} \right)^m \right]$$

e como $\frac{R}{|z_j|} < 1$, $j = r+1, \dots, q$, então

$$a_m = O\left(\frac{1}{R^m}\right), \quad m \rightarrow \infty,$$

portanto

$$\begin{aligned} e_N &= \frac{1}{2\alpha} \cdot \sum_{m=N}^{\infty} |a_m|^2 \\ &= \frac{1}{2\alpha} \cdot \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{R^{2m}} (|a_m|^2 R^{2m}) \\ &= \frac{O(1)}{2\alpha} \cdot \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{R^{2(m+N)}} \\ &= O\left(\frac{1}{R^{2N}}\right), \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Designemos por α^* um valor assintótico óptimo do parâmetro α ,

$$\alpha^* = \max_{\alpha > 0} \min_{1 \leq i \leq q} \{|z_i|\}.$$

problema que, nos casos particulares considerados a seguir, admite soluções acessíveis.

Proposição 4.3.1

Se $\bar{u}(p)$ tiver dois e só dois pólos complexos conjugados, p_1 e p_2 , então

$$\alpha^* = |p'_1| = |p'_2|, \quad p'_1 = p_1 - \gamma, \quad p'_2 = p_2 - \gamma.$$

Com efeito, sendo $p_1 = \overline{p_2}$, então $z_1 = \overline{z_2}$, pelo que é suficiente minimizar $|z_1|$.

Pondo

$$p'_1 = -\sigma_1 + i\omega_1,$$

então

$$|z_1|^2 = \frac{(\alpha + \sigma_1)^2 + \omega_1^2}{(\alpha - \sigma_1)^2 + \omega_1^2},$$

$$\frac{d}{d\alpha}|z_1|^2 = \frac{-4\sigma_1[\alpha^2 - (\sigma_1^2 + \omega_1^2)]}{[(\alpha - \sigma_1)^2 + \omega_1^2]^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \sigma_1^2 + \omega_1^2 = |p'_1|^2.$$

Portanto

$$\alpha^* = |p'_1|.$$

Proposição 4.3.2

Se $\bar{u}(p)$ tiver apenas q pólos reais simples, $x_1 > x_2 > \dots > x_q$, então o valor assintótico óptimo de α é:

$$\alpha^* = \sqrt{(x_1 - \gamma)(x_q - \gamma)}.$$

Com efeito, podemos supor, sem perda de generalidade, que os pólos de $\bar{u}(p)$ são todos estritamente negativos, de modo que $\gamma = 0$ (se assim não fosse, mudaríamos p em $p + \gamma$), portanto

$$|x_1| < |x_2| < \dots < |x_q|.$$

Os pólos de $g(z)$ são todos reais:

$$z_i = \frac{|x_i| + \alpha}{|x_i| - \alpha}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Facilmente se verifica que

$$0 < \alpha < |x_i| < |x_j| \Rightarrow |z_i| > |z_j|$$

$$|x_i| < |x_j| < \alpha \Rightarrow |z_i| < |z_j|$$

$$|x_1| < \dots < |x_i| < \alpha < |x_{i+1}| < \dots < |x_q| \Rightarrow |z_1| < \dots < |z_i| \wedge |z_{i+1}| > \dots > |z_q|$$

pelo que $\alpha^* = \max_{\alpha > 0} \min_{1 \leq i \leq q} \{|z_i|\}$ deverá ser tal que

$$|z_1| = |z_q| \Leftrightarrow \frac{|x_1| + \alpha^*}{\alpha^* - |x_1|} = \frac{|x_q| + \alpha^*}{|x_q| - \alpha^*} \Leftrightarrow \alpha^* = \sqrt{|x_1 x_q|} .$$

Capítulo 5

Implementação do Algoritmo de Brochet e Exemplos de Aplicações

Para a inversão numérica da transformada de Laplace é suficiente ter acesso aos valores da transformada em certos pontos do plano complexo, mas vamos supôr conhecida a expressão analítica daquela transformada e calcular valores aproximados da função original em pontos igualmente espaçados do intervalo $[0, t_{\max}]$ pelo algoritmo de Brochet, descrito no capítulo anterior, cujo programa em C se encontra em anexo e cujos passos principais são os seguintes:

1- Leitura dos dados

Os dados são pedidos ao utilizador pela função “inputdados” e são os seguintes:

graulaguerre - Ordem da soma parcial da série de funções de Laguerre.

graufourier - Número de pontos para o cálculo dos coeficientes \hat{a}_p .

tmax - Limite superior do intervalo onde a transformada inversa é calculada. O limite inferior é considerado igual a zero.

beta - Abcissa de convergência simples, ou seja, a maior parte real dos pólos de $\bar{u}(p)$, função a inverter.

gama - Se $\beta < 0$, o programa assume $\gamma = 0$. Se $\beta \geq 0$, é necessário escolher um $\gamma > \beta$ de modo a definir a função geradora. A escolha do valor de γ vai ter alguma importância no erro da aproximação. O utilizador pode optar por introduzir um valor de γ por si escolhido ou pelo valor que o programa assume por defeito, $\beta + \frac{1}{t_{\max}}$, valor este proposto por Weeks [5].

alpha - Valor do parâmetro α . A escolha que fizermos deste valor terá influência sobre o erro da aproximação. O utilizador pode optar por introduzir um valor para o parâmetro α por si escolhido ou pelo valor que o programa assume por defeito, $\frac{\text{graulaguerre}}{2 \cdot t_{\max}}$, valor este proposto por Weeks [5].

- ro - Parâmetro que intervém na cálculo dos valores da função geradora.
 delta - Passo com que o intervalo $[0, t_{\max}]$ é percorrido.
 ficheiro - Nome do ficheiro (.TXT) onde o programa vai gravar os resultados.

O utilizador deve ainda fornecer a expressão analítica das partes real e imaginária da função a inverter .

2- Cálculo dos valores w_n^p , $p = 0, \dots, \text{graufourier} - 1$.

Estes valores são calculados pela função “funcaownp”.

3- Cálculo dos valores $h_p = \frac{2\alpha}{1 - \rho w_n^p} \bar{u} \left(\gamma + \alpha \frac{1 + \rho w_n^p}{1 - \rho w_n^p} \right)$, $p = 0, \dots, \text{graufourier} - 1$.

Estes valores são calculados pela função “funcaohp”.

4- Cálculo dos valores aproximados \hat{c}_p , $p = 0, \dots, \text{graufourier} - 1$ dos coeficientes de Fourier de $G(\theta) = g(\rho e^{i\theta})$, $\hat{c} = \mathcal{F}_n h$.

Estes valores são calculados pela função “funcaocp”.

5- Cálculo dos valores aproximados $\hat{a}_p = \frac{\hat{c}_p}{\rho^p}$, $p = 0, \dots, \text{graufourier} - 1$ dos coeficientes do desenvolvimento da transformada inversa em série de funções de Laguerre.

Estes valores são calculados pela função “funcaoap”.

6- Cálculo dos valores aproximados da transformada inversa sobre o intervalo $[0, t_{\max}]$ percorrido com passo δ e seu armazenamento no ficheiro “ficheiro.txt” sob a forma de uma tabela de três colunas. A primeira coluna contém os valores de t , as segunda e terceira as partes real e imaginária da solução aproximada.

Tratámos as seguintes funções com inversa conhecida:

$$1) \bar{u}(p) = \frac{1}{p+1}, u(t) = e^{-t};$$

$$2) \bar{u}(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}, u(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \text{sen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right);$$

$$3) \bar{u}(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}, u(t) = e^{-t} - e^{-2t};$$

5.1 - Inversão Numérica de $\bar{u}(p) = \frac{1}{p+1}$

O pólo de $\bar{u}(p)$ é $p = -1$ pelo que $\beta = -1$, $\gamma = 0$ e $\alpha^* = 1$.

Fizemos a inversão em $[0,10]$ percorrido com passo 1.

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 100$, $\rho = 0.7$, $\alpha = 2.5$ (valor proposto por Weeks), obtivemos para $u(t)$ os seguintes valores aproximados $\hat{u}(t)$ e respectivos erros:

t	$u(t)$	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^8$
0	1.00000000000000000000	1.00000005958956000000	-5.959
1	0.36787944117144200000	0.36787944386299200000	-0.269
2	0.13533528323661300000	0.13533528557111200000	-0.233
3	0.04978706836786390000	0.04978706579835220000	0.257
4	0.01831563888873420000	0.01831563687052870000	0.202
5	0.00673794699908547000	0.00673794764178120000	-0.064
6	0.00247875217666636000	0.00247875288184800000	-0.071
7	0.00091188196555451600	0.00091188072069740000	0.124
8	0.00033546262790251200	0.00033545944145610000	0.319
9	0.00012340980408668000	0.00012340948491280000	0.032
10	0.00004539992976248490	0.00004540296936260000	-0.304

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 100$, $\rho = 0.9$, $\alpha = 2.5$ (valor proposto por Weeks), obtivemos os seguintes resultados:

t	$u(t)$	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{13}$
0	1.00000000000000000000	1.00000000000050000000	-5.000
1	0.36787944117144200000	0.36787944117145600000	-0.137
2	0.13533528323661300000	0.13533528323660900000	0.037
3	0.04978706836786390000	0.04978706836787930000	-0.154
4	0.01831563888873420000	0.01831563888873620000	-0.020

5	0.00673794699908547000	0.00673794699909970000	-0.142
6	0.00247875217666636000	0.00247875217668540000	-0.190
7	0.00091188196555451600	0.00091188196554780000	0.067
8	0.00033546262790251200	0.00033546262787740000	0.251
9	0.00012340980408668000	0.00012340980409010000	-0.034
10	0.00004539992976248490	0.00004539992977750000	-0.150

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 100$, $\rho = 0.999$, $\alpha = 2.5$ (valor proposto por Weeks), obtivemos os seguintes resultados:

t	$u(t)$	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{15}$
0	1.00000000000000000000	1.00000000000000000000	0.000
1	0.36787944117144200000	0.36787944117144200000	0.333
2	0.13533528323661300000	0.13533528323661200000	0.694
3	0.04978706836786390000	0.04978706836786470000	-0.756
4	0.01831563888873420000	0.01831563888873440000	-0.222
5	0.00673794699908547000	0.00673794699908570000	-0.233
6	0.00247875217666636000	0.00247875217666670000	-0.341
7	0.00091188196555451600	0.00091188196555460000	-0.084
8	0.00033546262790251200	0.00033546262790220000	0.312
9	0.00012340980408668000	0.00012340980408690000	-0.220
10	0.00004539992976248490	0.00004539992976250000	-0.015

Verifica-se facilmente que a precisão aumenta à medida que ρ se aproxima de 1.

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 300$, $\rho = 0.9$, $\alpha = 2.5$ (valor proposto por Weeks), obtivemos os seguintes resultados:

t	$u(t)$	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{13}$
0	1.00000000000000000000	0.99999999999963100000	3.690
1	0.36787944117144200000	0.36787944117147200000	-0.296

2	0.13533528323661300000	0.13533528323662100000	-0.083
3	0.04978706836786390000	0.04978706836785190000	0.120
4	0.01831563888873420000	0.01831563888872850000	0.057
5	0.00673794699908547000	0.00673794699908900000	-0.035
6	0.00247875217666636000	0.00247875217666900000	-0.026
7	0.00091188196555451600	0.00091188196554260000	0.119
8	0.00033546262790251200	0.00033546262789160000	0.109
9	0.00012340980408668000	0.00012340980408560000	0.011
10	0.00004539992976248490	0.00004539992977410000	-0.116

Com $g_{\text{raulaguerre}} = 50$, $g_{\text{raufourier}} = 500$, $\rho = 0.9$, $\alpha = 2.5$ (valor proposto por Weeks), obtivemos os seguintes resultados:

t	$u(t)$	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{13}$
0	1.00000000000000000000	1.00000000000030000000	-3.000
1	0.36787944117144200000	0.36787944117152300000	-0.807
2	0.13533528323661300000	0.13533528323668100000	-0.683
3	0.04978706836786390000	0.04978706836779220000	0.717
4	0.01831563888873420000	0.01831563888871490000	0.193
5	0.00673794699908547000	0.00673794699911460000	-0.291
6	0.00247875217666636000	0.00247875217668850000	-0.221
7	0.00091188196555451600	0.00091188196554030000	0.142
8	0.00033546262790251200	0.00033546262784110000	0.614
9	0.00012340980408668000	0.00012340980407220000	0.145
10	0.00004539992976248490	0.00004539992981790000	-0.554

Tendo em vista o aumento da precisão, não é importante o aumento do número de pontos de interpolação do Operador de Fourier Discreto, $g_{\text{raufourier}}$.

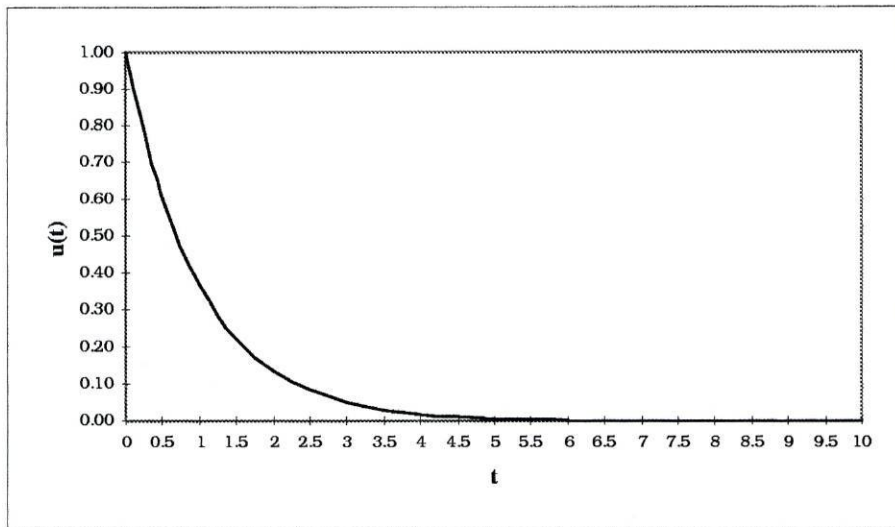


Fig. 5.1.1 - Representação gráfica da transformada inversa de Laplace em $[0,10]$

5.2 - Inversão Numérica de $\bar{u}(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$

Os pólos de $\bar{u}(p)$ são $p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ pelo que $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = 0$ e $\alpha^* = 1$.

Fizemos a inversão em $[0,10]$ percorrido com passo 1.

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 200$, $\rho = 0.9$, $\alpha = 1$, obtivemos os seguintes resultados:

t	u(t)	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{13}$
0	0.00000000000000000000	0.000000000000091170000	-9.117
1	0.53350719511469300000	0.53350719511476900000	-0.759
2	0.41927962966633200000	0.41927962966639200000	-0.601
3	0.13324264401804100000	0.13324264401808500000	-0.439
4	-0.04952987974191480000	-0.04952987974186580000	-0.490
5	-0.08794242073251290000	-0.08794242073252320000	0.103
6	-0.05089231819640910000	-0.05089231819644230000	0.332
7	-0.00764371371306937000	-0.00764371371302550000	-0.439
8	0.01271509562334530000	0.01271509562330630000	0.390

9	0.01280467119383450000	0.01280467119387120000	-0.367
10	0.00538548061605957000	0.00538548061601460000	0.450

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 200$, $\rho = 0.9$, $\alpha = 2.5$, obtivemos os seguintes resultados:

t	$u(t)$	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^9$
0	0.00000000000000000000	-0.00000000132597390000	1.326
1	0.53350719511469300000	0.53350719488056600000	0.234
2	0.41927962966633200000	0.41927962945768800000	0.209
3	0.13324264401804100000	0.13324264416741900000	-0.149
4	-0.04952987974191480000	-0.04952987998756040000	0.246
5	-0.08794242073251290000	-0.08794242097173170000	0.239
6	-0.05089231819640910000	-0.05089231844282010000	0.246
7	-0.00764371371306937000	-0.00764371402130800000	0.308
8	0.01271509562334530000	0.01271509545074760000	0.173
9	0.01280467119383450000	0.01280467145854240000	-0.265
10	0.00538548061605957000	0.00538548079771230000	-0.182

Verifica-se que com $\alpha = 1$ obtemos erros 10^4 vezes menores do que com $\alpha = 2.5$.

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 500$, $\rho = 0.9$, $\alpha = 1$, obtivemos os seguintes resultados:

t	$u(t)$	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{12}$
0	0.00000000000000000000	0.00000000001000700000	-1.001
1	0.53350719511469300000	0.53350719511481700000	-0.124
2	0.41927962966633200000	0.41927962966633000000	0.002
3	0.13324264401804100000	0.13324264401804600000	-0.005
4	-0.04952987974191480000	-0.04952987974183600000	-0.079
5	-0.08794242073251290000	-0.08794242073248140000	-0.031

6	-0.05089231819640910000	-0.05089231819649070000	0.082
7	-0.00764371371306937000	-0.00764371371299440000	-0.075
8	0.01271509562334530000	0.01271509562328780000	0.058
9	0.01280467119383450000	0.01280467119388300000	-0.048
10	0.00538548061605957000	0.00538548061600600000	0.054

O aumento de $\text{graufourier} = 200$ para $\text{graufourier} = 500$ não torna o erro significativamente menor.

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 200$, $\rho = 0.999$, $\alpha = 1$, obtivemos os seguintes resultados:

t	u(t)	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{14}$
0	0.00000000000000000000	0.000000000000000610000	-0.610
1	0.53350719511469300000	0.53350719511470400000	-1.099
2	0.41927962966633200000	0.41927962966634900000	-1.715
3	0.13324264401804100000	0.13324264401805900000	-1.785
4	-0.04952987974191480000	-0.04952987974188300000	-3.180
5	-0.08794242073251290000	-0.08794242073251840000	0.554
6	-0.05089231819640910000	-0.05089231819643610000	2.703
7	-0.00764371371306937000	-0.00764371371303090000	-3.847
8	0.01271509562334530000	0.01271509562330780000	3.752
9	0.01280467119383450000	0.01280467119387070000	-3.620
10	0.00538548061605957000	0.00538548061602090000	3.867

O aumento de $\rho = 0.9$ para $\rho = 0.999$ trouxe um ganho de apenas uma casa decimal.

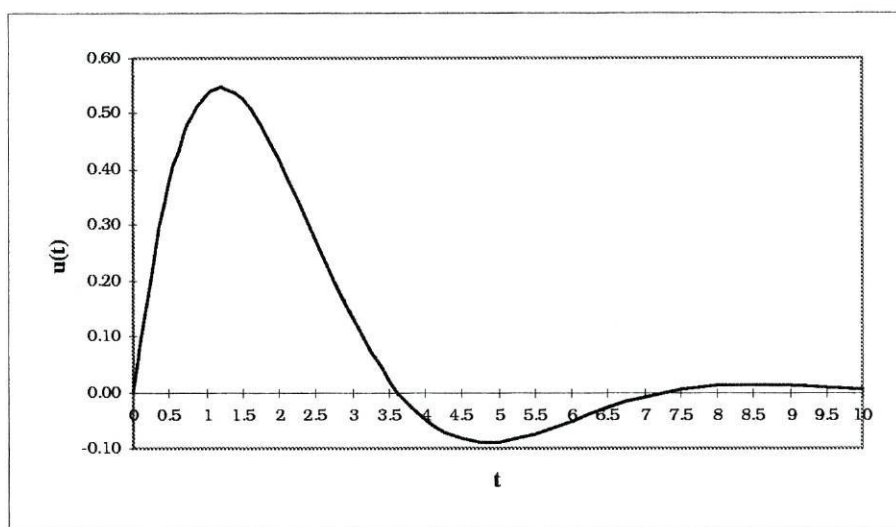


Fig. 5.2.1 - Representação gráfica da transformada inversa de Laplace em $[0,10]$

5.3 - Inversão Numérica de $\bar{u}(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$

Os pólos de $\bar{u}(p)$ são $p_1 = -1$ e $p_2 = -2$ pelo que $\beta = -1$, $\gamma = 0$ e $\alpha^* = \sqrt{2}$.

Fizemos a inversão em $[0,10]$ percorrido com passo 1.

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 200$, $\rho = 0.999$, $\alpha = \sqrt{2}$, obtivemos os seguintes resultados:

t	u(t)	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{15}$
0	0.00000000000000000000	0.000000000000000640000	-6.400
1	0.23254415793483000000	0.23254415793483000000	-0.361
2	0.11701964434787900000	0.11701964434787900000	-0.472
3	0.04730831619119760000	0.04730831619119780000	-0.208
4	0.01798017626083170000	0.01798017626083180000	-0.135
5	0.00669254706932298000	0.00669254706932290000	0.082
6	0.00247260796431303000	0.00247260796431310000	-0.069
7	0.00091105043683541300	0.00091105043683550000	0.087
8	0.00033535009272779300	0.00033535009272770000	0.093

9	0.00012339457410693500	0.00012339457410700000	-0.065
10	0.00004539786860886240	0.00004539786860880000	0.062

Com $\text{graulaguerre} = 50$, $\text{graufourier} = 200$, $\rho = 0.999$, $\alpha = 2.5$, obtivemos os seguintes resultados:

t	$u(t)$	$\hat{u}(t)$	$[u(t) - \hat{u}(t)] \times 10^{15}$
0	0.00000000000000000000	0.000000000000000930000	-9.300
1	0.23254415793483000000	0.23254415793483000000	-0.361
2	0.11701964434787900000	0.11701964434787800000	0.527
3	0.04730831619119760000	0.04730831619119750000	0.090
4	0.01798017626083170000	0.01798017626083190000	-0.236
5	0.00669254706932298000	0.00669254706932300000	-0.017
6	0.00247260796431303000	0.00247260796431300000	0.030
7	0.00091105043683541300	0.00091105043683520000	0.213
8	0.00033535009272779300	0.00033535009272770000	0.093
9	0.00012339457410693500	0.00012339457410720000	-0.265
10	0.00004539786860886240	0.00004539786860860000	0.262

Quer com $\alpha = \sqrt{2}$ quer com $\alpha = 2.5$ não se notam diferenças na precisão uma vez que em ambos os casos obtivemos 14 casas decimais exactas.

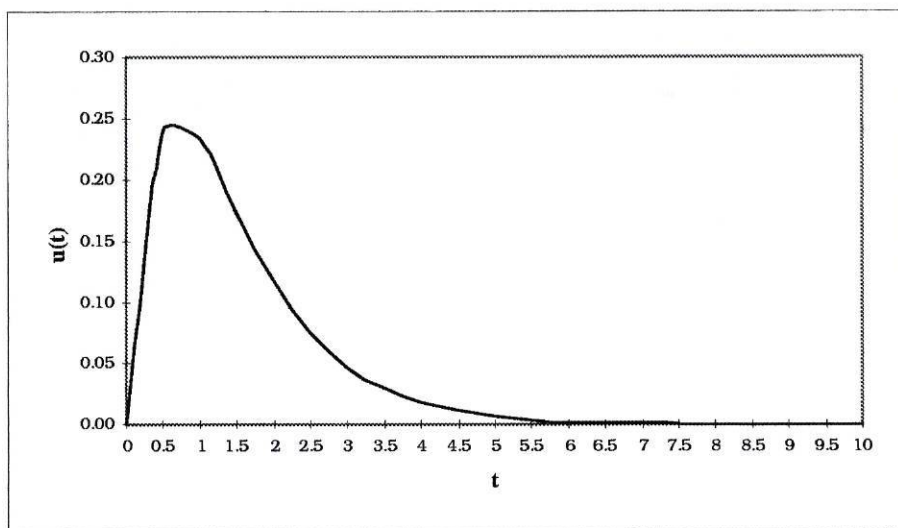


Fig. 5.3.1 - Representação gráfica da transformada inversa de Laplace em $[0,10]$

Capítulo 6

Conclusões e Trabalho Futuro

6.1 - Conclusões

A inversão numérica da transformada de Laplace recorrendo aos polinómios de Laguerre pelo método de Brochet fornece boas estimativas quando a função $\bar{u}(p)$ não é singular no infinito. Quando a função a inverter é singular no infinito, a convergência é bastante lenta e os erros são significativos.

6.2 - Perspectivas de trabalho futuro

Face ao trabalho realizado ao longo desta dissertação, sugerem-se os seguintes tópicos para trabalho futuro:

- Determinação do valor assintótico óptimo do parâmetro α quando a função a inverter tem pólos múltiplos quaisquer.
- Desenvolvimento de métodos que permitam acelerar a convergência da transformada inversa de Laplace quando a função a inverter é singular no infinito.

ANEXOS

Listagem do Programa

“Inversão Numérica da Transformada de Laplace”

```
/* ----- */
/*programa: inversao numerica da transformada de laplace*/
/*autor: joaquim de fontes marques*/
/*versao: 1*/
/*data: novembro 1998*/
/* ----- */

#include "estrut.h"

/*variaveis globais*/
int graufourier,graulaguerre;
double alpha,tmax,ro,gama,beta,delta,*lag;
complexoalgebrico wn,*wnp,*hp,*cp,*ap;
string ficheiro;

/* ----- */
void funcaocomplexaent(a,b)
complexoalgebrico a,*b;
{
b->re=...;/*parte real da funcao a inverter*/
b->im=...;/*parte imaginaria da funcao a inverter*/
} /*funcao complexa a inverter*/

/* ----- */
void convertetrigonometricoalgebrico(a,b)
complexotrigonometrico a;
complexoalgebrico *b;
{
b->re=a.mod*cos(a.arg);
b->im=a.mod*sin(a.arg);
} /*converte numero complexo trigonometrico para algebrico*/

/* ----- */
void convertealgebricotrigonometrico(a,b)
complexoalgebrico a;
complexotrigonometrico *b;
{
b->mod=sqrt(pow(a.re,2.0)+pow(a.im,2.0));
if (a.re == 0.0)
{
if (a.im > 0.0)
b->arg=M_PI/2.0;
else
```

```

    if (a.im < 0.0)
        b->arg=3.0*M_PI/2.0;
    else
        b->arg=0.0;
    }
else
    {
    b->arg=atan2(a.im,a.re);
    if (b->arg < 0.0)
        b->arg+=2.0*M_PI;
    }
} /*converte numero complexo algebrico para trigonometrico*/

/* ----- */
void somacomplexotrigonometrico(a,b,c)
complexotrigonometrico a,b,*c;
{
complexoalgebrico aux;

aux.re=a.mod*cos(a.arg)+b.mod*cos(b.arg);
aux.im=a.mod*sin(a.arg)+b.mod*sin(b.arg);
convertealgebricotrigonometrico(aux,c);
} /*soma numeros complexos trigonometricos*/

/* ----- */
void somacomplexoalgebrico(a,b,c)
complexoalgebrico a,b,*c;
{
c->re=a.re+b.re;
c->im=a.im+b.im;
} /*soma numeros complexos algebricos*/

/* ----- */
void diferencacomplexotrigonometrico(a,b,c)
complexotrigonometrico a,b,*c;
{
complexoalgebrico aux;

aux.re=a.mod*cos(a.arg)-b.mod*cos(b.arg);
aux.im=a.mod*sin(a.arg)-b.mod*sin(b.arg);
convertealgebricotrigonometrico(aux,c);
} /*diferenca numeros complexos trigonometricos*/

/* ----- */
void diferencacomplexoalgebrico(a,b,c)
complexoalgebrico a,b,*c;
{
c->re=a.re-b.re;
c->im=a.im-b.im;
} /*diferenca numeros complexos algebricos*/

```

```

/* ----- */
void potenciacomplejoalgebrico(a,b,c)
complexoalgebrico a;
double b;
complexoalgebrico *c;
{
complexotrigonometrico aux;

convertealgebricotrigonometrico(a,&aux);
aux.mod=pow(aux.mod,b);
aux.arg=aux.arg*b;
while (aux.arg > 2.0*M_PI)
    aux.arg-=2.0*M_PI;
while (aux.arg < 0.0)
    aux.arg+=2.0*M_PI;
convertetrigonometricoalgebrico(aux,c);
} /*potencia numeros complexos algebricos*/

/* ----- */
void potenciacomplexotrigonometrico(a,b,c)
complexotrigonometrico a;
double b;
complexotrigonometrico *c;
{
c->mod=pow(a.mod,b);
c->arg=a.arg*b;
while (c->arg > 2.0*M_PI)
    c->arg-=2.0*M_PI;
while (c->arg < 0.0)
    c->arg+=2.0*M_PI;
} /*potencia numeros complexos trigonometricos*/

/* ----- */
void sqrtcomplexoalgebrico(a,b)
complexoalgebrico a,*b;
{
complexotrigonometrico aux;

convertealgebricotrigonometrico(a,&aux);
aux.mod=sqrt(aux.mod);
aux.arg/=2.0;
convertetrigonometricoalgebrico(aux,b);
} /*raiz numeros complexos algebricos*/

/* ----- */
void sqrtcomplexotrigonometrico(a,b)
complexotrigonometrico a,*b;
{
b->mod=sqrt(a.mod);

```

```

b->arg=a.arg/2.0;
} /*raiz numeros complexos trigonometricos*/

/* ----- */
void produtocomplexoalgebrico(a,b,c)
complexoalgebrico a,b,*c;
{
c->re=a.re*b.re-a.im*b.im;
c->im=a.im*b.re+a.re*b.im;
} /*produto numeros complexos algebricos*/

/* ----- */
void produtocomplexotrigonometrico(a,b,c)
complexotrigonometrico a,b,*c;
{
c->mod=a.mod*b.mod;
c->arg=a.arg+b.arg;
if (c->arg > 2.0*M_PI)
    c->arg-=2.0*M_PI;
} /*produto numeros complexos trigonometricos*/

/* ----- */
void divisaocomplexoalgebrico(a,b,c)
complexoalgebrico a,b,*c;
{
int tmp;

if (b.re == 0.0 && b.im == 0.0)
    {
    printf("\nperigo ...\n");
    fflush(stdin);
    tmp=getc(stdin);
    }
else
    {
    c->re=(a.re*b.re+a.im*b.im)/(pow(b.re,2.0)+pow(b.im,2.0));
    c->im=(a.im*b.re-a.re*b.im)/(pow(b.re,2.0)+pow(b.im,2.0));
    }
tmp++;
} /*divisao numeros complexos algebricos*/

/* ----- */
void divisaocomplexotrigonometrico(a,b,c)
complexotrigonometrico a,b,*c;
{
int tmp;

if (b.mod == 0.0)
    {
    printf("\nperigo ...\n");

```



```

    {
    printf("Introduza o valor de GAMA (GAMA > BETA): ");
    scanf("%lf",&gama);
    }
    while (gama <= beta);
    }
else
    gama=beta+1.0/tmax;
}
printf("Quer introduzir o valor do parametro ALPHA? (s/n): ");
fflush(stdin);
opcao=getc(stdin);
if (opcao == 's' || opcao == 'S')
    {
    printf("Introduza o valor do parametro ALPHA: ");
    scanf("%lf",&alpha);
    }
else
    alpha=graulaguerre/(2.0*tmax);
printf("Introduza o parametro RO: ");
scanf("%lf",&ro);
printf("Introduza o passo DELTA com que o intervalo e percorrido: ");
scanf("%lf",&delta);
printf("Introduza o nome do ficheiro onde quer gravar os resultados: ");
scanf("%s",ficheiro);
sprintf(ficheiro+strlen(ficheiro),".txt");
} /*introducao dos dados*/

/* ----- */
void alocamemoria()
{
if ((wnp=(complexoalgebrico *)malloc(graufourier*sizeof(complexoalgebrico))) == NULL)
    {
    printf("Nao existe memoria suficiente para a variavel WNP\n");
    exit(1); /*terminate program if out of memory*/
    }
if ((hp=(complexoalgebrico *)malloc(graufourier*sizeof(complexoalgebrico))) == NULL)
    {
    printf("Nao existe memoria suficiente para a variavel HP\n");
    exit(1); /*terminate program if out of memory*/
    }
if ((cp=(complexoalgebrico *)malloc(graufourier*sizeof(complexoalgebrico))) == NULL)
    {
    printf("Nao existe memoria suficiente para a variavel CP\n");
    exit(1); /*terminate program if out of memory*/
    }
if ((ap=(complexoalgebrico *)malloc(graufourier*sizeof(complexoalgebrico))) == NULL)
    {
    printf("Nao existe memoria suficiente para a variavel AP\n");
    exit(1); /*terminate program if out of memory*/
    }
}

```

```

}
if ((lag=(double *)malloc(graulaguerre*sizeof(double))) == NULL)
{
printf("Nao existe memoria suficiente para a variavel LAGUERRE\n");
exit(1); /*terminate program if out of memory*/
}
}

/* ----- */
void libertamemoria()
{
if (wnp)
{
free(wnp);
wnp=NULL;
}
if (hp)
{
free(hp);
hp=NULL;
}
if (cp)
{
free(cp);
cp=NULL;
}
if (ap)
{
free(ap);
ap=NULL;
}
if (lag)
{
free(lag);
lag=NULL;
}
}

/* ----- */
void funcaownp()
{
int m;

/*constante wn*/
wn.re=cos(2.0*M_PI/graufourier);
wn.im=sin(2.0*M_PI/graufourier);
/*vector wn^p*/
wnp->re=1.0; /*posicao 0*/
wnp->im=0.0;
for (m=1;m<graufourier;m++)

```

```

    produtocomplexoalgebrico(wn,* (wnp+m-1),(wnp+m));
} /*calculo dos coeficientes wn^p*/

/* ----- */
void funcaoHP()
{
int m;
complexoalgebrico
denominador,numerador,fraccao,objecto,doisalpha,peso,imagemcomplexa;

for (m=0;m<graufourier;m++)
{
denominador.re=1.0-ro*(wnp+m)->re;
denominador.im=-ro*(wnp+m)->im;
numerador.re=1.0+ro*(wnp+m)->re;
numerador.im=ro*(wnp+m)->im;
divisaocomplexoalgebrico(numerador,denominador,&fraccao);
objecto.re=gama+alpha*fraccao.re;
objecto.im=alpha*fraccao.im;
doisalpha.re=2.0*alpha;
doisalpha.im=0.0;
divisaocomplexoalgebrico(doisalpha,denominador,&peso);
funcaoComplexaent(objecto,&imagemcomplexa);
produtocomplexoalgebrico(peso,imagemcomplexa,(hp+m));
}
} /*calculo dos coeficientes hp*/

/* ----- */
void funcaoCP()
{
int j,p;
complexoalgebrico wnpj,soma,somaAux;

for (p=0;p<graufourier;p++)
{
soma.re=0.0;
soma.im=0.0;
for (j=0;j<graufourier;j++)
{
potenciacomplexoalgebrico(*(wnp+p),(double)(-j),&wnpj);
produtocomplexoalgebrico(*(hp+j),wnpj,&somaAux);
somacomplexoalgebrico(soma,somaAux,&soma);
}
(cp+p)->re=soma.re/graufourier;
(cp+p)->im=soma.im/graufourier;
}
} /*calculo dos coeficientes cp*/

/* ----- */
void funcaoAP()

```

```

{
int p;
complexoalgebrico rop;

for (p=0;p<graufourier;p++)
{
rop.re=pow(ro,(double)p);
rop.im=0.0;
divisaocomplexoalgebrico(*(cp+p),rop,(ap+p));
}
} /*calculo dos coeficientes ap*/

/* ----- */
void main()
{
int m;
double t,eat;
complexoalgebrico ut;
FILE *fp;

inputdados();
alocamemoria();

/*vector wn^p*/
printf("calculando funcao wn^p ...\\n");
funcaownp();
/*vector hp*/
printf("calculando funcao hp ...\\n");
funcaohp();
/*vector cp*/
printf("calculando funcao cp ...\\n");
funcaocp();
/*vector ap*/
printf("calculando funcao ap ...\\n");
funcaoap();

if ((fp=fopen(ficheiro,"w")) == NULL)
{
printf("Nao pode criar ficheiro de resultados.\\n");
exit(0);
}

fprintf(fp,"Maior grau do polinomio de LAGUERRE: %d\\n",graulaguerre);
fprintf(fp,"Numero de pontos do operador de FOURIER: %d\\n",graufourier);
fprintf(fp,"Dominio da funcao inversa: [0,%lf]\\n",tmax);
fprintf(fp,"Abcissa de convergencia simples (BETA): %lf\\n",beta);
fprintf(fp,"GAMA: %lf\\n",gama);
fprintf(fp,"ALPHA: %lf\\n",alpha);
fprintf(fp,"RO: %lf\\n",ro);
fprintf(fp,"DELTA: %lf\\n\\n",delta);

```

```

printf("calculando funcao LAGUERRE ...\n");
for (t=0.0;t<tmax+delta;t+=delta)
{
ut.re=0.0;
ut.im=0.0;
laguerre(2.0*alpha*t,graulaguerre);
for (m=0;m<graulaguerre;m++)
{
ut.re+=(lag+m)*(ap+m%graufourier)->re;
ut.im+=(lag+m)*(ap+m%graufourier)->im;
}
eat=exp(-alpha*t);
ut.re*=eat;
ut.im*=eat;
fprintf(fp,"%3.5lf\t%3.16lf\t%1.6lg\n",t,ut.re,ut.im);
}
fclose(fp);
libertamemoria();
}

```

Listagem do Ficheiro

ESTRUT.H

```
#ifndef __estrut_h
#define __estrut_h

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

typedef enum booleano{FALSE,TRUE} booleano;

typedef char string[128];

typedef struct complexoalgebrico{
    double re,im;
} complexoalgebrico;

typedef struct complexotrigonometrico{
    double mod,arg;
} complexotrigonometrico;

void funcaocomplexaent(complexoalgebrico a,complexoalgebrico *b);
void convertetrigonometricoalgebrico(complexotrigonometrico a,complexoalgebrico *b);
void convertealgebricotrigonometrico(complexoalgebrico a,complexotrigonometrico *b);
void somacomplexotrigonometrico(complexotrigonometrico a,complexotrigonometrico
b,complexotrigonometrico *c);
void somacomplexoalgebrico(complexoalgebrico a,complexoalgebrico b,complexoalgebrico
*c);
void diferenacomplexotrigonometrico(complexotrigonometrico a,complexotrigonometrico
b,complexotrigonometrico *c);
void diferenacomplexoalgebrico(complexoalgebrico a,complexoalgebrico
b,complexoalgebrico *c);
void potenciacomplexoalgebrico(complexoalgebrico a,double b,complexoalgebrico *c);
void potenciacomplexotrigonometrico(complexotrigonometrico a,double
b,complexotrigonometrico *c);
void sqrtcomplexoalgebrico(complexoalgebrico a,complexoalgebrico *b);
void sqrtcomplexotrigonometrico(complexotrigonometrico a,complexotrigonometrico *b);
void produtocomplexoalgebrico(complexoalgebrico a,complexoalgebrico
b,complexoalgebrico *c);
void produtocomplexotrigonometrico(complexotrigonometrico a,complexotrigonometrico
b,complexotrigonometrico *c);
void divisaocomplexoalgebrico(complexoalgebrico a,complexoalgebrico
b,complexoalgebrico *c);
```

```
void divisaocomplexotrigonometrico(complexotrigonometrico a,complexotrigonometrico
b,complexotrigonometrico *c);
void laguerre(double x,int m);
void inputdados(void);
void alocamemoria(void);
void libertamemoria(void);
void funcaownp(void);
void funcaohp(void);
void funcaocp(void);
void funcaoap(void);

#endif __estrut_h
```

Referências

- [1] Brochet, P. - Contribution a l' Inversion Numérique de la Transformation de Laplace a l' Aide des Polynomes de Laguerre et Application a la Simulation d' une Ligne de Transmission a Constantes Reparties, Thèse de 3ème Cycle, l' Université des Sciences et Techniques de Lille, 1983.
- [2] Debnath, L. - Integral Transforms and Their Applications, CRC Press, 1995 (Cap. 3, 4).
- [3] Henrici, P. - Applied and Computational Complex Analysis, vol. 2, Cap. 10, pp. 195-350.
- [4] Iseghem, J. van - Applications des Approximants de Type Padé, Thèse de 3ème Cycle, l' Université des Sciences et Techniques de Lille, 1982 (3ème partie: Inversion de la Transformée de Laplace, pp. 45-76).
- [5] Weeks, W. T. - Numerical Inversion of Laplace Transforms Using Laguerre Functions, JACM 13 (3), 1966, 419-426.
- [6] Zayed, A. I. - Handbook of Function and Generalized Function Transformations, CRC Press, 1996 (Cap. 5, pp. 115-146).