Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Departamento de Matemática Aplicada

Reversibilidade e Atractores Simétricos

Miguel Ângelo de Sousa Mendes

*Dissertação para a
obtenção do grau de mestre
em Matemática Aplicada*

Janeiro de 1999

Trabalho orientado por:
Professora Doutora Sofia Castro Gothen

Resumo

O objectivo desta dissertação é estudar a questão da *admissibilidade* no contexto dos sistemas dinâmicos discretos *reversíveis*.

A definição de reversibilidade é apresentada apelando à intuição geométrica do conceito com alguns exemplos de retratos de fase.

Seguidamente, são descritos dois resultados que, embora não façam parte do assunto central desta tese, são fundamentais nas aplicações feitas em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ (Lamb e Nicol [1998]).

A parte central da tese, a quinta secção, trata da questão da admissibilidade. O objectivo é obter condições necessárias e suficientes para que subgrupos Σ, de um qualquer grupo $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$, possuam um atractor invariante por Σ (i.e., Σ-simétrico), de uma aplicação Γ-reversível. Para tal segue-se o percurso já efectuado para o caso equivariante: o resultado obtido é precisamente o análogo ao apresentado por Melbourne *et al.* [1993], quando Γ é finito. Este estudo foi efectuado em Lamb e Nicol [1998] e reformulado por nós nesta dissertação.

As condições obtidas são apenas necessárias: a hipótese de reversibilidade impõe certas restrições que impedem a total analogia ao caso equivariante.

Por fim, discute-se a ligação da questão da admissibilidade a outros conceitos desenvolvidos recentemente, nomeadamente, *simetrias escondidas* e *detectives de simetrias de atractores* e, além disso, é introduzida uma tentativa de reformulação da questão da admissibilidade.

Palavras Chave: Sistemas Dinâmicos Equivariantes; Sistemas Dinâmicos Reversíveis; Simetrias; Anti-Simetrias; Subgrupos Admissíveis.

Abstract

The main goal of this dissertation is to study the question of admissibility in the context of reversible discrete dynamical systems.

We introduce the definition of reversibility making use of geometric intuition with some phase portraits.

Afterwards, we describe two results which are fundamental in the construction of examples in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^2$ (Lamb and Nicol [1998]), although they do not belong to the main part of this dissertation.

The main section, section five, deals with the question of admissibility. We seek necessary and sufficient conditions on the subgroups Σ of Γ for a Γ-reversible map to have a Σ-invariant attractor. The result obtained for the reversible problem is similar to that established by Melbourne *et al* [1993], when Γ is finite, in the equivariant setting. Most of the results presented here can be found in Lamb and Nicol [1998]. We have re-stated and given alternative proofs to some of the results.

The conditions obtained are only necessary: the reversibility assumption prevents a complete similarity with the equivariant case.

In the end, we discuss the connection between the issue of admissibility and other recently developed concepts, namely, *hidden symmetries* and *detectives* of symmetries of attractors. Moreover, we attempt to reformulate the question of admissibility.

Key words and phrases: Equivariant Dynamical Systems; Reversible Dynamical Systems; Symmetries; Reversing Symmetries; Admissible Subgroups.

Agradecimentos

Agradeço aos professores Ian Melbourne, Michael Field, Matt Nicol, Martin Golubitsky e Ian Stewart por me terem enviado os artigos indispensáveis para a realização desta tese.

Agradeço a preciosa disponibilidade do professor Andre Vanderbauwhede durante a Conferência em Sistemas Dinâmicos no Instituto Superior Técnico em Novembro de 1998, para ouvir as minhas ideias e indicar sugestões.

Agradeço a ajuda dos professores Jeroen Lamb e Matt Nicol em questões relativas aos seus artigos.

Estou eternamente grato à Professora Sofia Castro Gothen por ter-me iniciado neste assunto e orientado como se eu fosse um colega de investigação.

Agradeço profundamente à Alexandra por ter-me ajudado na tarefa árdua de dactilografar e ainda por ter-me suportado durante este tempo todo.

Por simplesmente existirem, dedico este trabalho à Alexandra, aos meus pais e minhas irmãs.

Conteúdo

1 Introdução

Muitos sistemas dinâmicos apresentam (anti)simetrias que facilitam o seu estudo e são, além disso, a causa de alguns fenómenos dinâmicos.

Antes de introduzir a definição formal de anti-simetria consideremos um exemplo que permite uma melhor visualização do efeito causado pela existência de uma anti--simetria.

Consideremos um pêndulo ideal, *i.e.*, sem atritos. Se o largarmos de uma posição suficientemente afastada do ponto de equilíbrio, observamos que o pêndulo oscila eternamente à volta dessa mesma posição. Suponhamos que durante algum tempo filmamos o fenómeno e que mais tarde, possuidores de um aparelho de vídeo, conseguimos reproduzi-lo em sentido inverso à mesma velocidade da função "play". Quem estiver a observar, sem qualquer conhecimento da direcção da reprodução, não vai conseguir distinguir as situações: se estamos a observar o fenómeno natural ou reproduzido a "andar para trás". Diz-se então que o sistema é *reversível no tempo.*

Informalmente, simetrias enviam trajectórias em trajectórias enquanto anti-simetrias enviam trajectórias em trajectórias percorridas em sentido contrário, *i.e.*, revertendo o tempo.

Nas figuras 1, 2 e 3 estão ilustrados três exemplos de retratos de fase de sistemas com anti-simetrias.

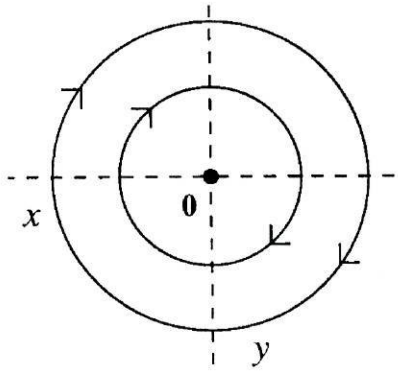

Figura 1: Note-se que uma reflexão em qualquer recta que passe pela origem é uma anti-simetria.

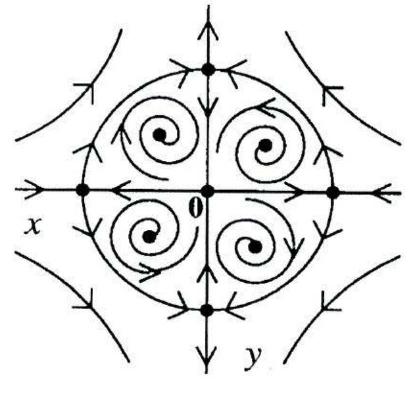

Figura 2: Pontos atractores são enviados em repulsores e vice-versa pela rotação de 90 graus (anti--simetria).

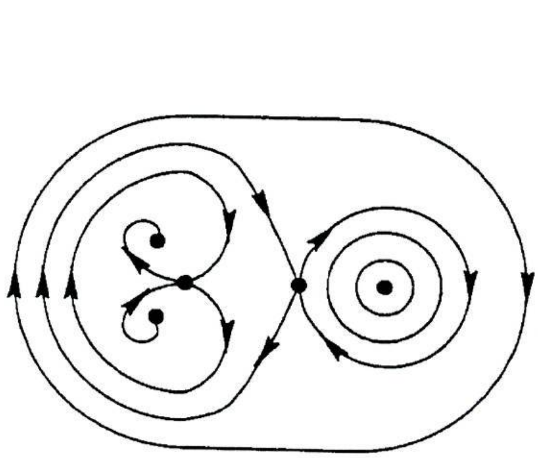

Figura 3: Neste exemplo surge o fenómeno "catástrofe do céu azul" descrito por Devaney [1977]: para um campo de vectores reversível, com uma órbita homoclínica simétrica (i.e. invariante) relativamente à anti-simetria existe, numa sua vizinhança, uma família a um parâmetro de órbitas periódicas simétricas cujos períodos tendem para infinito à medida que se aproximam da órbita homoclínica.

Esta tese está organizada da seguinte forma. A secção seguinte trata do conceito de (anti)simetria e de algumas propriedades básicas do grupo de simetrias generalizado.

Na secção 3 apresenta-se o teorema da decomposição como foi feito em Lamb [1992]. Descreve-se ainda um método para encontrar todas as órbitas periódicas simétricas relativas a uma dada anti-simetria, na secção 4.

A secção 5, que é a parte central desta tese, está dividida do seguinte modo. Nas três primeiras subsecções são apresentados todos os resultados intervenientes nas demonstrações da subsecção 4.

Na subsecção 4 descrevem-se os resultados apresentados em Lamb e Nicol [1998]. É ainda feita uma descrição das construções feitas em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^2$ e dos problemas em aberto, na subsecção 5.

Por fim, na subsecção 6, tentamos explicar por que motivo, em nossa opinião, a questão da admissibilidade assim formulada é insuficiente do ponto de vista da investigação e ainda como surgem as *simetrias escondidas* e os *detectives de simetrias* neste contexto.

Os resultados não referenciados, tanto quanto sabemos, são originais.

2 Definições e conceitos básicos

De forma a introduzir formalmente o conceito de (anti)simetria, consideremos uma família, a um parâmetro, de difeomorfismos $\Phi_t : \Omega \to \Omega$ tais que,

$$\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{Z}).$$

Seja $S : \Omega \to \Omega$ uma função (homeomorfismo, difeomorfismo, etc., consoante o contexto). Diz-se que S é uma *simetria de* Φ_t se

$$\Phi_t \circ S = S \circ \Phi_t \quad \forall_t. \tag{1}$$

Seja $N : \Omega \to \Omega$ uma função (homeomorfismo, difeomorfismo, etc., consoante o contexto). Diz-se que N é uma *anti-simetria de* Φ_t se,

$$\Phi_t \circ N = N \circ \Phi_{-t} \quad \forall_t. \tag{2}$$

Se o tempo for discreto, então $\Phi_t = (\Phi_1)^t, \forall_{t\in\mathbb{Z}}$, onde Φ_1 representa o operador evolução de um sistema dinâmico discreto.

Se o tempo for contínuo então $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ representa o fluxo de um campo de vectores F e N é uma anti-simetria de $\dot{x} = F(x)$ sse

$$\frac{d(Nx)}{dt} = -F(Nx),$$

e S é simetria sse

$$\frac{d(Sx)}{dt} = F(Sx).$$

Comentário 1 *Se Nx for solução de $\dot{x} = -F(x)$ então a sua trajectória corresponde a uma trajectória de $\dot{x} = F(x)$ percorrida em sentido contrário, pois o campo de velocidades é o simétrico!*

As (anti)simetrias de um sistema dinâmico formam um grupo com a operação composição, supondo que escolhemos aquelas que admitem inversa. Define-se o *grupo de simetria generalizado*, Σ, como sendo o conjunto $\Sigma_+ \cup \Sigma_-$, munido da operação composição, onde Σ_+ é o conjunto das simetrias e Σ_- é o conjunto das anti-simetrias. A partir das definições (1) e (2) conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\varphi &\in \Sigma_+,\ \psi \in \Sigma_+ \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \Sigma_+ &(3)\\
\varphi &\in \Sigma_+,\ \psi \in \Sigma_- \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \Sigma_- &(4)\\
\varphi &\in \Sigma_-,\ \psi \in \Sigma_- \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \Sigma_+ &(5)\\
\varphi &\in \Sigma_\pm \Rightarrow \varphi^{-1} \in \Sigma_\pm. &(6)
\end{aligned}$$

Como $id \in \Sigma_+$, o conjunto Σ_+ forma um subgrupo de Σ enquanto Σ_- não. Além disso, verifica-se facilmente que $\Sigma_+ \trianglelefteq \Sigma$, logo podemos definir o grupo quociente Σ/Σ_+. Do simples facto $P = N(N^{-1}P)$ e das propriedades (3) a (6) podemos concluir que $\Sigma/\Sigma_+ \simeq \mathbb{Z}_2$. Estes factos são trivialmente válidos para qualquer Δ subgrupo de Σ. E se tivermos $\Delta = \Delta_+ \cup \delta\Delta_+$, para alguma anti-simetria δ então podemos admitir que $\Sigma = \Sigma_+ \cup \delta\Sigma_+$ supondo assim que a anti-simetria que gera Δ_- é a mesma que gera Σ_-.

3 Teorema da decomposição de difeomorfismos

3.1 Construção de um subgrupo de simetria

Para obter uma decomposição de difeomorfismos é necessário introduzir alguma ferramenta algébrica, nomeadamente os seguintes grupos:

- $R_{2k}^m = \langle\, a, b : a^2 = b^2 \; ; \; a^{2k} = e \; ; \; (a^{-1}b)^m = e \,\rangle$
- $R_{2k} = R_{2k}^\infty = \langle\, a, b : a^2 = b^2 \; ; \; a^{2k} = e \,\rangle$
- $R = R_\infty = \langle\, a, b : a^2 = b^2 \,\rangle$

Proposição 1 (Lamb [1992]) *L^{-1}, L são simetrias de L.*

dem. É óbvio que L comuta com L e que $LL^{-1} = L^{-1}L$. ∎

Proposição 2 (Lamb [1992]) *Seja $N \in \Sigma$ e L o operador de evolução de um sistema dinâmico discreto. Seja ainda $T = N \circ L$. Então,*

- *se N for de ordem $2k$ e L de ordem m, ter-se-á $\langle N, T\rangle \simeq R_{2k}^m$;*
- *se N for de ordem $2k$ e L de ordem infinita, ter-se-á $\langle N, T\rangle \simeq R_{2k}$;*
- *se N e L forem de ordem infinita, ter-se-á $\langle N, T\rangle \simeq R$.*

dem. Basta provar que $T^2 = N^2$ e identificar T com b e N com a nas representações dadas acima. Ora,

$$T^2 = (N \circ L)^2 = N \circ L \circ N \circ L = N \circ L \circ (N^{-1} \circ N^2) \circ L \circ (N^{-2} \circ N^2) =$$
$$= (N \circ L \circ N^{-1}) \circ (N^2 \circ L \circ N^{-2}) \circ N^2 = L^{-1} \circ (N \circ L^{-1} \circ N^{-1}) \circ N^2 =$$
$$= L^{-1} \circ L \circ N^2 = N^2. \;\blacksquare$$

Na proposição anterior só são consideradas anti-simetrias de ordem par. De facto, a dinâmica de um operador que admite uma anti-simetria de ordem ímpar é trivial, como mostra o resultado seguinte.

Proposição 3 *(Lamb [1992]) Se L admite uma anti-simetria de ordem ímpar então L é uma involução (i.e. $L^2 = id$).*

dem. Seja N uma anti-simetria tal que $N^{2k+1} = id$. Então,

$$L \circ N = N \circ L^{-1} \Rightarrow N^{-1} \circ L \circ N = L^{-1}.$$

Se multiplicarmos ambos os membros desta expressão por N^{-1} à esquerda e por N à direita obtemos a seguinte igualdade, $N^{-2} \circ L \circ N^2 = N^{-1} \circ L^{-1} \circ N = L$. Iterando este processo p vezes temos que, $N^{-p} \circ L \circ N^p = L^{\varepsilon_p}$, onde ε_p vale 1 quando p é par e -1 quando p é ímpar. Assim para $p = 2k + 1$, sai que $L = L^{-1}$. ■

Na tentativa de obter resultados análogos para o caso contínuo estabeleci as proposições 4, 5 e 6 e formulo uma hipótese (conjectura 8) para um caso especial de campos de vectores. Da discussão abaixo deve ficar bem clara a dificuldade que se encontra quando se passa do caso discreto para o caso contínuo.

Proposição 4 *Seja $\dot{x} = Ax$ com A linear. Então, $A, A^{-1}, -A, -A^{-1}$, são simetrias de A.*

dem. A é simetria porque $\frac{d(Ax)}{dt} = A\dot{x} = A\,(Ax)$. E, para A^{-1} temos que, $\frac{d\left(A^{-1}x\right)}{dt} = = A^{-1}\dot{x} = A^{-1}\,(Ax) = x = A(A^{-1}x)$. Os restantes casos são análogos. ■

Proposição 5 *Supondo as condições do resultado anterior, se B e C forem (anti)simetrias lineares de $\dot{x} = Ax$ então $B + C$ será também uma (anti)simetria linear.*

dem. Sejam B e C duas simetrias. Então, $\frac{d((B+C)x)}{dt} = (B + C)\,\dot{x} = B\dot{x} + C\dot{x} = = B\,(Ax) + C\,(Ax) = A(Bx) + A(Cx) = A((B + C)x)$. Se B e C forem anti-simetrias a demonstração é análoga. ■

Proposição 6 *Seja B uma (anti)simetria linear de $\dot{x} = Ax + g(x)$ com A linear e g não linear. Então, B (anti)comuta com A sse (anti)comuta com g.*

dem. $A(Bx) + g(Bx) = \frac{d(Bx)}{dt} = B\dot{x} = B(Ax + g(x)) = B(Ax) + B(g(x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow A(Bx) - B(Ax) = B(g(x)) - g(B(x))$. Obviamente que o primeiro membro da igualdade é nulo sse o segundo o for. O outro caso decorre dos mesmos cálculos. ■

Este último resultado salienta a relação entre (anti)simetrias e (anti)comutadores, no caso linear. É óbvio que, considerar somente os campos de vectores lineares é muito restritivo. No entanto, tomar apenas simetrias lineares é razoável dado o seguinte resultado: (ver Bourbaki [1960]) "todo o grupo de Lie compacto é topologicamente isomorfo a um grupo de Lie linear."

Consideremos então o seguinte resultado:

Proposição 7 *(Lamb [1993]) Suponhamos que $\dot{x} = Fx$ possui uma simetria U. Então, $\dot{y} = \tilde{F}y$ com $\tilde{F} = (dT \mid y)^{-1}F(Ty)$ tem a simetria $T^{-1}UT$, se $y = Tx$ (T difeomorfismo).*

Com este último resultado podemos construir exemplos de campos de vectores não lineares com qualquer simetria linear A partindo da EDO $\dot{x} = Ax$ e fazendo uma transformação do tipo $y = Tx$ sendo T um difeomorfismo.

O teorema de Poincaré (ver Arnold [1983]) garante que a equação $\dot{x} = Ax + ...$ (série formal de potências), quando os valores próprios de A são não ressonantes, pode--se reduzir, através de uma mudança de coordenadas do tipo $x = y + ...$, à equação $\dot{y} = Ay$. Ora se a mudança de coordenadas for invertível, pela Proposição 7 podemos garantir que $\dot{x} = Ax + ...$ tem uma simetria.

Conjectura 8 *Tomando as hipóteses referidas no teorema de Poincaré, independentemente de T ser invertível, $\dot{x} = Ax + ...$ tem simetrias em "grandes" partes do espaço de fase.*

Acredito que assim seja, dado que $x = y + ...$ aparenta ter "grandes" domínios de injectividade.

Vejamos que para o caso contínuo, a existência de uma anti-simetria de ordem ímpar enfraquece ainda mais a dinâmica.

Proposição 9 *(Lamb [1993]) Seja $\dot{x} = Fx$ um campo de vectores com uma anti-simetria N tal que $N^{2k+1} = id$. Então $F \equiv 0$.*

dem. Obviamente que todos os resultados referidos para o caso discreto são também válidos para L_t, o operador tempo-t dum sistema dinâmico contínuo. Logo $L_t^2 = id$ $\forall t \in \mathbb{R}$ pela Proposição 3. Mas, $L_t = L_{t/2}^2 = id$. ∎

3.2 Teorema da decomposição

Teorema 10 *(Lamb [1992]) Seja L um operador de evolução, não trivial com anti--simetria N. Então $L = A \circ B$ com $B^2 \circ A^2 = id$.*

E, se N for de ordem $2k$ $(k = 1, \ldots, \infty)$, o mesmo acontece a A e B.

dem. Sejam L um operador de evolução uma simetria e N uma anti-simetria. Tem-se, $L = N^{-1} \circ N \circ L = N^{-1} \circ T$. Pela Proposição 2, $\langle N, T\rangle \simeq R_{2k}^m$ ou R_{2k} ou R.

Em qualquer dos casos $N^2 = T^2 \Leftrightarrow N^{-2} \circ T^2 = id$. Basta tomar $A = N^{-1}$ e $B = T$. As ordens de A e B dependem dos casos na Proposição 2. ∎

Proposição 11 *(Lamb [1992]) Existe um subgrupo de R_{2k} isomorfo a R_{2^l}, onde $2k = 2^l.3^m \ldots$.*

Proposição 12 *(Lamb [1992]) Um grupo R_{2^l} não possui nenhum subgrupo isomorfo a R_{2k} quando $2k < 2^l$.*

Teorema 13 *(da decomposição-Lamb [1992]) Todo o operador de evolução L, não trivial com uma anti-simetria, é decomponível no produto de duas funções de ordem 2^l $(l = 1, \ldots, \infty)$, i.e., $L = K_0 K_1$ com $K_0^2 K_1^2 = id$.*

dem. Dada uma anti-simetria N de ordem $2k$, $N^{2k/2^l}$ é também uma anti-simetria de ordem 2^l, pois $2k/2^l$ é ímpar. Basta então usar o raciocínio do Teorema 10 para obter a decomposição. Quanto à ordem de K_0 e de K_1 usa-se a Proposição 11. O subgrupo referido na Proposição 11 é gerado por $N^{2k/2^l}$ e por $T^{2k/2^l}$ onde $T = N \circ L$. ∎

A Proposição 12 garante que cada decomposição, no sentido do Teorema 13, é irredutível. Por exemplo, a existência de uma anti-simetria de ordem 4 impede a existência de uma anti-simetria de ordem 2 porque $4 = 2^2$. No entanto, a decomposição não é, de forma alguma, única, no sentido de que anti-simetrias independentes dão decomposições independentes da mesma ordem ou não.

Comentário 2 *De facto, o teorema da decomposição é uma equivalência, já que, qualquer* $L = K_1 K_0$ *com* $K_0^2 K_1^2 = id$ *é reversível:*

$$K_1 L = K_1 K_1 K_0 = K_1^2 K_0^2 K_0^{-1} = K_0^{-1} = L^{-1} K_1$$

(é necessário notar que $K_0^2 K_1^2 = id$ *é equivalente a* $K_1^2 K_0^2 = id$ *e que* L^{-1}*,* K_0^{-1} *e* K_1^{-1} *existem).*

Exemplo de aplicação: grupo de simetria generalizado gerado por uma rotação e uma reflexão

O teorema da decomposição fornece um método para construir sistemas dinâmicos discretos que possuem uma qualquer anti-simetria.

Para construir um exemplo que tenha $R_{\pi/2}$, rotação de 90°, como anti-simetria, basta usar o teorema da decomposição e escrever $L = R_{\pi/2} \circ A$ em que $\left(R_{\pi/2}\right)^2 \circ A^2 = id$, *i.e.*, $A^2 = -id$.

Podemos ainda acrescentar M_x , reflexão no eixo do xx, como simetria de L. Sendo assim $R_{\pi/2} \circ M_x$ é uma anti-simetria e, portanto podemos usar o teorema novamente, escrevendo $L = R_{\pi/2} \circ M_x \circ B$ com $B^2 = id$, já que $\left(R_{\pi/2} \circ M_x\right)^2 = id$.

Como $L = R_{\pi/2} \circ A$ e $A^2 = -id$ temos,

$$(M_x \circ B)^2 = -id. \tag{7}$$

Além disso, $-id = R_\pi = \left(R_{\pi/2}\right)^2$ é uma simetria de L, logo $L \circ (-id) = -L$. Obviamente R_π comuta com $R_{\pi/2}$ e com M_x . Então, também tem que comutar com B, pois $B = M_x^{-1} \circ R_{\pi/2}^{-1} \circ L$ (note-se que A comuta com B sse A comuta com B^{-1}). Logo,

$$B \circ (-id) = -B. \tag{8}$$

Como M_x é simetria de L e $M_x \circ R_{\pi/2} = -R_{\pi/2} \circ M_x$, tem-se que,

$$B \circ M_x = -M_x \circ B. \tag{9}$$

Esta última condição juntamente com o facto de que $B^2 = id$, implicam a condição (7).

Existe uma solução linear para as condições anteriores: M_ν, reflexão na recta $y = x$. Mas podemos procurar uma solução não linear a partir de M_ν.

Seja $B = C \circ M_\nu \circ C^{-1}$. Para que B seja uma solução não linear, C não pode ser linear e não pode comutar com M_ν, mas tem que comutar com $-id$ e com M_x para que se verifiquem as condições (8) e (9).

Com poucos cálculos verifica-se facilmente que as funções do tipo $C(x, y) = = (xp(y), -y)$ com $p(y) = p(-y)$ satisfazem as igualdades.

Construímos, assim, um exemplo de um operador não linear com um grupo de simetria generalizado gerado por uma rotação $(R_{\pi/2})$ e uma reflexão (M_x).

4 Órbitas periódicas simétricas

Seja L uma aplicação invertível em $\Omega\ (\mathbb{R}^n, ...)$. Consideremos o sistema dinâmico gerado por L. Para $x_0 \in \Omega\ (\mathbb{R}^n, ...)$, defina-se a *órbita de* x_0, como sendo o conjunto

$$O(x_0) = \{x \in \Omega : x = L^m x_0,\ m \in \mathbb{Z}\}.$$

Seja Σ o grupo de simetrias (generalizado) de L. Define-se o *subgrupo de isotropia de* $O(x_0)$, $\Sigma_{O(x_0)}$, como sendo o subgrupo de Σ, dos elementos $\sigma \in \Sigma$ que fixam $O(x_0)$, *i.e.*, $\sigma O(x_0) = O(x_0)$. Define-se analogamente *subgrupo de isotropia de* x_0.

Uma órbita $O(x_0)$ diz-se *simétrica em relação a* R se $R \in \Sigma_{O(x_0)}$. Subgrupos de isotropia de elementos da mesma órbita são conjugados:

$$\Sigma_{L^m x_0} = L^m \Sigma_{x_0} L^{-m}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

No caso em que Σ_{x_0} é gerado por r simetrias, então $\Sigma_{O(x_0)} = \Sigma_{x_0}$, porque se R for simetria, então $R \circ L = L \circ R$.

Quando $\Sigma_{x_0} = \langle M_1, \ldots, M_r, N\rangle$, onde $N \in \Sigma_-$, tem-se que $\Sigma_{L^m x_0} = = \langle M_1, \ldots, M_r, L^{2m} \circ N\rangle$ e vice-versa. Pois se $N \in \Sigma_- \cap \Sigma_{x_0}$ então,

$$\left(L^{2m} \circ N\right)(L^m x_0) = L^{2m} (N \circ L^m x_0) \underset{(N\in\Sigma_-)}{=} L^{2m} \left(L^{-m} \circ N x_0\right) \underset{\left(N\in\Sigma_{x_0}\right)}{=} L^m x_0.$$

Reciprocamente,

$$\left(L^{2m} \circ N\right) L^m x_0 = L^m x_0 \Rightarrow L^m \circ N \circ L^m x_0 = x_0 \Rightarrow N x_0 = x_0.$$

Para simetrias é trivial ver que $M \in \Sigma_{x_0} \Leftrightarrow M \in \Sigma_{L^m x_0}$. Assim, nestes casos particulares, conclui-se que se pode conhecer $\Sigma_{O(x_0)}$ conhecendo apenas Σ_{x_0}.

Proposição 14 *(Lamb e Quispel [1994]) $\langle L \rangle$ é um subgrupo normal de Σ. Além disso,*

$$\Sigma_{O(x_0)} = \langle L \rangle * \Sigma_{x_0}. \tag{10}$$

O produto $*$ é semi-directo sse $O(x_0)$ for uma órbita não periódica.

dem. Seja $S \in \Sigma_{O(x_0)}$. Então x_0 é enviado por S noutro elemento de $O(x_0)$, ou seja,

$$S x_0 = L^{-m} x_0 \Rightarrow L^m (S x_0) = x_0 \Rightarrow L^m \circ S \in \Sigma_{x_0}.$$

Logo $S = \underbrace{L^{-m}}_{\in \langle L \rangle} \Big(\underbrace{L^m S}_{\in \Sigma_{x_0}} \Big)$. Isto mostra que (10) é válido.

Tem-se $\langle L \rangle \trianglelefteq \Sigma_{O(x_0)}$ pois se $U \in \Sigma$ então $U L^m U^{-1} = L^{\pm m} U U^{-1} = L^{\pm m}$, ou seja,

$$U \langle L \rangle U^{-1} = \langle L \rangle.$$

O produto $*$ é semi-directo (ver apêndice 6.1) sse $\Sigma_{x_0} \cap \langle L \rangle = id$. Isto acontece sse $L^m x_0 \neq x_0 \ \forall_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, ou seja, $O(x_0)$ é não periódica. ∎

Na medida do possível conseguiu-se caracterizar $\Sigma_{O(x_0)}$ em função de Σ_{x_0}. Vamos agora ver até que ponto a existência de uma anti-simetria pode influenciar a existência de órbitas (periódicas) simétricas.

Antes de mais há que definir o *conjunto dos pontos fixos de uma aplicação* f, como sendo

$$Fix(f) = \{x \in \Omega : f(x) = x\}.$$

Lema 15 *(Lamb e Quispel [1994]) $S \in \Sigma_{O(x_0)} \Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{Z}} : x_0 \in Fix(L^m \circ S)$.*

Lema 16 *(Lamb e Quispel [1994]) $O(x_0)$ é periódica (de período p) e $S \in \Sigma_{O(x_0)}$ sse existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $x_0 \in Fix(L^n \circ S) \cap Fix(L^m \circ S)$ e nesse caso tem-se necessariamente que $m - n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.*

Teorema 17 *(Lamb e Roberts [1997]) Seja $N \in \Sigma_-$ e L invertível .*

(a) *$O(x_0)$ é simétrica em relação a N sse $O(x_0)$ intersectar $Fix(N) \cup Fix(L \circ N)$. E, nesse caso, $O(x_0)$ intersecta $Fix(N) \cup Fix(L \circ N)$ em não mais de dois pontos. Além disso $O(x_0) \subseteq Fix(N^2)$.*

(b) *$O(x_0)$ é simétrica em relação a N e periódica (sem ser ponto fixo) sse $O(x_0)$ intersectar $Fix(N) \cup Fix(L \circ N)$ em precisamente dois pontos. E, além disso,*

(b1) *$O(x_0)$ tem período $2p$ sse existir $y \in O(x_0)$ tal que $y \in Fix(N) \cap L^p(Fix\,(N))$ ou $y \in Fix(L \circ N) \cap L^p(Fix\,(L \circ N))$.*
[Neste caso os dois pontos estão em $Fix(N)$ ou em $Fix(L \circ N)$]

(b2) *$O(x_0)$ tem período $2p+1$ sse existir $y \in O(x_0)$ tal que $y \in Fix(N) \cap$ $\cap L^p(Fix\,(L \circ N))$.*
[Neste caso pode-se ainda dizer que $O(x_0)$ tem período ímpar sse intersectar $Fix(N)$ e $Fix(L \circ N)$]

Obs: As provas dos três últimos resultados encontram-se em apêndice.

Exemplo de aplicação:

Vamos considerar $L(x,y) = (-y,x)$ com anti-simetria $N(x,y) = (y,x)$.

Utilizando o teorema anterior vamos encontrar todas as órbitas periódicas em relação a N. Antes de mais note-se que o único ponto fixo de L é $(0,0)$.

- Para encontrar todas as órbitas de período 2 temos que calcular os conjuntos $Fix(N) \cap L(Fix\,(N))$ e $Fix(L \circ N) \cap L(Fix\,(L \circ N))$.

Ora , $N(x,y) = (y,x) = (x,y) \Leftrightarrow x = y$. Logo, $Fix(N) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.
E, $L(x,x) = (-x,x) \Rightarrow L(Fix\,(N)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$.
Mas, $Fix(N) \cap L(Fix\,(N)) = \{(0,0)\}$.

Além disso, $L(N(x,y)) = L(y,x) = (-x,y) = (x,y) \Leftrightarrow x = 0 \wedge y \in \mathbb{R}$ e, portanto $Fix(L \circ N) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

E, $L(0,y) = (-y,0)$ implica $L(Fix\,(L \circ N)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.
Logo, $Fix(L \circ N) \cap L(Fix\,(L \circ N)) = \{(0,0)\}$.
Conclui-se assim que não há órbitas de período 2.

- Para encontrar todas as órbitas de período 3 temos que calcular o conjunto $Fix(N) \cap L(Fix\,(L \circ N))$.

Ora, $Fix(N) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.
Mas, $L(0,y) = (-y,0)$ implica $L(Fix\,(L \circ N)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.
E, portanto, $Fix(N) \cap L(Fix\,(L \circ N)) = \{(0,0)\}$.
Conclui-se assim que não há órbitas de período 3.

- Para encontrar todas as órbitas de período 4 temos que calcular os conjuntos $Fix(N) \cap L^2(Fix\,(N))$ e $Fix(L \circ N) \cap L^2(Fix\,(L \circ N))$.

Ora, $L(L(x,x)) = L(-x,x) = (-x,-x) \Rightarrow L^2(Fix\,(N)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.
Logo, $Fix(N) \cap L^2(Fix\,(N)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.
Mas, $L(L(0,y)) = L(-y,0) = (0,-y)$ implica $L^2(Fix\,(L \circ N)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.
Portanto, $Fix(L \circ N) \cap L^2(Fix\,(L \circ N)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.
Conclui-se assim que as órbitas geradas pelos pontos da forma (x,x) ou $(0,y)$ têm período 4 e são simétricas relativamente a N.

Note-se que se continuarmos o raciocínio vão-se repetir os cálculos sem se obter nada de novo.

O método descrito no teorema anterior permite-nos encontrar todas as órbitas de um certo período e simétricas relativamente a uma dada anti-simetria N. Mas, usando a proposição seguinte, podemos calcular ainda todas as órbitas periódicas e simétricas relativamente a qualquer elemento da classe de conjugação de N.

Proposição 18 (Lamb e Quispel 94) *$O(x_0)$ é uma órbita N-simétrica sse para uma (anti)simetria V, $V(O(x_0))$ é uma órbita VNV^{-1}-simétrica.*

dem. Suponhamos que $N(O(x_0)) = O(x_0)$. Então,

$$VNV^{-1}(V(O(x_0))) = VN(O(x_0)) = V(O(x_0)).$$

Analogamente,

$$VNV^{-1}(V(O(x_0))) = V(O(x_0)) \Rightarrow N(O(x_0)) = O(x_0).$$

■

5 Atractores e Simetrias

Esta secção é dedicada à apresentação do problema da *admissibilidade*.

Seja A um subconjunto não-vazio do espaço de fase. Há dois tipos de simetrias que importa considerar: as que fixam A como um conjunto e as que fixam A ponto a ponto. O primeiro denota-se por Σ_A e o segundo por T_A. O grupo T_A refere-se às simetrias de uma solução a cada instante de tempo, simetrias instantâneas, enquanto Σ_A refere-se às simetrias em média-temporal dessa solução. Decorre trivialmente da definição que $T_A \trianglelefteq \Sigma_A$. Seguindo a notação usada em Melbourne *et al.* [1993] denomina-se $S_A = \Sigma_A / T_A$ o grupo de simetria de A. Mas, tendo em conta que, para descrever a simetria dum conjunto A é importante conhecer tanto Σ_A como T_A, indicamos a sua simetria pelo par (Σ_A, T_A).

No que diz respeito à definição de atractor que vamos usar importa ter presentes os seguintes conceitos: conjunto ω-limite e estabilidade segundo Liapunov. O conjunto *ω-limite* de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ consiste em todos os pontos $y \in \mathbb{R}^n$ para os quais existe uma sequência de tempos $\{t_k\}$ tendendo para infinito, tal que $\lim_{k \to +\infty} \phi_{t_k}(y) = x$. Um conjunto ω-limite A diz-se *Liapunov estável* se, para toda a vizinhança U de A, existir uma vizinhança V de A e $V \subset U$ tal que $\phi_t(V) \subset U$, para todo $t \geq 0$.

No contexto de toda a literatura relativa à admissibilidade e a simetrias de atractores consideramos um *atractor* como sendo um conjunto ω-limite Liapunov estável.

Esta definição é razoável já que a existência de anti-simetrias causa restrições ao comportamento do fluxo numa vizinhança do atractor. Por exemplo, consideremos um fluxo em $\mathbb{R}^2$ com uma órbita periódica γ. Suponhamos que existe uma órbita $O(x)$ a enrolar em γ pela parte exterior. Seja ρ uma anti-simetria que fixa γ. Então $\rho(O(x))$ será uma órbita do fluxo percorrida em sentido contrário. Como, quando $t \to +\infty$, $O(x)$ está a acumular-se em γ, por continuidade de ρ, $\rho(O(x))$ terá que acumular-se em γ. Logo a órbita do fluxo coincidente com $\rho(O(x))$ que percorre o mesmo trajecto em sentido contrário, terá que desenrolar na parte interior de γ que assim não será Liapunov estável. Portanto a estabilidade assimptótica é uma propriedade difícil de obter para conjuntos ω-limite, no contexto reversível.

Definição 1 *Seja Σ um subgrupo de Γ. Diz-se que Σ é **admissível** para fluxos (homeomorfismos, difeomorfismos) se existir um fluxo(homeomorfismo, difeomorfismo) com grupo de simetria generalizado Γ e um atractor com simetria $(\Sigma, 1)$.*

A questão fundamental relatada nesta tese é a seguinte:

"Dado um grupo Γ quais são os seus subgrupos admissíveis?"

Esta questão recebeu uma grande atenção nos últimos seis anos e foi já abordada com significativo sucesso para o caso equivariante nos artigos Melbourne *et al.* [1993], Ashwin e Melbourne [1994], Field *et al.* [1996] e Melbourne [1996].

No primeiro, apresenta-se um teorema (Teorema 4.10) que estabelece condições necessárias para que Σ seja admissível no caso discreto quando Γ é um subgrupo de Lie compacto contido em $\mathbb{O}(n)$. Neste resultado é crucial a existência das reflexões pela influência das componentes conexas de $\mathbb{R}^n - L$ ($L = \cup \; Fix \; \tau \;, \tau \; reflex\tilde{a}o$). Quando Γ é finito então as condições obtidas em Melbourne *et al.* [1993] são também suficientes. Este resultado foi obtido em Ashwin e Melbourne [1994] e envolve a construção de Σ-grafos.

Num artigo mais abrangente (Field *et al.* [1996]) conseguiu-se, supondo Γ subgrupo finito de $\mathbb{O}(n)$, descrever condições necessárias e suficientes para fluxos e difeomorfismos usando a seguinte classificação de subgrupos:

Definição 2 *Seja Δ um subgrupo de Σ. Diz-se que:*

(a) *Δ é um subgrupo de **Classe I** se Δ fixar uma componente conexa de $\mathbb{R}^n - L$.*

(b) *Δ é um subgrupo de **Classe II** se Δ não for de Classe I e existir um subgrupo $\tilde{\Delta}$ de indíce 2 tal que :*

- *$\tilde{\Delta}$ fixa uma componente conexa, C, de $\mathbb{R}^n - L$,*

- *existe uma involução B que comuta com Σ tal que $\sigma(C) = B(C)$ para todo $\sigma \in \Delta - \tilde{\Delta}$.*

Os resultados estabelecem que, para fluxos em $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, Σ é admissível sse Σ é de Classe I (a admissibilidade para $n = 1$ e para $n = 2$ foi tratada por uma análise caso a caso). Para difeomorfismos em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, Σ é admissível sse Σ é de Classe I ou de Classe II.

Melbourne [1996] tratou da questão no contexto de Γ grupo de Lie compacto, estendendo resultados dos artigos anteriores quando o atractor está contido num espaço de pontos fixos.

O contexto reversível foi abordado apenas em dois artigos. O primeiro, Lamb e Nicol [1996], trata o caso contínuo, para $\Gamma \subseteq \mathbb{O}(n)$, subgrupo finito, onde se estabelecem condições necessárias e suficientes, quando Σ não contém nenhuma anti-simetria e $n \geq 3$. Quando $n \geq 2$ e Σ não fixa nenhuma componente conexa de $\mathbb{R}^n - L$, condições necessárias e suficientes são também apresentadas. As dimensões $n = 1$ e $n = 2$ são descritas de forma completa.

O caso discreto foi recentemente apresentado em Lamb e Nicol [1998], onde o resultado essencial apresenta apenas condições necessárias para a admissibilidade, estendendo as categorias, Classe I e Classe II, do caso equivariante. A análise caso a caso efectuada para $n = 1$ e $n = 2$ deixou por resolver duas situações.

Por ser tão recente e por conter problemas em aberto, o objecto central desta tese é este último artigo. No entanto, como os resultados teóricos são generalizações de resultados de artigos anteriores, também estes últimos são aqui apresentados.

5.1 Dinâmica topológica e conjuntos pré-imagem

Nesta secção apresentam-se os factos que intervêm directamente na Proposição 27. As técnicas usadas são essencialmente de índole topológica e envolvem conceitos básicos de sistemas dinâmicos.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Define-se

$$\mathcal{P}_S(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (f^n)^{-1}(S).$$

Seja C uma componente conexa de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_S$ (é usual escrever $\mathcal{P}_S$ em vez de $\mathcal{P}_S(f)$ quando o contexto é claro).

Suponha-se $f(C) \cap \mathcal{P}_S \neq \emptyset$. Então existe $x \in \mathcal{P}_S$ e $y \in C$ tal que $f(y) = x$. Logo $y \in f^{-1}(\mathcal{P}_S)$, onde f^{-1} representa a imagem recíproca. Como $f^{-1}(\mathcal{P}_S) \subseteq \mathcal{P}_S$, pois $f^{-1}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}(A_n)$, tem-se que $y \in \mathcal{P}_S$. Mas $C \cap \mathcal{P}_S = \emptyset$, por hipótese. Consequentemente, $f(C) \subseteq \mathbb{R}^n - \mathcal{P}_S$.

Além disso, como f é contínua $f(C)$ é também um conjunto conexo. E, pela definição de conjunto conexo, conclui-se que f induz uma aplicação nas componentes conexas de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_S$.

Lema 19 (Melbourne et al. [1993]) *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Então ou $\omega(x) \subseteq \overline{\mathcal{P}_S}$ ou as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *$\omega(x) - \mathcal{P}_S$ é coberto por um número finito de componentes conexas $C_0, \ldots, C_{r-1}$ de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_S$;*

(b) estas componentes podem ser ordenadas de tal modo que $f(C_i) \subseteq C_{i+1 (\mathrm{mod}\, r)}$;

(c) $\omega(x) \subset \overline{C_0} \cup \ldots \cup \overline{C_{r-1}}$.

dem. Suponha-se que $\omega(x) \nsubseteq \overline{\mathcal{P}_S}$. Resta agora provar a validade de (a), (b) e (c). Tome-se $y \in \omega(x) - \overline{\mathcal{P}_S}$ e seja $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset \mathbb{R}^n - \overline{\mathcal{P}_S}$. Como o conjunto $B_\varepsilon(y)$ é conexo tem que estar contido nalguma componente conexa de $\mathbb{R}^n - \overline{\mathcal{P}_S}$, digamos C_0. Como $y \in \omega(x)$, existem iterados de x tão perto de y quanto se queira e logo em $B_\varepsilon(y)$. Considere-se o primeiro em $B_\varepsilon(y)$, digamos $f^k(x) \in B_\varepsilon(y)$, com $k \geq 0$. Pelo mesmo raciocínio, a órbita de x vai ter que voltar a visitar $B_\varepsilon(x)$. Seja então l, o menor inteiro maior do que k, tal que $f^l(x) \in B_\varepsilon(y)$. Tome-se $r = l-k$. Então $f^r(B_\varepsilon(y)) \cap B_\varepsilon(y) \neq \emptyset$, pois $f^r\left(f^k(x)\right) = f^l(x)$. Como $B_\varepsilon(y) \subseteq C_0$, pode-se concluir que $f^r\left(C_0\right) \cap C_0 \neq \emptyset$. Por continuidade de f e por C_0 ser conexo conclui-se que $f^r\left(C_0\right) \subset C_0$.

Seja $\bar{x} = f^r\left(x\right)$ e seja C_i a componente conexa de $\mathbb{R}^n - \overline{\mathcal{P}_S}$ que contém $f^i(\bar{x})$ para $i = 0, \ldots, r-1$; note-se que $\bar{x} \in C_0$ e portanto $f^r(\bar{x}) \in C_0$. Logo, por continuidade e por definição de conjunto conexo, mais uma vez, segue que $f(C_i) \subseteq C_{i+1(\mathrm{mod}\, r)}$, verificando (b).

Da construção anterior resulta trivialmente que qualquer iterado de $\bar{x}$ está em $C_0 \cup \ldots \cup C_{r-1}$.

Tomando o ω-limite de $\bar{x}$ conclui-se que,

$$\omega(\bar{x}) \subseteq \overline{C_0 \cup \ldots \cup C_{r-1}} = \overline{C_0} \cup \ldots \cup \overline{C_{r-1}}, \text{ o que prova a alínea (c).}$$

Mas $\bar{x}$ pertence à órbita de x e portanto $\omega(\bar{x}) = \omega(x)$. Seja p um ponto da aderência de C_i que não pertença a C_i. Se p pertencer a outra componente conexa, digamos C_j, então $C_j = C_i$. Logo p tem que pertencer a $\mathcal{P}_S$, por ser o complementar de $\cup_{i=0}^{\infty} C_i$. Pode-se então escrever

$$\omega(\bar{x}) \subseteq C_0 \cup \ldots \cup C_{r-1} \cup \mathcal{P}_S,$$

concluindo a prova. ■

Proposição 20 (Melbourne et al. [1993]) *Sejam S e A dois conjuntos fechados e suponha-se que A é f-invariante e Liapunov-estável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $A \cap S = \emptyset$.

(b) $A \cap \overline{\mathcal{P}_S} = \emptyset$.

dem. A única implicação não trivial é $(a) \Rightarrow (b)$, já que $S \subset \mathcal{P}_S$. Suponha-se então que $A \cap S = \emptyset$. Como A e S são fechados existe uma vizinhança V, de A tal que $V \cap S = \emptyset$. Seja U uma vizinhança de A contida em V, tal que $f^n(U) \subset V$, para qualquer $n \geq 0$. Logo, $f^n(U) \cap S = \emptyset$, $n \geq 0$. Isto implica que $U \cap (f^n)^{-1}(S) = \emptyset$, qualquer que seja $n \geq 0$, *i.e.*, $U \cap \mathcal{P}_S = \emptyset$. Por U ser aberto, $U \cap \overline{\mathcal{P}_S} = \emptyset$. ∎

Destes dois resultados segue um corolário que é a base da utilização das pré-imagens nos teoremas que introduzem restrições algébricas aos grupos de simetria dos atractores.

Corolário 21 (Melbourne et al. [1993]) *Seja A um atractor e S um conjunto fechado tal que $A \cap S = \emptyset$. Então $A \subset C_0 \cup \ldots \cup C_{r-1}$, onde C_i são as componentes conexas que se obtêm na demonstração do Lema 19.*

5.2 Componentes conexas e simetrias dos atractores

Considere-se um conjunto finito $\mathcal{C} = \{C_0, ..., C_{r-1}\}$ representando componentes conexas que cobrem o atractor. Seja $\mathbb{Z}_r$ um grupo a actuar transitivamente em $\mathcal{C}$; esta acção representa a acção de f nas componentes $C_0, ..., C_{r-1}$ como no Lema 19.

Seja, ainda, Σ um grupo a actuar em $\mathcal{C}$; Σ representa o grupo de simetrias do atractor. Falta impor as condições de equivariância e de reversibilidade. Suponha-se que Σ possui um subgrupo Σ_+ de índice 2 que actua em $\mathcal{C}$ sem pontos fixos; suponha-se ainda que a acção de $\mathbb{Z}_r$ comuta com a de Σ_+ (*equivariância*) e que $a\rho = \rho a^{-1}$, com $a \in \mathbb{Z}_r$, $\rho \in \Sigma - \Sigma_+$ (*reversibilidade*).

Sob estas hipóteses obtém-se a seguinte

Proposição 22 (Lamb e Nicol [1998]) $\Sigma \simeq \mathbb{D}_k$, *com $k \mid r$.*

dem. Verifique-se primeiro que $\Sigma_+ \simeq \mathbb{Z}_k$, com $k \mid r$. Seja a o gerador de $\mathbb{Z}_r$ e tome-se $C \in \mathcal{C}$. Por $\mathbb{Z}_r$ actuar transitivamente em $\mathcal{C}$, existe um único $a^p \in \mathbb{Z}_r$ tal que $\sigma.C = a^p.C$. Defina-se a aplicação $\varkappa : \Sigma_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_r$. por $\varkappa(\sigma) = a^p$. Há que verificar que $\varkappa$ é um monomorfismo.

$\varkappa$ é um <u>homomorfismo</u>: suponha-se que $\varkappa(\sigma_j) = a^{p_j}$ para $j = 1, 2$ e que $\varkappa(\sigma_1\sigma_2) = a^{p_3}$. Mas $\varkappa(\sigma_j) = a^{p_j} \Leftrightarrow \sigma_j.C = a^{p_j}.C$ e $\varkappa(\sigma_1\sigma_2) = a^{p_3} \Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2.C = a^{p_3}.C$. Quer-se provar que $p_3 = p_1 + p_2$. Mas $\sigma_1\sigma_2.C = \sigma_1 a^{p_2}.C = a^{p_2}\sigma_1.C$, porque a acção de Σ_+ comuta com a acção de $\mathbb{Z}_r$. Logo, $\sigma_1\sigma_2.C = a^{p_1}a^{p_2}.C = a^{p_1+p_2}.C$, pois $\mathbb{Z}_r$ é cíclico.

Pela unicidade de p_i vem $p_3 = p_1 + p_2$ e portanto $\varkappa(\sigma_1\sigma_2) = a^{p_3} = a^{p_1+p_2} = a^{p_1}a^{p_2} =$
$= \varkappa(\sigma_1)\varkappa(\sigma_2)$.

$\varkappa$ é injectivo: seja $\sigma \in \Sigma$ tal que $\varkappa(\sigma) = 1$. Então $\sigma.C = C$, para qualquer $C \in \mathcal{C}$. No entanto, Σ actua sem pontos fixos, logo σ tem que ser o elemento neutro.

Como $\varkappa$ é um monomorfismo $\varkappa(\Sigma_+)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}_r$, ou seja, $\Sigma_+ \simeq \mathbb{Z}_k$, com k a dividir r.

Seja ρ uma anti-simetria em Σ. Sejam C_1, C_2 e C_3 elementos de $\mathcal{C}$ tais que $C_2 =$
$= a^i.C_1$, $C_3 = a^m.C_1$ e $C_3 = \rho.C_1$. Então, $\rho^2.C_2 = \rho(\rho a^i.C_1) = \rho(a^{-i}.C_3) = \rho(a^{m-i}.C_1) =$
$= a^{i-m}\rho.C_1 = a^i.C_1 = C_2$. Como a composição de duas anti-simetrias é uma simetria, $\rho^2 \in \Sigma_+$. Além disso Σ_+ actua sem pontos fixos e logo $\rho^2 = id$.

A afirmação resulta do facto $\Sigma =< a, \rho : a^k = \rho^2 = id >$. ∎

Aplicando este resultado a órbitas periódicas deduz-se o seguinte

Corolário 23 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação reversível com respeito a um grupo Γ, i.e., Γ-reversível e A uma órbita periódica de período r. Então $S_A \simeq \mathbb{Z}_k$ ou $S_A \simeq \mathbb{D}_k$, com k a dividir r.*

dem. Basta aplicar a proposição anterior fazendo $\mathcal{C} = O(x)$, onde $O(x)$ é a órbita periódica considerada notando que S_A actua sem pontos fixos em $O(x)$. Obviamente, a acção de f em $\mathcal{C}$ é cíclica e transitiva. ∎

Proposição 24 (Melbourne et al. [1993]/Lamb e Nicol [1996]) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo Γ-reversível. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um atractor para f. Então, para qualquer (anti)simetria ρ, se $A \cap \rho(A) \neq \emptyset$ então $\rho(A) = A$.*

Suponhamos que $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$ é um grupo de Lie compacto e seja Σ um subgrupo de Γ. Seja K_Σ o conjunto de reflexões em $\Gamma - \Sigma$. Define-se

$$\begin{aligned} L_\Sigma &= \bigcup_{\tau \in K_\Sigma} Fix(\tau), \\ L_+ &= \bigcup_{\tau \in \Gamma_+} Fix(\tau) \\ \text{e,} \qquad L &= \bigcup_{\tau \in \Gamma} Fix(\tau). \end{aligned}$$

Note-se que quando $\Gamma = \Gamma_+$ então $L = L_+$.

Proposição 25 *Seja $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$ um grupo de Lie compacto com um subgrupo Σ. Suponhamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua Γ-reversível com um atractor conexo Σ-simétrico. Então existe uma componente conexa de $\mathbb{R}^n - L_\Sigma$ que é preservada por Σ.*

dem. Pela proposição anterior se A for Σ-simétrico então $A \cap L_\Sigma = \emptyset$. Por A ser conexo, A está contido numa componente conexa de $\mathbb{R}^n - L_\Sigma$. Como Σ fixa A, Σ tem que fixar essa mesma componente conexa. ■

Vejamos o que se pode concluir se excluirmos a hipótese que A é conexo.

Porém há ainda um lema técnico a apresentar.

Lema 26 *Seja Γ um grupo de simetrias e $\Sigma \trianglelefteq \Gamma_+$. Seja ρ uma anti-simetria tal que $\rho^2 \in \Sigma$. Então $\overline{\Sigma} = \Sigma \cup \rho\Sigma$ é um subgrupo de Γ.*

dem. Para demonstrar este resultado há que verificar que $\overline{\Sigma}$ é fechado para o produto e para a existência de elemento inverso.

Seja $\sigma \in \Sigma$. Então é óbvio que $\sigma^{-1} \in \overline{\Sigma}$, porque $\Sigma \trianglelefteq \Gamma_+$. Vejamos agora que $\rho^{-1} \in \rho\Sigma$. Como $\rho^2 \in \Sigma$ então $\rho^2 = \sigma$, para algum $\sigma \in \Sigma$. Ou seja, $\rho = \rho^{-1}\sigma \Leftrightarrow \rho^{-1} = = \rho\sigma^{-1} \in \rho\Sigma$. Consideremos agora uma anti-simetria qualquer $\alpha \in \rho\Sigma$. Então para algum $\sigma \in \Sigma$, $\alpha = \rho\sigma \Rightarrow \alpha^{-1} = \sigma^{-1}\rho^{-1} = \sigma^{-1}\rho\tilde{\alpha} = \rho(\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho)\tilde{\alpha}$. Como $\Sigma \trianglelefteq \Gamma_+$, podemos garantir que $\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho \in \Sigma$ e portanto $(\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho)\tilde{\alpha} \in \Sigma$.

Para verificar que $\overline{\Sigma}$ é fechado para o produto consideremos caso por caso.

Se $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ então é óbvio que $\sigma_1\sigma_2 \in \Sigma$. Se $\sigma \in \Sigma$ então é óbvio que $\rho\sigma \in \rho\Sigma$. E, $\sigma\rho = \rho(\rho^{-1}\sigma\rho) \in \rho\Sigma$, porque $\Sigma \trianglelefteq \Gamma_+$. Seja agora $\sigma \in \Sigma$ e $\alpha \in \rho\Sigma$. Então é óbvio que $\alpha\sigma \in \rho\Sigma$. E, além disso, $\sigma\alpha = \sigma\rho\tilde{\alpha} = \rho\tilde{\sigma}\tilde{\alpha} \in \rho\Sigma$.

Resta ainda considerar o caso em que temos duas anti-simetrias. Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \rho\Sigma$. Então podemos escrever $\alpha_1 = \rho\tilde{\alpha}_1$ e $\alpha_2 = \rho\tilde{\alpha}_2$. Já vimos que $\alpha_2^{-1} \in \rho\Sigma$, logo $\alpha_2^{-1} = \rho\alpha_3$ e portanto $\alpha_2 = (\alpha_2^{-1})^{-1} = \alpha_3^{-1}\rho^{-1}$. Consequentemente, $\alpha_1\alpha_2 = \rho\tilde{\alpha}_1\alpha_3^{-1}\rho^{-1} \in \Sigma$, mais uma vez porque $\Sigma \trianglelefteq \Gamma_+$. ■

Comentário 3 *É óbvio que o recíproco também é válido. Além disso, de um modo* *geral, conjectura-se que* $\overline{\Sigma} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n \Sigma$ *é um subgrupo de* Γ. *Logo, se existir* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\rho^k \in \Sigma$ *então* $\overline{\Sigma} = \bigcup_{n=0}^{k-1} \rho^n \Sigma$. *Observe-se ainda que,* $\overline{\Sigma}_+ = \Sigma \Leftrightarrow k = 2$.

Proposição 27 *(Lamb e Nicol [1998]) Seja* $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$ *um grupo finito com um subgrupo* Σ. *Suponhamos que* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação contínua, injectiva e* Γ*-reversível com um atractor* A, Σ*-simétrico. Suponhamos que* $Fix(\tau) \cap A = \emptyset$ *para todas as reflexões* $\tau \in \Gamma_-$. *Então, existe um subgrupo* Δ *de* Σ *tal que:*

(a) Δ *fixa uma componente conexa de* $\mathbb{R}^n - L_\Delta$,

(b) Δ_+ *é um subgrupo normal de* Σ_+ *(e, portanto, também de* Σ*),*

(c) $\Sigma_+/\Delta_+ \simeq \mathbb{Z}_k$ *ou* $\Sigma/\Delta_+ \simeq \mathbb{D}_k$, *se* $\Sigma_+ \neq \Sigma$.

dem. Seja L_* a união de todos hiperplanos de reflexão que não intersectam A. Então A é coberto por um número finito de componentes conexas de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_{L^*} : A \subset C_0 \cup \ldots \ldots \cup C_{r-1}$, pelo Lema 19.

Seja $\Delta^i = \{\delta \in \Sigma : \delta(C_i) = C_i\}$. Note-se que $\Delta^i \leq \Sigma$. Usando a condição de equivariância prova-se que $\Delta_+^i = \Delta_+^j$ com $i \neq j$. Seja $\Delta_* = \Delta_+^0 = \ldots = \Delta_+^{r-1}$. Então Δ_* é um subgrupo normal de Σ_+ porque é o núcleo da acção de Σ_+ em $C = \{C_i\}_i$. Como $\Sigma_+ \trianglelefteq \Sigma$ então $\Delta_* \trianglelefteq \Sigma$ e (b) fica provada. Além disso Σ_+/Δ_* actua nas componentes $\{C_i\}_i$ sem pontos fixos. Logo, pela Proposição 22 conclui-se que $\Sigma_+/\Delta_* \simeq \mathbb{Z}_k$ ou $\Sigma/\Delta_* \simeq \mathbb{D}_k$, se $\Sigma_+ \neq \Sigma$. Como vamos ver a seguir $\Delta_* = \Delta_+$ para um certo subgrupo Δ; e, portanto a alínea (c) é válida.

Tomemos $\delta \in \Delta_-^i$, para algum $i \in \{0, ..., r-1\}$ e definamos $\Delta = \Delta_* \cup \delta\Delta_*$. Se não existir nenhum δ nestas condições temos que $\Delta^i = \Delta_*$, para todo i, e então $\Delta = \Delta_*$. Pela demonstração da Proposição 22 podemos concluir que δ^2 fixa todas as componentes C_i, *i.e.*, $\delta^2 \in \Delta_*$. Logo pelo Lema 26 Δ é um subgrupo de Σ.

Vamos provar que $L_\Delta \subset L_*$, *i.e.*, se $Fix(\rho) \subset L_\Delta$ então $Fix(\rho) \subset L_*$, sendo ρ uma reflexão. Suponhamos que $Fix(\rho) \not\subseteq L_*$ e $Fix(\rho) \subset L_\Delta$, *i.e.*, $\rho \notin \Delta$.

Por definição de L_*, $Fix(\rho) \cap A \neq \emptyset$. Mas pela Proposição 24 isso implica $\rho \in \Sigma$. Como A está coberto por r componentes conexas de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_{L^*}$ então $Fix(\rho)$ intersecta uma delas. Logo $Fix(\rho) \cap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \rho(C_i) \cap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \rho(C_i) \subset C_i$, pela continuidade de ρ e por C_i ser conexo.

Portanto, ρ fixa a componente C_i. Como não existe nenhuma reflexão $\tau \in \Gamma_-$ tal que $Fix(\tau) \cap A \neq \emptyset$, concluímos que $\rho \in \Gamma_+$. Logo $\rho \in \Sigma_+$ e, portanto, como ρ fixa a componente C_i, temos que $\rho \in \Delta_+^i = \Delta_* \subseteq \Delta$. O que nos leva a um absurdo pois $\rho \notin \Delta$. Logo $L_\Delta \subset L_*$.

Como $L_* \subset \mathcal{P}_{L^*}$ e Δ por construção, fixa uma componente conexa de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_{L^*}$, Δ fixa também uma componente de $\mathbb{R}^n - L_\Delta$, o que prova a afirmação (a).

Como foi prometido, note-se que, em qualquer dos casos considerados, $\Delta_+ = \Delta_*$.

■

Vejamos agora o que acontece se permitirmos que o espaço de pontos fixos de alguma reflexão de Γ_- intersecte o atractor.

Primeiro, vamos considerar um caso em que conseguimos obter as mesmas restrições (a), (b) e (c). Este caso é aquele em que existe um único grupo que fixa alguma(s) componente(s) conexas.

O caso restante, que segue de generalizarmos o anterior, trata todas as possibilidades em que Γ é um grupo finito. Para não tornar a notação demasiado fastidiosa definimos alguns conceitos e demonstramos alguns lemas, antes de provar o resultado.

Como revimos na demonstração anterior podemos cobrir o atractor com r componentes conexas de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_{L^*}$, digamos, $C_0, ..., C_{r-1}$. Considerenos apenas reflexões cujos espaços de pontos fixos intersectam o atractor.

Definição 3 *Dizemos que uma reflexão* $\tau \in \Gamma_-$ *é de* ***índice i,*** *e escrevemos* $ind(\tau) = i$, *se* $Fix(\tau) \cap C_i \neq \emptyset$.

Definição 4 *Seja* $i \in \mathbb{N}_0$. *Dizemos que* i *é um* ***índice de A*** *se existir uma reflexão de índice* i. *Além disso, chamamos* $Ind(A)$ *ao conjunto dos índices de* A.

Seja $\tau_j \in \Gamma_-$ uma reflexão tal que $Fix(\tau_j) \cap A \neq \emptyset$. Então, τ_j fixa uma componente C_i, logo τ_j é de índice i. Por conveniência escolhemos $j = i$. Consideremos o conjunto $\Lambda^i = \Delta_* \cup \tau_i \Delta_*$. Como $\tau_i^2 = id$, pelo Lema 26, Λ^i é um subgrupo de Σ e, além disso, Λ^i fixa a componente C_i.

Lema 28 *Seja* $\Lambda^j = \Delta_* \cup \tau_j \Delta_*$, *com* $j \in \{1,2\}$. *Suponhamos que* $\Lambda^1_- \cap \Lambda^2_- \neq \emptyset$. *Então* $\Lambda^1 = \Lambda^2$.

dem. Seja $\alpha \in \Lambda^1_- \cap \Lambda^2_-$. Então $\alpha = \tau_1\delta_1$ e $\alpha = \tau_2\delta_2$, com $\delta_j \in \Delta_*$, o que implica,

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2 \Leftrightarrow \tau_1 = \tau_2\delta_2\delta_1^{-1}.$$

Logo $\tau_1 \in \tau_2\Delta_* \subset \Lambda^2$. Analogamente mostra-se que $\tau_2 \in \tau_1\Delta_* \subset \Lambda^1$. ∎

O Lema 28 diz que os dois grupos Λ^1 e Λ^2 são tais que $\Lambda^1 \cap \Lambda^2 = \Delta_*$ ou $\Lambda^1 = \Lambda^2$.

Suponhamos que $Ind(A) = \{i_1, ..., i_p\}$ com $p \leq r$ e que $ind(\tau_j) = i_j$. Consideremos o conjunto $\mathcal{I} = \{\Lambda^{i_1}, ..., \Lambda^{i_p}\}$. O Lema 28 garante que alguns dos elementos de $\mathcal{I}$ são iguais. Logo, podemos retirar os que se repetem e tomar apenas um deles como representante.

Consequentemente, podemos escrever $\mathcal{I}$ de forma *irredutível*, digamos,

$$\mathcal{I} = \{\Lambda^{i_1}, ..., \Lambda^{i_p}\} \text{ com } \Lambda^{i_l}_- \cap \Lambda^{i_k}_- = \emptyset,\ i_l \neq i_k.$$

Suponhamos que $\mathcal{I}$ está na forma irredutível.

Lema 29 $\mathcal{I}$ *é único.*

dem. Vejamos o que acontece se existirem duas reflexões τ e ρ tais que $ind(\tau) = ind(\rho) = i$.

Sejam $\Lambda^1 = \Delta_* \cup \tau\Delta_*$ e $\Lambda^2 = \Delta_* \cup \rho\Delta_*$. Se $\Lambda^1 = \Lambda^2$ então $\mathcal{I}$ é de facto único.

Como τ, $\rho \in \Sigma_-$, podemos escrever $\tau = \rho\sigma$, com $\sigma \in \Sigma_+$, pois, como vimos na introdução, $\Sigma_- = \rho\Sigma_+$, logo, $\sigma = \rho\tau$, pois $\rho^2 = id$. Como τ e ρ fixam C_i concluímos que σ também fixa C_i. Logo $\sigma \in \Delta^i_+ = \Delta_*$.

Portanto, $\tau \in \rho\Delta_*$, ou seja, $\tau \in \Lambda^2$. Pelo Lema 28 $\Lambda^1 = \Lambda^2$. ∎

A nova hipótese para a Proposição 30 é que $\mathcal{I} = \{\Delta\}$, uma vez que $\mathcal{I} = \emptyset$ é precisamente a hipótese já utilizada. Sob esta hipótese, há que notar que admitimos a existência de várias reflexões em Γ_-, $\{\tau_1, ..., \tau_p\}$, tais que $Fix(\tau_j) \cap A \neq \emptyset$ desde que $\Lambda^{i_1} = ... = \Lambda^{i_p} = \Delta$, *i.e.*, as componentes intersectadas são as mesmas.

Proposição 30 *Seja* $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$ *um grupo finito com um subgrupo* Σ. *Suponhamos que* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação contínua, injectiva e* Γ*-reversível com um atractor* A, Σ*-simétrico. Suponhamos que* $\mathcal{I} = \emptyset$ *ou* $\mathcal{I} = \{\Delta\}$. *Então* Δ *é tal que:*

(a) Δ *fixa uma componente conexa de* $\mathbb{R}^n - L_\Delta$,

(b) Δ_+ *é um subgrupo normal de* Σ_+ *(e, portanto, também de* Σ*),*

(c) $\Sigma_+/\Delta_+ \simeq \mathbb{Z}_k$ *ou* $\Sigma/\Delta_+ \simeq \mathbb{D}_k$, *se* $\Sigma_+ \neq \Sigma$.

dem. A prova segue todos os passos da demonstração anterior excepto quando queremos provar que $\rho \in \Delta$. Sendo assim, mostramos apenas as alterações.

Suponhamos que $\mathcal{I} = \{\Delta\}$ com $\Delta = \Delta_* \cup \tau\Delta_*$.

Portanto, ρ fixa a componente C_i. Se $\rho \in \Sigma_-$ então $ind(\rho) = i$ e $\Lambda^i = \Delta$ porque por hipótese $\mathcal{I} = \{\Delta\}$, $\rho \in \Delta$. Se $\rho \in \Sigma_+$ então $\rho \in \Delta_+^i = \Delta_*$. Portanto, $\rho \in \Delta$.

O resto da demonstração segue. ∎

O seguinte resultado é a generalização da Proposição 30.

Proposição 31 *Seja* $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$ *um grupo finito com um subgrupo* Σ. *Suponhamos que* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação contínua, injectiva e* Γ*-reversível com um atractor* A, Σ*-simétrico. Suponhamos que* $\mathcal{I} = \{\Lambda^1, ..., \Lambda^p\}$. *Então* $\Lambda^1, ..., \Lambda^p$ *são tais que:*

(a) $\forall_{i \in \{1,...,p\}} : \Lambda^i$ *fixa uma componente conexa de* $\mathbb{R}^n - L_\Lambda$, *onde* $\Lambda = \cup_{i=1}^p \Lambda^i$,

(b) $\forall_{i,j \in \{1,...,p\}} : i \neq j \Rightarrow \Lambda_+^i = \Lambda_+^j = \Delta_*$ *é um subgrupo normal de* Σ_+ *(e, portanto, também de* Σ*),*

(c) $\Sigma_+/\Delta_* \simeq \mathbb{Z}_k$ *ou* $\Sigma/\Delta_* \simeq \mathbb{D}_k$, *se* $\Sigma_+ \neq \Sigma$.

dem. Seja $\Lambda^i = \Delta_* \cup \tau_i\Delta_*$, com Δ_* como na demonstração anterior.

As alíneas (b) e (c) provam-se pela mesma forma da proposição anterior.

Seja $\Lambda = \cup_{i=1}^p \Lambda^i$. Vejamos que $L_\Lambda \subset L_*$. Usando o mesmo raciocínio da demonstração anterior, suponhamos que $Fix(\rho) \not\subseteq L_*$ e $Fix(\rho) \subset L_\Lambda$, *i.e.*, $\rho \notin \Lambda$. Por definição de L_*, $Fix(\rho) \cap A \neq \emptyset$. Mas pela Proposição 24 isso implica $\rho \in \Sigma$. Como A está coberto por r componentes conexas de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_{L^*}$ então $Fix(\rho)$ intersecta uma delas. Logo $Fix(\rho) \cap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \rho(C_i) \cap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \rho(C_i) \subset C_i$, pela continuidade de ρ e por C_i ser conexo. Portanto, ρ fixa a componente C_i.

Se $\rho \in \Sigma_-$ então $\rho \in \Lambda^i$, porque $ind(\rho) = i$. Logo $\rho \in \Lambda$. Se $\rho \in \Sigma_+$ então $\rho \in \Delta^i_+ = \Delta_* \subset \Lambda^j \subset \Lambda$, onde j é qualquer.

Mas por hipótese $\rho \notin \Lambda$. Logo $L_\Lambda \subset L_*$. Como $L_* \subset \mathcal{P}_{L^*}$ e Λ^i fixa uma componente conexa de $\mathbb{R}^n - \mathcal{P}_{L^*}$, Λ^i fixa também uma componente de $\mathbb{R}^n - L_\Lambda$, o que prova a afirmação (a). ■

Da construção de Λ^i, é razoável conjecturar que $\Lambda^i \simeq \Lambda^j$, com $i \neq j$. No entanto, o melhor que se consegue verificar é descrito na proposição seguinte. Seja

$$C(\Gamma) = \{a \in \Lambda : ab = ba,\ \forall_{b \in \Gamma}\},\ \text{onde}\ \Gamma \leq \Lambda.$$

Proposição 32 *Se $\tau_j\tau_i \in C(\Delta_*)$ então $\Lambda^i \simeq \Lambda^j$.*

dem. Consideremos a aplicação $\psi : \Lambda^i \to \Lambda^j$, definida por,

$$\begin{cases} \psi(\delta) = \delta,\ \text{se}\ \delta \in \Delta_* \\ \psi(\tau_i\delta) = \tau_j\delta \end{cases}.$$

A aplicação ψ é, claramente, sobrejectiva.

Suponhamos que $\psi(\delta) = id$. Então,

$$\delta = id \text{ ou } \tau_j\delta = id.$$

Mas, $\tau_j\delta = id \Leftrightarrow \delta = \tau_j$, o que implica $\tau_j \in \Delta_*$ (abs). Logo $\delta = id$ e ψ é uma aplicação injectiva.

Falta verificar que ψ é um homomorfismo.

Sejam $a, b \in \Delta_*$. Então,

$$\psi(ab) = ab = \psi(a)\psi(b).$$

Sejam $a \in \tau_i\Delta_*$ e $b \in \Delta_*$. Então,

$$\psi(ab) = \psi(\tau_i\hat{a}b) = \tau_j\hat{a}b = \psi(a)\psi(b).$$

E,

$$\begin{aligned}
\psi(ba) = \psi(b\tau_i\hat{a}) = \psi(\tau_i\tau_i b\tau_i\hat{a}) = \\
&= \tau_j\tau_i b\tau_i\hat{a}, \text{ porque } \tau_i b\tau_i\hat{a} \in \Delta_* \\
&= b\tau_j\tau_i\tau_i\hat{a}, \text{ porque } \tau_j\tau_i \in C(\Delta_*) \\
&= b\tau_j\hat{a} = \psi(b)\psi(a).
\end{aligned}$$

Sejam $a, b \in \tau_i\Delta_*$. Então,

$$\begin{aligned}
\psi(ab) = ab = \tau_i\hat{a}\tau_i\hat{b} = \tau_j^2\tau_i\hat{a}\tau_i\hat{b} = \\
&= \tau_j\hat{a}\tau_j\tau_i\tau_i\hat{b}, \text{ porque } \tau_j\tau_i \in C(\Delta_*) \\
&= \tau_j\hat{a}\tau_j\hat{b} = \psi(a)\psi(b).
\end{aligned}$$

Consequentemente, ψ é um isomorfismo. ∎

Comentário 4 *Note-se que* $\tau_j\tau_i \in C(\Delta_*) \Leftrightarrow \tau_i\tau_j \in C(\Delta_*)$.

5.3 Grupos de reflexão

Seja Γ um subgrupo finito de $\mathbb{O}(n)$. O subgrupo normal de Γ gerado pelas reflexões de Γ diz-se um *grupo de reflexão* e representa-se por R.

Esta secção contém resultados conhecidos sobre grupos de reflexão cujas demonstrações não têm relevância na abordagem do problema e por isso serão omitidas. Para mais pormenores consultar Humphreys [1990].

Definição 5 *Seja* Γ *um subgrupo finito de* $\mathbb{O}(n)$. *Um subconjunto* C *de* $\mathbb{R}^n$ *diz-se um* ***domínio fundamental*** *para* Γ *sse:*

(1) C *for aberto;*

(2) $C \cap \gamma C = \emptyset$, *para* $id \neq \gamma \in \Gamma$;

(3) $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} ad(\gamma C)$ *(*$ad(A)$ *representa a aderência de* A*).*

Proposição 33 *Cada componente de* $\mathbb{R}^n - L$ *é um domínio fundamental para a acção de* R*. Em particular* R *actua transitivamente e sem pontos fixos nas componentes conexas* $C_1, ..., C_r$ *de* $\mathbb{R}^n - L$ *.*

Proposição 34 *Podemos decompor* $\mathbb{R}^n = V \oplus W$*, tal que* $V = V_1 \oplus ... \oplus V_p$ *e* $R = R_1 \times ... \times R_p$ *onde* V *e* W *são* R*-invariantes e, para cada* $j \in \{1, ..., p\}$ *temos,*

(a) R_j *é um grupo de reflexão, não-trivial com acção irredutível em* V_j*,*

(b) R_j *actua trivialmente em* $(\bigoplus_{i \neq j} V_i) \oplus W$*,*

(c) *se* C *for um domínio fundamental para a acção de* R *em* $\mathbb{R}^n$*, então* $C = C_1 \times ... \times C_p$*.*

Seja $J \subset R$ um subgrupo de isotropia maximal. Supondo a acção de Γ irredutível, o subespaço uni-dimensional $Fix(J)$ diz-se um *eixo de simetria de* R.

Proposição 35 *Seja* R *um grupo de reflexão finito actuando irredutivelmente em* $\mathbb{R}^n$ *e* C *um domínio fundamental para* R*. Então,* $ad(C) \backslash \{\vec{0}\}$ *intersecta precisamente* n *eixos de simetria,* $A_1, ..., A_n$*. E, além disso, se* $ad(C') \backslash \{\vec{0}\}$ *intersectar* $A_1, ..., A_n$ *então* $C' = \pm C$*.*

Consideremos agora um grupo de simetrias generalizado Γ. Seja R o grupo gerado pelas reflexões de Γ_+.

Proposição 36 *(Field et al. [1996]) Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um homeomorfismo* Γ*-reversível. Seja* C *um domínio fundamental para a acção de* R *em* $\mathbb{R}^n$ *e seja* $C = C_1 \times ... \times C_p \times W$ *a decomposição de* C *dada na Proposição 34. Então,*

(a) $f(C) = e_1 C_1 \times ... \times e_p C_p \times W$*, onde* $e_i \in \{-1, 1\}$*, e* $i \in \{1, ..., p\}$*,*

(b) *os subespaços* $V_+ = \oplus_{e_i = 1} V_i$ *e* $V_- = \oplus_{e_i = -1} V_i$ *são* Γ*-invariantes.*

dem. Seja $C' = f(C) = C'_1 \times ... \times C'_p \times W$. Fixe-se uma das componentes C_i, por exemplo C_1. Seja $M = \dim V_1$ e $A_1, ..., A_m$ os eixos de simetria de R_1 que intersectam $ad(C_1)\backslash\{\vec{0}\}$ como na Proposição 35. Pela equivariância de f conclui-se que f fixa os A_j. Logo, $ad(C'_1)$ intersecta todos os eixos, por continuidade de f. E, pela proposição anterior $C'_1 = \pm C_1$.

Sejam $\gamma \in \Gamma$ e A um eixo de simetria para algum R_j. Então, γA é um eixo de simetria para $\gamma R_j \gamma^{-1}$. Por equivariância f preserva ou reverte a orientação em A e γA, ao mesmo tempo, e, portanto, A e γA estão ambos em V_+ ou V_-. Como $f(A) = A \Rightarrow f(A) = f^{-1}(A)$, a afirmação anterior é válida para anti-simetrias. Como os eixos de simetria de R_j geram V_j conclui-se que V_+ e V_- são Γ-invariantes.

Logo a acção de Γ preserva V_+ e V_-. ■

Teorema 37 (Lamb e Nicol [1998]) *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo Γ-reversível e $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$ finito e $\{C_i\}$ as componentes conexas de $\mathbb{R}^n - L_+$. Então existe uma involução B que comuta com Γ tal que $f(C_i) = B(C_i)$ para todo $i = 1, ..., p$.*

dem. Nas hipóteses da proposição anterior obtém-se $\mathbb{R}^n = V_+ \oplus V_- \oplus W$, onde V_+, V_- e W são Γ-invariantes. Define-se $B_{V_+} = Id_{V_+}$, $B_{V_-} = -Id_{V_-}$ e $B_W = Id_W$. Então é óbvio que $f(C) = B(C)$. Como C é um domínio fundamental a igualdade anterior é válida para qualquer componente conexa de $\mathbb{R}^n - L_+$. ■

Teorema 38 (Lamb e Nicol [1998]) *Nas condições do teorema anterior se a involução B for uma anti-simetria e o grupo R, gerado pelas reflexões de Γ_+, actuar não trivialmente em $\mathbb{R}^n$(i.e. $W = \emptyset$) então f tem que ser igual a B.*

5.4 Subgrupos de Classe I e de Classe II

Nesta subsecção apresentam-se as definições de subgrupos de Classe I e Classe II relativas a sistemas dinâmicos discretos reversíveis. Estas definições seguem trivialmente do caso equivariante.

Por fim é apresentado o teorema mais importante, para o caso reversível, até agora conseguido no trabalho de Lamb e Nicol [1998].

Definição 6 *Seja* Γ *um grupo de simetrias generalizado e* $\Sigma \leq \Gamma$.

(a) Σ *diz-se de* ***Classe I*** *se fixar uma componente conexa de* $\mathbb{R}^n - L_+$.

(b) Σ *diz-se de* ***Classe II*** *se:*

  i. *não for se Classe I e,*

  ii. *possuir um subgrupo* Σ' *que é de Classe I e,*

   - $\Sigma/\Sigma' \simeq \mathbb{Z}_2$,

   - *existir uma involução* B *que comuta com todos elementos de* Γ *tal que* $\sigma(C) = B(C)$ *para todo* $\sigma \in \Sigma - \Sigma'$ *onde* C *é a componente conexa fixada por* Σ'.

Comentário 5 *Se* Γ *não possuir anti-simetrias estas definições coincidem com as estabelecidas no caso equivariante em Field et al. [1996].*

A tabela 1 consiste numa lista de subgrupos de Classe I e de Classe II e pode ser encontrada em Lamb e Nicol [1998].

$\Gamma(\Gamma_+)$	$\Sigma(\Sigma_+)$	Classe
$\mathbb{Z}_{2m}(\mathbb{Z}_m)$	$\mathbb{Z}_{2k}(\mathbb{Z}_k)$, $\mathbb{Z}_k(\mathbb{Z}_k)$	I
$\mathbb{D}_m(\mathbb{Z}_m)$	$\mathbb{D}_k(\mathbb{Z}_k)$, $\mathbb{Z}_k(\mathbb{Z}_k)$	I
$\mathbb{D}_2(\mathbb{D}_1)$	$\mathbb{D}_1(1)$, $1(1)$	I
	$\mathbb{D}_2(\mathbb{D}_1)$, $\mathbb{D}_1(\mathbb{D}_1)$, $\mathbb{Z}_2(1)$	II
$\mathbb{D}_{2m}(\mathbb{D}_m), m \geq 2$ par	$\mathbb{D}_1(1)$, $1(1)$	I
	$\mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}_2)$	II
$\mathbb{D}_{2m}(\mathbb{D}_m), m \geq 3$ ímpar	$\mathbb{D}_1(1)$, $1(1)$	I
	$\mathbb{D}_1(\mathbb{D}_1)$, $\mathbb{Z}_2(1)$	II

Tabela 1: Lista dos subgrupos $\Sigma(\Sigma_+)$ de Classe I e de Classe II, de grupos de simetria generalizados $\Gamma(\Gamma_+)$ que são subgrupos finitos de $\mathbb{O}(2)$.

Lema 39 *(Field et al [1996]) Seja $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$ um grupo finito. Suponhamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, injectiva e Γ-equivariante. Então, f^2 fixa cada componente conexa de $\mathbb{R}^n - L$.*

dem. Seja τ uma reflexão. Como f é uma aplicação injectiva e Γ-equivariante $Fix(\tau)$, é invariante por f e f^{-1}. Como tal, nenhum ponto em $\mathbb{R}^n - Fix(\tau)$ é enviado por f para o interior de $Fix(\tau)$. Sejam C_1 e C_2 as componentes conexas de $\mathbb{R}^n - Fix(\tau)$.

Se f enviar um ponto de C_1 para o interior de C_2, então,

$$f(C_1) \subset C_2, \tag{11}$$

por definição de conjunto conexo e pela continuidade de f.

Suponha-se agora que existe $x \in C_1$ tal que $f(x) = y \in C_2$ e existe $z \in C_2$ tal que $f(z) = w \in C_2$.

Então $f^{-1}(w) \in C_2$ e $f^{-1}(y) \in C_1$. Logo $f^{-1}(C_2) \subset C_2$ e $f^{-1}(C_2) \subset C_1$ por (11).

Consequentemente f tem que permutar (em sentido lato) as componentes C_1 e C_2. Logo f^2 fixa cada uma dessas componentes.

Cada componente conexa de $\mathbb{R}^n - L$ pode escrever-se como intersecção de componentes conexas de $\mathbb{R}^n - Fix(\tau_j)$, onde τ_j é uma reflexão, *i.e.*, $C = C_{\tau_1}^{r_1} \cap ... \cap C_{\tau_j}^{r_j}$, onde $r_j \in \{1, 2\}$. Logo,

$$f(C) = f(C_{\tau_1}^{r_1}) \cap ... \cap f(C_{\tau_j}^{r_j}).$$

E, portanto,

$$f^2(C) = f^2(C_{\tau_1}^{r_1}) \cap ... \cap f^2(C_{\tau_j}^{r_j}) = C_{\tau_1}^{r_1} \cap ... \cap C_{\tau_j}^{r_j} = C.$$

■

Corolário 40 *(Field et al. [1996]) Nas hipóteses do lema anterior conclui-se que o atractor intersecta no máximo duas componentes conexas de $\mathbb{R}^n - L$ e que Σ contém no máximo uma reflexão.*

Comentário 6 *Note-se que este resultado não é válido para o caso reversível: basta considerar $f = (-y, x)$, rotação de $\frac{\pi}{4}$, e $\Gamma = \langle \tau_x, \tau_y \rangle$ o grupo de simetrias generalizado* *de f, onde τ_x é a reflexão no eixo dos xx e τ_y é a reflexão no eixo dos yy. Neste caso, é fácil ver que τ_x e τ_y são anti-simetrias de f e que qualquer órbita (que tem período 4) é um atractor que está contido em 4 componentes conexas de $\mathbb{R}^n - L$.*

Teorema 41 *(Lamb e Nicol [1998]) Seja Γ um subgrupo finito de $\mathbb{O}(n)$ e $\Sigma \leq \Gamma$ um subgrupo admissível para homeomorfismos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Γ-reversíveis. Então Σ é de Classe I ou de Classe II.*

dem. Consideremos os dois casos possíveis:(a) A está contido numa componente conexa de $\mathbb{R}^n - L_+$;(b) A está contido em duas componentes conexas de $\mathbb{R}^n - L_+$.

(a) se A intersectar apenas uma componente conexa C de $\mathbb{R}^n - L_+$, como Σ fixa A então Σ fixa C, logo Σ é de Classe I.

(b) se A intersectar duas componentes conexas, C_1 e C_2, então existe um subgrupo de Σ, Σ', de índice 2, que fixa as componentes C_1 e C_2 :

Seja $\Sigma'_i = \{\sigma \in \Sigma : \sigma(C_i) = C_i\}$, para $i = 1, 2$. Usando, mais uma vez, a continuidade de σ e o facto de C_i ser conexo, podemos concluir que $\Sigma'_1 = \Sigma'_2$. Seja $\Sigma' = \Sigma'_1 = \Sigma'_2$. É trivial ver que $\Sigma' \trianglelefteq \Sigma$ e que Σ' é de Classe I. E, além disso, para qualquer elemento de Σ, tem-se que ou $\sigma \in \Sigma'$ ou $\sigma^2 \in \Sigma'$. Logo, $\Sigma/\Sigma' \simeq \mathbb{Z}_2$.

O Teorema 38 afirma que existe uma involução B tal que $f(C) = B(C)$, para toda a componente conexa de $\mathbb{R}^n - L_+$. Seja $\sigma \in \Sigma - \Sigma'$ e $C \in \{C_1, C_2\}$. Para mostrar que Σ é de Classe II tem que se mostrar que $\sigma(C) = B(C)$.

Note-se que f troca C_1 com C_2; pois se $f(C_1) = C_1$ então $f^r(C_1) = C_1, \forall_{r \in \mathbb{R}}$ e A seria composto por dois atractores e não um. E, portanto, f^{-1} também troca C_1 com C_2. Logo,

$$\sigma(C_1) = \sigma f^{-1}(C_2) = f\sigma(C_2) = f(C_1) = B(C_1).$$

O mesmo raciocínio é válido para C_2. Conclui-se assim que Σ é de Classe II. ∎

5.5 Construções em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$

Nesta subsecção descreve-se a questão da admissibilidade em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ efectuada em Lamb e Nicol [1998]. O único resultado em que se apresenta a demonstração é a Proposição

42 por usar resultados das subsecções 3 e 4. Para os subgrupos de $\mathbb{O}(2)$ apresenta-se a tabela 2 com os casos resolvidos e os que permanecem por resolver.

Proposição 42 *(Lamb e Nicol [1998])* *$\Sigma(\Sigma_+) = \mathbb{Z}_2(1)$ é admissível para homeomorfismos e difeomorfismos em $\mathbb{R}$ com grupo de simetria generalizado $\Gamma(\Gamma_+) = \mathbb{Z}_2(1)$. No entanto, a única aplicação que realiza a admissibilidade para este subgrupo é $f = -id$.*

dem. É fácil ver que $f = -id$ verifica a condição de reversibilidade para $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ e que possui conjuntos ω-limite Liapunov-estáveis com grupo de simetria $(\mathbb{Z}_2, 1)$.

Verifiquemos que, de facto, $f = -id$ é a única aplicação nestas condições. Recordemos que os únicos conjuntos ω-limite limitados de homeomorfismos em $\mathbb{R}$ são órbitas periódicas (ver Devaney [1989]). Portanto, se $\Sigma(\Sigma_+) = \mathbb{Z}_2(1)$ for admissível para homeomorfismos, terá que existir uma órbita periódica $\mathbb{Z}_2$-simétrica. Seja ρ a anti--simetria de f que gera $\mathbb{Z}_2$. Pelo Teorema 17 uma órbita periódica $\mathbb{Z}_2$-simétrica tem que intersectar $Fix(\rho) \cup Fix(h)$, onde $h = f \circ \rho$.

Além disso, pelo Teorema 13 podemos escrever

$$f = \rho \circ g, \text{ onde } g = \rho \circ f \text{ e } \rho^2 = g^2 = id.$$

Logo, $h = \rho \circ g \circ \rho$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} h^2 &= (\rho \circ g \circ \rho)\,(\rho \circ g \circ \rho) = \\ &= \rho \circ g^2 \circ \rho = \\ &= \rho^2 = id. \end{aligned}$$

Suponhamos que $\mathbf{h \neq id}$. Então, como $h^2 = id$, concluímos que $h = h^{-1}$ e, portanto, o gráfico de h tem que ser simétrico relativamente à recta $y = x$. Como $h \neq id$ tem que existir um par ordenado $(x, h(x))$ numa das componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \backslash \{y = x\}$. Por simetria terá que existir outro par ordenado $(y, h(y))$ na outra componente conexa. E, por continuidade de h, podemos concluir que o gráfico de h intersecta a recta $y = x$. Logo $Fix(h) \neq \emptyset$.

Se $Fix(h)$ for um conjunto discreto, consideremos dois pontos consecutivos A e B contidos na recta $y = x$. Então o gráfico de h une os dois pontos sem intersectar a recta

$y = x$. Por simetria do gráfico relativamente à recta $y = x$ obtemos uma curva fechada que certamente não é o gráfico de uma função.

Se $Fix(h)$ for um conjunto contínuo, então $h = id$, ou de outro modo obteríamos, mais uma vez, uma incoerência no gráfico de h.

Consequentemente $Fix(h) = \{a\}$.

Note-se que o caso em que o atractor é um ponto fixo é excluído porque ou não é $\mathbb{Z}_2$-simétrico (se for diferente da origem) ou possui simetrias instantâneas não triviais (se for a origem).

Se $Fix(\rho) = Fix(h) = \{0\}$ então $f(0) = 0$ e a origem seria o atractor em questão, o que não interessa. Por isso podemos admitir que $a \neq 0$.

Assim, pelo Teorema 17 podemos concluir que:

(1) Se a órbita tiver período $2p + 1$ então intersecta $Fix(\rho) \cap f^p(Fix(h))$,

(2) Se a órbita tiver período $2p$ então intersecta $Fix(\rho) \cap f^p(Fix(\rho))$ ou $Fix(h) \cap f^p(Fix(h))$.

Notemos que, $f(0) = h \circ \rho(0) = h(0)$.

Como $h^2 = id$, temos que $f^2(0) = 0$, o que é equivalente a $f^{-1}(0) = f(0)$.

Logo, a órbita de 0 é $\mathbb{Z}_2$-simétrica sse $f(0) = 0$, *i.e.*, a origem é um ponto fixo, caso previamente excluído para atractor.

Consequentemente, o único caso que resta considerar é quando temos uma órbita de período $2p$ a intersectar $Fix(h) \cap f^p(Fix(h))$, pois nos restantes a órbita considerada seria a da origem.

Ora, para que $Fix(h) \cap f^p(Fix(h)) \neq \emptyset$, temos obrigatoriamente que $f^p(a) = a$ o que leva a um absurdo pois o período da órbita é $2p$.

O absurdo resultou de supormos que $h \neq id$. ■

$\Gamma(\Gamma_+)$	$\Sigma(\Sigma_+)$	Classe
$\mathbb{Z}_2(1)$	$\mathbb{Z}_2(1)$, $1(1)$	I
$\mathbb{Z}_{2m}(\mathbb{Z}_m)$, $m \geq 3$ ímpar	$\mathbb{Z}_2(1)^*$, $1(1)$	I
	$\mathbb{Z}_{2m}(\mathbb{Z}_m)$ não resolvido	I
$\mathbb{Z}_{2m}(\mathbb{Z}_m), m \geq 2$ par	$\mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}_2)$, $1(1)$	I
	$\mathbb{Z}_{2m}(\mathbb{Z}_m)$ não resolvido	I
$\mathbb{D}_2(\mathbb{D}_1)$	$\mathbb{D}_1(1)$, $1(1)$	I
	$\mathbb{D}_2(\mathbb{D}_1)$, $\mathbb{D}_1(\mathbb{D}_1)$, $\mathbb{Z}_2(1)$	II
$\mathbb{D}_m(\mathbb{Z}_m)$	$\mathbb{D}_k(\mathbb{Z}_k)$, $\mathbb{Z}_k(\mathbb{Z}_k)$	I
$\mathbb{D}_{2m}(\mathbb{D}_m), m \geq 3$ ímpar	$\mathbb{D}_1(1)$, $1(1)$	I
	$\mathbb{Z}_2(1)^*$	II
$\mathbb{D}_{2m}(\mathbb{D}_m)$, $m \geq 2$ par	$\mathbb{D}_1(1)$, $1(1)$	I
	$\mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}_2)$	II

Tabela 2: Subgrupos admissíveis em $\mathbb{R}^2$. Os casos assinalados com * admitem apenas $f = -id$. A admissibilidade não foi ainda decidida para os subgrupos anotados com a expressão "não resolvido".

5.6 Discussão

5.6.1 Atractores em subespaços de pontos fixos e simetrias escondidas

Na definição de subgrupo admissível exige-se que o atractor possua um subgrupo de simetrias instantâneas trivial, *i.e.*, o único elemento de Γ que fixa o atractor ponto a ponto é a identidade.

Suponhamos que o atractor possui (Σ_A, T_A) como grupo de simetria, onde $T_A \neq \{id\}$. Sendo assim é óbvio que A está contido em $Fix\ T_A$. Como foi visto por Melbourne [1996], $T_A \trianglelefteq \Sigma_A$. Logo, $\Sigma_A \leq N(T_A)$, onde

$$N(T_A) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma\tau\gamma^{-1} \in T_A,\ \forall_{\tau \in T_A}\}.$$

Se T_A contiver uma anti-simetria então o conjunto ω-limite A, tem que ser um ponto fixo. Consequentemente a situação mais interessante será quando T_A não contiver anti--simetrias. Considere-se esse caso.

É fácil ver que $Fix\ T_A$ é invariante pelo fluxo. O procedimento é então óbvio: tome-se a restrição de f a $Fix\ T_A$; digamos g. Certamente g é uma aplicação com grupo de simetria generalizado $\Gamma' = N(T_A)/T_A$ a actuar em $Fix\ T_A$. De onde se conclui que se (Σ_A, T_A) for admissível então $(\Sigma_A/T_A, 1)$ é também admissível.

No entanto, esta observação não leva a uma condição necessária e suficiente, devido à existência de simetrias escondidas (ver Golubitsky *et al.* [1994]) que são elementos de $\Gamma - N(T_A)$ tais que $\gamma(Fix\ T_A) \cap Fix\ T_A \neq \emptyset$.

Nos trabalhos Melbourne [1996] e Lamb e Nicol [1996] estão descritos os métodos para resolver este problema considerando as simetrias escondidas, para os casos equivariante e reversível respectivamente.

5.6.2 Detectives das simetrias dos atractores

A questão levantada foi a seguinte: dada uma aplicação Γ-equivariante, f, e um atractor A da dinâmica gerada por f, como calcular Σ_A, o grupo de simetrias de A?

A abordagem a esta pergunta feita por Barany *et al.* [1993] onde se introduz o conceito de detective de simetria.

A ideia desenvolvida é extremamente interessante, não só pela forma como dá resposta à pergunta supra mencionada, como também por interligar vários conceitos matemáticos que são, de um modo geral, de áreas distintas.

Vejamos de modo breve como foi abordado o problema.

Seja A o atractor em causa, definido como sendo um conjunto ω-limite compacto e Liapunov-estável. Como vimos na Proposição 24 para cada $\gamma \in \Gamma$, $\gamma A = A$ ou $\gamma A \cap A = \emptyset$. Geralmente, é impossível conhecer com exactidão o conjunto A. O que na realidade se constrói graficamente, num computador, é o conjunto A^* definido como segue. Seja $\tau > 0$. Considere-se o conjunto A^* dos pontos cuja distância a A é inferior a τ. Como A é compacto, tomando τ suficientemente pequeno, podemos considerar que A^* está contido na bacia de atracção de A e que A^* tem o mesmo grupo de simetrias de A. O conjunto aberto A^* diz-se um atractor "espesso". Também os atractores "espessos" têm a propriedade $\gamma A = A$ ou $\gamma A \cap A = \emptyset$, $\forall_{\gamma \in \Gamma}$. Em termos rigoros, exige-se que a fronteira de A seja suficientemente regular para aplicar o teorema de

Stokes.

Considere-se o conjunto

$$\mathcal{A} = \{A \text{ aberto de } \mathbb{R}^n : \gamma A = A \text{ ou } \gamma A \cap A = \emptyset, \forall_{\gamma \in \Gamma}\}.$$

O objectivo é encontrar um procedimento que determine as simetrias dos elementos de $\mathcal{A}$.

O passo seguinte será transferir este problema para o de encontrar o subgrupo de isotropia de um ponto num espaço associado W.

Seja W uma representação de Γ de dimensão finita. Considerem-se aplicações C^∞, $\phi : \mathbb{R}^n \to W$, Γ-equivariantes e A um atractor "espesso". Diz-se que ϕ é um *observável* e $K_\phi(A) = \int_A \phi \, d\mu$, onde μ é a medida de Lebesgue, é uma *observação.*

Quando a dimensão do espaço de fase é grande, ou mesmo infinita, o método alternativo ao cálculo do integral $K_\phi(A)$ envolve o teorema ergódico e a existência de medidas ergódicas simétricas, das quais, a medida "box-counting" de Sinai-Bowen--Ruelle (ver *e.g.* Buescu [1998]), é um exemplo: calcula-se uma soma ergódica em vez do integral $K_\phi(A)$.

Note-se que, o atractor "espesso" tem medida de Lebesgue não nula, pois é um aberto, enquanto o atractor original pode ter medida nula.

Sendo $K_\phi(A)$ um vector em W, pois ϕ toma valores em W, considere-se o subgrupo de isotropia,

$$\Sigma_\phi(A) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma K_\phi(A) = K_\phi(A)\}$$

Pode-se provar o seguinte

Lema 43 *(Barany et al. [1993]) Para cada observável ϕ, $\Sigma_A \subseteq \Sigma_\phi(A)$.*

A próxima proposição é o primeiro passo para a solução do problema.

Proposição 44 *(Barany et al. [1993]) Para cada aberto $A \in \mathcal{A}$ existe uma representação W de Γ e um observável $\phi : \mathbb{R}^n \to W$ tal que $\Sigma_A = \Sigma_\phi(A)$.*

Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to W$ um observável. Diz-se que ϕ é um *detective* se para quase todos os abertos $A \subset \mathbb{R}^n$, $\Sigma_A = \Sigma_\phi(A)$.

Para tornar a definição precisa há que dar significado à expressão "para quase todos".

Seja $\psi \in Dif_\Gamma(\mathbb{R}^n)$, onde $Dif_\Gamma(\mathbb{R}^n)$ é o grupo de difeomorfismos C^∞ e Γ-equivariantes em $\mathbb{R}^n$. É fácil de verificar que $\Sigma_{\psi(A)} = \Sigma_A$. Além disso, se ψ for quase-identidade, *i.e.*, pertencer a uma vizinhança da *id* na topologia C^k, então $\psi(A)$ é uma pequena perturbação de A. E, sendo A um atractor, então $\psi(A)$ é também um atractor para $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$, o que corresponde a uma mudança de coordenadas diferenciável no sistema dinâmico original.

Definição 7 *O observável ϕ é um* **detective** *se para cada $A \in \mathcal{A}$ quase todos os difeomorfismos ψ, quase-identidade, satisfazem a condição $\Sigma_\phi(\psi(A)) = \Sigma_A$.*

O resultado principal é o seguinte

Teorema 45 (Barany et al. [1993]) *Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to W$ um polinómio observável e W uma representação de Γ que verifique certas condições de irredutibilidade. Suponhamos que ϕ decomposto segundo uma decomposição específica de Γ, possui certas coordenadas não nulas. Então ϕ é um detective.*

As condições referidas são demasiado específicas no âmbito desta discussão, para serem mencionadas.

Deste resultado segue o

Corolário 46 (Barany et al. [1993]) *Qualquer subgrupo finito $\Gamma \subset \mathbb{O}(n)$ possui um detective.*

Muitos detectives foram já construídos para vários grupos e as referências, Barany *et al.* [1993] , Golubitsky e Nicol [1995], Ashwin e Nicol [1997] e Gillis e Golubitsky [1997] constituem a quase totalidade da literatura existente até ao momento.

Para a reversibilidade esta questão não foi ainda tratada, o que deixa em aberto uma possível investigação.

5.6.3 A questão da admissibilidade. De novo?

Na tabela 2 estão assinalados dois subgrupos cuja admissibilidade é somente realizada pela aplicação $-id$. Obviamente, que se alguém estiver a estudar um certo problema com aquele tipo de simetria, certamente não estará a estudar a aplicação $-id$. Logo, para esse investigador, poder-se-á dizer que o subgrupo em causa é inadmissível.

Do nosso ponto de vista, dever-se-á reformular a questão da admissibilidade em termos da "probabilidade" de um certo subgrupo de Γ ser o grupo de simetria de um atractor para uma aplicação Γ-reversível.

Obviamente, a abordagem poderá tomar outros rumos: poder-se-á procurar subgrupos que sejam admissíveis *genericamente* para uma certa classe de sistemas dinâmicos, o que seria o tipo de admissibilidade mais forte; por outro lado, poder-se-ia procurar subgrupos que sejam admissíveis num *aberto* para uma certa topologia, numa certa classe de sistemas dinâmicos.

É claro que esta nova abordagem traria uma *reclassificação da admissibilidade* na qual os casos assinalados com * e os já demonstrados inadmissíveis estariam no mesmo *tipo de inadmissibilidade*.

6 Apêndice

6.1 Produto semi-directo de grupos

Sejam A e B dois grupos. Suponhamos que A actua em B por automorfismos, *i.e.*, para cada $a \in A$ existe um automorfismo em B, $\lambda_a : B \to B$ tal que $\lambda_1(b) = b$ e $\lambda_a(\lambda_{a'}(b)) = \\ = \lambda_{a'a}(b)$. Obtém-se assim um homomorfismo $\lambda : A \to aut(B)$. E, reciprocamente, cada homomorfismo deste tipo define uma acção de A em B.

Conhecidos os grupos A e B e uma acção λ, podemos definir um grupo G, dito *produto semi-directo de A por B*, que consiste no conjunto dos pares-ordenados (a, b) com a seguinte operação,

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, \lambda_{a_2}(b_1) b_2).$$

Verifica-se a associatividade, a existência de elemento neutro, $(1_A, 1_B)$ e de inverso, $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, \lambda_{a^{-1}}(b^{-1}))$. Existe um isomorfismo natural entre o conjunto dos elementos da forma $(a, 1)$ e A. O mesmo se verifica com B e o conjunto dos elementos da forma $(1, b)$. Este último é um subgrupo normal de G e além disso o grupo quociente por ele gerado é isomorfo a A.

No caso particular da Proposição 14 em que temos $G = A.B$ com $A \leq G$ e $B \trianglelefteq G$ podemos definir uma acção natural, $\lambda_a : B \to B$ onde $\lambda_a(b) = a^{-1}ba$. Estabelece-se então a seguinte

Proposição 47 *Seja G nas condições acima referidas. Então G é produto semi-directo de A por B sse $A \cap B = \{e\}$.*

dem. $(\Leftarrow)$ Considere-se a seguinte aplicação $\psi : A * B \to G$ tal que $(a, b) \mapsto a.b$, onde $*$ representa produto semi-directo. Verifique-se que ψ é um homomorfismo,

$$\psi((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) = \psi(a_1 a_2, \lambda_{a_2}(b_1) b_2) = \psi(a_1 a_2, a_2^{-1} b_1 a_2 b_2) =$$
$$= a_1 a_2 a_2^{-1} b_1 a_2 b_2 = a_1 b_1 a_2 b_2 = \psi(a_1, b_1).\psi(a_2, b_2).$$

É sobrejectivo porque $G = A.B$. É injectivo porque, se $\psi(a, b) = e$, onde e é o elemento neutro de G então $ab = e$ ou seja, $a = b^{-1}$. Logo $b^{-1} \in A$ e $a \in B$. Como A é um subgrupo $b \in A$. Mas, como $A \cap B = \{e\}$ conclui-se que $a = b = e$. Logo, ψ é, de facto, um isomorfismo.

($\Rightarrow$)Consideremos a mesma aplicação ψ. Pelos mesmos cálculos podemos verificar que ψ é um homomorfismo sobrejectivo. Suponhamos que $x \in A \cap B$. É óbvio que $x^{-1} \in B$, logo $(x, x^{-1}) \in A * B$. Ora $\psi(x, x^{-1}) = xx^{-1} = e$, ou seja, $(x, x^{-1}) \in \ker\psi$. Pelo teorema fundamental do homomorfismo podemos afirmar que $A*B/\ker\psi \simeq im\psi$. Como ψ é sobrejectivo , *i.e.* $im\psi = G$ e, por hipótese $A * B \simeq G$, conclui-se que $\ker\psi = \{(e, e)\} \Rightarrow x = e$. ∎

6.2 Demonstração do Lema 15

Se $S \in \Sigma_{O(x_0)}$ então $\exists_{m\in\mathbb{Z}} : Sx_0 = L^{-m}x_0$, ou seja, $L^m \circ Sx_0 = x_0 \Leftrightarrow x_0 \in Fix(L^m \circ S)$. Reciprocamente, se $L^m \circ Sx_0 = x_0$ para algum m , tem-se que

$$S \circ L^k x_0 = L^{\pm k} \circ Sx_0 = L^{\pm k} \circ L^{-m} \circ L^m \circ Sx_0 = L^{\pm k - m}x_0 \in O(x_0).$$

Logo $S \in \Sigma_{O(x_0)}$.

6.3 Demonstração do Lema 16

Suponha-se que $x_0 \in Fix(L^n \circ S) \cap Fix(L^m \circ S)$. Então $L^n \circ Sx_0 = x_0$ e $L^m \circ Sx_0 = x_0$. Pelo Lema 15, $S \in \Sigma_{O(x_0)}$, e ,

$$L^{m-n}x_0 = L^{m-n}\left(L^n \circ Sx_0\right) = L^m \circ Sx_0 = x_0,$$

ou seja $O(x_0)$ é periódica e decerto $m - n = kp$.

Reciprocamente se $O(x_0)$ for periódica de período p e $S \in \Sigma_{O(x_0)}$ então pelo Lema 15, $\exists_{m\in\mathbb{Z}}$ tal que $x_0 \in Fix(L^n \circ S)$, *i.e.*, $Sx_0 = L^{-m}x_0$. Como $L^p x_0 = x_0$, temos que $Sx_0 = L^{p-m}x_0$, e fazendo $n = m - p$, conclui-se que $x_0 \in Fix(L^n \circ S) \cap Fix(L^m \circ S)$.

6.4 Demonstração (parcial) do Teorema 17

Para provar o teorema é preciso usar o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} Fix(L^{2n} \circ N) &= L^n(Fix(N)) \\ \text{e,}\quad Fix(L^{2n+1} \circ N) &= L^n(Fix(L \circ N)), \end{aligned}$$

quando N é uma anti-simetria.

Seja $x_0 \in Fix(L^{2n} \circ N)$. Então $L^{2n} \circ N x_0 = x_0$. Logo,

$$L^n \circ N \circ L^{-n} x_0 = x_0 \Rightarrow N \circ L^{-n} x_0 = L^{-n} x_0$$

e, portanto $L^{-n} x_0 \in Fix(N)$. Quer dizer que $L^{-n}(Fix(L^{2n} \circ N)) \subseteq Fix(N)$, *i.e.*, $Fix(L^{2n} \circ N) \subseteq L^n(Fix(N))$. Reciprocamente, seja $x_0 \in Fix(N)$. Então $N x_0 = x_0$. E,

$$L^{2n} \circ N \circ L^n x_0 = L^{2n} \circ L^{-n} \circ N x_0 = L^n x_0 \Rightarrow L^n x_0 \in Fix(L^{2n} \circ N).$$

O caso restante decorre do anterior porque $L \circ N$ é uma anti-simetria.

Seguem-se as provas:

(a) Pelo Lema 15 $O(x_0)$ é simétrica em relação a N sse $x_0 \in Fix(L^m \circ N)$, para algum $m \in \mathbb{Z}$. Mas, se m for par então $Fix(L^m \circ N)= L^{m/2}(Fix(N))$. Logo, $x_0 \in L^{m/2}(Fix(N)) \Rightarrow x_0 = L^{m/2} y_0$, para algum $y_0 \in Fix(N)$, ou seja, $y_0 = L^{-m/2} x_0$, o que quer dizer que $O(x_0)$ intersecta $Fix(N)$. O mesmo raciocínio para o caso em que m é ímpar leva a concluir que $O(x_0)$ intersecta $Fix(L \circ N)$.

Logo, $O(x_0)$ intersecta $Fix(N)$ ou $Fix(L \circ N)$.

Suponhamos agora que, para algum $m \in \mathbb{Z}$, $L^m x_0 \in Fix(N)$. Então,

$N \circ L^m x_0 = x_0 \Leftrightarrow N \circ L^m \circ N \circ L^m x_0 = x_0 \Leftrightarrow N \circ L^m \circ L^{-m} \circ N x_0 = x_0 \Leftrightarrow N^2 x_0 = x_0$.

E para $y_0 = L^r x_0$, outro ponto da órbita $O(x_0)$,

$N^2 y_0 = N^2 \circ L^r x_0 = L^r \circ N^2 x_0 = L^r x_0 = y_0$. Logo, $O(x_0) \subseteq Fix(N^2)$.

Quando $O(x_0)$ intersecta $Fix(L \circ N)$ o resultado obtém-se através de cálculos semelhantes.

(b1)($\Leftarrow$) trivial pelo Lema 16.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $O(x_0)$ tem período $2p$. Pela alínea (a) $O(x_0)$ intersecta $Fix(N) \cup Fix(L \circ N)$. Seja y_0 o ponto de intersecção. É óbvio que $O(x_0) = O(y_0)$.

Supondo que $y_0 \in Fix(N)$ temos,

$$N \circ L^p y_0 = L^p \circ L^{-p} \circ N \circ L^p y_0 = L^p \circ N \circ L^{2p} y_0 = L^p y_0.$$

Mas, $y_0 = L^p\left(L^p y_0\right)$ logo, $y_0 \in L^p(Fix(N))$.

O caso $y_0 \in Fix(L \circ N)$ é inteiramente análogo.

(b2)($\Leftarrow$) trivial pelo Lema 16.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $O(x_0)$ tem período $2p+1$. Pela alínea (a) $O(x_0)$ intersecta $Fix(N) \cup Fix(L \circ N)$. Seja $y_0 \in O(x_0)$.

Suponhamos primeiro que $y_0 \in Fix(N)$.

$$L \circ N(L^{p+1} y_0) = L^p \circ L^{-p} \circ L \circ N \circ L^{p+1} y_0 = L^{p+1} \circ N \circ L^{2p+1} y_0 = L^{p+1} y_0.$$

Mas, $y_0 = L^p\left(L^{p+1} y_0\right)$ logo, $y_0 \in L^p(Fix(L \circ N))$.

Além disso, $z_0 = L^{-p} y_0 \in Fix(L \circ N)$ e portanto, $O(x_0)$ intersecta $Fix(N)$ em y_0 e $Fix(L \circ N)$ em z_0.

Supondo agora que $y_0 \in Fix(L \circ N)$. Então,

$$N \circ L^p y_0 = L^p \circ L^{-p-1} \circ L \circ N \circ L^p y_0 = L^p \circ L \circ N \circ L^{2p+1} y_0 = L^p y_0.$$

Conclui-se assim que z_0 $(= L^p y_0) \in Fix(N)$ o que permite usar o caso anterior.

Por acréscimo provámos também que se a órbita tiver período ímpar então intersecta $Fix(L \circ N)$ e $Fix(N)$.

Reciprocamente, suponhamos que $O(x_0)$ intersecta $Fix(L \circ N)$ e $Fix(N)$.

Então existem y_0 e z_0 elementos da órbita de x_0 tais que $y_0 \in Fix(N)$ e $z_0 \in Fix(L \circ N)$. Pelo Lema 15 fica provado que $O(x_0)$ é N-simétrica. É óbvio que $z_0 = L^{-m} y_0$ para algum $m \in \mathbb{Z}$.

Logo, $L^{-m} y_0 \in Fix(L \circ N)$, *i.e.*, $y_0 \in L^m Fix(L \circ N)$, ou ainda, $y_0 \in Fix(L^{2m+1} \circ N)$.

Ou seja, $y_0 \in Fix(L^{2m+1} \circ N) \cap Fix(N)$. Pelo Lema 16 o período divide $2m+1$, logo não pode ser par. ■

Resta provar que se $O(x_0)$ é simétrica em relação a N então $O(x_0)$ intersecta $Fix(N) \cup Fix(L \circ N)$ em não mais de dois pontos.

Referências

[1] Arnold, V. I. , [1983]. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Grundlehren **250**, Springer-Verlag, New York.

[2] Ashwin, P. e Nicol, M. [1997]. *Detection of symmetry of attractors from observations I.Theory.* Physica D **100**, 58-70.

[3] Ashwin, P. e Melbourne, I. [1994]. *Symmetry Groups of Attractors.* Arch. Rational Mech. Anal. **126**, 59-78.

[4] Barany, E., Dellnitz, M. e Golubitsky, M. [1993]. *Detecting the symmetry of attractors.* Physica D **67**, 66-87.

[5] Bourbaki, N. [1960]. *Groupes et Algèbres de Lie.* Ch. I, *Act. Sc. et Ind.* **1285**, Ch. IV, V, VI [1968] Hermman, Paris.

[6] Buescu, J. [1998]. *Exotic Attractors.* Birkäuser.

[7] Devaney, R. [1989]. *An introduction to chaotic dynamical systems.* Addison-Wesley, Reading MA, 2nd edition.

[8] Devaney, R. [1977]. *Blue sky catastrophes in reversible Hamiltonian systems.* Indiana University, Math J., **26**, 247-263.

[9] Field, M., Melbourne, I. e Nicol, M. [1996]. *Symmetric Attractors for Diffeomorphisms and Flows.* Proc. London Math. Soc. (3) **72**, 657-696.

[10] Gillis, D., Golubitsky, M. [1997]. *A formula for a symmetry detective.* Physica D **107**, 23-29.

[11] Golubitsky, M. e Nicol, M. [1995]. *Symmetry detectives for SBR attractors.* Nonlinearity **8,** 1027-1037.

[12] Golubitsky, M., Marsden, J. e Schaeffer, D. [1984]. *Bifurcation problems with hidden symmetries.* in *Partial Differential Equations and Dynamical Systems*, W.E.

Fitzgibbon III (Ed), Research Notes in Mathematics, **101** Pitman, London, 181-210.

[13] Humphreys, J. [1990]. *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29** (CUP).

[14] Lamb, J. e Nicol, M. [1998]. *On symmetric attractors in reversible dynamical systems.* Physica D **112**, 281-297.

[15] Lamb, J. e Roberts, J., [1997]. *Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey.* Physica D **112**, 1-39.

[16] Lamb, J. e Nicol, M. [1996]. *On symmetric ω-limit sets in reversible flows.* In H.W. Broer, S.A. van Gils, I, Hoveijin, F. Takens, editors, *Nonlinear Dynamical Systems and Chaos,* **19** *Progress in Nonlinear Partial Differential Equations and Applications,* 103-120. Birkhäuser, Basel.

[17] Lamb, J., [1995]. *Area-preserving dynamics that is not reversible.* Physica A **228**, 344-365.

[18] Lamb, J. e Quispel, G., [1994]. *Reversing k-symmetries in dynamical systems.* Physica D **73**, 277-304.

[19] Lamb, J., Roberts, J. e Capel, H., [1993]. *Conditions for local (reversing) symmetries in dynamical systems.* Physica A **197**, 379-422.

[20] Lamb, J., [1992]. *Reversing symmetries in dynamical systems.* J.Phys.A: Math.Gen. **26**, 2921-2933.

[21] Melbourne, I., [1996]. *Generalizations of a Result on Symmetry Groups of Attractors.* Fields Institute Communications, AMS, **5**, 281-295.

[22] Melbourne, I., Dellnitz, M. e Golubitsky, M., [1993]. *The Structure of Symmetric Attractors.* Arch. Rational Mech. Anal., **123**, 75-98.