

Ana Cristina G. M. Moreira

Estimação do Coeficiente de Cauda Exponencial



Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Janeiro / 1999

Ana Cristina G. M. Moreira

Estimação do Coeficiente de Cauda Exponencial



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada*

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Janeiro / 1999

Tese orientada pela
Professora Doutora Margarida Brito

Agradecimentos

Quero aqui manifestar os meus sinceros agradecimentos à Professora Doutora Margarida Brito, pelo apoio e atenção dedicados durante a orientação da tese.

Desejo também agradecer ao Jorge por toda a sua ajuda e ânimo.

Estou ainda grata à minha família pelo incentivo transmitido.

Para terminar, quero demonstrar a minha gratidão a todos os professores e colegas, que de alguma forma contribuíram para o presente trabalho.

Resumo

Considere-se uma amostra Z_1, \dots, Z_n de v.a. i.i.d. tais que $P(Z_1 > z) = r(z)e^{-Rz}$ ($z > 0$), onde $r(\cdot)$ é uma função de variação regular em ∞ e R é uma constante positiva. Baseados no método dos mínimos quadrados, Schultze e Steinebach (1996) propuseram dois estimadores para o coeficiente de cauda exponencial R . Começaremos então por ver qual a relação entre um destes estimadores e um outro, introduzido por Kratz e Resnick (1996) num contexto equivalente. Depois, iremos propôr um novo estimador para R , e provar o respectivo resultado de consistência. Serão apresentados, de seguida, resultados que obtivemos por simulação, alguns dos quais são referentes ao coeficiente de ajustamento na teoria do risco (que será dado como exemplo de aplicação). Apresentaremos os teoremas, provados por Csörgo e Viharos (1997), sobre a distribuição assintótica dos estimadores de Schultze e Steinebach de $1/R$, e provaremos um resultado acerca da normalidade assintótica do quadrado do novo estimador introduzido de $1/R$. Em seguida, será feita a análise de condições sob as quais é possível construir intervalos de confiança assintóticos para R . A escolha do número k_n de estatísticas de ordem a serem usadas na estimação de $1/R$ será ainda referida num resultado de Csörgo e Viharos (1997), no caso particular do modelo de Hall.

Palavras chave: Coeficiente de cauda exponencial, estimação pelo método dos mínimos quadrados, consistência, normalidade assintótica universal, intervalos de confiança assintóticos, erro quadrático médio assintótico

Abstract

Let Z_1, \dots, Z_n be a sample of i.i.d. r.v.'s with tail behaviour $P(Z_1 > z) = r(z)e^{-Rz}$ ($z > 0$), where $r(\cdot)$ is a regularly varying function as $z \rightarrow \infty$, and R is a positive constant. Based on least squares considerations, Schultze and Steinebach (1996) introduced two estimators for the exponential tail coefficient R . Then, we will start by showing the relation between one of these estimators and another, presented by Kratz and Resnick (1996) on an equivalent context. Afterwards, we will propose a new estimator for R and prove a result about its consistency. Following this, we will include values obtained by simulation, some of which refer to the adjustment coefficient in risk theory (which will be shown as an application example). Next, we will present the theorems, proved by Csörgo and Viharos (1997), about the asymptotic distribution of the Schultze and Steinebach estimators of $1/R$ and we will prove a result about the asymptotic normality of the square of the new proposed estimator of $1/R$. The analysis of conditions under which it is possible to build asymptotic confidence intervals for R will follow. The choice of the number of extreme order statistics to be used on the estimation of $1/R$ will be referred on a result of Csörgo and Viharos (1997), in the particular case of the Hall's model.

Key words and phrases: Exponential tail coefficient, least squares estimators, consistency, universal asymptotic normality, asymptotic confidence intervals, asymptotic mean squared error

Índice

Agradecimentos	3
Resumo	4
Abstract	5
1 Introdução - Apresentação dos estimadores $\hat{R}_1(k_n)$ e $\hat{R}_3(k_n)$ propostos por Schultze e Steinebach	7
2 Estimação do índice de cauda superior da família de Pareto	11
3 Relação entre os estimadores $\hat{R}_1(k_n)$ e $\hat{R}_{qq}(k_n)$	13
4 Um novo estimador do coeficiente de cauda exponencial, $\hat{R}(k_n)$	16
5 Estimação do coeficiente de ajustamento na teoria do risco, como exemplo de aplicação	20
5.1 Um exemplo típico	22
5.2 Um exemplo de seguro de vida	23
6 Estudo de simulação	24
7 Normalidade assintótica	28
8 Intervalos de confiança assintóticos para R	34
9 Escolha do k_n ótimo	39
Apêndice A. Esquema da demonstração do teorema 1.1	42
Apêndice B. Resultados de simulação referentes ao capítulo 6	44
Referências	56

1 Introdução - Apresentação dos estimadores $\widehat{R}_1(k_n)$ e $\widehat{R}_3(k_n)$ propostos por Schultze e Steinebach

Consideremos uma amostra Z_1, \dots, Z_n de v.a. i.i.d. (variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas), cuja função de distribuição, $F(\cdot)$, satisfaz:

$$1 - F(z) = P(Z_1 > z) = r(z)e^{-Rz} \quad (z > 0), \quad (1.1)$$

onde $r(\cdot)$ é uma função de variação regular em ∞^1 e R é uma constante positiva, a que se dá o nome de coeficiente de cauda exponencial.

O problema de que se vai tratar é precisamente o da estimação deste coeficiente. Variadíssimos estimadores de R foram já propostos, quer neste contexto, quer no que vai ser apresentado no capítulo 2. De entre todos eles, iremos incidir fundamentalmente no estudo de dois, propostos por Schultze e Steinebach (1996).

Tais estimadores foram motivados pelo facto de que, sendo $F(\cdot)$ uma função de distribuição que verifica (1.1), $-\ln(1 - F(z))$, para z grande, é aproximadamente linear com declive R ; o mesmo acontecendo com $-\ln(1 - F_n(z))$ para n e z grandes, onde

$$1 - F_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{Z_i > z\}}.$$

Para simplificar o estudo, Schultze e Steinebach supuseram inicialmente $r(z) \equiv c, \forall z > 0$. Assim sendo,

$$y := -\ln(1 - F(z)) = Rz - \ln(c) = Rz - d,$$

ou equivalentemente,

$$z = R^{-1}(y + d) = ay + b,$$

onde $a = R^{-1}, b = R^{-1}d$ e $d = \ln(c)$.

Dado que a aproximação referida se verifica, no caso geral, para n e z grandes, foram

¹ $r(\cdot)$ diz-se uma função de variação regular em ∞ se $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ for uma função que verifica: $\forall z > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(tz)}{r(t)} = z^\rho$, para algum $\rho \in \mathbb{R}$.

consideradas apenas as k_n maiores observações da realização da amostra Z_1, \dots, Z_n , tendo sido designadas por $z_i = z_{n-i+1,n}$ ($i = 1, \dots, k_n \leq n$). Schultze e Steinebach aproximaram então $-\ln(1 - F(z_i))$ por $y_i := -\ln(1 - F_n(z_{n-i+1,n})) = -\ln(1 - (n-i)/n) = \ln(n/i)$.

Um dos estimadores de a , no sentido do método dos mínimos quadrados, foi obtido minimizando a função $f_1(a, b) = \sum_{i=1}^{k_n} (z_i - ay_i - b)^2$. Fixado o sistema de eixos da figura 1.1, este problema (o da estimação de a) corresponde a determinar o inverso do declive da recta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias entre os pontos (z_i, y_i) e os pontos de uma recta com ordenada y_i , respectivamente, $i = 1, \dots, k_n$ (isto é, corresponde a determinar o inverso do declive da recta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias, medidas na horizontal, entre os pontos $\{(z_i, y_i), i = 1, \dots, k_n\}$ e uma recta).

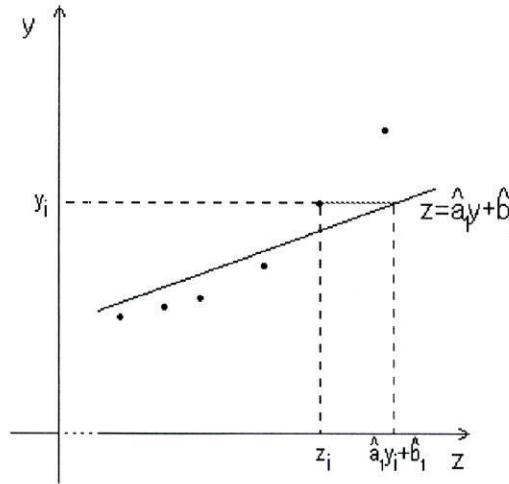


Figura 1.1

Designem-se agora por $Z_{1,n} \leq Z_{2,n} \leq \dots \leq Z_{n,n}$ as estatísticas de ordem da amostra aleatória Z_1, \dots, Z_n .

Obtém-se então o seguinte estimador de R :

$$\hat{R}_1(k_n) := (\hat{a}_1)^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2\left(\frac{n}{i}\right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right) Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}\right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right)\right)}. \quad (1.2)$$

No caso particular de $r(z) \equiv 1$, $z > 0$ ($F(z) = 1 - e^{-Rz}$, $z > 0$), o problema corresponde a minimizar a função $f_2(a) = \sum_{i=1}^{k_n} (z_i - ay_i)^2$. Obtém-se daí o seguinte estimador de R , no sentido do método dos mínimos quadrados:

$$\widehat{R}_2(k_n) := (\widehat{a}_2)^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2\left(\frac{n}{i}\right)}{\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right) Z_{n-i+1,n}}.$$

Geometricamente, este problema é semelhante ao anterior, tendo-se neste caso uma recta que passa pela origem.

Um outro estimador de R , no sentido do método dos mínimos quadrados, foi deduzido directamente da equação $y = Rz - d$, tendo-se como problema o de minimizar a função $f_3(R, d) = \sum_{i=1}^{k_n} (y_i - Rz_i + d)^2$. Fixado o sistema de eixos da figura 1.2 (o mesmo da figura 1.1), este problema (o da estimação de R) corresponde a determinar o declive da recta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias entre os pontos (z_i, y_i) e os pontos de uma recta com abcissa z_i , respectivamente, $i = 1, \dots, k_n$ (isto é, corresponde a determinar o declive da recta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias, medidas na vertical, entre os pontos $\{(z_i, y_i), i = 1, \dots, k_n\}$ e uma recta).

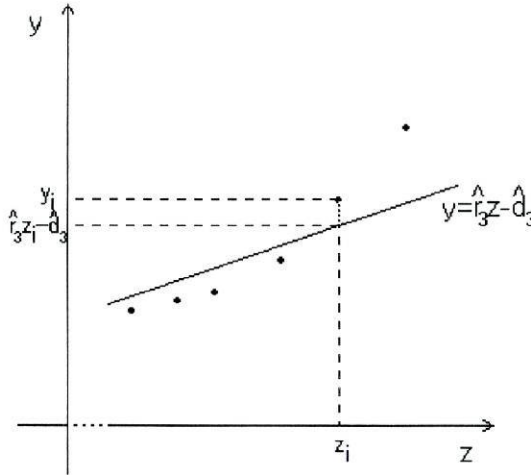


Figura 1.2

Obtém-se então o estimador de R :

$$\widehat{R}_3(k_n) = \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right) Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}\right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}^2 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}\right)^2}. \quad (1.3)$$

A consistência dos estimadores de R , $\widehat{R}_1(k_n)$ e $\widehat{R}_3(k_n)$, foi estudada por Schultze e Steinebach.

Antes da apresentação do resultado correspondente, considere-se uma sucessão de inteiros k_n que satisfaçam

$$1 \leq k_n < n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = 0 \quad (1.4)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln^2(n)/k_n = 0, \quad (1.5)$$

e suponha-se ainda que

$$S(s) = \inf\{z : F(z) \geq s\}, \quad s \in (0, 1), \quad \text{é contínua em } (s_0, 1), \quad \text{para algum } 0 < s_0 < 1. \quad (1.6)$$

Teorema 1.1 (*Schultze e Steinebach (1996), teorema 1.1*)

Seja $F(\cdot)$ uma função de distribuição que verifica (1.1), e k_n uma sucessão de inteiros que satisfazem (1.4) e (1.5).

Temos então que:

- a) $\widehat{R}_1(k_n) \xrightarrow{P} R.$
- b) Se se verificar (1.6), então $\widehat{R}_3(k_n) \xrightarrow{P} R.$

O esquema de demonstração deste teorema encontra-se no Apêndice A.

2 Estimação do índice de cauda superior da família de Pareto

Notemos que o problema de estimação inicialmente proposto está estritamente relacionado com o da estimação do índice de cauda superior R da família de Pareto. Para ver isso, basta fazer a mudança de variável

$$X_i = e^{Z_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que Z_1, \dots, Z_n são v.a. i.i.d. cuja função de distribuição verifica (1.1). Seja pois $H(\cdot)$ a função de distribuição de cada X_i ($i = 1, \dots, n$). Tem-se então que

$$1 - H(x) = P(X_1 > x) = l(x)x^{-R}, \quad (2.1)$$

onde $l(x) = r(\ln(x))$ (e $r(\cdot)$ é a função de variação regular em ∞ que surge em (1.1)), sendo portanto $l(\cdot)$ de variação lenta em ∞^2 (ver, por exemplo, Schultze e Steinebach (1996) e referências citadas).

A estimação do coeficiente de cauda exponencial é, deste modo, um problema equivalente ao da estimação do índice de cauda superior da família de Pareto.

Se $H(\cdot)$ for então uma função de distribuição que verifica (2.1), escreve-se $H \in \mathbf{R}_{1/R}$. Note-se ainda que H pertence à classe $\mathbf{R}_{1/R}$ se e só se, para alguma função $L(\cdot)$ de variação lenta em 0^3 , se tem

$$Q(1 - s) = s^{-1/R}L(s), \quad (2.2)$$

onde $Q(s) = \inf\{x : H(x) \geq s\}$, $0 < s < 1$ (ver, por exemplo, Schultze e Steinebach (1996) e referências citadas).

Muitos estimadores de R surgiram no contexto do problema apresentado neste capítulo, de entre os quais se destaca o clássico estimador de Hill:

² $l(\cdot)$ diz-se uma função de variação lenta em ∞ se $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ for uma função que verifica: $\forall y > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(ty)}{l(t)} = 1$ (esta definição coincide com a de variação regular em ∞ no caso particular de $\rho = 0$).

³ $L(\cdot)$ diz-se uma função de variação lenta em 0 se $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ for uma função tal que $L(x^{-1})$ é de variação lenta em ∞ .

$$\begin{aligned}
H_n(k_n) &= \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln X_{n-i+1,n} - \ln X_{n-k_n,n} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} - Z_{n-k_n,n} \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

cuja consistência fraca foi provada por Mason (1982), para qualquer sucessão k_n que verifica (1.4), e cuja consistência forte foi provada por Deheuvels, Haeusler e Mason (1988), para sucessões k_n de inteiros positivos tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n / (\ln(\ln n)) = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = 0$.

Uma subfamília da apresentada em (2.2) bastante usada neste problema, e que iremos considerar adiante, é a caracterizada por:

$$Q(1-s) = s^{-1/R} D_1 (1 + D_2 s^\beta \{1 + o(1)\}), \quad \text{quando } s \rightarrow 0, \tag{2.4}$$

onde $D_1 > 0$, $D_2 \neq 0$ e $\beta > 0$ são constantes.

Tal subfamília de (2.2) designa-se por modelo de Hall.

3 Relação entre os estimadores $\widehat{R}_1(k_n)$ e $\widehat{R}_{qq}(k_n)$

Um dos estimadores de R , que apareceu no contexto apresentado no capítulo 2, é o estimador $\widehat{R}_{qq}(k_n)$, introduzido por Kratz e Resnick (1996).

Tal estimador foi motivado pelo facto de que, sendo $U_{1,n} \leq U_{2,n} \leq \dots \leq U_{n,n}$ as estatísticas de ordem de uma amostra de n v.a. i.i.d. uniformemente distribuídas em $(0, 1)$, se tem $E(U_{i,n}) = \frac{i}{n+1}$.

O estimador que foi obtido é, tal como o estimador $\widehat{R}_1(k_n)$ definido em (1.2), o inverso de um estimador deduzido pelo método dos mínimos quadrados, tendo sido neste caso baseado nos pontos

$$\left\{ \left(-\ln \left(1 - \frac{i}{k_n + 1} \right), \ln x_{n-k_n+i,n} \right), 1 \leq i \leq k_n \right\},$$

onde $x_{n-k_n+1,n} \leq x_{n-k_n+2,n} \leq \dots \leq x_{n,n}$ são as k_n maiores observações da realização duma amostra X_1, X_2, \dots, X_n de v.a. i.i.d. cuja função de distribuição $H(\cdot)$ verifica (2.1).

A expressão de $\widehat{R}_{qq}(k_n)$ é, então,

$$\widehat{R}_{qq}(k_n) = \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \left(-\ln \left(1 - \frac{i}{k_n+1} \right) \right)^2 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} -\ln \left(1 - \frac{i}{k_n+1} \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \left(-\ln \left(1 - \frac{i}{k_n+1} \right) \ln X_{n-k_n+i,n} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln X_{n-k_n+i,n} \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} -\ln \left(1 - \frac{i}{k_n+1} \right) \right)}.$$

Uma vez passada para o contexto da estimação do coeficiente de cauda exponencial fazendo a mudança de variável $X_i = e^{Z_i}$, façamos $j = k_n - i + 1$, de forma a obter a expressão:

$$\widehat{R}_{qq}(k_n) = \frac{\sum_{j=1}^{k_n} \ln^2 \left(\frac{k_n+1}{j} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{j=1}^{k_n} \ln \left(\frac{k_n+1}{j} \right) \right)^2}{\sum_{j=1}^{k_n} \left(\ln \left(\frac{k_n+1}{j} \right) Z_{n-j+1,n} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{j=1}^{k_n} Z_{n-j+1,n} \right) \left(\sum_{j=1}^{k_n} \ln \left(\frac{k_n+1}{j} \right) \right)}. \quad (3.1)$$

Investiguemos agora qual a relação entre os estimadores $\widehat{R}_1(k_n)$ e $\widehat{R}_{qq}(k_n)$.

Comparando-se directamente as expressões (1.2) de $\widehat{R}_1(k_n)$ e (3.1) de $\widehat{R}_{qq}(k_n)$, vê-se que não têm exactamente a mesma forma. Note-se contudo o seguinte:

$\widehat{R}_1^{-1}(k_n)$ foi obtido pelo método dos mínimos quadrados, baseado nos pontos

$$\left\{ \left(\ln \left(\frac{n}{i} \right), z_{n-i+1,n} \right), 1 \leq i \leq k_n \right\},$$

enquanto que $\hat{R}_{qq}^{-1}(k_n)$ foi obtido pelo mesmo método, baseado desta vez nos pontos

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(-\ln \left(1 - \frac{i}{k_n + 1} \right), \ln x_{n-k_n+i,n} \right), 1 \leq i \leq k_n \right\} \\
 = & \left\{ \left(\ln \left(\frac{k_n + 1}{k_n - i + 1} \right), z_{n-k_n+i,n} \right), 1 \leq i \leq k_n \right\} \\
 = & \left\{ \left(\ln \left(\frac{k_n + 1}{j} \right), z_{n-j+1,n} \right), 1 \leq j \leq k_n \right\}.
 \end{aligned}$$

Geometricamente temos então, no primeiro caso (isto é, no de $\hat{R}_1(k_n)$),

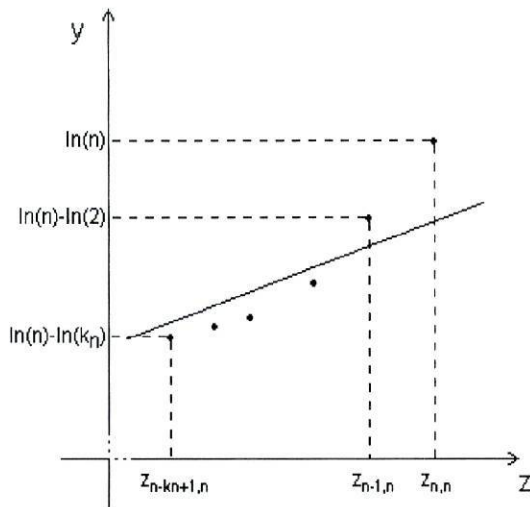


Figura 3.1

e no segundo (isto é, no de $\hat{R}_{qq}(k_n)$),

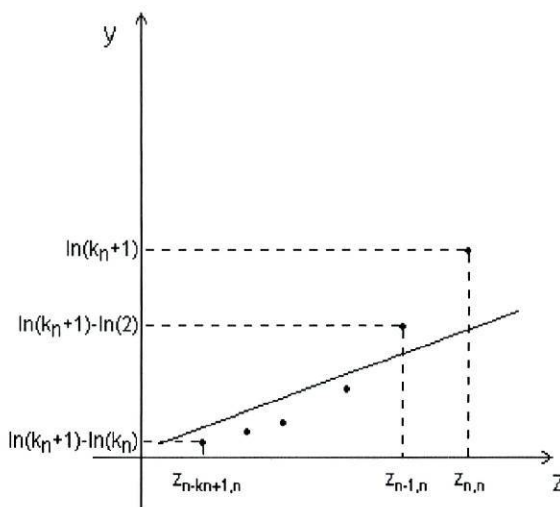


Figura 3.2

Notemos pois que a nuvem de pontos da figura 3.2 é apenas uma translação da nuvem de pontos da figura 3.1. Portanto, as rectas obtidas pelo método dos mínimos quadrados têm, em ambos os casos, o mesmo declive, pelo que os dois estimadores $\hat{R}_1(k_n)$ e $\hat{R}_{qq}(k_n)$ são iguais.

De facto, tal conclusão poderá também ser tirada facilmente por simplificação das expressões dos estimadores $\hat{R}_1(k_n)$ e $\hat{R}_{qq}(k_n)$:

Consideremos então, inicialmente, o numerador que surge na expressão (1.2) do primeiro estimador. Temos, portanto, que

$$\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2 = \sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 i - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln i \right)^2.$$

Consideremos agora o denominador da expressão (1.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right) \\ = & \sum_{i=1}^{k_n} \ln n Z_{n-i+1,n} - \sum_{i=1}^{k_n} \ln i Z_{n-i+1,n} - \\ & - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln n \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) + \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln i \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) \\ = & \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln i \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) - \sum_{i=1}^{k_n} ((\ln i) Z_{n-i+1,n}). \end{aligned}$$

O estimador $\hat{R}_1(k_n)$ pode então escrever-se da seguinte forma:

$$\hat{R}_1(k_n) = \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 i - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln i \right)^2}{\frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln i \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) - \sum_{i=1}^{k_n} ((\ln i) Z_{n-i+1,n})}. \quad (3.2)$$

Procedendo agora de modo análogo ao que fizemos para $\hat{R}_1(k_n)$, obtemos, para o estimador $\hat{R}_{qq}(k_n)$, exactamente a mesma expressão que surge em (3.2).

4 Um novo estimador do coeficiente de cauda exponencial, $\hat{R}(k_n)$

No seguimento do estudo dos estimadores $\hat{R}_1(k_n)$ e $\hat{R}_3(k_n)$ apresentados no capítulo 1, surgiu a ideia de, em vez de proceder como em qualquer desses dois casos correspondentes às figuras 1.1 e 1.2, determinar o declive da recta $y = \hat{r}z - \hat{d}$ que minimiza a soma das áreas dos rectângulos cujos vértices são: (z_i, y_i) , $(\hat{a}y_i + \hat{b}, y_i)$, $(z_i, \hat{r}z_i - \hat{d})$ e $(\hat{a}y_i + \hat{b}, \hat{r}z_i - \hat{d})$, $i = 1, \dots, k_n$, onde y_i e z_i são definidos como no capítulo 1, $\hat{a} = (\hat{r})^{-1}$ e $\hat{b} = (\hat{r})^{-1} \hat{d}$.

A figura correspondente a este caso é a seguinte:

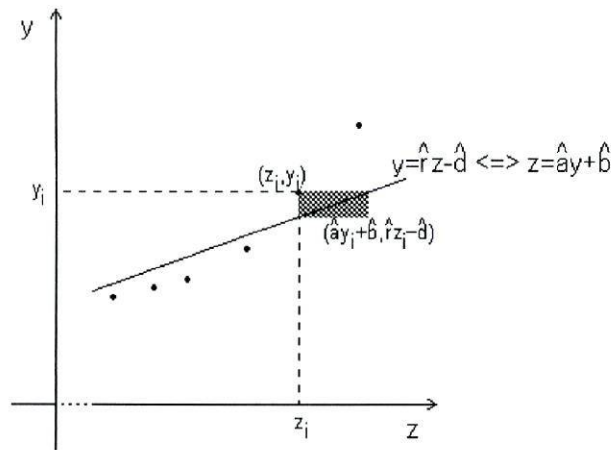


Figura 4.1

Deduzamos então o estimador correspondente, $\hat{R}(k_n)$, minimizando a função $f(R, d) = \sum_{i=1}^{k_n} (z_i - ay_i - b)(y_i - Rz_i + d) = \sum_{i=1}^{k_n} (z_i - \frac{1}{R}y_i - \frac{d}{R})(y_i - Rz_i + d)$. Pretendemos pois determinar (\hat{r}, \hat{d}) de modo que $\frac{\partial f}{\partial d}(\hat{r}, \hat{d}) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial R}(\hat{r}, \hat{d}) = 0$. Temos então que

$$\frac{\partial f}{\partial d}(\hat{r}, \hat{d}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k_n} \left\{ -\frac{1}{\hat{r}}(y_i - \hat{r}z_i + \hat{d}) + \left(z_i - \frac{1}{\hat{r}}y_i - \frac{\hat{d}}{\hat{r}} \right) \right\} = 0 \Leftrightarrow \hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k_n} (\hat{r}z_i - y_i)}{k_n} \quad (4.1)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial R}(\hat{r}, \hat{d}) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k_n} \left\{ \frac{1}{\hat{r}^2} (y_i + \hat{d}) (y_i - \hat{r}z_i + \hat{d}) - z_i \left(z_i - \frac{1}{\hat{r}}y_i - \frac{\hat{d}}{\hat{r}} \right) \right\} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \hat{r}^2 \sum_{i=1}^{k_n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{k_n} y_i^2 + 2\hat{d} \sum_{i=1}^{k_n} y_i + k_n \hat{d}^2. \end{aligned}$$

Substituindo agora \hat{d} pela expressão encontrada em (4.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial R}(\hat{r}, \hat{d}) &= 0 \Leftrightarrow \hat{r}^2 \sum_{i=1}^{k_n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{k_n} y_i^2 + 2 \frac{\sum_{i=1}^{k_n} (\hat{r} z_i - y_i)}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} y_i + k_n \left(\frac{\sum_{i=1}^{k_n} (\hat{r} z_i - y_i)}{k_n} \right)^2 \\
&\Leftrightarrow \hat{r}^2 \sum_{i=1}^{k_n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{k_n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k_n} y_i \right)^2}{k_n} + \hat{r}^2 \frac{\left(\sum_{i=1}^{k_n} z_i \right)^2}{k_n} \\
&\Leftrightarrow \hat{r} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k_n} y_i^2 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{k_n} z_i^2 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} z_i \right)^2}}.
\end{aligned}$$

O estimador correspondente é, portanto, dado pela expressão:

$$\hat{R}(k_n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2\left(\frac{n}{i}\right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right) \right)^2}{\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}^2 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2}}. \quad (4.2)$$

Note-se pois que o estimador encontrado, $\hat{R}(k_n)$, é a média geométrica dos estimadores $\hat{R}_1(k_n)$ e $\hat{R}_3(k_n)$, isto é,

$$\hat{R}(k_n) = \sqrt{\hat{R}_1(k_n) \hat{R}_3(k_n)}.$$

Assim sendo, obtemos o seguinte teorema acerca da consistência de $\hat{R}(k_n)$:

Teorema 4.1

Seja $F(\cdot)$ uma função de distribuição que verifica (1.1), e k_n uma sucessão de inteiros que satisfazem (1.4) e (1.5). Suponhamos ainda que (1.6) também é verificada. Temos então que:

$$\hat{R}(k_n) \xrightarrow{P} R.$$

Demonstração:

Sob (1.1), (1.4), (1.5) e (1.6) temos, pelo teorema 1.1, que

$$\hat{R}_1(k_n) \xrightarrow{P} R \quad \text{e} \quad \hat{R}_3(k_n) \xrightarrow{P} R,$$

o que implica, pelo teorema de Slutsky, que

$$\hat{R}_1(k_n)\hat{R}_3(k_n) \xrightarrow{P} R^2,$$

e, conseqüentemente, que

$$\hat{R}(k_n) = \sqrt{\hat{R}_1(k_n)\hat{R}_3(k_n)} \xrightarrow{P} \sqrt{R^2} = R,$$

como queríamos mostrar. ■

Note-se que, para além de termos que $\hat{R}(k_n) = \sqrt{\hat{R}_1(k_n)\hat{R}_3(k_n)}$, surge ainda o seguinte:

Lema 4.2

Sejam $\hat{R}_1(k_n)$, $\hat{R}_3(k_n)$ e $\hat{R}(k_n)$ os estimadores apresentados em (1.2), (1.3) e (4.2), respectivamente. Tem-se então que

$$\hat{R}_3(k_n) \leq \hat{R}(k_n) \leq \hat{R}_1(k_n).$$

Demonstração:

Para mostrarmos o pretendido, basta mostrar que

$$\hat{R}_3(k_n) \leq \hat{R}_1(k_n)$$

(pois, sendo $\hat{R}(k_n)$ a média geométrica dos estimadores $\hat{R}_1(k_n)$ e $\hat{R}_3(k_n)$, $\hat{R}(k_n)$ encontra-se necessariamente enquadrado entre os dois).

Mas isso equivale, atendendo às expressões (1.2) e (1.3), a ver que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right) \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}^2 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2 \right). \quad (4.3) \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right) = \\ & = \sum_{i=1}^{k_n} \left(\left(\ln \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right) \left(Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2 = \sum_{i=1}^{k_n} \left(\left(\ln \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2 \right)$$

e

$$\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}^2 - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2 = \sum_{i=1}^{k_n} \left(\left(Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2 \right).$$

A desigualdade (4.3) é assim equivalente à seguinte:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{k_n} \left(\left(\ln \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right) \left(Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right) \right) \right)^2 \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{k_n} \left(\left(\ln \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2 \right) \sum_{i=1}^{k_n} \left(\left(Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

decorrendo, esta última, directamente da desigualdade de Cauchy-Schwarz. ■

5 Estimação do coeficiente de ajustamento na teoria do risco, como exemplo de aplicação

Como referem Csörgo e Steinebach (1991), o problema de estimação inicialmente proposto é motivado por um problema importante na teoria do risco, que passamos a apresentar resumidamente.

Considere-se uma sucessão C_1, C_2, \dots de indemnizações que ocorrem nos tempos $T_1, T_1 + T_2, \dots$, onde $\{C_i\}$ e $\{T_i\}$ são sucessões independentes de v.a. i.i.d.. Defina-se a sucessão

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = \sum_{i=1}^n T_i,$$

e o processo $N(\cdot)$ por

$$N(t) = \max\{n \geq 0 : \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

que corresponde ao número de indemnizações ocorridas até t . Se $C(t)$ denotar então a soma total de indemnizações ocorridas até t , tem-se que

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i.$$

Suponhamos, agora, que uma companhia de seguros começa com uma reserva inicial x , e recebe os prémios na razão de $\gamma > 0$ por unidade de tempo. A mesma acumula então, até t ,

$$S(t) = x + \gamma t - C(t).$$

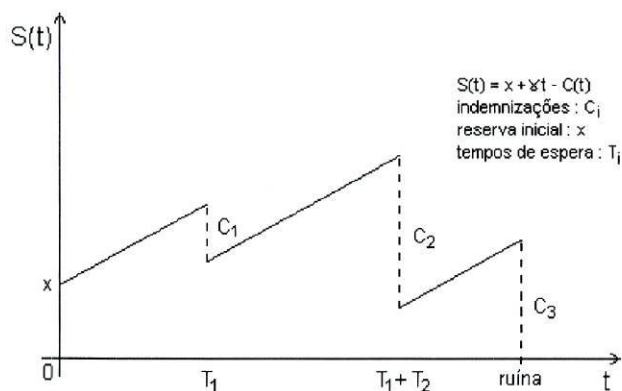


Figura 5.1

A probabilidade de ruína da companhia é, portanto, dada por

$$\begin{aligned} U(x) &= P \left\{ \inf_{t>0} S(t) \leq 0 \right\} \\ &= P \left\{ \sup_{t>0} (C(t) - \gamma t) \geq x \right\} \\ &= P \left\{ \max_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (C_i - \gamma T_i) \geq x \right\}. \end{aligned}$$

Definam-se agora as v.a. i.i.d. $D_i = C_i - \gamma T_i$, $i = 1, 2, \dots$, e suponha-se que a função geradora de momentos das mesmas,

$$M_{D_1}(r) = E(e^{rD_1}),$$

é finita num intervalo $[0, r_0)$, e que $M'_{D_1}(0+) < 0$.

Sob tais condições, verifica-se uma desigualdade que nos fornece um majorante para a probabilidade de ruína $U(x)$ (desigualdade de Cramér-Lundberg):

$$U(x) \leq e^{-Rx}, \tag{5.1}$$

onde R , denominado por coeficiente de ajustamento, é definido como sendo a única solução positiva de $M_{D_1}(r) = 1$.

O que se pretende é, portanto, estimar o valor de R , e conseqüentemente o majorante de $U(x)$ que surge em (5.1). Csörgo e Steinebach sugeriram que tal estimação se baseasse numa sucessão auxiliar Z_1, Z_2, \dots , construída da seguinte forma:

Considerando-se as sucessões

$$M_0 = 0, \quad M_n = [M_{n-1} + D_n]^+, \quad n = 1, 2, \dots$$

e

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_k = \min\{n \geq \nu_{k-1} + 1 : M_n = 0\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

defina-se

$$Z_k = \max_{\nu_{k-1} < j \leq \nu_k} \{M_j\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Z_1, Z_2, \dots é, desta forma, uma sucessão de v.a. i.i.d. que satisfaz:

$$P(Z_1 > z) = \exp\{-(1 + o(1))Rz\} \text{ quando } z \rightarrow \infty$$

(ver, por exemplo, Schultze e Steinebach (1996) e referências citadas). Para além disso, se $\{C(t)\}$ for um processo de Poisson composto, ou se as indemnizações C_j forem exponencialmente distribuídas, então

$$P(Z_1 > z) = ce^{-Rz} \{1 + O(e^{-Az})\} \text{ quando } z \rightarrow \infty,$$

onde R é o coeficiente de ajustamento, e c e A são constantes positivas (ver, por exemplo, Csörgo e Steinebach (1991) e referências citadas).

Tem-se, então, que a função de distribuição das v.a. i.i.d. Z_1, Z_2, \dots , definidas em (5.2), satisfaz (1.1). Assim, o coeficiente de ajustamento pode ser estimado por qualquer dos estimadores apresentados anteriormente.

5.1 Um exemplo típico

Suponhamos agora que o processo $\{C(t)\}$ é um processo de Poisson composto com as indemnizações $\{C_j\}$ exponencialmente distribuídas, e coloquemos

$$\alpha := E(\gamma T_1) > E(C_1) =: \beta.$$

Então,

$$\begin{aligned} M_{D_1}(t) &= E(e^{t(C_1 - \gamma T_1)}) \\ &= E(e^{tC_1} e^{t(-\gamma T_1)}) \\ &= E(e^{tC_1}) E(e^{t(-\gamma T_1)}) \\ &= \left(\frac{1}{1 - \beta t}\right) \left(\frac{1}{1 + \alpha t}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1 - \beta t)(1 + \alpha t)}, \quad t \in \left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right).$$

Como se conhece a forma explícita da função geradora de momentos, pode-se calcular o valor do coeficiente de ajustamento R , como sendo a solução positiva da equação $(1 + \alpha R)(1 - \beta R) = 1$, obtendo-se $R = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}$.

Neste caso, conhece-se ainda a forma explícita da função de distribuição, $F(\cdot)$, das v.a. i.i.d. Z_1, Z_2, \dots definidas em (5.2):

$$F(z) = \frac{1 - a \exp(-(1 - a)z/\beta)}{1 - a^2 \exp(-(1 - a)z/\beta)}, \quad z > 0, \quad (5.3)$$

onde $a := \beta/\alpha$ (ver, por exemplo, Schultze e Steinebach (1996) e referências citadas).

5.2 Um exemplo de seguro de vida

Em seguros de vida, é habitual supôr-se que as indenizações são constantes e que o processo de contagem é de Poisson. Sejam, portanto,

$$C_j = E(C_j) =: \beta \quad \text{e} \quad T_j \stackrel{D}{\sim} \text{Exp}(\lambda), \quad j = 1, \dots, n,$$

e coloque-se novamente

$$\alpha := E(\gamma T_1).$$

Então,

$$M_{D_1}(t) = E(e^{t(\beta - \gamma T_1)}) = e^{t\beta} \frac{1}{1 + \alpha t}, \quad t > -\frac{1}{\alpha},$$

sendo R , neste caso, a única solução positiva da equação $e^{R\beta} - \alpha R - 1 = 0$.

6 Estudo de simulação

Neste capítulo, iremos apresentar e analisar resultados que obtivemos por simulação, de modo a ilustrar o comportamento, em amostras finitas, dos estimadores $\hat{R}_1(k_n)$, $\hat{R}_3(k_n)$ e $\hat{R}(k_n)$.

Tais estimadores serão ainda comparados com o estimador de Hill de R , $H_n(k_n)$.

Os resultados obtidos dizem respeito:

1. ao exemplo descrito na secção 5.1, nos casos de:

i. $(\alpha, \beta) = (24000, 10000)$, sendo portanto $5.8(3) \times 10^{-5}$ o valor exacto de R (o

que permite avaliar a qualidade dos estimadores)

ii. $(\alpha, \beta) = (0.01, 0.005)$, sendo 100 o valor exacto de R

2. ao caso particular do modelo de Hall (apresentado em (2.4)), em que

$$Q(s) = (1 - s)^{-1/R} D_1 (1 + D_2(1 - s)^\beta), \quad (6.1)$$

$D_1 = D_2 = 10^{-2}$ e $\beta = 1$, nos casos de :

i. $R = 0.01$

ii. $R = 100$.

Antes de mais, iremos começar por dar uma ideia do procedimento que usamos nas simulações.

Primeiro, teríamos que gerar uma Z - amostra de tamanho n , em que:

- cada variável aleatória Z_i tivesse como função de distribuição a definida em (5.3), no caso 1.
- cada variável aleatória e^{Z_i} tivesse, como inversa generalizada da sua função de distribuição, a função $Q(\cdot)$ definida em (6.1), no caso 2..

Em seguida, teríamos que ordená-la, de modo a podermos tomar as k_n maiores observações da realização da amostra obtida, para calcular os valores dos estimadores.

Contudo, a ordenação de um vector é um procedimento demorado. Portanto, o que fizemos foi gerar directamente uma amostra já ordenada. Para isso, baseámo-nos no facto de que, se tivermos uma sucessão de v.a. i.i.d. U_1, U_2, \dots, U_{k_n} uniformemente distribuídas sobre o intervalo $(0, 1)$, e se fizermos:

$$U_{n,n} := U_1^{1/n},$$

$$U_{n-i+1,n} := U_{n-i+2,n} U_i^{1/(n-i+1)}, \quad i = 2, 3, \dots, k_n,$$

podemos obter $Z_{n-i+1,n}$ por

$$Z_{n-i+1,n} := S(U_{n-i+1,n}), \quad i = 1, 2, \dots, k_n,$$

onde $S(\cdot)$ é a inversa generalizada da função de distribuição de cada Z_i (ver, por exemplo, Dekkers (1991), Fraga Alves (1995) e referências citadas).

As simulações foram feitas para tamanhos da Z - amostra de 50, 100, 500 e 1000. Em cada caso, determinaram-se os valores dos estimadores para vários valores de k_n (para $n = 50$ tomamos k_n até 40, para $n = 100$ tomamos k_n até 70, para $n = 500$ tomamos k_n até 200 e para $n = 1000$ tomamos k_n até 300). Após 100 repetições do processo, calculou-se, para cada k_n considerado, a média e o desvio padrão dos valores obtidos para cada estimador.

Os procedimentos atrás referidos foram implementados em algoritmos criados para o efeito, tendo-se feito as simulações no programa Mathematica 3.0.

Os resultados obtidos foram resumidos nos gráficos e tabelas que se encontram no Apêndice B.

Cada gráfico representa, para um dado tamanho da amostra n , a média das estimativas que se obtiveram para cada estimador (sobre as 100 repetições do processo), em função de k_n .

Em cada tabela são apresentados, para alguns valores de k_n , os valores dos desvios padrões que se obtiveram para os quatro estimadores.

O comportamento dos estimadores $\widehat{R}_1(k_n)$, $\widehat{R}_3(k_n)$ e $\widehat{R}(k_n)$ é, em qualquer dos casos, semelhante. O último estimador toma sempre valores entre os outros dois, o que não poderia deixar de se verificar visto $\widehat{R}(k_n)$ ser a média geométrica de $\widehat{R}_1(k_n)$ e $\widehat{R}_3(k_n)$. Para além disso, $\widehat{R}_3(k_n)$ é o que toma valores mais baixos, facto também já provado no capítulo 4 ($\widehat{R}_3(k_n) \leq \widehat{R}(k_n) \leq \widehat{R}_1(k_n)$).

Vê-se também que o estimador de Hill, $H_n(k_n)$, apresenta, em função de k_n , uma variabilidade maior do que as dos outros estimadores, essencialmente para valores pequenos de k_n . Pode dizer-se que as curvas obtidas para o estimador de Hill são menos “suaves” do que as obtidas para os estimadores $\widehat{R}_1(k_n)$, $\widehat{R}_3(k_n)$ e $\widehat{R}(k_n)$.

Da consulta dos gráficos, nota-se que entre os casos **1.i.**, **1.ii.** e **2.ii.** não existe grande diferença do comportamento de cada estimador. Nestes casos, todos os estimadores apresentam viés muito elevados para valores muito pequenos de k_n . Para cada estimador há um valor de k_n para o qual o viés é mínimo, e a partir do qual este aumenta à medida que k_n aumenta. $H_n(k_n)$ é o estimador que, nos casos atrás mencionados, apresenta maiores viés.

O caso **2.i.** apresenta resultados um pouco diferentes dos outros. Aqui, observa-se que, à medida que k_n aumenta, o viés obtido para os estimadores tende a diminuir ligeiramente, sendo, neste caso, $H_n(k_n)$ o estimador que apresenta, para $n = 500$ e $n = 1000$, menores viés.

No que diz respeito aos desvios padrões, optamos por não apresentar as tabelas correspondentes aos casos **1.ii.** e **2.ii.**, visto fornecerem pouca informação. O valor a ser estimado nestes casos é 100, tendo-se obtido, portanto, valores dos desvios padrões bastante elevados para qualquer dos estimadores. Por exemplo, no caso **1.ii.**, para $n = 500$ e $k_n = 200$, os desvios padrões obtidos para os estimadores $\widehat{R}_3(k_n)$, $\widehat{R}(k_n)$, $\widehat{R}_1(k_n)$ e $H_n(k_n)$ foram, respectivamente, 12.4905, 12.0428, 11.6362 e 10.1946.

Em qualquer dos quatro casos, como era de esperar, os desvios padrões diminuem com o aumento do tamanho da amostra (poderão ser consultadas as tabelas referentes aos casos **1.i.** e **2.i.**). O valor do desvio padrão das estimativas de $\widehat{R}(k_n)$, fixados n e k_n , está, em quase todas as experiências de simulação, enquadrado entre os valores dos desvios padrões das estimativas de $\widehat{R}_1(k_n)$ e de $\widehat{R}_3(k_n)$.

Em todos os casos considerados (**1.i.**, **1.ii.**, **2.i.** e **2.ii.**), e para todos os valores de n , o estimador de Hill é aquele que apresenta menores desvios padrões, excepto para alguns valores de k_n muito pequenos.

Contudo, como já se referiu, o estimador de Hill é, de entre todos os estimadores considerados, o que apresenta, na maior parte dos casos, as médias mais afastadas do valor exacto de R . O desvio padrão não é, portanto, um bom critério de superioridade.

Nota-se ainda que a escolha de k_n é muito importante para a qualidade de ajustamento

do estimador. Nas simulações efectuadas, fixado o tamanho da amostra, temos que (para qualquer dos estimadores), para pequenos valores de k_n se obtêm grandes desvios padrões (sobre as 100 repetições do processo), enquanto que, para elevados valores de k_n se obtêm, na maioria dos casos, estimativas com grandes viés. Sendo assim, numa tentativa de coadunar a minimização do desvio padrão e do viés, dever-se-ão tomar valores para k_n nem muito pequenos nem muito grandes.

7 Normalidade assintótica

A distribuição assintótica dos estimadores $1/\hat{R}_1(k_n)$ e $1/\hat{R}_3(k_n)$ de $1/R$ foi estudada por Csörgo e Viharos (1997), no contexto do problema da estimação do índice de cauda superior da família de Pareto, isto é, Csörgo e Viharos estudaram a distribuição assintótica dos estimadores de $1/R$:

$$\hat{\alpha}_1(k_n) = \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right) \ln X_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln X_{n-i+1,n}\right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2\left(\frac{n}{i}\right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right)\right)^2}$$

e

$$\hat{\alpha}_3(k_n) = \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 X_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln X_{n-i+1,n}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right) \ln X_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln X_{n-i+1,n}\right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right)\right)},$$

onde $X_{n-k_n+1,n} \leq X_{n-k_n+2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ são as k_n maiores estatísticas de ordem numa amostra X_1, X_2, \dots, X_n de v.a. i.i.d. cuja função de distribuição $H(\cdot)$ verifica (2.1).

Os resultados obtidos, quando passados para o contexto da estimação do coeficiente de cauda exponencial, reescrevem-se do seguinte modo:

Teorema 7.1 (Csörgo e Viharos (1997), teorema 1.1)

Seja k_n uma sucessão de inteiros positivos que verificam (1.4) e tais que $k_n/\ln^4 n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, se $F(\cdot)$ for uma função de distribuição que verifica (1.1) e $S(\cdot)$ for a sua inversa generalizada, tem-se que

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\hat{R}_1(k_n)} - \mu_n^{(1)}(k_n) \right\} \xrightarrow{D} N \left(0, 2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right),$$

onde

$$\mu_n^{(1)}(k_n) := -\frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} S(1-t-) \left\{ 1 + \ln \left(\frac{nt}{k_n} \right) \right\} dt \rightarrow 1/R, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Teorema 7.2 (Csörgo e Viharos (1997), teorema 1.3)

Seja k_n uma sucessão de inteiros positivos que verificam (1.4) e tais que $k_n/\ln^4 n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, se $F(\cdot)$ for uma função de distribuição que verifica (1.1) e

$S(\cdot)$ for a sua inversa generalizada, tem-se que

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_3(k_n)} - \mu_n^{(3)}(k_n) \right\} \xrightarrow{D} N \left(0, 2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right),$$

onde

$$\mu_n^{(3)}(k_n) := \frac{\frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} S^2(1-t-) dt - \left(\frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} S(1-t-) dt \right)^2}{-\frac{n}{k_n} \int_0^{k_n/n} S(1-t-) \left\{ 1 + \ln \left(\frac{nt}{k_n} \right) \right\} dt} \rightarrow 1/R, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Conclui-se, então, que os estimadores $1/\widehat{R}_1(k_n)$ e $1/\widehat{R}_3(k_n)$ de $1/R$ são universalmente assintoticamente normais sobre toda a classe de funções de distribuição que satisfazem (1.1), desde que se verifique (1.4) e que $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n / \ln^4 n = \infty$.

Considerando agora o quadrado do novo estimador introduzido, isto é, $1/(\widehat{R}(k_n))^2$, podemos obter o seguinte resultado acerca da sua normalidade assintótica:

Teorema 7.3

Seja k_n uma sucessão de inteiros positivos que verificam (1.4) e tais que $k_n / \ln^4 n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, se $F(\cdot)$ for uma função de distribuição que verifica (1.1), tem-se que

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{(\widehat{R}(k_n))^2} - \mu_n(k_n) \right\} \xrightarrow{D} N \left(0, 8 \left(\frac{1}{R} \right)^4 \right),$$

onde $\mu_n(k_n) := \mu_n^{(1)}(k_n) \mu_n^{(3)}(k_n)$ e $\mu_n^{(1)}(k_n)$ e $\mu_n^{(3)}(k_n)$ são as sucessões definidas nos dois últimos teoremas.

Para provarmos o teorema, necessitamos dos dois seguintes lemas:

Lema 7.4 (Csörgo e Viharos (1997), lema 5.4 iii)

Seja k_n uma sucessão de inteiros positivos tais que $1 \leq k_n \leq n$. Considere-se a sucessão $i_n(k_n) := \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 \left(\frac{n}{i} \right) - \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2$. Tem-se então que

$$i_n(k_n) = 1 + O \left(\frac{\ln^2 n}{k_n} \right).$$

Lema 7.5 (Csörgo e Viharos (1997), lema 5.6)

Sejam k_n uma sucessão de inteiros positivos que verificam (1.4) e tais que $k_n / \ln^4 n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$

∞ , $W_n(k_n) := \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}^2 - \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2$ e $\mu_n(k_n) = \mu_n^{(1)}(k_n) \mu_n^{(3)}(k_n)$. Então, $k_n^{1/2} \{W_n(k_n) - \mu_n(k_n)\} = N_n^* + o_P(1)$, para uma dada sucessão $N_n^* = N_n^*(l_n, k_n)$ (onde l_n é uma sucessão convenientemente escolhida) que é tal que

$$N_n^* \xrightarrow{D} N \left(0, 8 \left(\frac{1}{R} \right)^4 \right).$$

Demonstração do Teorema 7.3:

A expressão do estimador $\frac{1}{(\widehat{R}(k_n))^2}$ de $1/R^2$ é a seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\widehat{R}(k_n))^2} &= \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n) \widehat{R}_3(k_n)} \\ &= \frac{\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}^2 - \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2}{\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln^2\left(\frac{n}{i}\right) - \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right) \right)^2}. \end{aligned}$$

Notemos agora que podemos escrever:

$$\begin{aligned} &k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{(\widehat{R}(k_n))^2} - \mu_n(k_n) \right\} \\ &= k_n^{1/2} \left\{ \frac{W_n(k_n)}{i_n(k_n)} - \mu_n^{(1)}(k_n) \mu_n^{(3)}(k_n) \right\} \\ &= \frac{1}{i_n(k_n)} k_n^{1/2} \{W_n(k_n) - \mu_n^{(1)}(k_n) \mu_n^{(3)}(k_n)\} - \frac{\mu_n^{(1)}(k_n) \mu_n^{(3)}(k_n)}{i_n(k_n)} k_n^{1/2} (i_n(k_n) - 1), \end{aligned}$$

em que as sucessões $i_n(k_n)$ e $W_n(k_n)$ são as definidas nos lemas (7.4) e (7.5), respectivamente.

Como $k_n/\ln^4 n \rightarrow \infty$, temos, pelo lema 7.4 (ou pelo lema 1 do Apêndice A), que $i_n(k_n) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Logo, pelo lema 7.5,

$$\frac{1}{i_n(k_n)} k_n^{1/2} \{W_n(k_n) - \mu_n^{(1)}(k_n) \mu_n^{(3)}(k_n)\} \xrightarrow{D} N \left(0, 8 \left(\frac{1}{R} \right)^4 \right).$$

Para provarmos o pretendido basta, então, ver que

$$\frac{\mu_n^{(1)}(k_n)\mu_n^{(3)}(k_n)}{i_n(k_n)}k_n^{1/2}(i_n(k_n) - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mas, pelo lema 7.4, temos

$$i_n(k_n) - 1 = O\left(\frac{\ln^2 n}{k_n}\right),$$

e, conseqüentemente,

$$k_n^{1/2}(i_n(k_n) - 1) = O\left(\frac{\ln^2 n}{k_n^{1/2}}\right).$$

Usando novamente o facto de que $k_n/\ln^4 n \rightarrow \infty$, vem que $\frac{\ln^2 n}{k_n^{1/2}} \rightarrow 0$, pelo que

$$k_n^{1/2}(i_n(k_n) - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pelos teoremas 7.1 e 7.2 temos ainda, respectivamente, que $\mu_n^{(1)}(k_n) \rightarrow 1/R$ e $\mu_n^{(3)}(k_n) \rightarrow 1/R$ quando $n \rightarrow \infty$, provando-se então que

$$\frac{\mu_n^{(1)}(k_n)\mu_n^{(3)}(k_n)}{i_n(k_n)}k_n^{1/2}(i_n(k_n) - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

como queríamos mostrar. ■

Conclui-se, então, que o estimador $1/(\widehat{R}(k_n))^2$ de $1/R^2$ é, tal como os estimadores $1/\widehat{R}_1(k_n)$ e $1/\widehat{R}_3(k_n)$ de $1/R$, universalmente assintoticamente normal sobre toda a classe de funções de distribuição que satisfazem (1.1), desde que se verifique (1.4) e que $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/\ln^4 n = \infty$.

Comentário:

Note-se que, por exemplo, o clássico estimador de Hill de $1/R$,

$$H_n^{-1}(k_n) = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln X_{n-i+1,n} - \ln X_{n-k_n,n},$$

embora consistente, não é universalmente assintoticamente normal sobre toda a classe $\mathbf{R}_{1/R}$. Não existe pois uma sucessão numérica, $\mu_n^{(H)}(k_n)$, que verifique: $\mu_n^{(H)}(k_n) \rightarrow 1/R$ quando $n \rightarrow \infty$, e de modo que $k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{H_n(k_n)} - \mu_n^{(H)}(k_n) \right\}$ seja assintoticamente normal sobre toda a classe $\mathbf{R}_{1/R}$. Foram feitos variados estudos acerca da distribuição assintótica de $H_n^{-1}(k_n)$. Os resultados obtidos sobre normalidade assintótica usam pois condições restritivas sobre a classe $\mathbf{R}_{1/R}$ (ver, por exemplo, Csörgo e Viharos (1995) e referências citadas).

Iremos então apresentar um desses resultados, provado por Csörgo e Viharos (1995), que corresponde a uma generalização de um resultado de Csörgo e Mason (1985).

Considerem-se, para isso, as funções $Q(\cdot)$ e $L(\cdot)$ definidas como em (2.2), e a representação de Karamata da última:

$$L(s) = a_L(s) \exp \left\{ \int_s^1 \frac{b_L(u)}{u} du \right\}, \quad 0 < s < 1, \quad (7.1)$$

onde $\lim_{s \rightarrow 0} a_L(s) = a_0$, para algum $a_0 \in (0, \infty)$, e $\lim_{s \rightarrow 0} b_L(s) = 0$.

Defina-se agora a sucessão

$$c_n(k_n) := \frac{n}{k_n} \int_{1-k_n/n}^1 (1-s) d \log Q(s). \quad (7.2)$$

Csörgo e Mason provaram inicialmente que:

$$\text{se } H \in \mathbf{R}_{1/R}, \text{ então } c_n(k_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1/R.$$

O resultado de Csörgo e Mason acima mencionado, acerca da normalidade assintótica de $H_n^{-1}(k_n)$, baseia-se então no seguinte:

Teorema 7.6 (Csörgo e Mason (1985), teorema 2.3)

Se $H \in \mathbf{R}_{1/R}$ e k_n satisfizer (1.4), então existe um espaço de probabilidade, onde estão definidas uma sucessão de pontes Brownianas⁴, $\{B_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}_{n=1}^\infty$, e versões $\tilde{H}_n(k_n)$

⁴ Um processo estocástico $\{B(t); 0 \leq t \leq 1\}$ designa-se por ponte Browniana se:

- i) a distribuição conjunta de $B(t_1), B(t_2), \dots, B(t_n)$, com $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$, é normal;
- ii) a função de covariância de $B(t)$ é dada por $R(s, t) = E(B(s)B(t)) = \min(s, t) - st$;
- iii) a trajectória $B(t, w)$ é contínua em t quase certamente.

de $H_n(k_n)$ (isto é, $\tilde{H}_n(k_n) \stackrel{D}{=} H_n(k_n)$), tal que

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\tilde{H}_n(k_n)} - c_n(k_n) \right\} \stackrel{D}{=} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{n}{k_n}} B_n \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) - \sqrt{\frac{n}{k_n}} \int_{1-k_n/n}^1 B_n(s) d \ln Q(s) + A_n + o_P(1),$$

onde $A_n := k_n^{1/2} \ln \{a_L(k_n/n)/a_L(1 - U_{n-k_n,n})\}$ e $a_L(\cdot)$ é a função da representação de Karamata que surge em (7.1).

Para provar a normalidade assintótica de $k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{H_n(k_n)} - c_n(k_n) \right\}$, Csörgo e Mason assumem que $a_L(\cdot)$ é constante numa vizinhança à direita de 0 não degenerada, condição equivalente a $\ln Q(1-s)$ ser absolutamente contínua, para s numa vizinhança direita de zero. Assim sendo, $A_n = 0$ quase certamente para n suficientemente grande, provando daí que

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{H_n(k_n)} - c_n(k_n) \right\} \xrightarrow{D} N \left(0, \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right).$$

Csörgo e Viharos obtiveram então uma generalização deste resultado, como corolário do teorema que será apresentado de seguida.

Seja então $d(\cdot) := a_L(\cdot) - a_0$, para a função $a_L(\cdot)$ de (7.1).

Teorema 7.7 (Csörgo e Viharos (1995), teorema 2)

Suponhamos que $H \in \mathbf{R}_{1/R}$ e que k_n satisfaz (1.4). Se, para uma sequência limitada de números reais, $\{d_n\}$,

$$\frac{k_n}{n} \frac{d(1 - U_{n-k_n,n}) - d(k_n/n)}{(1 - U_{n-k_n,n}) - (k_n/n)} - d_n \xrightarrow{P} 0,$$

então

$$\left(\frac{k_n}{(1/R)^2 + (d_n/a_0)^2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{H_n(k_n)} - c_n(k_n) \right\} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Corolário 7.8 (Csörgo e Viharos (1995), corolário 2)

Se a derivada $d'(\cdot)$ de $d(\cdot)$ existir numa vizinhança à direita de 0 não degenerada, e se $\lim_{s \rightarrow 0} s d'(s) = d_0$, então tem-se necessariamente que $d_0 = 0$ e que

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{H_n(k_n)} - c_n(k_n) \right\} \xrightarrow{D} N \left(0, \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right). \quad (7.3)$$

8 Intervalos de confiança assintóticos para R

Analisemos agora algumas condições sob as quais se podem construir intervalos de confiança assintóticos para R .

Csörgo e Viharos (1997) trataram o caso dos intervalos de confiança assintóticos para $1/R$, com base no estimador $1/\widehat{R}_1(k_n)$.

Iremos então começar por apresentar esse estudo. Para isso suponha-se, desde já, que k_n é uma sucessão de inteiros positivos que verificam (1.4) e tais que $k_n/\ln^4 n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

A questão inicialmente colocada por Csörgo e Viharos foi então a seguinte:

Sob que condições é que se tem

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \xrightarrow{D} N \left(b2^{1/2} \frac{1}{R}, 2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right), \quad (8.1)$$

para algum $b \in \mathbb{R}$?

Para a verificação de (8.1), bastou procurar condições sob as quais se verificasse:

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{\mu_n^{(1)}(k_n)}{1/R} - 1 \right\} \rightarrow b2^{1/2}, \quad (8.2)$$

para algum $b \in \mathbb{R}$.

Com efeito, se (8.2) se verificar, tem-se que $k_n^{1/2} \left\{ \mu_n^{(1)}(k_n) - \frac{1}{R} \right\} \rightarrow b2^{1/2} \frac{1}{R}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} &= k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n)} - \mu_n^{(1)}(k_n) \right\} + k_n^{1/2} \left\{ \mu_n^{(1)}(k_n) - \frac{1}{R} \right\} \\ &\xrightarrow{D} N \left(b2^{1/2} \frac{1}{R}, 2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

pelo teorema 7.1.

Designa-se agora por ϕ a função de distribuição normal reduzida, e por $z_\varepsilon(b) > 0$ a única solução de $\phi(z-b) - \phi(-z-b) = 1 - \varepsilon$ para um dado $\varepsilon \in (0, 1)$. Tem-se então que (8.2) implica que

$$P \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n)} - \frac{2^{1/2} z_\varepsilon(b) \frac{1}{\widehat{R}_c(k_n)}}{k_n^{1/2}} \leq \frac{1}{R} \leq \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n)} + \frac{2^{1/2} z_\varepsilon(b) \frac{1}{\widehat{R}_c(k_n)}}{k_n^{1/2}} \right\} \rightarrow 1 - \varepsilon, \quad (8.3)$$

para um qualquer estimador consistente de R , $\widehat{R}_c(k_n)$.

Csörgo e Viharos procuraram assim condições para a verificação de (8.2), de modo a obterem intervalos de confiança assintóticos para $1/R$. Mas tais condições também serão então suficientes para a construção de intervalos de confiança assintóticos para R .

Com efeito, sendo $\widehat{R}_c(k_n)$ um estimador consistente de R , se (8.3) se verificar, sai que:

$$P \left\{ \frac{\widehat{R}_1(k_n) k_n^{1/2}}{k_n^{1/2} + 2^{1/2} z_\varepsilon(b) \frac{\widehat{R}_1(k_n)}{\widehat{R}_c(k_n)}} \leq R \leq \frac{\widehat{R}_1(k_n) k_n^{1/2}}{k_n^{1/2} - 2^{1/2} z_\varepsilon(b) \frac{\widehat{R}_1(k_n)}{\widehat{R}_c(k_n)}} \right\} \rightarrow 1 - \varepsilon, \quad (8.4)$$

obtendo-se assim um intervalo de confiança assintótico para R .

Veamos então, agora, quais as condições suficientes para a verificação de (8.2) que foram apresentadas por Csörgo e Viharos.

Pelo teorema 7.1, tem-se que $\mu_n^{(1)}(k_n) \rightarrow 1/R$. Para além disso, prova-se facilmente que $\mu_n^{(1)}(k_n) - 1/R = A_{k_n/n}(L)$, em que $A_t(f) := -\int_0^1 (1 + \ln(s)) \ln(f(st)) ds$, $0 \leq t \leq 1$ e $L(\cdot)$ é a função de variação lenta em 0 que surge em (2.2) (ver Csörgo e Viharos (1997)). Logo, (8.2) verifica-se se e só se $k_n^{1/2} A_{k_n/n}(L) \rightarrow b 2^{1/2} \frac{1}{R}$. No caso particular de $b = 0$, escrevendo a representação de Karamata de L como em (7.1), obtêm-se condições suficientes, em termos das funções a_L e b_L , para a verificação de (8.2). Segundo Csörgo e Viharos, escrevendo:

$$\begin{aligned} A_{k_n/n}(L) &= -\int_0^1 (1 + \ln s) \ln L(sk_n/n) ds \\ &= -\int_0^1 (1 + \ln s) \ln a_L \left(\frac{sk_n}{n} \right) ds - \int_0^1 (1 + \ln s) \left\{ \int_{sk_n/n}^1 \frac{b_L(u)}{u} du \right\} ds, \end{aligned}$$

e usando o facto de que

$$\int_0^1 (1 + \ln s) ds = 0,$$

conclui-se que, se

$$k_n^{1/2} \sup_{0 < t \leq k_n/n} |\ln a_L(t) - \ln a_0| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad k_n^{1/2} \sup_{0 < t \leq k_n/n} |b_L(t)| \rightarrow 0,$$

então (8.2) (e consequentemente (8.1)) e (8.3) verificam-se para $b = 0$.

Por exemplo, se

$$L(s) = D_1 (1 + D_2 s^\beta), \quad 0 < s \leq \delta, \quad (8.5)$$

para alguns $\delta \in (0, 1]$, $D_1 > 0$, $D_2 \neq 0$ e $\beta > 0$, então $a_L(s) = D_1(1 + D_2)$, $b_L(s) = -\beta D_2 s^\beta / (1 + D_2 s^\beta)$, $0 < s \leq \delta$, e por isso, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} k_n^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq k_n/n} |b_L(t)| &= \beta |D_2| k_n^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq k_n/n} \left| \frac{t^\beta}{1 + D_2 t^\beta} \right| \\ &\leq 2\beta |D_2| k_n^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq k_n/n} |t^\beta| = 2\beta |D_2| k_n^{1/2} \left(\frac{k_n}{n} \right)^\beta. \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$k_n^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq k_n/n} |b_L(t)| \leq 2\beta |D_2| k_n^{(2\beta+1)/2} / n^\beta.$$

Assim, neste caso, (8.2) verifica-se para $b = 0$, desde que $k_n = o(n^{2\beta/(2\beta+1)})$.

Comentário:

Csörgo e Viharos não trataram o caso do estimador $1/\widehat{R}_3(k_n)$, no que diz respeito à construção de intervalos de confiança assintóticos para $1/R$.

Notemos contudo, que nas condições sob as quais se verifica (8.1) e

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_3(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \xrightarrow{D} N \left(b 2^{1/2} \frac{1}{R}, 2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right)$$

para algum $b \in \mathbb{R}$, temos também que

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \xrightarrow{D} N \left(b 2^{1/2} \frac{1}{R}, 2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right).$$

Isto porque, pelo lema (4.2), temos que para todo o k_n se verifica:

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \leq k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \leq k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_3(k_n)} - \frac{1}{R} \right\},$$

e portanto,

$$P \left(k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_3(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \leq z \right) \leq P \left(k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \leq z \right)$$

e

$$P \left(k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \leq z \right) \leq P \left(k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \leq z \right).$$

Kratz e Resnick obtiveram também condições suficientes para a verificação de

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_{qq}(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \xrightarrow{D} N \left(0, 2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right).$$

Relembremos, então, que no capítulo 3 foi visto que os estimadores $\widehat{R}_{qq}(k_n)$ e $\widehat{R}_1(k_n)$ são idênticos. Portanto, as condições obtidas, que serão apresentadas de seguida, são também suficientes para a verificação de (8.1) para $b = 0$.

Seja então $H(\cdot)$ uma função de distribuição que verifica (2.1), e assumamos que existe $\rho \leq 0$ e uma função $0 < A(t) \rightarrow 0$ tal que $\forall x > 1$

$$\frac{\frac{1-H(sx)}{1-H(s)} - x^{-R}}{A\left(\frac{1}{1-H(s)}\right)} \rightarrow cRx^{-R} \left(\frac{1-x^{\rho R}}{|\rho|} \right), \text{ quando } s \rightarrow \infty, \quad (8.6)$$

para algum $c \in \mathbb{R}$ (ver, por exemplo, Kratz e Resnick (1996) e referências citadas).

Suponha-se ainda que se verifica (1.4) e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k_n} A(n/k_n) = 0. \quad (8.7)$$

O resultado que nos dá as condições acima mencionadas é então o seguinte:

Teorema 8.1 (Kratz e Resnick (1996), teorema 3.1)

Se (1.4), (8.6) e (8.7) se verificarem, então

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_{qq}(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \xrightarrow{D} N \left(0, 2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right).$$

Comentário:

Note-se que para o clássico estimador de Hill de $1/R$, $H_n^{-1}(k_n)$, existe um resultado semelhante ao anterior:

Se (1.4), (8.6) e (8.7) se verificarem, então

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{H_n(k_n)} - \frac{1}{R} \right\} \xrightarrow{D} N \left(0, \left(\frac{1}{R} \right)^2 \right)$$

(ver, por exemplo, Kratz e Resnick (1996) e referências citadas).

Tem-se então que a variância assintótica de $k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_{qq}(k_n)} - \frac{1}{R} \right\}$ (e, conseqüentemente, de $k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_1(k_n)} - \frac{1}{R} \right\}$) é $2 \left(\frac{1}{R} \right)^2$, enquanto que a de $k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{H_n(k_n)} - \frac{1}{R} \right\}$ é $\left(\frac{1}{R} \right)^2$. O inverso do estimador de Hill exibe contudo, em muitos casos, viés elevados, pelo que a variância assintótica não é um bom critério de superioridade.

9 Escolha do k_n óptimo

A escolha do número k_n de estatísticas de ordem a serem usadas na estimação é, tal como já foi referido anteriormente, muito importante para a qualidade de ajustamento do estimador em questão.

Pelo facto de Csörgo e Viharos terem determinado a distribuição assintótica de $k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\widehat{R}_j(k_n)} - \mu_n^{(j)}(k_n) \right\}$ para $j = 1, 3$, o estudo feito por eles acerca da escolha de k_n diz respeito à qualidade de $1/\widehat{R}_j(k_n)$, $j = 1, 3$, enquanto estimadores de $1/R$.

A subfamília “ideal” de (1.1) corresponde a ter-se $r(\cdot)$ constante, ou equivalentemente, a subfamília “ideal” de (2.2) corresponde a ter-se $L(\cdot)$ constante em $[0, \delta]$, para algum $\delta \in (0, 1]$. Segundo Csörgo e Viharos, tem-se, neste caso, que $\mu_n^{(j)}(k_n) = 1/R$ para $j = 1, 3$, para todo n para o qual $k_n/n \in [0, \delta]$. Assim sendo, neste caso particular, dever-se-ia escolher k_n suficientemente grande na prática, de forma a tornar a variância assintótica de $1/\widehat{R}_1(k_n)$ e de $1/\widehat{R}_3(k_n)$, $\frac{2}{R^2 k_n}$, pequena.

Acontece porém, no caso geral, que um grande valor para k_n (de forma a tornar a variância pequena) introduzirá um viés elevado. A ideia é pois conciliar ambos os problemas e encontrar um valor para k_n de modo a não tornar nem a variância nem o viés demasiado elevados.

Para isso, o que se faz, habitualmente, é determinar o valor de k_n que minimiza o erro quadrático médio assintótico do estimador em questão, isto é, que minimiza a soma do seu viés quadrático assintótico com a sua variância assintótica.

O k_n teoricamente óptimo (no sentido de minimizar o erro quadrático médio assintótico do estimador) foi então determinado, no caso dos estimadores $1/\widehat{R}_j(k_n)$, $j = 1, 3$, (enquanto estimadores de $1/R$), por Csörgo e Viharos, por minimização de

$$M_n^{(j)}(k_n) = b_{j,n}^2(k_n) + \frac{2}{R^2 k_n}, \quad j = 1, 3,$$

em que

$$b_{j,n}^2(k_n) \sim \left\{ \mu_n^{(j)}(k_n) - \frac{1}{R} \right\}^2, \quad j = 1, 3,$$

no caso particular do modelo de Hall, definido em (2.4).

Teorema 9.1 (Csörgo e Viharos (1997), teorema 4.1)

Se (2.4) se verificar para algumas constantes $D_1 > 0$, $D_2 \neq 0$ e $\beta > 0$, então, para ambos os estimadores $1/\widehat{R}_1(k_n)$ e $1/\widehat{R}_3(k_n)$, a escolha óptima:

$$k_n = k_n^* := \left\lfloor \left\{ \frac{(\beta + 1)^4}{R^2 \beta^3 D_2^2} \right\}^{1/(2\beta+1)} n^{2\beta/(2\beta+1)} \right\rfloor, \text{ onde } \lfloor \cdot \rfloor \text{ denota a parte inteira,}$$

torna, para $j = 1$ e $j = 3$,

$$M_n^{(j)}(k_n^*) \sim R^{-4\beta/(2\beta+1)} D_2^{2/(2\beta+1)} 2 \left\{ 1 + \frac{1}{2\beta} \right\} \left\{ \frac{\beta^3}{(\beta + 1)^4} \right\}^{1/(2\beta+1)} n^{-2\beta/(2\beta+1)},$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Comentário:

Viharos (1995) também determinou o k_n óptimo relativo ao estimador de Hill de $1/R$, no caso do modelo de Hall. Para isso, teve em conta que, sob dadas condições se verifica (7.3), para a sucessão $c_n(k_n)$ definida em (7.2) (como já se referiu no capítulo 7).

Neste caso, tal k_n foi obtido por minimização do erro quadrático médio assintótico correspondente, que é dado por:

$$M_n^{(H)}(k_n) = \left(c_n(k_n) - \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{1}{R^2 k_n}.$$

O teorema obtido foi então o seguinte:

Teorema 9.2 (Viharos (1995), teorema 2.2)

Se (2.4) se verificar para algumas constantes $D_1 > 0$, $D_2 \neq 0$ e $\beta > 0$, então, para o estimador $H_n^{-1}(k_n)$, a escolha óptima:

$$k_n = k_n^* := \left\lfloor \left\{ \frac{(\beta + 1)^2}{2R^2 \beta^3 D_2^2} \right\}^{1/(2\beta+1)} n^{2\beta/(2\beta+1)} \right\rfloor, \text{ onde } \lfloor \cdot \rfloor \text{ denota a parte inteira,}$$

torna,

$$M_n^{(H)}(k_n^*) \sim R^{-4\beta/(2\beta+1)} \frac{D_2^{2/(2\beta+1)}}{(1+\beta)^{2/(2\beta+1)}} \left\{ \frac{\beta^{(2-2\beta)/(2\beta+1)}}{2^{2\beta/(2\beta+1)}} + (2\beta^3)^{1/(2\beta+1)} \right\} n^{-2\beta/(2\beta+1)},$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Apêndice A.

Esquema da demonstração do teorema 1.1

Teorema 1 (1.1) (Schultze e Steinebach (1996), teorema 1.1)

Seja $F(\cdot)$ uma função de distribuição que verifica (1.1), e k_n uma sucessão de inteiros que satisfazem (1.4) e (1.5).

Temos então que:

a) $\widehat{R}_1(k_n) \xrightarrow{P} R.$

b) Se se verificar (1.6), então $\widehat{R}_3(k_n) \xrightarrow{P} R.$

Esquema da demonstração:

a) A prova de a) baseia-se nos dois lemas que se seguem:

Lema 1 (Schultze e Steinebach (1996), lema 2.1)

Suponhamos que k_n satisfaz (1.4) e (1.5). Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 \left(\frac{n}{i} \right) - \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2 \right) = 1.$$

Lema 2 (Schultze e Steinebach (1996), lema 2.5)

Suponhamos que se verificam (1.1), (1.4) e (1.5). Então,

$$\frac{k_n}{\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) Z_{n-i+1, n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1, n} \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)} \xrightarrow{P} R.$$

Tem-se então, pelo lema 1, que

$$\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2 \sim k_n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \widehat{R}_1(k_n) &= \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \ln^2 \left(\frac{n}{i} \right) - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) Z_{n-i+1, n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1, n} \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)} \\ &\sim \frac{k_n}{\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) Z_{n-i+1, n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1, n} \right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln \left(\frac{n}{i} \right) \right)} \xrightarrow{P} R, \end{aligned}$$

pelo lema 2.

b) Para a demonstração de b) usam-se os lemas 2 e 3:

Lema 3 (Schultze e Steinebach (1996), lema 2.6)

Se se verificarem (1.1), (1.4), (1.5) e (1.6), então

$$\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}^2 - \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{R^2}.$$

Note-se que se pode escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{\widehat{R}_3(k_n)} &= \left\{ \frac{k_n}{\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right) Z_{n-i+1,n} - \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}\right) \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ln\left(\frac{n}{i}\right)\right)} \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n}^2 - \left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_{n-i+1,n} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Pelos lemas 2 e 3 tem-se então que

$$\frac{1}{\widehat{R}_3(k_n)} \xrightarrow{P} \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R},$$

e conseqüentemente,

$$\widehat{R}_3(k_n) \xrightarrow{P} R,$$

como se queria ver. ■

Nota: Como referem Csörgo e Viharos (1997), pode-se retirar, do lema 3 (e, conseqüentemente, do teorema 1.1), a condição (1.6), desde que se substitua a condição (1.5) por: $k_n / \ln^4 n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

Note-se ainda que podemos fazer o mesmo no teorema 4.1 (teorema provado no capítulo 4 acerca da consistência do estimador $\widehat{R}(k_n)$).

Apêndice B.

Resultados de simulação referentes ao capítulo 6

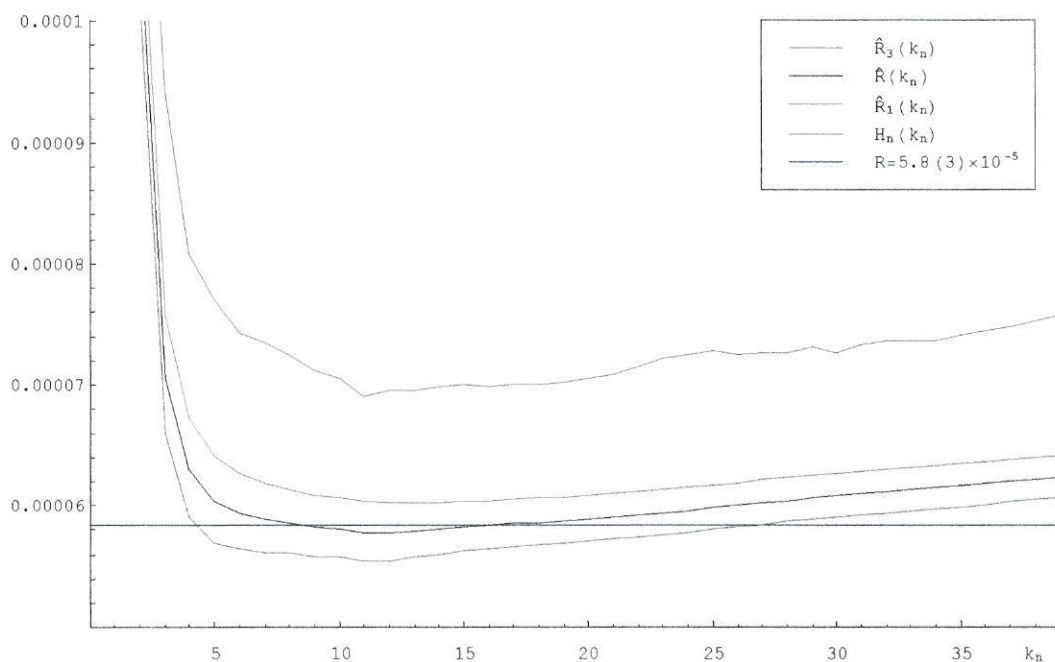


Figura 1: Médias das estimativas obtidas na simulação de 1.i. do capítulo 6, para $n=50$

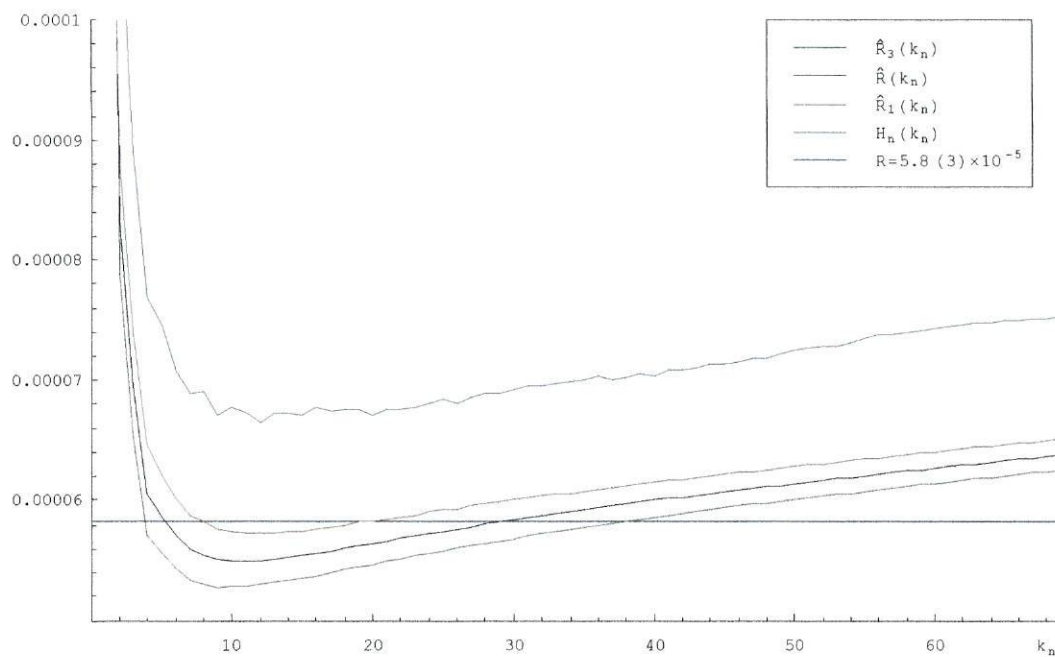


Figura 2: Médias das estimativas obtidas na simulação de 1.i. do capítulo 6, para $n=100$

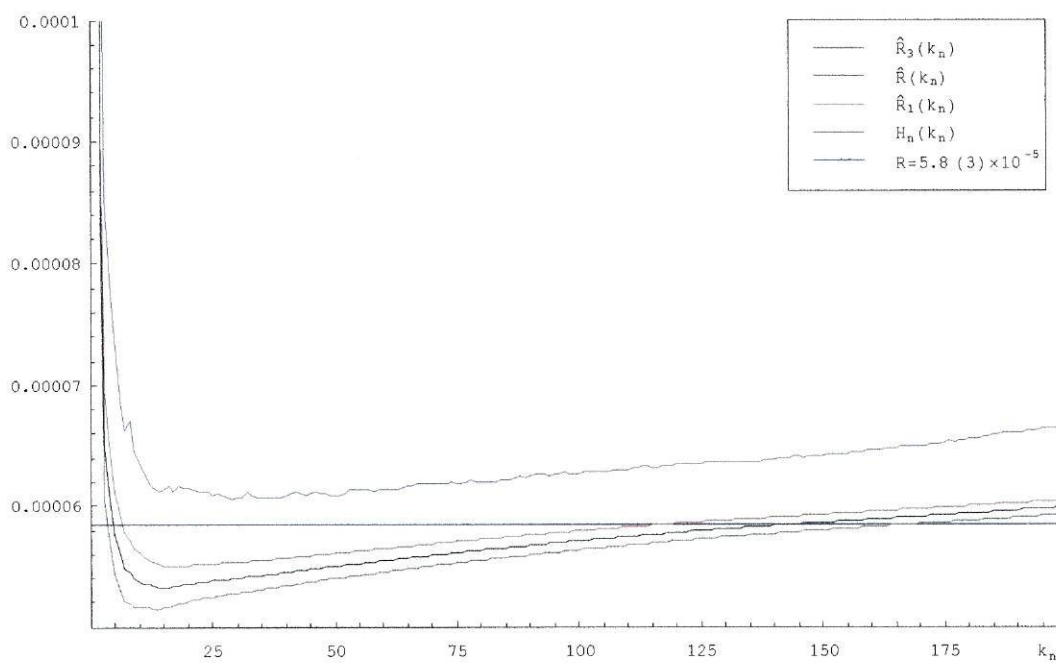


Figura 3: Médias das estimativas obtidas na simulação de 1.i. do capítulo 6, para $n=500$

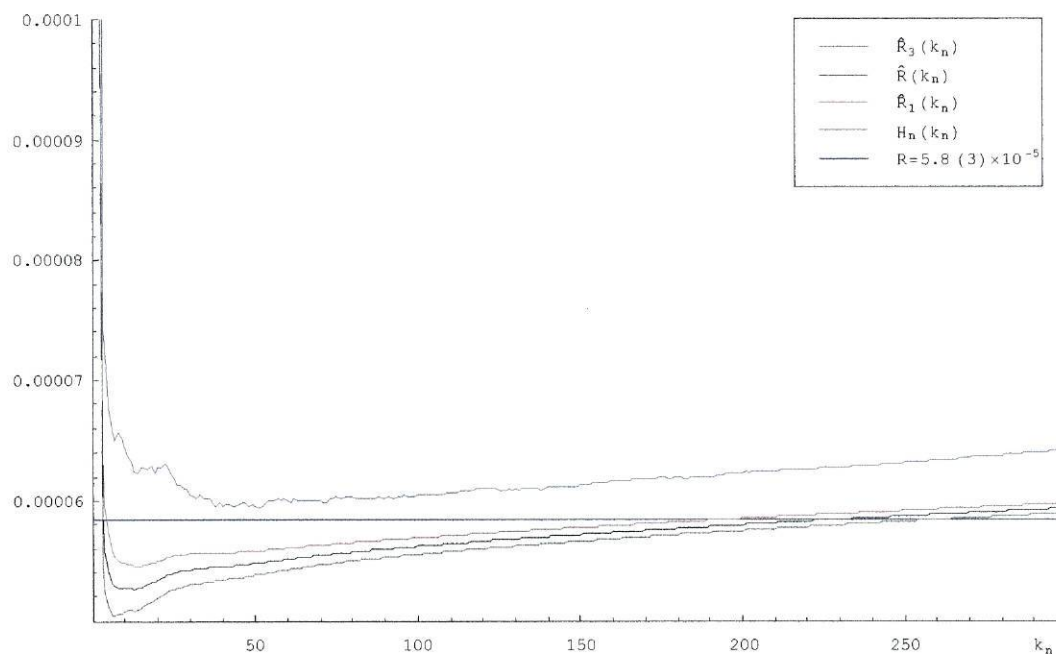


Figura 4: Médias das estimativas obtidas na simulação de 1.i. do capítulo 6, para $n=1000$

k_n	Desv.Pad. ($\hat{R}_3(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}_1(k_n)$)	Desv.Pad. ($H_{50}(k_n)$)
5	4.35781 E-05	4.70438 E-05	5.13442 E-05	5.60469 E-05
10	3.00807 E-05	3.15996 E-05	3.33375 E-05	3.30921 E-05
15	2.50052 E-05	2.57664 E-05	2.66537 E-05	2.35444 E-05
20	2.20133 E-05	2.25151 E-05	2.31249 E-05	1.95069 E-05
25	1.95402 E-05	1.99489 E-05	2.04820 E-05	1.92891 E-05
30	1.82443 E-05	1.85308 E-05	1.89458 E-05	1.66325 E-05
35	1.68789 E-05	1.71032 E-05	1.74624 E-05	1.46086 E-05
40	1.61497 E-05	1.62867 E-05	1.65342 E-05	1.46349 E-05

Tabela 1: Desvios padrões das estimativas obtidas na simulação de l.i. do capítulo 6, para $n=50$

k_n	Desv.Pad. ($\hat{R}_3(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}_1(k_n)$)	Desv.Pad. ($H_{100}(k_n)$)
10	2.25915 E-05	2.32562 E-05	2.41938 E-05	2.31254 E-05
20	1.60204 E-05	1.61236 E-05	1.63152 E-05	1.71847 E-05
30	1.44388 E-05	1.43529 E-05	1.43362 E-05	1.28707 E-05
40	1.36680 E-05	1.34603 E-05	1.33065 E-05	1.22769 E-05
50	1.31860 E-05	1.29703 E-05	1.26754 E-05	1.22900 E-05
60	1.27667 E-05	1.24396 E-05	1.21588 E-05	1.14707 E-05
70	1.24206 E-05	1.20533 E-05	1.17327 E-05	1.03101 E-05

Tabela 2: Desvios padrões das estimativas obtidas na simulação de l.i. do capítulo 6, para $n=100$

k_n	Desv.Pad. ($\hat{R}_3(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}_1(k_n)$)	Desv.Pad. ($H_{500}(k_n)$)
20	1.53328 E-05	1.54114 E-05	1.55289 E-05	1.45829 E-05
40	1.06573 E-05	1.05151 E-05	1.04280 E-05	8.86207 E-06
60	8.93552 E-06	8.69443 E-06	8.51031 E-06	7.46500 E-06
80	7.91749 E-06	7.64920 E-06	7.43751 E-06	6.28157 E-06
100	7.26672 E-06	6.99973 E-06	6.78602 E-06	5.88820 E-06
120	6.79280 E-06	6.53310 E-06	6.32433 E-06	5.49179 E-06
140	6.37058 E-06	6.12073 E-06	5.92245 E-06	4.92716 E-06
160	6.00047 E-06	5.76079 E-06	5.57383 E-06	4.71980 E-06
180	5.70796 E-06	5.47958 E-06	5.30479 E-06	4.72357 E-06
200	5.48419 E-06	5.26542 E-06	5.10123 E-06	4.65912 E-06

Tabela 3: Desvios padrões das estimativas obtidas na simulação de l.i. do capítulo 6, para $n=500$

k_n	Desv.Pad. ($\hat{R}_3(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}_1(k_n)$)	Desv.Pad. ($H_{1000}(k_n)$)
30	1.23514E-05	1.24290 E-05	1.26024 E-05	1.20453 E-05
60	9.50283E-06	9.53158 E-06	9.62307 E-06	9.03052 E-06
90	8.36078E-06	8.31180 E-06	8.30348 E-06	6.99737 E-06
120	7.52077E-06	7.45221 E-06	7.41844 E-06	6.12376 E-06
150	6.88153E-06	6.80163 E-06	6.75291 E-06	5.45224 E-06
180	6.41859E-06	6.33042 E-06	6.27167 E-06	4.88323 E-06
210	6.05814E-06	5.96764 E-06	5.90511 E-06	4.63186 E-06
240	5.75959E-06	5.66861 E-06	5.60440 E-06	4.08990 E-06
270	5.58658E-06	5.41700 E-06	5.35088 E-06	3.84318 E-06
300	5.29312E-06	5.19963 E-06	5.13006 E-06	3.57918 E-06

Tabela 4: Desvios padrões das estimativas obtidas na simulação de l.i. do capítulo 6, para $n=1000$

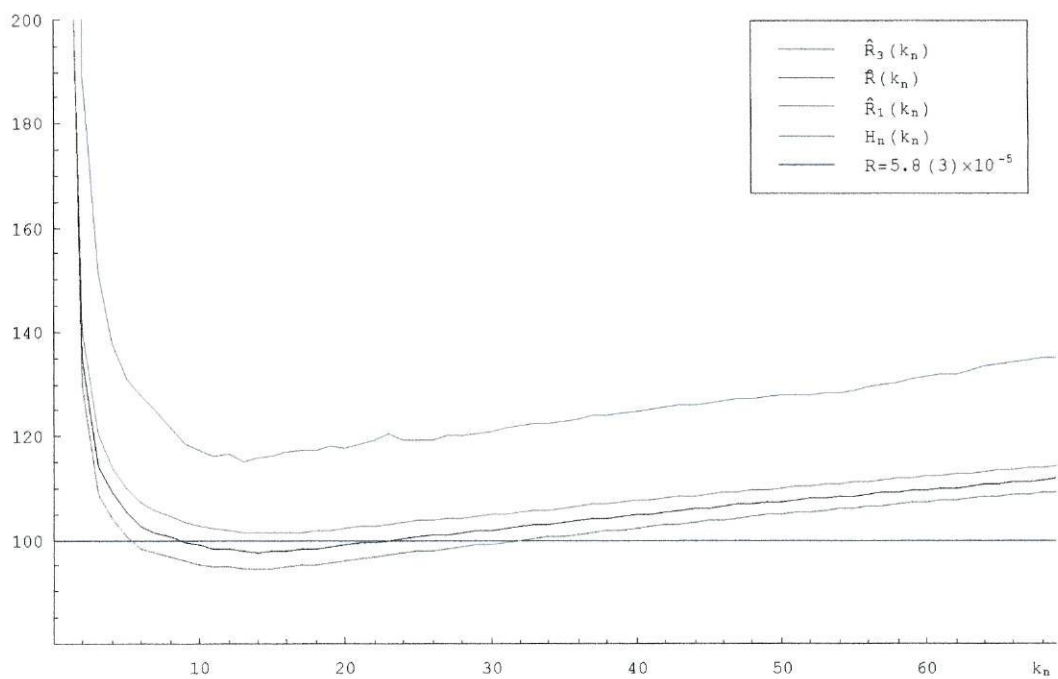


Figura 5: Médias das estimativas obtidas na simulação de 1.ii. do capítulo 6, para $n=100$

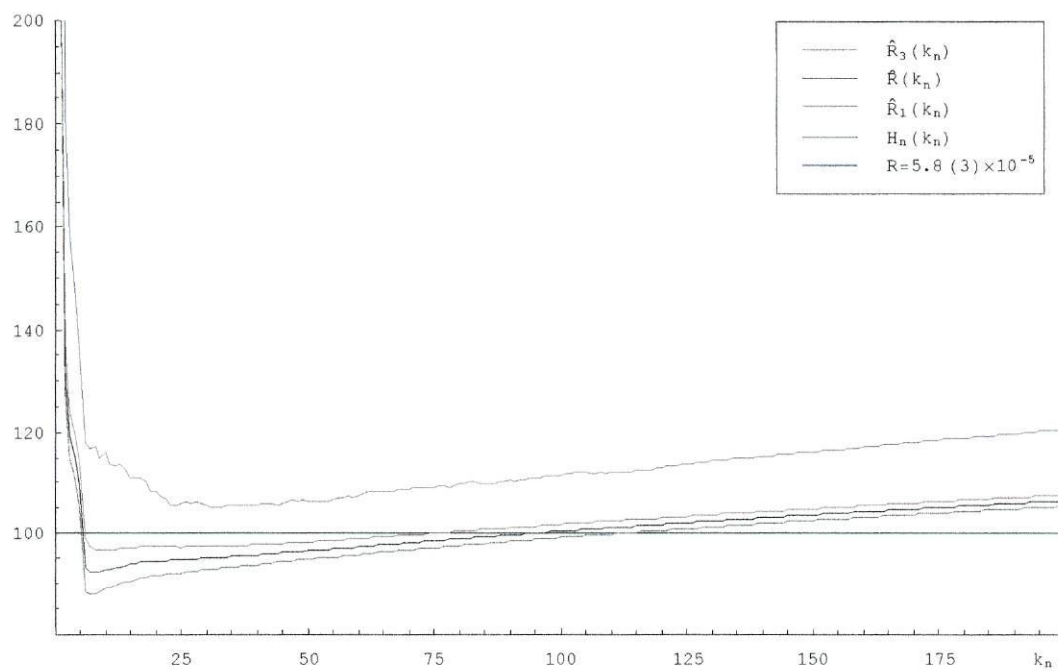


Figura 6: Médias das estimativas obtidas na simulação de 1.ii. do capítulo 6, para $n=500$

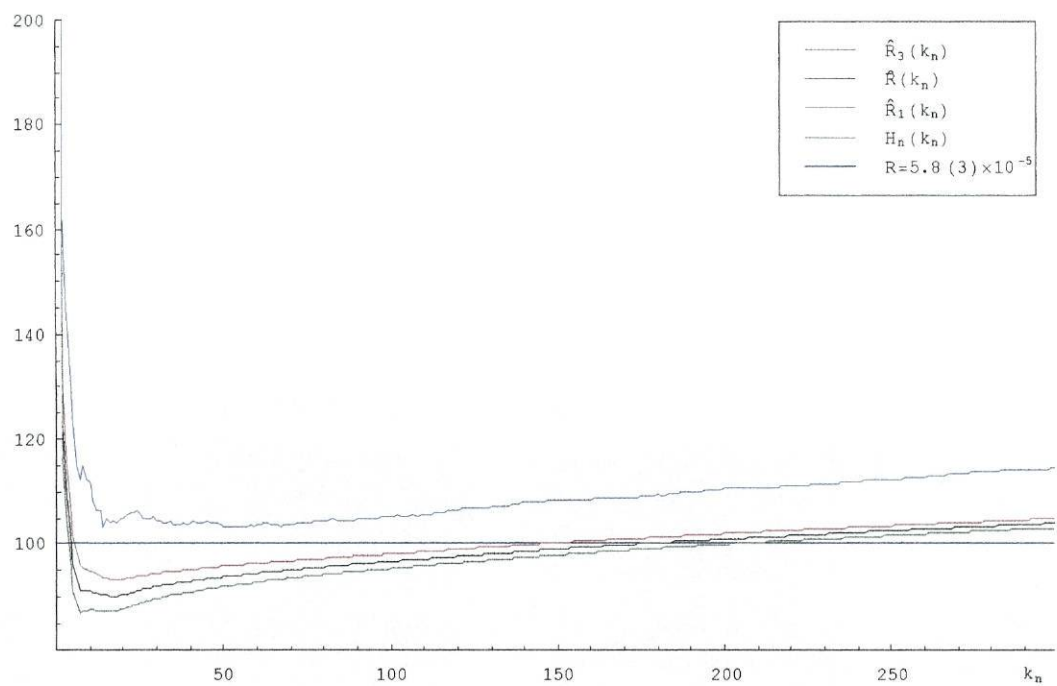


Figura 7: Médias das estimativas obtidas na simulação de 1.ii. do capítulo 6, para $n=1000$

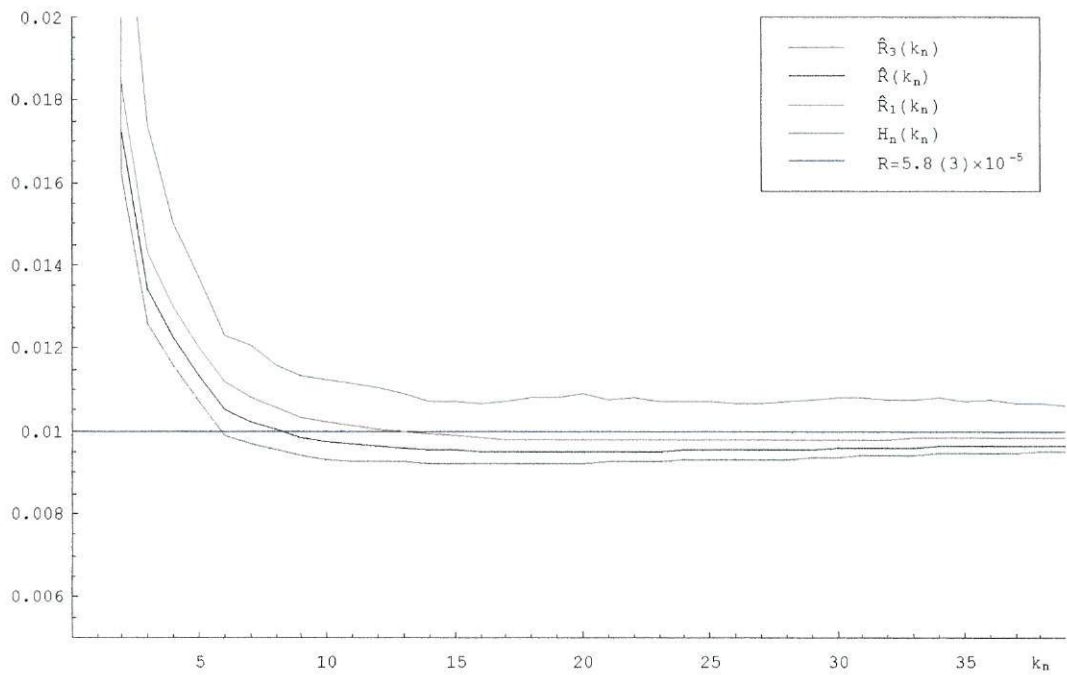


Figura 8: Médias das estimativas obtidas na simulação de 2.i. do capítulo 6, para $n=50$

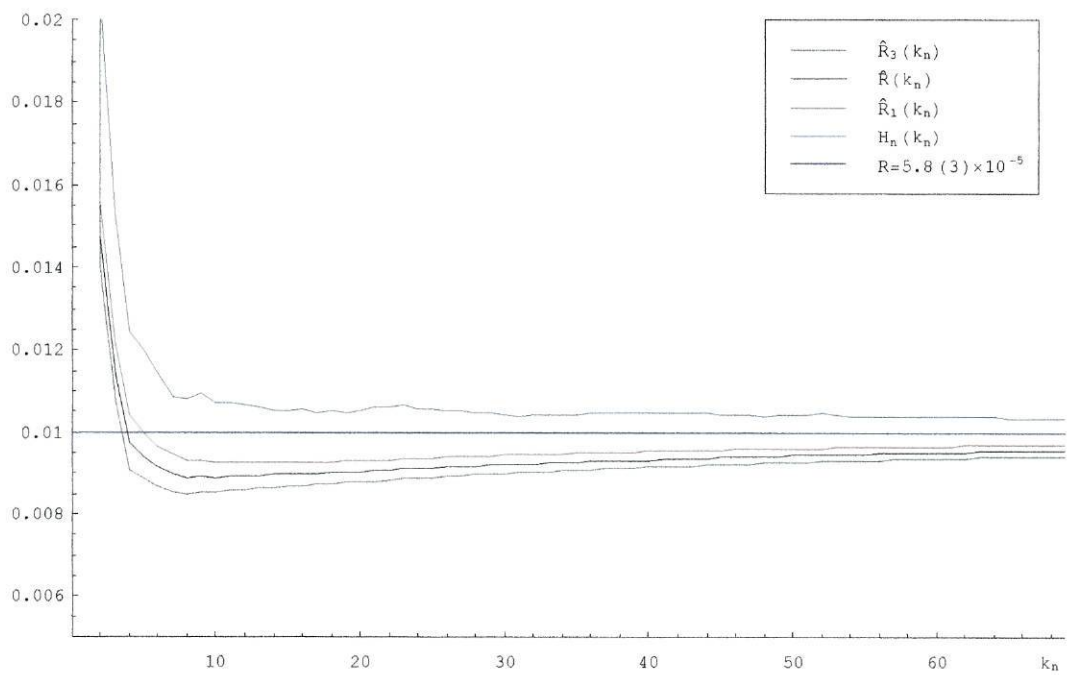


Figura 9: Médias das estimativas obtidas na simulação de 2.i. do capítulo 6, para $n=100$

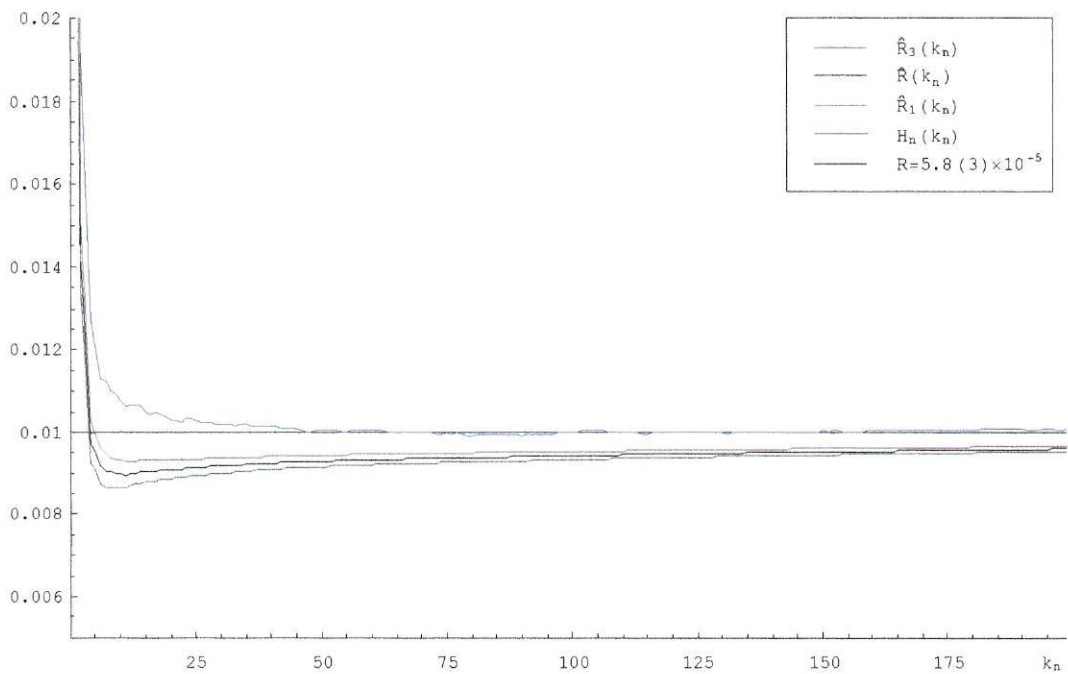


Figura 10: Médias das estimativas obtidas na simulação de 2.i. do capítulo 6, para $n=500$

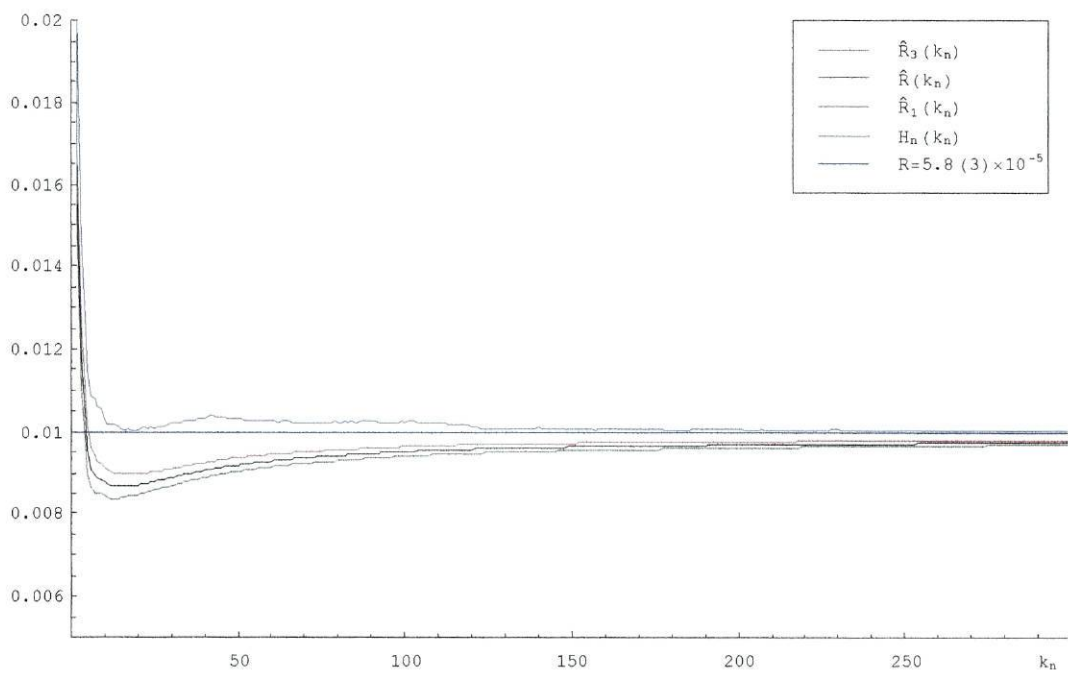


Figura 11: Médias das estimativas obtidas na simulação de 2.i. do capítulo 6, para $n=1000$

k_n	Desv.Pad. ($\hat{R}_3(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}_1(k_n)$)	Desv.Pad. ($H_{50}(k_n)$)
5	1.00820 E-02	1.08062 E-02	1.16350 E-02	1.07369 E-02
10	4.07751 E-03	4.38064 E-03	4.76126 E-03	4.07847 E-03
15	3.18705 E-03	3.34962 E-03	3.55026 E-03	2.97514 E-03
20	2.77328 E-03	2.85719 E-03	2.96234 E-03	2.75092 E-03
25	2.54140 E-03	2.58246 E-03	2.63752 E-03	2.14522 E-03
30	2.36058 E-03	2.37856 E-03	2.40662 E-03	1.98309 E-03
35	2.25070 E-03	2.25551 E-03	2.26781 E-03	2.04038 E-03
40	2.15749 E-03	2.15448 E-03	2.15728 E-03	1.90285 E-03

Tabela 5: Desvios padrões das estimativas obtidas na simulação de 2.i. do capítulo 6, para $n=50$

k_n	Desv.Pad. ($\hat{R}_3(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}_1(k_n)$)	Desv.Pad. ($H_{100}(k_n)$)
10	3.34472E-03	3.49885E-03	3.68565E-03	3.28726E-03
20	2.45139E-03	2.48498E-03	2.53657E-03	2.34140E-03
30	2.05663E-03	2.06531E-03	2.08778E-03	1.88138E-03
40	1.85781E-03	1.83786E-03	1.86106E-03	1.70646E-03
50	1.72336E-03	1.71507E-03	1.71552E-03	1.50862E-03
60	1.61869E-03	1.60710E-03	1.60345E-03	1.32905E-03
70	1.52687E-03	1.51374E-03	1.50817E-03	1.25037E-03

Tabela 6: Desvios padrões das estimativas obtidas na simulação de 2.i. do capítulo 6, para $n=100$

k_n	Desv.Pad. ($\hat{R}_3(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}_1(k_n)$)	Desv.Pad. ($H_{500}(k_n)$)
20	2.54873 E-03	2.59679 E-03	2.65659 E-03	2.65331 E-03
40	1.96711 E-03	1.98055 E-03	2.00180 E-03	1.77371 E-03
60	1.70682 E-03	1.71092 E-03	1.71989 E-03	1.54411 E-03
80	1.52469 E-03	1.52613 E-03	1.53144 E-03	1.20586 E-03
100	1.37074 E-03	1.37138 E-03	1.37550 E-03	1.09434 E-03
120	1.26400 E-03	1.26358 E-03	1.26635 E-03	9.91985 E-04
140	1.17753 E-03	1.17574 E-03	1.17692 E-03	9.33789 E-04
160	1.10254 E-03	1.09989 E-03	1.10008 E-03	7.88475 E-04
180	1.03538 E-03	1.03232 E-03	1.03199 E-03	7.59684 E-04
200	9.80822 E-04	9.77502 E-04	9.76784 E-04	7.23528 E-04

Tabela 7: Desvios padrões das estimativas obtidas na simulação de 2.i. do capítulo 6, para $n=500$

k_n	Desv.Pad. ($\hat{R}_3(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}(k_n)$)	Desv.Pad. ($\hat{R}_1(k_n)$)	Desv.Pad. ($H_{1000}(k_n)$)
30	1.93257E-03	1.92032E-03	1.91941E-03	1.83008E-03
60	1.56388E-03	1.54183E-03	1.52883E-03	1.36123E-03
90	1.33468E-03	1.31506E-03	1.30209E-03	1.08770E-03
120	1.17556E-03	1.15994E-03	1.14987E-03	9.53678E-04
150	1.05639E-03	1.04395E-03	1.03612E-03	8.41759E-04
180	9.62873E-04	9.51652E-04	9.44426E-04	7.39739E-04
210	8.85784E-04	8.75916E-04	8.69677E-04	7.01058E-04
240	8.26963E-04	8.18605E-04	8.13560E-04	6.66450E-04
270	7.79415E-04	7.72438E-04	7.68507E-04	6.29159E-04
300	7.42571E-04	7.36643E-04	7.33504E-05	6.19101E-04

Tabela 8: Desvios padrões das estimativas obtidas na simulação de 2.i. do capítulo 6, para $n=1000$

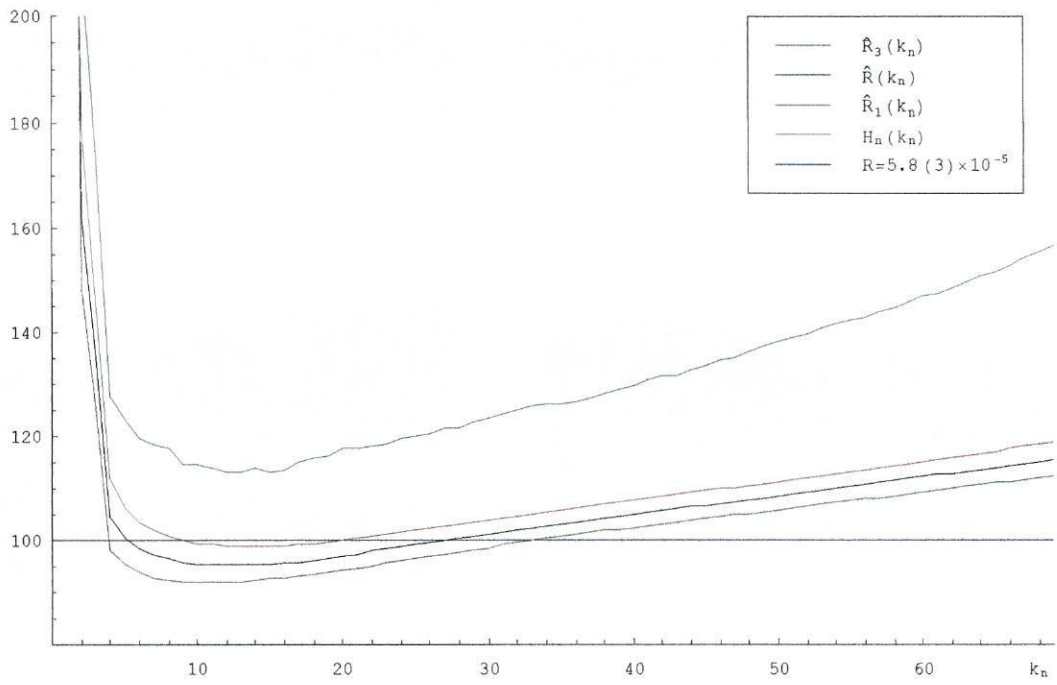


Figura 12: Médias das estimativas obtidas na simulação de 2.ii. do capítulo 6, para $n=100$

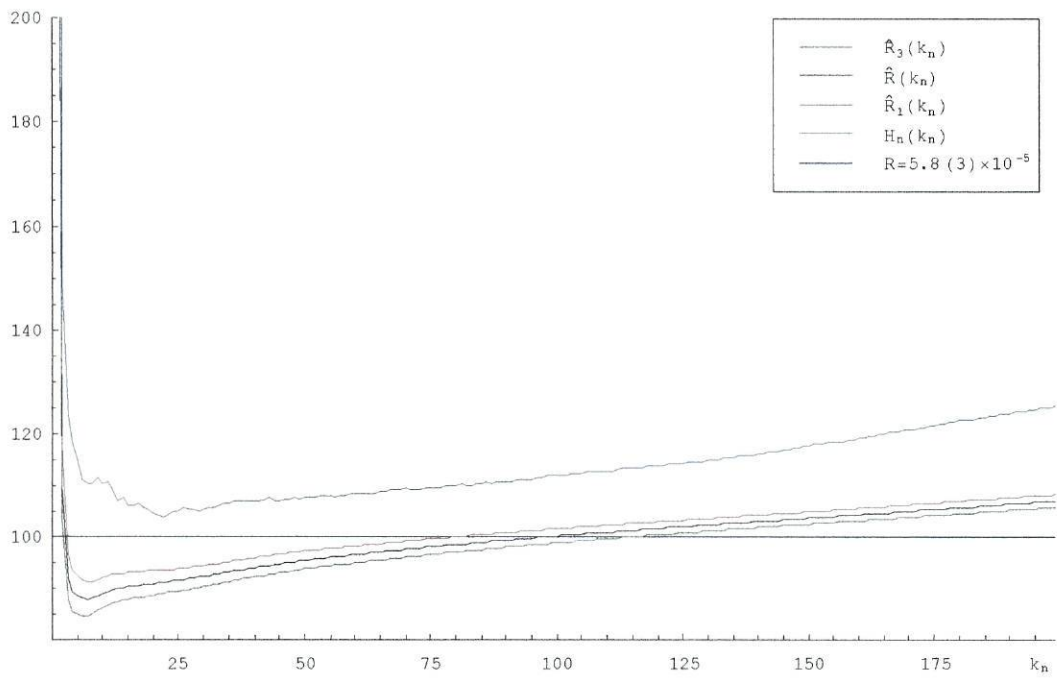


Figura 13: Médias das estimativas obtidas na simulação de 2.ii. do capítulo 6, para $n=500$

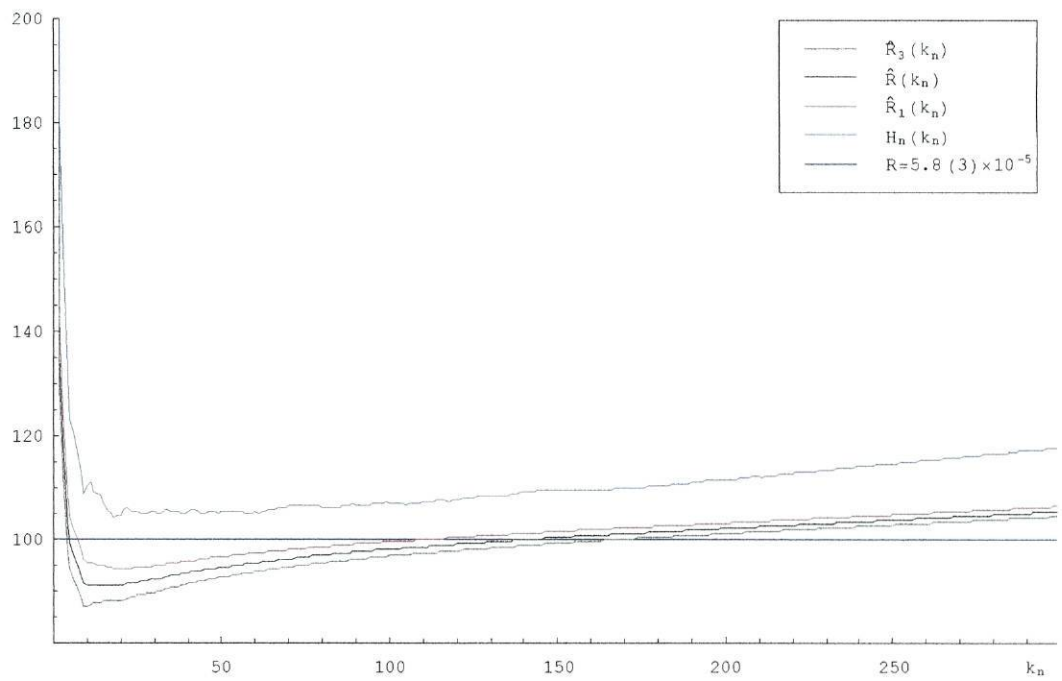


Figura 14: Médias das estimativas obtidas na simulação de 2.ii. do capítulo 6, para $n=1000$

Referências

- [1] Csörgo, M. and Steinebach, J. (1991), On the estimation of the adjustment coefficient in risk theory via intermediate order statistics, *Insur. Math. Econom.* **10**, 37-50.
- [2] Csörgo, S. and Mason, D. M. (1985), Central limit theorems for sums of extreme values, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **98**, 547-558.
- [3] Csörgo, S. and Viharos, L. (1995), On the asymptotic normality of Hill's estimator, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **118**, 375-382.
- [4] Csörgo, S. and Viharos, L. (1997), Asymptotic normality of least squares estimators of tail indices, *Bernoulli* **3**, 351-370.
- [5] Deheuvels, P., Haeusler, E. and Mason, D. M. (1988), Almost sure convergence of the Hill estimator, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **104**, 371-381.
- [6] Dekkers, A. L. M. (1991), A simulation study in extreme-value estimation, *em* On extreme-value estimation, Ph.D. Thesis, Erasmus University, Rotterdam.
- [7] Fraga Alves, M. I. (1995), Estimation of the tail parameter in the domain of attraction of an extremal distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference* **45**, 143-173.
- [8] Kratz, M. and Resnick, S. (1996), The qq-estimator of the index of regular variation, *Commun. Statist. Stochastic Models* **12**, 699-724.
- [9] Mason, D. M. (1982), Laws of large numbers for sums of extreme values, *Annals of Probability* **10**, 754-764.
- [10] Schultze, J. and Steinebach, J. (1996), On least squares estimates of an exponential tail coefficient, *Statist. Decisions* **14**, 353-372.
- [11] Viharos, L. (1995), Limit theorems for linear combinations of extreme values with applications to inference about the tail of a distribution, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **60**, 761-777.