André Gama Oliveira

Valorações invariantes e volumes intrínsecos de corpos convexos



Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

André Gama Oliveira

Valorações invariantes e volumes intrínsecos de corpos convexos

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, em Janeiro de 2002, para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Paulo Ventura Araújo, Professor Associado do Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

"Não receio o erro porque estou sempre pronto a corrigi-lo."

Bento de Jesus Caraça

Conteúdo

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Notação e definições básicas 5

1.2 Corpos convexos 8

1.2.1 Hiperplanos de suporte 8

1.2.2 Projecção e propriedades de suporte 8

1.2.3 Métrica de Hausdorff 13

1.2.4 Politopos 13

2 Volumes intrínsecos **15**

2.1 Volume de corpos paralelos 15

2.2 Volumes intrínsecos 23

2.3 Volumes intrínsecos da bola unitária 33

2.4 Volumes intrínsecos dos paralelotopos 33

3 Extensão de valorações **37**

3.1 Teorema do funcional de Groemer 38

3.1.1 Extensão a uma família fechada para uniões finitas 38

3.1.2 Extensão a uma família fechada para uniões finitas e para diferenças 42

3.2 Extensão de valorações de $\mathcal{K}^n$ para $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ 44

4 Valorações no anel convexo **49**

4.1 Característica de Euler 49

4.2 Função suporte 54

4.3 Valorações simples nos policonvexos 60
4.4 Teorema do Volume 73
4.5 Teorema da caracterização de Hadwiger 76

5 Grassmanianas e volumes intrínsecos **79**

5.1 Medidas invariantes nas Grassmanianas 80
5.1.1 Medidas na Grassmaniana de dimensão 1 80
5.1.2 Medidas nas variedades bandeira 85
5.1.2.1 Topologia nas variedades bandeira 86
5.1.2.2 Um funcional linear positivo nas variedades bandeira . . . 87
5.1.3 Medidas na Grassmaniana de dimensão k 91
5.1.4 Medidas na Grassmaniana afim 92
5.1.4.1 Topologia na Grassmaniana afim 92
5.1.4.2 Um funcional linear positivo na Grassmaniana afim 94
5.2 Volumes intrínsecos e a Fórmula de Hadwiger 95
5.3 Aplicações e exemplos 99
5.3.1 Fórmula de Crofton 99
5.3.2 Monotonia dos volumes intrínsecos 101
5.3.3 Um problema de probabilidade 102

A Funções harmónicas na esfera **103**

A.1 Produto interno 104
A.2 Gradiente e operador de Beltrami 106
A.3 Integração na esfera 111
A.4 Funções harmónicas na esfera 115
A.5 Expansão em série 117
A.6 Polinómios de Legendre 121
A.7 Teorema de Funk-Hecke e Transformação Cosseno 122

Bibliografia **135**

Introdução

Uma *valoração* é uma função que generaliza a noção de medida, nomeadamente no facto de não estar necessariamente definida numa σ-álgebra de conjuntos. Assim, uma valoração é uma função φ definida numa família $\mathcal{M}$ de conjuntos e com valores num grupo abeliano e tal que $\varphi(K) + \varphi(L) = \varphi(K \cup L) + \varphi(K \cap L)$, sempre que $K, L, K \cup L$ e $K \cap L$ pertencem a $\mathcal{M}$. Se $\varnothing \in \mathcal{M}$, tem-se que $\varphi(\varnothing) = 0$. Portanto, uma medida é uma valoração, mas o recíproco é falso. Como podemos confirmar em [Mc-Sc], o estudo das funções nos corpos convexos que são valorações tem especial interesse em diversas partes da Geometria Convexa.

Neste trabalho, as valorações tomarão valores reais e estarão essencialmente definidas no conjunto $\mathcal{K}^n$ de todos os conjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$ (corpos convexos) ou no conjunto $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ obtido por uniões finitas daqueles (corpos policonvexos). Por exemplo, o volume, definido nestes conjuntos, é uma valoração.

A consideração de outras valorações, além do volume, foi originada pelo terceiro problema de Hilbert e pela sua solução dada por Dehn. Hilbert perguntou se dois poliedros com o mesmo volume são necessariamente equidecomponíveis, isto é, se um deles pode ser "cortado" em várias peças que, depois de reorganizadas, formam o outro poliedro. Ora, Dehn considerou um cubo e um tetraedro regular com o mesmo volume e deu um exemplo de uma valoração invariante por isometrias e que toma valores diferentes nesses dois sólidos. A valoração invariante considerada por Dehn está relacionada com os ângulos diedrais (ou seja, os ângulos formados por faces adjacentes) de um poliedro e com o comprimento das arestas desse poliedro. Mais precisamente sendo P um poliedro, Dehn considerou um conjunto M constituído pelos ângulos diedrais de P e de tal modo que $\pi \in M$. Depois, considerou o espaço vectorial gerado por M, $V(M)$, considerando só coeficientes racionais. Para cada função $\mathbb{Q}$-linear $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ tal que $f(\pi) = 0$, a

valoração invariante de Dehn representa-se por D_f e o seu valor em P é dado por:

$$D_f(P) := \sum_{a \in A(P)} l(a)\, f(\alpha(a)),$$

onde $A(P)$ é o conjunto de todas as arestas de P, $l(a)$ é o comprimento da aresta a e $\alpha(a)$ é o ângulo entre as duas faces que se intersectam em a. Ora, se Q e P são poliedros tais que $D_f(Q) \neq D_f(P)$, então Q e P não são equidecomponíveis ([Ai-Zi], pág. 41-42) e o que Dehn mostrou foi que, sendo T um tetraedro regular com aresta de comprimento l e C um cubo com o mesmo volume de T, então, para uma dada função $\mathbb{Q}$-linear f, $D_f(T) = 6l$ e $D_f(C) = 0$, logo T e C não são equidecomponíveis, o que dá uma resposta negativa ao problema de Hilbert.

O propósito deste trabalho é apresentar um estudo sobre todas as valorações definidas em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$, contínuas e positivamente invariantes por isometrias (isto é, invariantes por isometrias que não alteram a orientação) em $\mathbb{R}^n$. Designemos por $\mathcal{V}$ esse conjunto. Note-se que estão contidas em $\mathcal{V}$ todas as valorações em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ que são contínuas e invariantes. Vamos provar que o conjunto $\mathcal{V}$ (munido das operações usuais) é um espaço vectorial real de dimensão $n+1$, determinando explicitamente uma sua base. Portanto, o estudo do conjunto $\mathcal{V}$ pode-se restringir ao estudo dessa base e é isso que fazemos aqui. Às $n+1$ valorações que compõem a base que determinamos chamamos *volumes intrínsecos*. Entre estas estão o volume, a área de superfície e a valoração básica desta base e a partir da qual veremos que se podem definir todas as outras, que é a característica de Euler.

Definiremos os volumes intrínsecos de um corpo convexo K à custa de um resultado acerca do volume do corpo paralelo a K à distância $t \geq 0$. Mostramos que esse volume é dado por um polinómio em t, e o i-ésimo volume intrínseco é definido através de uma relação entre o coeficiente do termo de grau $n-i$ desse polinómio e o volume da bola unitária de dimensão $n-i$.

Apesar desta ser uma boa definição, não nos dá a intuição geométrica do significado desses volumes intrínsecos. Provamos, então, a existência de uma relação entre o i-ésimo volume intrínseco e a medida de determinados subconjuntos do conjunto dos subespaços afins de dimensão $n-i$, isto é, de subconjuntos da Grassmaniana afim de dimensão $n-i$. Essa relação é uma definição de volumes intrínsecos alternativa e equivalente à que damos aqui. É também nesta relação que a característica de Euler desempenha um papel

fundamental e justifica o facto de ser considerada tão importante como o volume de um corpo convexo.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo apresentamos algumas noções e resultados básicos da Geometria Convexa necessários para a compreensão dos capítulos seguintes.

O segundo capítulo é todo ele dedicado à definição dos volumes intrínsecos e demonstração de algumas das suas propriedades. Demonstramos que se tratam efectivamente de valorações invariantes, contínuas, simples e homogéneas de grau correspondente ao volume intrínseco considerado. Ainda neste capítulo, são calculados os volumes intrínsecos da bola unitária e dos paralelotopos que são análogos aos rectângulos, mas em dimensões superiores.

No capítulo 3, mostramos em que condições uma valoração definida numa família fechada para intersecções pode ser estendida para um conjunto (contendo o primeiro) que também seja fechado para uniões finitas. Depois, vemos que essas condições se verificam no caso de uma valoração definida em $\mathcal{K}^n$ e que queremos estender para $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$. Nalguns casos, será ainda necessária a extensão de uma valoração definida já numa família fechada para reuniões e intersecções finitas, para uma outra família que seja ainda fechada para diferenças de conjuntos. Este caso também será abordado neste capítulo.

No capítulo 4, apresentamos a caracterização das valorações contínuas e invariantes definidas em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$, tendo em conta a sua relação com os volumes intrínsecos. É neste capítulo que se demonstram os principais resultados presentes nesta dissertação, especialmente o Teorema da Caracterização de Hadwiger, cuja demonstração não é da autoria do matemático que dá nome ao teorema, mas é antes uma demonstração mais recente e mais simples devida a Daniel Klain, em [Kl], usando outros resultados também presentes neste capítulo. É também no quarto capítulo que fazemos um estudo da característica de Euler, considerada como valoração, e onde se prova a generalização da Fórmula de Euler para poliedros convexos.

O quinto capítulo termina com a relação entre os volumes intrínsecos de um corpo policonvexo e a medida de certos subconjuntos da Grassmaniana afim de uma certa dimensão k dependente do volume intrínseco considerado. Ora, a definição de uma medida invariante neste conjunto passa por um processo (descrito ao longo do capítulo referido)

que consiste em definir uma medida invariante no espaço projectivo (isto é, na Grassmaniana de dimensão 1); depois definimos uma medida invariante no conjunto das bandeiras de dimensão n; a partir desta, chegamos a uma medida invariante na Grassmaniana de dimensão $k \leq n$; finalmente, é a partir desta última medida que vamos conseguir determinar a tal medida na Grassmaniana afim de dimensão k.

Por último, o apêndice é reservado a um breve estudo da análise harmónica na esfera unitária de dimensão $n \geq 2$. São demonstrados alguns resultados que nos permitirão chegar ao Teorema de Funk-Hecke, a partir do qual se pode provar uma propriedade da Transformação Cosseno ali definida e que é usada no capítulo 4.

As referências principais são [Ve], [Gr], [Kl-Ro], [Mc-Sh], [Sc] e [We]. A mais importante é [Kl-Ro]. Trata-se de um livro que se dedica ao estudo da teoria dos volumes intrínsecos e das relações existentes entre a Geometria Convexa e a Combinatória. Grande parte desta tese é baseada neste livro - são os casos das três últimas secções do capítulo 2 e dos capítulos 3, 4 e 5 - embora aqui a abordagem seja diferente. [Sc] e [We] são livros dedicados à Geometria Convexa em geral e às suas aplicações. Parte do capítulo 1 e a secção 4.2 foram baseados nestas referências. [Mc-Sh] é um livro que trata de todo o tipo de politopos convexos, numa perspectiva da Geometria Convexa. O apêndice é principalmente baseado em [Gr] que se dedica ao estudo das esféricas harmónicas e dos resultados da Geometria Convexa que podem ser demonstrados através delas. Finalmente, esta tese é uma continuação de [Ve], pelo que diversos resultados aqui usados podem ser aí consultados.

Para terminar, quero agradecer a todos os que me ajudaram a realizar este trabalho. Em primeiro lugar, ao Paulo, meu orientador, por toda a disponibilidade, acompanhamento e interesse que sempre manifestou ao longo deste trabalho, pelas (muitas!) emendas e sugestões que deu, pela imensa competência que sempre demonstrou e por me ter deixado sempre à vontade para expor as minhas dúvidas. Agradeço também à minha família e amigos pelo apoio que me deram e interesse que demonstraram; ao Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências do Porto pelas condições que me deu para realizar este trabalho; ao Departamento de Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro pelo facilidades que me concedeu para a frequência deste mestrado.

André Gama Oliveira, Abril de 2002

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições básicas, fixamos notação e enunciamos alguns resultados essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes. Entre os resultados enunciados, alguns são de importância maior para o desenrolar deste trabalho. Nestes casos, a respectiva demonstração será exposta. Para consultar as provas dos outros resultados, remetemos para a bibliografia, em particular, [Mc-Sh] e [Sc].

1.1 Notação e definições básicas

Trabalharemos sempre no espaço real euclidiano de dimensão n, $\mathbb{R}^n$. Em geral, os elementos de $\mathbb{R}^n$ serão denotados por letras minúsculas e os seus subconjuntos por letras maiúsculas. Os escalares (reais) tanto podem ser representados através de letras minúsculas como por letras minúsculas gregas. Não existirá, no entanto, confusão entre escalares e elementos de $\mathbb{R}^n$, pois pelo contexto será claro o significado atribuído a cada um dos elementos. Assim, em geral, escrevemos

$$x := (x_1, \ldots, x_n), \text{ com } x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$$

para um elemento de $\mathbb{R}^n$. A sua origem será representada por $0_{\mathbb{R}^n}$, isto é

$$0_{\mathbb{R}^n} := \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n \text{ coordenadas}}.$$

O produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definido por

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

onde $x := (x_1, \ldots, x_n)$ e $y := (y_1, \ldots, y_n)$ e a respectiva norma associada $|\cdot|$ é tal que

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

A *distância* $d(x, y)$ entre dois pontos de $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$d(x, y) := |x - y|$$

e se A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, a distância de $x \in \mathbb{R}^n$ a A é dada por

$$d(A, x) := \inf\{|x - a| : a \in A\}.$$

Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $A + B$ e λA do seguinte modo

$$A + B := \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\} \qquad \text{e} \qquad \lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

Um *subespaço (linear)* de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ que é fechado para combinações lineares finitas de elementos de S.

Dados $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, representamos por $G\{v_1, \ldots, v_m\}$ o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, \ldots, v_m$. $G\{v_1, \ldots, v_m\}$ diz-se o *subespaço gerado* por $v_1, \ldots, v_m$ e é o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém esses vectores.

Um *subespaço afim* de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que é fechado para *combinações afins*, isto é, combinações lineares cujos coeficientes somam 1. Um subespaço afim obtém-se a partir de um subespaço linear através de uma translação ([We], pág. 6).

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, a *envolvente afim* de A é o conjunto de todas as combinações afins de elementos de A e é, ao mesmo tempo, o menor subespaço afim que contém A. Denotamo-lo por $\text{aff}(A)$.

Um conjunto *convexo* de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto que é fechado para *combinações convexas*, isto é, combinações afins com coeficientes não negativos.

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, a *envolvente convexa* de A é o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de A e é, ao mesmo tempo, o menor conjunto convexo que contém A. Representamo-lo por $\text{conv}(A)$.

É óbvio que todo o subespaço linear e todo o subespaço afim é um conjunto convexo.

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, o seguinte conjunto

$$[x, y] := \{ax + by : a, b \geq 0 \wedge a + b = 1\}$$

representa o *segmento de recta* que une x a y. Então um conjunto A é convexo se e só se dados $x, y \in A$, então $[x, y] \subseteq A$.

Uma propriedade acerca de conjuntos convexos que será usada com frequência é que a intersecção de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo. Também, se K e L são dois conjuntos convexos, a sua soma $K + L$ e a multiplicação por um escalar λK ainda são conjuntos convexos ([We], pág. 51).

Exemplo de um conjunto convexo em $\mathbb{R}^n$ é a bola fechada $B(a, r)$ de centro a e raio r, definidas por

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}.$$

A *bola unitária* em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todos os vectores de norma não superior a 1. Representamo-la por B_n. Portanto,

$$B_n := B(0_{\mathbb{R}^n}, 1).$$

Denotamos o seu volume por ω_n e convencionamos $\omega_0 := 1$.

Ao conjunto de todos os vectores de $\mathbb{R}^n$ de norma igual a 1, damos o nome de *esfera unitária* e representamo-lo por $\mathbb{S}^{n-1}$. Assim

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Note-se que $\mathbb{S}^{n-1}$ não é um conjunto convexo. Sendo B um subconjunto de $\mathbb{S}^{n-1}$, $\sigma_{n-1}(B)$ representa a medida esférica de Lebesgue de B. Representamos também por σ_{n-1} a área de superfície de $\mathbb{S}^{n-1}$, ou seja

$$\sigma_{n-1} := \sigma_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotamos por $\mathrm{vol}_n(A)$ o seu volume em $\mathbb{R}^n$, desde que tal faça sentido.

Por $\mathrm{fr}(A)$, $\mathrm{int}(A)$ e $\mathrm{ad}(A)$ denotamos respectivamente a *fronteira*, o *interior* e a *aderência* de um conjunto A relativamente à topologia usual de $\mathbb{R}^n$. O *interior relativo* de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathrm{relint}(A)$, é o interior de A relativamente à topologia de $\mathrm{aff}(A)$. Assim, $x \in \mathrm{relint}(A)$ se existe $r > 0$ tal que $\mathrm{int}(B(x, r)) \cap \mathrm{aff}(A) \subseteq A$. A *fronteira relativa* de A, que denotamos por $\mathrm{relfr}(A)$, é tal que $\mathrm{relfr}(A) := \{x \in \mathrm{ad}(A) : x \notin \mathrm{relint}(A)\}$. Note-se que se A for fechado, então $\mathrm{relfr}(A) = A \setminus \mathrm{relint}(A)$.

Um conjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se de dimensão k, com $k \in \{0, \ldots, n\}$, se $\text{aff}(A)$ tem dimensão k, isto é, se o subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ paralelo a $\text{aff}(A)$ tem dimensão k. Note-se que, neste caso, se $k < n$, então $\text{vol}_n(A) = 0$.

1.2 Corpos convexos

Passamos agora a uma das noções centrais deste trabalho. É a partir da classe de conjuntos definida a seguir que se desenrola toda esta teoria.

Definição 1.2.1 Um *corpo convexo* é um subconjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$. Por conveniência, também se considera o conjunto vazio, $\varnothing$, como sendo um corpo convexo. Denotamos por $\mathcal{K}^n$ o conjunto de todos os corpos convexos de $\mathbb{R}^n$.

Um corpo $K \in \mathcal{K}^n$ diz-se de *dimensão n* ou *dimensão máxima* se e só se $\text{int}(K) \neq \varnothing$.

1.2.1 Hiperplanos de suporte

O produto escalar em $\mathbb{R}^n$ é bastante usado para descrever hiperplanos e semi-espaços de $\mathbb{R}^n$. Um *hiperplano* de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma

$$H_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = \alpha\},$$

com $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dizemos que u é um *vector normal* a $H_{u,\alpha}$.

O hiperplano $H_{u,\alpha}$ limita dois *semi-espaços fechados*, dados por

$$H^-_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq \alpha\} \qquad \text{e} \qquad H^+_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq \alpha\}.$$

Se $K \in \mathcal{K}^n$, então dizemos que um hiperplano H *suporta* K *em* x se $H \cap K = x$ e $K \subseteq H^+$ ou $K \subseteq H^-$.

1.2.2 Projecção e propriedades de suporte

Nesta secção, demonstramos alguns resultados básicos que serão usados principalmente no capítulo 4. Estes resultados são todos válidos nos conjuntos não vazios de $\mathcal{K}^n$, mas serão demonstrados no conjunto mais extenso dos conjuntos não vazios, convexos e fechados de $\mathbb{R}^n$, onde serão ocasionalmente usados.

O próximo teorema, permitir-nos-á definir a projecção de um ponto de $\mathbb{R}^n$ num conjunto não vazio, convexo e fechado, A, de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.2 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, fechado e não vazio. Então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe um único ponto, $p(A,x) \in A$ tal que*

$$|x - p(A,x)| \leq |x - y|, \text{ para todo } y \in A.$$

Demonstração. Como A é fechado e não vazio, existe $\rho > 0$ tal que o conjunto $B(x,\rho) \cap A$ é compacto e não vazio, logo a função contínua $f : A \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |x - z|$ tem um ponto de mínimo, y_0, neste conjunto. Como $f(z) > \rho$, se $z \in A \setminus B(x,\rho)$ e como $f(y_0) \leq \rho$, concluímos que $|x - y_0| \leq |x - z|$, para todo $z \in A$.

Seja agora $y \in A$ qualquer e consideremos o segmento que une y_0 a y: $ty + (1-t)y_0$, com $t \in [0,1]$. Então, para cada $t \in]0,1]$, temos que

$$\begin{aligned}
& |x - y_0|^2 \leq |x - ty - (1-t)y_0|^2 \\
\Leftrightarrow\ & |x - y_0|^2 \leq |x - y_0|^2 - 2t\langle x - y_0, y - y_0\rangle + t^2|y - y_0|^2 \\
\Leftrightarrow\ & t\left(2\langle x - y_0, y - y_0\rangle - t|y - y_0|^2\right) \leq 0 \\
\Rightarrow\ & 2\langle x - y_0, y - y_0\rangle - t|y - y_0|^2 \leq 0 \\
\Rightarrow\ & \langle x - y_0, y - y_0\rangle \leq 0.
\end{aligned}$$

Então, se existir um outro ponto $y_1 \in A$ tal que $|x - y_1| \leq |x - y|$, para todo $y \in A$, também teremos que $\langle x - y_1, y - y_1\rangle \leq 0$, para todo $y \in A$. Em particular,

$$\langle y_1 - x, y_1 - y_0\rangle = \langle x - y_1, y_0 - y_1\rangle \leq 0. \tag{1.1}$$

Mas, pelo que vimos atrás,

$$\langle x - y_0, y_1 - y_0\rangle \leq 0. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2), sai que $\langle y_1 - y_0, y_1 - y_0\rangle \leq 0$, donde $y_1 = y_0$.

Portanto, $y_0 =: p(A,x)$ é único. □

Note-se que da demonstração deste teorema concluímos que

$$\langle x - p(A,x), a - p(A,x)\rangle \leq 0, \tag{1.3}$$

para todo $a \in A$.

Definição 1.2.3 O ponto $p(A,x)$ definido no teorema anterior, designa-se por *projecção de x em A.*

Definição 1.2.4 Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e fechado, a aplicação $p(A,\cdot) : \mathbb{R}^n \to A$ que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ associa $p(A,x)$, designa-se por *operador de projecção* ou, simplesmente, *projecção* em A.

É óbvio que $|x - p(A,x)| = d(A,x)$. Se $x \notin A$, então

$$u(A,x) := \frac{x - p(A,x)}{d(A,x)}$$

é o vector unitário com origem em $p(A,x)$ e na direcção de x, e a semi-recta com origem em $p(A,x)$ e que passa por x é o conjunto

$$r(A,x) := \{p(A,x) + \lambda u(A,x) : \lambda \geq 0\}.$$

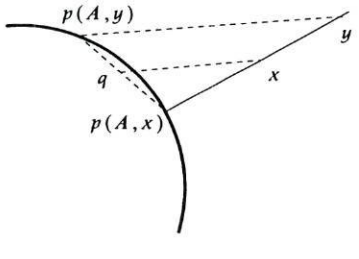
Lema 1.2.5 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e fechado, $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ e $y \in r(A,x)$. Então $p(A,x) = p(A,y)$.*

Demonstração. Suponhamos que $p(A,x) \neq p(A,y)$. Temos duas hipóteses distintas: $y \in [x, p(A,x)[$ ou $x \in [y, p(A,x)[$.

Se ocorrer o primeiro caso, isto é, se y pertencer ao segmento que une x a $p(A,x)$, mas $y \neq p(A,x)$, então

$$\begin{aligned} |x - p(A,y)| &\leq |x - y| + |y - p(A,y)| \\ &< |x - y| + |y - p(A,x)| \\ &= |x - p(A,x)|, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Se $x \in [y, p(A,x)[$, consideremos, como na figura seguinte,



$q \in [p(A,x), p(A,y)]$ tal que o segmento $[x,q]$ seja paralelo ao segmento $[y, p(A,y)]$.

Então, temos que

$$\frac{|x-q|}{|x-p(A,x)|} = \frac{|y-p(A,y)|}{|y-p(A,x)|} < 1,$$

o que resulta, de novo, numa contradição. □

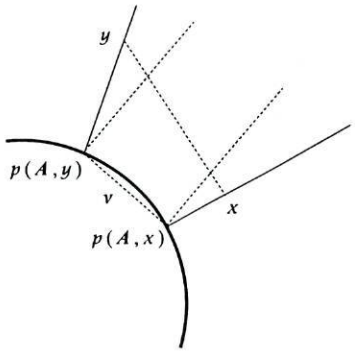
Lema 1.2.6 (Lema de Busemann-Feller) *O operador de projecção é não expansivo, ou seja,*

$$|p(A,x) - p(A,y)| \leq |x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e A não vazio, convexo e fechado. Podemos supor que $v := p(A,x) - p(A,y) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Já sabemos, por (1.3), que

$$\langle x - p(A,x), v\rangle \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \langle y - p(A,y), v\rangle \leq 0.$$

Portanto, o segmento $[x,y]$ intersecta os dois hiperplanos que são ortogonais a v tais que um deles passa pelo ponto $p(A,x)$ e o outro passa pelo ponto $p(A,y)$.



Concluímos, então, que $|p(A,x) - p(A,y)| \leq |x-y|$. □

Lema 1.2.7 *Seja A como nos resultados anteriores e S uma esfera tal que A está contido na bola cuja fronteira é S. Então $p(A,S) = \mathrm{fr}(A)$.*

Demonstração. É óbvio que $p(A,S) \subseteq \mathrm{fr}(A)$. Seja, então, $x \in \mathrm{fr}(A)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja x_m pertencente à bola cuja fronteira é S tal que $x_m \notin A$ e $|x_m - x| < \frac{1}{m}$. Pelo teorema 1.2.6,

$$|x - p(A,x_m)| = |p(A,x) - p(A,x_m)| \leq |x - x_m| < \frac{1}{m}.$$

A semi-recta $r(A, x_m)$ intersecta a esfera S num ponto y_m e $p(A, x_m) = p(A, y_m)$, logo $|x - p(A, y_m)| < \frac{1}{m}$.

Considerando a sucessão $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, convergente para x, temos outra sucessão associada $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em S. Como S é compacto, esta última sucessão tem alguma subsucessão $(y_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente para algum ponto $y \in S$.

Pelo que se viu atrás, $\lim_{m\in\mathbb{N}} p(A, y_m) = x$ e como, pelo teorema anterior, $p(A, \cdot)$ é contínua, resulta que $p(A, y) = x$. Portanto, $\mathrm{fr}(A) \subseteq p(A, S)$. □

Lema 1.2.8 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, convexo e fechado e $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. O hiperplano H ortogonal a $u(A, x)$ e que passa por $p(A, x)$ suporta A.*

Demonstração. Obviamente, $H \cap A \neq \varnothing$. Seja H^- o semi-espaço fechado, limitado por H e tal que $x \notin H^-$. Temos que, para todo $y \in A$, $\langle x - p(A, x), y - p(A, x)\rangle \leq 0$, logo $y \in H^-$ e concluímos que H é hiperplano de suporte de A em $p(A, x)$. □

Teorema 1.2.9 *Seja A, não vazio, convexo e fechado. Então, por cada ponto de A passa um hiperplano de suporte de A. Se A ainda for limitado, para cada $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ existe um hiperplano de suporte de A com vector normal exterior u.*

Demonstração. Seja $x \in \mathrm{fr}(A)$. Suponhamos que A é limitado. Pelo lema 1.2.7, existe um ponto $y \in \mathbb{R}^n \setminus A$ tal que $x = p(A, y)$. Pelo lema 1.2.8, o hiperplano que passa por x e é ortogonal a $y - x$ suporta A em x.

Se A não for limitado, existe um hiperplano H que passa por x e que suporta $A \cap B(x, 1)$; seja H^- o correspondente semi-espaço de suporte de $A \cap B(x, 1)$. Se existir um ponto $z \in A \setminus H^-$, então $[x, z] \subseteq A$, mas $]x, z] \cap B(x, 1) \nsubseteq H^-$, o que é uma contradição. Portanto, H suporta A.

Relativamente à segunda parte do teorema, consideremos $u \in \mathbb{R}^n$. Como A é compacto, existe um ponto $x \in A$ tal que $\langle x, u\rangle = \max\{\langle y, u\rangle : y \in A\}$. Então, o conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u\rangle = \langle x, u\rangle\}$ é um hiperplano de suporte de A, com normal exterior u (ver início da secção 4.2). □

1.2.3 Métrica de Hausdorff

O espaço $\mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$ pode ser transformado num espaço métrico introduzindo-lhe a chamada *métrica de Hausdorff*. O domínio natural desta métrica é o conjunto de todos os compactos não vazios de $\mathbb{R}^n$, no qual $\mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$ está contido e, além disso, é um seu subconjunto fechado ([Sc], pág. 50). Assim, se A e B são conjuntos compactos (não vazios) de $\mathbb{R}^n$, a distância de Hausdorff de A e B representa-se por $d_H(A, B)$ e é dada por

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(A, b)\right\}$$

ou, de modo equivalente,

$$d_H(A, B) := \min\{\lambda \geq 0 : A \subseteq B + \lambda B_n \text{ e } B \subseteq A + \lambda B_n\}.$$

Note-se que d_H está bem definida, pois A e B são compactos não vazios.

Podemos então definir convergência de uma sucessão de conjuntos compactos não vazios de $\mathbb{R}^n$. Uma tal sucessão $A_1, \ldots, A_j, \ldots$ *converge (no sentido de Hausdorff)* para um conjunto compacto não vazio A de $\mathbb{R}^n$, e escrevemos $A_j \to A$, se $d_H(A, A_j) \to 0$, quando $j \to +\infty$. Portanto, uma sequência de corpos convexos $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge para $A \in \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $m > 0$ tal que $A_j \subseteq A + \epsilon B_n$ e $A \subseteq A_j + \epsilon B_n$, para todo $j > m$.

Definição 1.2.10 Uma aplicação $f : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua* ou *contínua-convexa* se, dada uma sucessão $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de corpos convexos não e $A \in \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$ tais que $A_j \to A$, segundo a métrica de Hausdorff, então $f(A_j) \to f(A)$, em $\mathbb{R}$.

Por exemplo, a função $\mathrm{vol}_n : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ que a cada conjunto de $\mathcal{K}^n$ associa o seu volume, é contínua, o mesmo acontecendo com a área de superfície.

1.2.4 Politopos

Um subconjunto importante de $\mathcal{K}^n$ é aquele cujos elementos são os definidos a seguir.

Definição 1.2.11 Um *politopo convexo* é a envolvente convexa de um número finito de pontos de $\mathbb{R}^n$. Portanto, P é um politopo se e só se $P = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$, com $x_i \in \mathbb{R}^n$.

Uma das razões que tornam importante esta classe de conjuntos é que, em geral, as propriedades relativas a corpos convexos são de demonstração mais fácil no conjunto dos politopos convexos. Por outro lado, qualquer corpo convexo (não vazio) pode ser aproximado, com tanta precisão quanto se queira, por uma sucessão convergente de politopos ([We], pág. 109). Portanto, quando se quer provar uma dessas propriedades, normalmente prova-se em relação aos politopos e depois, através de um processo de convergência (pela métrica de Hausdorff), estende-se essa propriedade a $\mathcal{K}^n$. Os politopos são os análogos aos polígonos ou aos poliedros, mas em dimensão n. Note-se que é possível definir politopos não convexos (embora não o façamos neste trabalho); basta considerar em $\mathbb{R}^2$ um polígono não convexo. No entanto, como durante este trabalho só nos iremos referir a politopos que sejam convexos e compactos, chamar-lhes-emos apenas politopos. Um *conjunto poliedral* é a intersecção de um número finito de semi-espaços fechados. Demonstra-se que um politopo é um conjunto poliedral compacto e vice-versa ([Mc-Sh], pág. 43-47).

Existem diversos tipos de politopos, com algumas propriedades especiais; ver [Ew], [Ge-He-Zi], [Mc-Sh], [We] ou [Zi]. O tipo mais simples é o que vamos definir agora. Para tal, necessitamos, primeiro, da seguinte noção. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se *independente afim* se todo $a \in A$ é tal que $a \notin \text{aff}(A \setminus \{a\})$, ou seja, se não é possível escrever a como combinação afim dos outros elementos de A. A noção de conjunto *dependente afim* é a negação da anterior. Um politopo que é a envolvente convexa de pontos independentes afins diz-se um *simplexo*. Portanto, um simplexo de dimensão k é a envolvente convexa de $k+1$ pontos independentes afins.

Uma *face* de um politopo P é um subconjunto de P que se obtém intersectando P com um seu hiperplano de suporte que não contenha aff(P). Portanto, F é uma face de P se $F = P \cap H$, onde H é um hiperplano de suporte de P e $P \nsubseteq H$. Sendo P um politopo e H um conjunto convexo, então F também é um politopo ([Mc-Sh], pág. 40). Se $\dim(P) = k$ e $\dim(F) = j$, com $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, então F diz-se uma *j-face* de P. Se $j = k-1$, F diz-se uma *faceta* de P. As 0-faces dizem-se, normalmente, *vértices* e as 1-faces designam-se, geralmente, por *arestas*. Embora não o façamos neste trabalho, alguns autores consideram o próprio politopo P como sendo uma k-face de P e o conjunto vazio $\varnothing$ como sendo uma -1-face de P. Estes autores designam estas duas faces por *impróprias* e as outras por *próprias*.

Capítulo 2

Volumes intrínsecos

Neste capítulo desenvolvemos de maneira precisa as noções de volume intrínseco de um corpo convexo e de valoração definida em $\mathcal{K}^n$. São demonstradas algumas propriedades que os volumes intrínsecos têm enquanto valorações, propriedades essas que serão essenciais para os resultados posteriores.

Ainda neste capítulo 2, estudamos os volumes intrínsecos dos casos particulares da bola unitária e dos paralelotopos.

A nossa secção 2.1 segue de perto as secções 3.2.2 e 3.2.4 de [Ve].

2.1 Volume de corpos paralelos

A forma como vamos definir os volumes intrínsecos de um corpo convexo requer um resultado que relaciona o volume de um corpo convexo e do seu corpo paralelo. Comecemos por definir este último.

Definição 2.1.1 Seja A um subconjunto fechado (não vazio) de $\mathbb{R}^n$. Ao conjunto $A+tB_n$, com $t \in \mathbb{R}_0^+$, chama-se *corpo paralelo a A à distância t* ou *t-vizinhança de A*, e representa-se por $(A)_t$.

Portanto, escrevendo $A + tB_n$ de outra forma, $(A)_t := \{x \in \mathbb{R}^n : d(A,x) \leq t\}$ ou $(A)_t := \bigcup_{a \in A} \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq t\}$, com $t \geq 0$.

Com esta notação, podemos reescrever a noção de distância de Hausdorff entre dois conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$,

$$d_H(A,B) := \min\{t \geq 0 : A \subseteq (B)_t \text{ e } B \subseteq (A)_t\}$$

e, no caso de A e B serem convexos, mostra-se que $d_H(A,B) = d_H((A)_\lambda, (B)_\lambda)$, qualquer que seja $\lambda \geq 0$ ([We], pág. 93).

Ao longo deste trabalho vamos estar particularmente interessados no conjunto $\mathcal{K}^n$. Nas figuras 2.1 e 2.2 temos exemplos de corpos paralelos a corpos convexos.

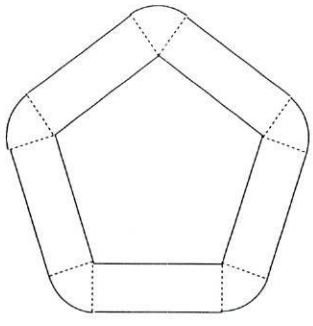


Figura 2.1: Corpo paralelo a um corpo convexo de $\mathbb{R}^2$.

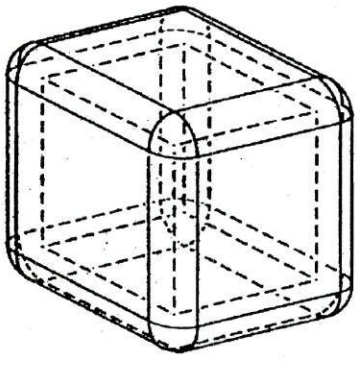


Figura 2.2: Corpo paralelo a um corpo convexo de $\mathbb{R}^3$.

Sejam $K \in \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$ e $t \geq 0$. Como é óbvio, o volume de $(K)_t$ depende de t, mas o que não é tão evidente é que, sendo K um corpo convexo, essa dependência se traduza num polinómio em t. É esse o resultado que vamos mostrar a seguir e que será de grande importância para o estudo posterior.

Teorema 2.1.2 *Se $K \in \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$, existe um polinómio, $p_K(t)$, de grau n e coeficientes não negativos, tal que* $\mathrm{vol}_n\left((K)_t\right) = p_K(t)$.

Antes de passarmos à prova do teorema, é conveniente introduzir algumas observações.

Dado um politopo P os interiores relativos das suas faces formam uma partição de relfr(P). Seja F o interior relativo de uma face de P (ou o próprio P, se $\mathrm{int}(P) = \varnothing$). Consideremos o conjunto

$$\Omega(F) := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus P : p(P,x) \in F\}$$

dos pontos do espaço não pertencentes a P e cuja projecção em P pertence a F. Se F percorrer os interiores relativos das faces de P (ou o próprio P, se $\mathrm{int}(P) = \varnothing$), então os conjuntos $\Omega(F)$ formam uma partição de $\mathbb{R}^n \setminus P$.

Lema 2.1.3 *A restrição de $p(P,\cdot)$ a $\Omega(F)$ é a projecção ortogonal em F e se, além disso,* $\mathrm{int}(P) \neq \varnothing$, *então cada conjunto $\Omega(F)$ é convexo.*

Demonstração. Comecemos por ver que a restrição de $p(P,\cdot)$ a $\Omega(F)$ é a projecção ortogonal em F. Seja $x \in \Omega(F)$. Vamos ver que $x - p(P,x)$ é ortogonal a $\mathrm{aff}(F)$. Seja H o hiperplano que passa por $p(P,x)$ e que é perpendicular a $x - p(P,x)$. Pelo lema 1.2.8, o hiperplano H suporta P. Vejamos que $\mathrm{aff}(F) \subseteq H$. Se isto não acontecer então, como F é aberto em $\mathrm{aff}(F)$ e como $p(P,x) \in F \cap H$, então F contém pontos em ambos os semi-espaços abertos associados a H, o que contraria o facto de H ser hiperplano de suporte de P. Portanto, $\mathrm{aff}(F) \subseteq H$ e $x - p(P,x)$ é perpendicular a $\mathrm{aff}(F)$, isto é, $p(P,x)$ é a projecção ortogonal de x em F.

Passamos agora à prova de que $\Omega(F)$ é convexo. Sejam $x, y \in \Omega(F)$. Consideremos $z := tx + (1-t)y$, para algum $t \in]0,1[$. Ora, $z \notin P$, conforme será demonstrado mais à frente. Vamos mostrar que $p(P,z) = tp(P,x) + (1-t)p(P,y)$ e, portanto, pela convexidade de F, $p(P,z) \in F$, isto é, $z \in \Omega(F)$. Pelo teorema 1.2.2 e por (1.3), isso é equivalente a mostrar que, para cada $a \in P$, se tem

$$\left\langle z - tp(P,x) - (1-t)p(P,y), a - tp(P,x) - (1-t)p(P,y) \right\rangle \leq 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
&\langle z - tp(P,x) - (1-t)p(P,y), a - tp(P,x) - (1-t)p(P,y)\rangle \\
= &\langle tx + (1-t)y - tp(P,x) - (1-t)p(P,y), a - tp(P,x) - (1-t)p(P,y)\rangle \\
= &\, t\langle x - p(P,x), a - tp(P,x) - (1-t)p(P,y)\rangle + (1-t)\langle y - p(P,y), a - tp(P,x) - \\
&-(1-t)p(P,y)\rangle \\
= &\, t\langle x - p(P,x), a - p(P,x)\rangle + t\langle x - p(P,x), p(P,x) - tp(P,x) - (1-t)p(P,y)\rangle + \\
&+(1-t)\langle y - p(P,y), p(P,y) - tp(P,x) - (1-t)p(P,y)\rangle + \\
&+(1-t)\langle y - p(P,y), a - p(P,y)\rangle \\
= &\, t\langle x - p(P,x), a - p(P,x)\rangle + (1-t)\langle y - p(P,y), a - p(P,y)\rangle,
\end{aligned}$$

visto que $x-p(P,x)$ é ortogonal a $p(P,x)-tp(P,x)-(1-t)p(P,y)$ e $y-p(P,y)$ é ortogonal a $p(P,y)-tp(P,x)-(1-t)p(P,y)$. Então, esta última expressão é uma combinação convexa de quantidades não positivas, logo também

$$\langle z - tp(P,x) - (1-t)p(P,y), a - tp(P,x) - (1-t)p(P,y)\rangle \leq 0.$$

Falta então mostrar que $z \notin P$. Suponhamos que $z \in P$. Então $p(P,z) = z$, isto é, $tp(P,x) + (1-t)p(P,y) = tx + (1-t)y$. Portanto

$$x - p(P,x) = \frac{t-1}{t}(y - p(P,y)).$$

Assim, temos, para cada $a \in P$,

$$\begin{aligned}
0 \;&\geq\; \langle x - p(P,x), a - p(P,x)\rangle \\
&=\; \langle x - p(P,x), a - p(P,x) + p(P,y) - p(P,y)\rangle \\
&=\; \langle x - p(P,x), a - p(P,y)\rangle + \langle x - p(P,x), p(P,y) - p(P,x)\rangle \\
&=\; \langle x - p(P,x), a - p(P,y)\rangle \\
&=\; \frac{t-1}{t}\langle y - p(P,y), a - p(P,y)\rangle \\
&\geq\; 0,
\end{aligned}$$

pois $\frac{t-1}{t} < 0$ e $\langle y - p(P,y), a - p(P,y)\rangle \leq 0$. Então, $\langle x - p(P,x), a - p(P,x)\rangle = 0$. Concluímos que P está contido no hiperplano que passa por $p(P,x)$ e que é perpendicular a $x - p(P,x)$, o que contradiz a hipótese de P ter interior não vazio. Portanto, $z \notin P$. □

Demonstração do teorema 2.1.2. Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que o corpo convexo é um politopo.

Sejam então P um politopo compacto, convexo e com interior não vazio (isto é, $\dim(P) = n$) e F o interior relativo de uma face de P.

Dado $t > 0$, vamos comparar os corpos paralelos $(P)_t$ e $(P)_1$ através do volume de $(P)_t \cap \Omega(F)$ e de $(P)_1 \cap \Omega(F)$. Note-se que cada um destes conjuntos possui volume, pois, pelo lema anterior, é limitado e convexo ([We], pág. 267). Dado $x \in \Omega(F)$, seja $a := p(P, x) \in F$. Então, pelo lema 1.2.5, qualquer ponto $y \in r(P, x) \setminus \{a\}$ é tal que $y \in \Omega(F)$. Então, $x \in (P)_1 \cap \Omega(F)$ se e só se $a + t(x - a) \in (P)_t \cap \Omega(F)$. Ou seja, temos uma correspondência bijectiva

$$\begin{aligned} f : (P)_1 \cap \Omega(F) &\longrightarrow (P)_t \cap \Omega(F) \\ x &\longmapsto a + t(x - a). \end{aligned}$$

Sejam agora F' o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ translatado de $\mathrm{aff}(F)$ e E o suplementar ortogonal de F'. Em particular, temos que $E \oplus F' = \mathbb{R}^n$. Fixado $b \in F$, cada ponto de $\mathbb{R}^n$ se escreve de modo único na forma $b + u + v$, com $u \in F'$ e $v \in E$. Estudemos a seguinte transformação afim:

$$\begin{aligned} \varphi_t : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ b + u + v &\longmapsto b + u + tv \end{aligned}$$

Temos que f é a restrição de φ_t a $(P)_1 \cap \Omega(F)$. De facto, dado $x \in (P)_1 \cap \Omega(F)$, uma vez que $x = b + u + v$, com $b \in F$ fixo, $u \in F'$ e $v \in E$, então $a := b + u$ é a sua projecção ortogonal em $\mathrm{aff}(F)$. Pelo lema 2.1.3, $a = p(P, x)$. Então,

$$\varphi_t(x) = b + u + tv = a + t(x - a) \in (P)_t \cap \Omega(F),$$

donde se conclui que f é a restrição de φ_t.

Tem-se então que

$$\varphi_t((P)_1 \cap \Omega(F)) = (P)_t \cap \Omega(F). \tag{2.1}$$

Uma aplicação afim é a composta de uma aplicação linear com uma translação e como esta última não altera o volume então a alteração do volume é causada pela parte linear da aplicação afim, logo, neste caso, a diferença entre os volumes de $(P)_1 \cap \Omega(F)$ e de

$(P)_t \cap \Omega(F)$ será causada pela parte linear de φ_t. Seja $\mathcal{L}$ a parte linear de φ_t. Tem-se que $\mathcal{L}(u+v) = u + tv$. Suponhamos que $\dim(F) = k < n$. Se considerarmos uma matriz de $\mathcal{L}$ relativamente a uma base composta por k vectores de F' e $n-k$ vectores de E, concluímos que $\mathcal{L}$ tem determinante t^{n-k}. Por (2.1), resulta que

$$\mathrm{vol}_n\left((P)_t \cap \Omega(F)\right) = t^{n-k}\mathrm{vol}_n\left((P)_1 \cap \Omega(F)\right),$$

para cada face, F, de dimensão k.

Mas, os conjuntos $(P)_t \cap \Omega(F)$, com F a percorrer os interiores relativos das faces de P, formam uma partição de $(P)_t \setminus P$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n\left((P)_t\right) &= \mathrm{vol}_n(P) + \sum_F \mathrm{vol}_n\left((P)_t \cap \Omega(F)\right) \\
&= \mathrm{vol}_n(P) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{F:\dim(F)=k} \mathrm{vol}_n\left((P)_t \cap \Omega(F)\right) \\
&= \mathrm{vol}_n(P) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{F:\dim(F)=k} \mathrm{vol}_n\left((P)_1 \cap \Omega(F)\right) \right) t^{n-k}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

É claro que a expressão (2.2) é a de um polinómio $p_P(t)$ de coeficientes não negativos e de grau não superior a n.

Seja agora K um corpo convexo qualquer de $\mathbb{R}^n$ e tomemos uma sucessão $(P_j)_{j\geq 1}$ de politopos convexos, compactos e com interior não vazio, convergindo para K, segundo a métrica de Hausdorff. Uma tal sucessão existe mesmo que K tenha interior vazio, pois $(K)_\delta$, onde $\delta > 0$ é arbitrário, tem interior não vazio em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, contém, pelo menos, $n+1$ pontos independentes. Assim, podemos considerar uma sucessão de politopos com interior não vazio a convergir para $(K)_\delta$. Como $\delta > 0$ é qualquer, posso considerar δ a tender para 0 e, assim, construir uma sucessão de politopos com interior não vazio a convergir para K.

Pelo que vimos atrás, para cada j existe um polinómio de coeficientes não negativos, $p_j(t) := a_{j0} + a_{j1}t + \cdots + a_{jn}t^n$ tal que, para cada $t \geq 0$, $\mathrm{vol}_n\left((P_j)_t\right) = p_j(t)$. Dado que K e P_j são corpos convexos, tem-se que $d_H\left((K)_t, (P_j)_t\right) = d_H(K, P_j)$, donde, para cada t, a sucessão dos $(P_j)_t$ converge para $(K)_t$. Pela continuidade do volume, também a sucessão $\mathrm{vol}_n\left((P_j)_t\right)$ converge para $\mathrm{vol}_n\left((K)_t\right)$. Em particular, para $t > 0$ fixo, a sucessão dos valores de $p_j(t)$ é limitada. Por outro lado, como os coeficientes do polinómio $p_j(t)$

são não negativos, tem-se que $0 \leq a_{ji} \leq p_j(1)$. Resulta que a sucessão dos pontos em $\mathbb{R}^{n+1}$, $(a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jn})_{j\geq 1}$ é limitada e, portanto, tem alguma subsucessão convergente. Substituindo, se necessário, a sucessão original pela subsucessão convergente, podemos supor que cada sucessão $(a_{ji})_{j\in\mathbb{N}}$ converge para um certo $a_i \geq 0$.

Sendo $p_K(t) := a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ o polinómio onde cada coeficiente $a_i \geq 0$ é o limite da sucessão $(a_{ji})_{j\geq 1}$ tem-se, para cada $t \geq 0$, que

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n\left((K)_t\right) &= \lim_{j\to+\infty} \mathrm{vol}_n\left((P_j)_t\right) \\ &= \lim_{j\to+\infty} \left(a_{j0} + a_{j1}t + \cdots + a_{jn}t^n\right) \\ &= p_K(t). \end{aligned}$$

Concluímos então que $\mathrm{vol}_n((K)_t)$ é um polinómio em t e, portanto, que qualquer subsucessão convergente da sucessão $(a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jn})_{j\geq 1}$ converge para $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Se esse não fosse o caso, teríamos dois polinómios diferentes $p_K(t)$ e $q_K(t)$, tais que $p_K(t) = \mathrm{vol}_n\left((K)_t\right) = q_K(t)$, o que resultaria numa contradição. Resulta que a própria sucessão $(a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jn})_{j\geq 1}$ converge para $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Para concluirmos a demonstração, falta provar que $p_K(t)$ tem grau n.

Seja ρ o diâmetro do corpo convexo K, ou seja, ρ é a distância máxima entre pontos de K. Seja $a \in K$. Então, para cada $t \geq 0$, $B(a,t) \subseteq (K)_t$ e $B(a, t+\rho) \supseteq (K)_t$. Destas inclusões resultam as seguintes desigualdades entre volumes

$$\mathrm{vol}_n\left(B(a,t)\right) \leq \mathrm{vol}_n\left((K)_t\right) \leq \mathrm{vol}_n\left(B(a,t+\rho)\right),$$

isto é,

$$\omega_n t^n \leq \mathrm{vol}_n\left((K)_t\right) \leq \omega_n\left(t+\rho\right)^n.$$

Então,

$$\omega_n t^n \leq a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \leq \omega_n (t+\rho)^n,$$

donde, dividindo tudo por t^n e, tomando o limite quando $t \to +\infty$ obtém-se $a_n = \omega_n$. Portanto, $p_K(t)$ tem grau n. □

Então, acabámos de mostrar que, dados $K \in \mathcal{K}^n$ e $t \geq 0$, se tem

$$\mathrm{vol}_n\left(K + tB_n\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n. \tag{2.3}$$

No caso em que $K = \varnothing$, definimos $p_{\varnothing}(t) := 0$. No entanto, quando nada for dito em contrário, supomos sempre que um corpo convexo K é não vazio.

Os coeficientes a_j de (2.3) dependem do corpo K. Portanto, podem ser vistos como funções de $\mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$ em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_j : \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ K &\longmapsto a_j(K) \ , \end{aligned}$$

onde $a_j(K)$ é o coeficiente do termo de grau j, $j \in \{0, \ldots, n\}$, de $p_K(t)$.

Vejamos que cada coeficiente a_j depende continuamente de K, ou seja, que a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ K &\longmapsto (a_0(K), \ldots, a_j(K), \ldots, a_n(K)) \ , \end{aligned}$$

é contínua.

Assim, vamos ver que, dado $K \in \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$, então,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall K' \in \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\} : d_H(K, K') < \delta \Rightarrow |f(K) - f(K')| < \epsilon, \tag{2.4}$$

ou, o que é equivalente, se $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge para K (segundo a métrica de Hausdorff), então $(a_0(K_i), \ldots, a_j(K_i), \ldots, a_n(K_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge para $(a_0(K), \ldots, a_j(K), \ldots, a_n(K))$, em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Note-se que na prova do teorema 2.1.2, já vimos que (2.4) se verifica, se K' for um politopo. Vamos agora verificar o caso mais geral.

Seja então $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de corpos convexos convergente para K. Então, para cada $t \geq 0$, $K_i + tB_n$ converge para $K + tB_n$ e, como o volume é uma função contínua, $\mathrm{vol}_n(K_i + tB_n) \to \mathrm{vol}_n(K + tB_n)$, ou seja, para cada $t \geq 0$,

$$a_0(K_i) + a_1(K_i)t + \cdots + a_n(K_i)t^n \longrightarrow a_0(K) + a_1(K)t + \cdots + a_n(K)t^n \tag{2.5}$$

e, em particular, a sucessão $(\mathrm{vol}_n(K_i + tB_n))_{i\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Por outro lado, como $a_j(K_i) \geq 0$, conclui-se que $a_j(K_i) \leq \mathrm{vol}_n(K_i + B_n)$. Assim, $(a_0(K_i), \ldots, a_j(K_i), \ldots, a_n(K_i))_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada em $\mathbb{R}^{n+1}$, logo tem uma subsucessão convergente para $(\widetilde{a_0}, \ldots, \widetilde{a_j}, \ldots, \widetilde{a_n})$. Portanto, substituindo, se necessário, a sucessão original pela dita subsucessão, temos que

$$a_0(K_i) + \cdots + a_j(K_i)t^j + \cdots + a_n(K_i)t^n \longrightarrow \widetilde{a_0} + \cdots + \widetilde{a_j}t^j + \cdots + \widetilde{a_n}t^n,$$

para todo $t \geq 0$. Por (2.5), concluímos que

$$(\widetilde{a_0}, \ldots, \widetilde{a_j}, \ldots, \widetilde{a_n}) = (a_0(K), \ldots, a_j(K), \ldots, a_n(K)) .$$

Portanto, qualquer subsucessão convergente de $(a_0(K_i), \ldots, a_j(K_i), \ldots, a_n(K_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge, em $\mathbb{R}^{n+1}$, para $(a_0(K), \ldots, a_j(K), \ldots, a_n(K))$. Logo, a própria sucessão converge para o mesmo limite e, assim, $(a_j(K_i))_{i\in\mathbb{N}} \to a_j(K)$, para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$. Portanto, cada coeficiente do polinómio (2.3) depende continuamente de K.

2.2 Volumes intrínsecos

Os coeficientes definidos pelo polinómio acabado de deduzir estão estreitamente relacionados com quantidades que têm significado geométrico acerca do corpo K. É do estudo destas grandezas que se ocupa este trabalho. Alguns exemplos disso mesmo são os seguintes.

No final da prova do teorema anterior obtivemos o valor do coeficiente a_n.

Corolário 2.2.1 *Se $K \in \mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$, então o coeficiente do termo de grau n do polinómio $p_K(t) = \mathrm{vol}_n\left((K)_t\right)$ é igual ao volume, ω_n, da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.*

O termo independente é, obviamente, igual ao volume de K. E, relativamente ao coeficiente de grau um, tem-se

Corolário 2.2.2 *Se $K \in \mathcal{K}^n$ com interior não vazio, o coeficiente do termo de primeiro grau do polinómio $p_K(t)$ é igual à área de superfície de K.*

Demonstração. Atendendo à continuidade da área de superfície e ao modo como foi obtido $p_K(t)$ para corpos convexos quaisquer, basta demonstrar este corolário para politopos com interior não vazio.

Seja P um tal politopo. Usando (2.2), concluímos que o coeficiente de grau um de $p_P(t) = \mathrm{vol}_n\left((P)_t\right)$ é dado por

$$\sum_{F:\dim(F)=n-1} \mathrm{vol}_n\left((P)_1 \cap \Omega(F)\right), \tag{2.6}$$

ou seja, nesta soma aparecem os volumes de todos os conjuntos da forma $(P)_1 \cap \Omega(F)$, em que F é uma faceta de P. Pelo lema 2.1.3, cada conjunto $(P)_1 \cap \Omega(F)$ é um cilindro

recto de base F e altura 1. Então, o seu volume é igual a $\mathrm{vol}_{n-1}(F)$. Assim, (2.6) é igual a

$$\sum_{F:\dim(F)=n-1} \mathrm{vol}_{n-1}(F)$$

e esta soma é precisamente $\mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{fr}(P))$. Isto mostra que o coeficiente de t no polinómio $p_P(t) = \mathrm{vol}_n((P)_t)$ é exactamente igual à área de superfície do politopo P. □

No entanto, também os outros coeficientes do polinómio $p_K(t)$ estão associados a quantidades que possuem informação geométrica acerca do corpo convexo K. Essas quantidades podem ser definidas de diversas maneiras, sendo uma delas a seguinte.

Definição 2.2.3 Sejam $K \in \mathcal{K}^n$ e $p_K(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ o polinómio associado a $\mathrm{vol}_n((K)_t)$. Então, o *i-ésimo volume intrínseco de K*, $i \in \{0, \ldots, n\}$, representa-se por $\mu_i^n(K)$ e define-se por

$$\boxed{\mu_i^n(K) := \frac{a_{n-i}(K)}{\omega_{n-i}}.}$$

A razão pela qual se chamam volumes intrínsecos a estas grandezas ficará mais clara ao longo deste trabalho. Na notação $\mu_i^n(K)$, o índice corresponde a qual dos volumes intrínsecos de K se trata e o expoente refere-se à dimensão do espaço em que se está a trabalhar.

Por exemplo, $\mu_n^n(K) = \frac{a_0(K)}{\omega_0} = a_0(K) = \mathrm{vol}_n(K)$, $\mu_{n-1}^n(K) = \frac{a_1(K)}{\omega_1} = \frac{S(K)}{2}$, onde $S(K)$ representa a área de superfície de K e, finalmente, $\mu_0^n(K) = \frac{a_n(K)}{\omega_n} = 1$.

Com esta definição, sendo $K \in \mathcal{K}^n$, o polinómio $p_K(t)$ pode-se escrever da seguinte forma, que é conhecida pela *Fórmula de Steiner*:

$$p_K(t) = \mu_0^n(K)\omega_n t^n + \mu_1^n(K)\omega_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \mu_n^n(K)\omega_0.$$

Os volumes intrínsecos são independentes entre si, à excepção de certas desigualdades entre eles que generalizam a desigualdade isoperimétrica que relaciona o volume e a área ([Sc], cap. 6 e [We], pág. 303).

Definição 2.2.4 Uma *valoração* ou um *funcional aditivo* é uma função φ definida numa família $\mathcal{M}$ de conjuntos e com valores num grupo abeliano e tal que

$$\varphi(K) + \varphi(L) = \varphi(K \cup L) + \varphi(K \cap L),$$

sempre que $K, L, K \cup L$ e $K \cap L$ pertencem a $\mathcal{M}$. Se $\varnothing \in \mathcal{M}$, definimos $\varphi(\varnothing) := 0$.

Assim, no caso em que $\mathcal{M} := \mathcal{K}^n$ (que nos interessa mais) uma valoração é uma função real μ definida tal que

$$\begin{aligned} \mu(K \cup L) &= \mu(K) + \mu(L) - \mu(K \cap L) \\ \mu(\varnothing) &= 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

para todos $K, L \in \mathcal{K}^n$, tais que $K \cup L \in \mathcal{K}^n$.

Dados $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}^n$ tais que $K_1 \cup \cdots \cup K_m \in \mathcal{K}^n$, iterando (2.7) podemos ser levados a concluir que

$$\mu(K_1 \cup \cdots \cup K_m) = \sum_i \mu(K_i) - \sum_{i<j} \mu(K_i \cap K_j) + \sum_{i<j<k} \mu(K_i \cap K_j \cap K_k) - \cdots, \tag{2.8}$$

que se diz o *princípio de inclusão-exclusão* para a valoração μ definida em $\mathcal{K}^n$. No entanto, tal conclusão é, em geral, falsa, pois nada nos garante que não exista algum $j \in \{2, \ldots, m-1\}$ tal que $K_1 \cup \cdots \cup K_j \notin \mathcal{K}^n$.

Por exemplo, por (2.7), dados $K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{K}^n$ tais que $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \in \mathcal{K}^n$, então

$$\begin{aligned} \mu(K_1 \cup K_2 \cup K_3) =& \mu(K_1 \cup K_2) + \mu(K_3) - \mu((K_1 \cup K_2) \cap K_3) \\ =& \mu(K_1) + \mu(K_2) - \mu(K_1 \cap K_2) + \mu(K_3) - \\ & \mu((K_1 \cap K_3) \cup (K_2 \cap K_3)) \\ =& \mu(K_1) + \mu(K_2) - \mu(K_1 \cap K_2) + \mu(K_3) - \mu(K_1 \cap K_3) - \\ & \mu(K_2 \cap K_3) + \mu(K_1 \cap K_2 \cap K_3) \\ =& \mu(K_1) + \mu(K_2) + \mu(K_3) - \mu(K_1 \cap K_2) - \mu(K_1 \cap K_3) - \\ & \mu(K_2 \cap K_3) + \mu(K_1 \cap K_2 \cap K_3). \end{aligned}$$

Agora, note-se que esta dedução só é válida se, além de $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \in \mathcal{K}^n$, também $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}^n$ e $(K_1 \cap K_3) \cup (K_2 \cap K_3) \in \mathcal{K}^n$ (caso contrário μ não estaria bem definida). Mas, estas últimas condições, em geral, não se verificam. Contudo, se μ se pudesse estender, de modo único, a um conjunto que fosse fechado para uniões, então (2.8) seria válido.

Mais à frente vamos provar que se μ é contínua, então a existência dessa extensão é uma condição necessária e suficiente para que se verifique o princípio de inclusão-exclusão.

Neste trabalho só nos interessam valorações que se podem estender a esse tal conjunto fechado para uniões de corpos convexos, logo o princípio de inclusão-exclusão é válido para as valorações que aqui consideramos.

Como veremos mais adiante, existem valorações cuja imagem de corpos convexos de dimensão $m < n$ em $\mathbb{R}^n$, é não nula.

Esta é mais uma propriedade importante que distingue a medida de Lebesgue de outras valorações, uma vez que a medida de Lebesgue de um conjunto cuja dimensão é menor do que a dimensão do espaço ambiente é sempre nula.

Uma valoração que possui esta propriedade é definida a seguir.

Definição 2.2.5 Uma valoração μ definida em $\mathcal{K}^n$ diz-se *simples* se $\mu(K) = 0$ sempre que $\dim(K) < n$.

Vamos verificar agora que cada a_i é uma valoração, donde podemos concluir que os volumes intrínsecos também são valorações. Depois, iremos averiguar algumas propriedades que estas valorações possuem.

Para tal, é necessário o seguinte lema.

Lema 2.2.6 *Sejam K e L dois corpos convexos tais que $K \cup L$ ainda é convexo. Então,*

(i) $(K \cup L)_t = (K)_t \cup (L)_t$.

(ii) $(K \cap L)_t = (K)_t \cap (L)_t$.

Demonstração. Começamos por provar *(i)*. Seja $x \in (K \cup L)_t$. Então, existe $a \in K \cup L$ tal que $|x - a| \leq t$, logo, como $a \in K$ ou $a \in L$, resulta que $x \in (K)_t \cup (L)_t$. A inclusão contrária prova-se de maneira análoga.

Em relação a *(ii)*, a inclusão $(K \cap L)_t \subseteq (K)_t \cap (L)_t$ prova-se da mesma maneira que as anteriores.

Para provar que $(K \cap L)_t \supseteq (K)_t \cap (L)_t$, consideramos $x \in (K)_t \cap (L)_t$. Então, existe $a_1 \in K$ tal que $|x - a_1| \leq t$ e existe $a_2 \in L$ tal que $|x - a_2| \leq t$. Como $K \cup L$ é convexo, o segmento $[a_1, a_2]$ que une a_1 a a_2 está contido em $K \cup L$. Neste segmento existe, obrigatoriamente, um ponto a_3 pertencente a $K \cap L$. Para o verificarmos, consideramos uma ordem em $[a_1, a_2]$ induzida pela ordem em $[0, 1]$ através da bijecção

$[0,1] \to [a_1, a_2]$ dada por $t \mapsto (1-t)a_1 + ta_2$. Se o ponto a_3 não existir, então existem pontos $b := \max\{y \in [a_1, a_2] : y \in K \text{ e } y \notin L\}$ e $c := \min\{y \in [a_1, a_2] : y \in L \text{ e } y \notin K\}$, donde, nenhum ponto de $K \cup L$ pertence a $]b, c[$ e, portanto, $K \cup L$ não é convexo. Daqui resulta um absurdo e, portanto, está garantida a existência do ponto a_3. Como $|x - a_3| \leq \max\{|x - a_1|, |x - a_2|\}$, resulta que $|x - a_3| \leq t$, donde $x \in (K \cap L)_t$. □

Então, se K e L são corpos convexos tais que $K \cup L$ é um corpo convexo, resulta que

$$\begin{aligned} p_{K\cup L}(t) &= \mathrm{vol}_n((K \cup L)_t) \\ &= \mathrm{vol}_n((K)_t \cup (L)_t) \\ &= \mathrm{vol}_n((K)_t) + \mathrm{vol}_n((L)_t) - \mathrm{vol}_n((K)_t \cap (L)_t) \\ &= \mathrm{vol}_n((K)_t) + \mathrm{vol}_n((L)_t) - \mathrm{vol}_n((K \cap L)_t) \\ &= p_K(t) + p_L(t) - p_{K\cap L}(t). \end{aligned}$$

Note-se que a existência do "polinómio do volume" só está garantida para corpos convexos, logo os coeficientes a_i só dizem respeito a corpos convexos. Então,

$$a_i(K \cup L) = a_i(K) + a_i(L) - a_i(K \cap L),$$

para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, donde cada a_i é uma valoração.

Daqui sai que cada μ_i^n é também uma valoração em $\mathcal{K}^n$.

Sendo uma valoração em $\mathcal{K}^n$ uma função definida no conjunto dos corpos convexos, faz sentido falar em continuidade de valorações, nos termos da definição 1.2.10.

Pelo que vimos depois da demonstração do teorema 2.1.2, concluímos que cada a_i é uma valoração contínua e, portanto, o mesmo acontece com os volumes intrínsecos.

Seja $\mathrm{Isom}(n)$ o grupo das isometrias de $\mathbb{R}^n$. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $g \in \mathrm{Isom}(n)$, seja $g(A) := \{g(a) : a \in A\}$.

Definição 2.2.7 Uma valoração μ diz-se *invariante* em $\mathcal{K}^n$ se $\mu(g(K)) = \mu(K)$, para todos $g \in \mathrm{Isom}(n)$ e $K \in \mathcal{K}^n$.

Se $\mu(g(K)) = \mu(K)$ sempre que g for uma isometria que preserva a orientação (isto é, g é uma isometria *positiva*), diz-se que μ é *positivamente invariante.*

Se $\mu(g(K)) = \mu(K)$ sempre que g é uma translação em $\mathbb{R}^n$, diz-se que μ é *invariante por translações.*

Note-se que invariância implica invariância positiva, que, por sua vez, implica invariância por translações.

Se f é uma aplicação linear em $\mathbb{R}^n$ tal que $|\det(f)| = 1$ e se $K \in \mathcal{K}^n$, então, dado $t \geq 0$, $\mathrm{vol}_n(K + tB_n) = \mathrm{vol}_n(f(K + tB_n))$. Mas, $\mathrm{vol}_n(f(K + tB_n)) = \mathrm{vol}_n(f(K) + tf(B_n))$ e só podemos garantir que $\mathrm{vol}_n(f(K) + tf(B_n))$ é igual a $p_{f(K)}(t)$ se $f(B_n) = B_n$, isto é, se f for uma isometria. Portanto, sendo g uma isometria (composta de uma isometria linear com uma translação), temos que $p_K(t) = p_{g(K)}(t)$, donde concluímos que cada a_i é uma valoração invariante e, portanto, o mesmo acontece com cada μ_i^n.

Definição 2.2.8 Uma valoração μ, definida em $\mathcal{K}^n$, diz-se *homogénea de grau* $j \geq 0$ se $\mu(\alpha K) = \alpha^j \mu(K)$, para todos $K \in \mathcal{K}^n$ e $\alpha \geq 0$.

Ora, se $\alpha > 0$, temos que

$$\begin{aligned} p_{\alpha K}(t) &= \mathrm{vol}_n(\alpha K + tB_n) \\ &= \mathrm{vol}_n\left(\alpha\left(K + \frac{t}{\alpha}B_n\right)\right) \\ &= \alpha^n \mathrm{vol}_n\left(K + \frac{t}{\alpha}B_n\right) \\ &= \alpha^n\left(a_0(K) + a_1(K)\frac{t}{\alpha} + a_2(K)\frac{t^2}{\alpha^2} + \cdots + a_n(K)\frac{t^n}{\alpha^n}\right) \\ &= \alpha^n a_0(K) + \alpha^{n-1}a_1(K)t + \alpha^{n-2}a_2(K)t^2 + \cdots + a_n(K)t^n. \end{aligned}$$

Logo, como $p_{\alpha K}(t) = a_0(\alpha K) + a_1(\alpha K)t + a_2(\alpha K)t^2 + \cdots + a_n(\alpha K)t^n$, resulta que $a_i(\alpha K) = \alpha^{n-i}a_i(K)$, para todo $\alpha > 0$. Daqui sai que $\mu_i^n(\alpha K) = \alpha^i \mu_i^n(K)$, para todo $\alpha > 0$. Usando a continuidade dos volumes intrínsecos, e convencionando, neste caso, que $0^0 = 1$, concluímos que o caso em que $\alpha = 0$ também é válido e o i-ésimo volume intrínseco é homogéneo de grau i

Mais tarde demonstraremos que qualquer valoração contínua, invariante e homogénea de grau i, em $\mathcal{K}^n$, é múltipla de μ_i^n. Isso permitir-nos-á dar construções alternativas dos volumes intrínsecos, como veremos no capítulo 5.

Vamos agora explicar a razão pela qual se chamam volumes intrínsecos a estas grandezas. Esta designação tem a ver com a invariância dos volumes intrínsecos de um corpo convexo relativamente ao espaço em que esse corpo está mergulhado e, portanto, essas grandezas são *intrínsecas* ao corpo em questão.

Teorema 2.2.9 *Os volumes intrínsecos estão normalizados independentemente da dimensão do espaço ambiente. Isto é, se F é um corpo convexo mergulhado em $\mathbb{R}^m$ então, para cada $n > m$, se F for mergulhado em $\mathbb{R}^n$, tem-se que $\mu_j^m(F) = \mu_j^n(F)$, para todo $j \in \{0, \ldots, m\}$.*

Demonstração. Queremos mostrar que os volumes intrínsecos de um corpo convexo F não se alteram com a dimensão do espaço ambiente. Por indução sobre a dimensão do espaço, basta provar que, para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$, $\mu_j^m(F) = \mu_j^{m+1}(F)$. Vamos identificar $\mathbb{R}^m$ com $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$.

Sejam

$$p_F^{(m)}(t) := a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m = \mu_m^m \omega_0 + \mu_{m-1}^m \omega_1 t + \cdots + \mu_0^m \omega_m t^m$$

e

$$p_F^{(m+1)}(t) := b_0 + b_1 t + \cdots + b_{m+1} t^{m+1} = \mu_{m+1}^{m+1} \omega_0 + \mu_m^{m+1} \omega_1 t + \cdots + \mu_0^{m+1} \omega_{m+1} t^{m+1}$$

os polinómios do volume do corpo paralelo a F em $\mathbb{R}^m$ e em $\mathbb{R}^{m+1}$, respectivamente.

Suponhamos então que F está mergulhado em $\mathbb{R}^{m+1}$. Pela invariância dos volumes intrínsecos, podemos supor que $F \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$ (note-se que $\dim(F) \leq m$). Suponhamos também que $B_m \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, seja

$$F^s := F + \{(0, \ldots, 0, s)\} = \{(f_1, \ldots, f_m, s) \in \mathbb{R}^{m+1} : (f_1, \ldots, f_m, 0) \in F\}.$$

Portanto, F^s é o translatado vertical de F para o hiperplano $\mathbb{R}^m \times \{s\}$.

Para continuar a prova do teorema, vamos necessitar do seguinte lema:

Lema 2.2.10 *De acordo com a notação anterior, tem-se, para cada $t \geq 0$, que*

$$F + tB_{m+1} = \bigcup_{s \in [-t,t]} \left(F^s + \sqrt{t^2 - s^2} B_m \right).$$

Demonstração. Consideremos $x \in F + tB_{m+1}$. Portanto,

$$x = (f_1, \ldots, f_m, 0) + (u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}),$$

com $(f_1, \ldots, f_m, 0) \in F$ (sendo que $F \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$) e $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}) \in tB_{m+1}$. Resulta que $\sum_{i=1}^{m+1} u_i^2 \leq t^2$ e desta desigualdade concluímos que $u_{m+1}^2 \leq t^2$, donde $-t \leq u_{m+1} \leq t$.

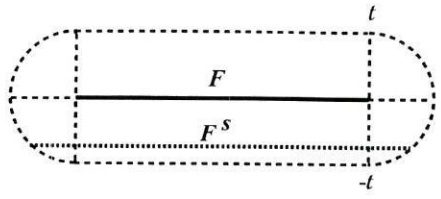


Figura 2.3: $(F)_t$ em dimensão 2 e $(F^s)_{\sqrt{t^2-s^2}}$ em dimensão 1, com $s \in [-t,t]$.

Então, $x = (f_1,\ldots,f_m,u_{m+1}) + (u_1,\ldots,u_m,0)$. Ora, $(f_1,\ldots,f_m,u_{m+1}) \in F^{u_{m+1}}$ e $(u_1,\ldots,u_m,0) \in \sqrt{t^2-u_{m+1}^2}\ B_m$, pois $\sum_{i=1}^m u_i^2 \leq t^2 - u_{m+1}^2$. Daqui concluímos que $x \in F^{u_{m+1}} + \sqrt{t^2-u_{m+1}^2}\ B_m$, logo, como $u_{m+1} \in [-t,t]$, resulta que

$$x \in \bigcup_{s\in[-t,t]} \left(F^s + \sqrt{t^2-s^2}\ B_m\right).$$

Reciprocamente, seja $x \in \bigcup_{s\in[-t,t]} \left(F^s + \sqrt{t^2-s^2}\ B_m\right)$. Então,

$$x = (f_1,\ldots,f_m,s_0) + (v_1,\ldots,v_m,0)\,,$$

para algum $s_0 \in [-t,t]$ e com $v_1,\ldots,v_m$ tais que $\sum_{i=1}^m v_i^2 \leq t^2 - s_0^2$. Portanto, resulta que $x = (f_1+v_1,\ldots,f_m+v_m,s_0)$.

Seja $y := (f_1,\ldots,f_m,0)$. Então, $y \in F$ e

$$|x-y| = \sqrt{v_1^2+\cdots+v_m^2+s_0^2} \leq \sqrt{t^2-s_0^2+s_0^2} = t.$$

Assim, $d(x,F) \leq t$, donde $x \in F + tB_{m+1}$. □

Continuação da demonstração do Teorema 2.2.9. Como $F \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$, o volume de F em $\mathbb{R}^{m+1}$ é zero, isto é, $\mu_{m+1}^{m+1}(F) = 0$.

Pelo lema anterior,

$$(F+tB_{m+1}) \cap \mathbb{R}^m \times \{s\} = \begin{cases} F^s + \sqrt{t^2-s^2}B_m, & \text{se } -t \leq s \leq t \\ \varnothing, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_{m+1}\,(F+tB_{m+1}) &= \mathrm{vol}_{m+1}\left(\bigcup_{s\in[-t,t]}\left(F^s+\sqrt{t^2-s^2}B_m\right)\right) \\ &= \int_{-t}^{t} \mathrm{vol}_m\left(F^s+\sqrt{t^2-s^2}B_m\right)ds, \end{aligned}$$

logo

$$p_F^{(m+1)}(t) = \int_{-t}^{t} p_F^{(m)}\left(\sqrt{t^2 - s^2}\right) ds,$$

ou seja

$$b_1 t + \cdots + b_{m+1} t^{m+1} = \int_{-t}^{t} a_0 ds + \int_{-t}^{t} a_1 \sqrt{t^2 - s^2} ds + \cdots + \int_{-t}^{t} a_m \left(\sqrt{t^2 - s^2}\right)^m ds.$$

Mas, fazendo $s =: tu$, sai que

$$\int_{-t}^{t} a_j \left(\sqrt{t^2 - s^2}\right)^j ds = a_j t^{j+1} \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - u^2}\right)^j du, \tag{2.9}$$

para todo $j \in \{0, \ldots, m\}$.

Usando o lema 2.2.10 em $\mathbb{R}^{j+1}$ e fazendo $F := 0_{\mathbb{R}^j}$ (como F está mergulhado em $\mathbb{R}^{j+1}$, identificamos F com $0_{\mathbb{R}^{j+1}}$) e tomando $t = 1$, deduzimos que

$$B_{j+1} = \bigcup_{s \in [-1,1]} \left(\{(0, \ldots, 0, s)\} + \sqrt{1 - s^2} B_j \right),$$

donde, pelo que se viu atrás,

$$\mathrm{vol}_{j+1}(B_{j+1}) = \mathrm{vol}_{j+1}\left(\bigcup_{s \in [-1,1]} \left(\{(0, \ldots, 0, s)\} + \sqrt{1 - s^2} B_j \right) \right) = \int_{-1}^{1} \mathrm{vol}_j \left(\sqrt{1 - s^2} B_j \right) ds.$$

Já vimos que o volume é uma valoração homogénea, logo

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{vol}_j \left(\sqrt{1 - s^2} B_j \right) ds = \omega_j \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - s^2} \right)^j ds,$$

e, portanto, concluímos que

$$\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - u^2} \right)^j du = \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j}.$$

Então, de (2.9) sai que

$$\int_{-t}^{t} a_j \left(\sqrt{t^2 - s^2} \right)^j ds = a_j \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} t^{j+1}.$$

Continuando,

$$b_1 t + \cdots + b_{j+1} t^{j+1} + \cdots + b_{m+1} t^{m+1} = a_0 \frac{\omega_1}{\omega_0} t + \cdots + a_j \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j} t^{j+1} + \cdots + a_m \frac{\omega_{m+1}}{\omega_m} t^{m+1},$$

ou seja, $b_{j+1} = a_j \frac{\omega_{j+1}}{\omega_j}$, para $j \in \{0, \ldots, m\}$ e daqui, notando que $b_{j+1} = \mu_{m-j}^{m+1} \omega_{j+1}$ e que $a_j = \mu_{m-j}^{m} \omega_j$, obtemos $\mu_{m-j}^{m+1} = \mu_{m-j}^{m}$.

Por conseguinte, $\mu_j^m(F) = \mu_j^{m+1}(F)$, para todo $j \in \{0, \ldots, m\}$. □

Uma consequência deste teorema é o

Corolário 2.2.11 *Se $K \in \mathcal{K}^n$ é tal que $\dim(K) = m < n$, então $\mu^n_{m+i}(K) = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-m\}$.*

Demonstração. Como os volumes intrínsecos são invariantes por isometrias, podemos supor que $K \subset \mathbb{R}^m \times \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n-m \text{ vezes}}\}$. Identificamos $\mathbb{R}^{m+i}$ com $\mathbb{R}^{m+i} \times \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n-m-i \text{ vezes}}\} \subset \mathbb{R}^n$ e, assim, consideramos $K \subset \mathbb{R}^{m+i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-m\}$. Mas, então, pelo teorema anterior, $\mu^n_{m+i}(K) = \mu^{m+i}_{m+i}(K) = 0$, pois $\mu^{m+i}_{m+i}(K)$ é o volume de K (que tem dimensão m) em $\mathbb{R}^{m+i}$. □

Notemos que se considerarmos K mergulhado em $\mathbb{R}^m$ e se, por outro lado, considerarmos, K mergulhado em $\mathbb{R}^n$, com $n > m$, então existem $m+1$ volumes intrínsecos de K em $\mathbb{R}^m$ e $n+1$ volumes intrínsecos de K em $\mathbb{R}^n$, só que $\mu^n_{m+i}(K) = 0$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n-m\}$. Portanto, pelo teorema 2.2.9, a dimensão do espaço não altera os valores dos volumes intrínsecos e, no caso de não estarem definidos num dado espaço e estarem noutro, neste último valem zero.

Assim, o expoente na notação μ^n_i, de i-ésimo volume intrínseco, deixa de ter relevância quanto ao valor dos volumes intrínsecos, só interessando para saber quantos volumes intrínsecos estão definidos. Por isso, passamos a representar o i-ésimo volume intrínseco por μ_i.

Concluindo, já sabemos que os volumes intrínsecos, $\mu_0, \ldots, \mu_n$ de $K \in \mathcal{K}^n$ são valorações contínuas, invariantes, homogéneas e independentes do espaço em que K está mergulhado. Um dos objectivos deste estudo é determinar todas as valorações definidas em $\mathcal{K}^n$ que são contínuas e invariantes. Vamos demonstrar que o conjunto das valorações positivamente invariantes (que inclui as valorações invariantes) é um espaço vectorial de dimensão $n+1$, e que $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n\}$ constitui uma sua base. De facto, estes resultados serão provados não em $\mathcal{K}^n$, mas sim num conjunto mais extenso, que contém $\mathcal{K}^n$.

Por enquanto, e como exemplo, vamos determinar os volumes intrínsecos da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e, depois, de uma classe de corpos convexos denominados *paralelotopos*.

2.3 Volumes intrínsecos da bola unitária

Nesta breve secção calculamos os volumes intrínsecos de B_n. Os resultados aqui obtidos serão, ocasionalmente, usados quando for necessário calcular explicitamente o valor de algum funcional dependente dos volumes intrínsecos de um corpo K. Esse é o caso quando for necessário o cálculo de alguma constante de normalização.

Para calcular os volumes intrínsecos da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, vamos determinar o polinómio do volume de um corpo paralelo a B_n.

Temos que

$$\begin{aligned} p_{B_n}(t) &= \mathrm{vol}_n(B_n + tB_n) \\ &= (1+t)^n \mathrm{vol}_n(B_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^{n-i} \omega_n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \omega_n t^{n-i}. \end{aligned}$$

Então,

$$\mu_i(B_n) = \binom{n}{i} \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}}.$$

2.4 Volumes intrínsecos dos paralelotopos

O objectivo desta secção é o mesmo da secção anterior, só que relativamente aos paralelotopos, que se definem a seguir.

Definição 2.4.1 Um *rectângulo* em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto R definido por $R := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, com $a_i \leq b_i$. Um *paralelotopo* em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto que se obtém de um rectângulo através de uma isometria.

Portanto, os rectângulos são paralelotopos cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

Note-se que tanto rectângulos como paralelotopos são exemplos de politopos.

Dado um rectângulo $R := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, se $a_i < b_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, então o rectângulo R tem dimensão máxima, isto é, tem dimensão n. Um paralelotopo tem dimensão máxima se é obtido de um rectângulo de dimensão máxima. Portanto, um

paralelotopo P em $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n se e só se não está contido em nenhum hiperplano, isto é, se e só se $\text{int}(P) \neq \varnothing$.

Por exemplo, um paralelotopo de dimensão máxima em $\mathbb{R}^3$ é um paralelipípedo. Se os lados desse paralelipípedo forem paralelos aos eixos, trata-se de um rectângulo de dimensão máxima.

Para determinar os volumes intrínsecos dos paralelotopos em $\mathbb{R}^n$, e para simplificar os cálculos, vamo-nos reduzir ao caso dos rectângulos em $\mathbb{R}^n$. Com a restrição a esta classe de paralelotopos não perdemos qualquer generalidade, devido à invariância dos volumes intrínsecos.

Definição 2.4.2 As *funções simétricas elementares* de $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são os seguintes polinómios:

$$e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) := 1,$$

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \text{ para } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Vamos então determinar os volumes intrínsecos dos paralelotopos.

Proposição 2.4.3 *Seja R um paralelotopo em $\mathbb{R}^n$ tal que os seus lados tenham comprimento $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então $\mu_i(R) = e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Demonstração. Seja então R um rectângulo. Vamos demonstrar a proposição por indução sobre a dimensão de R. Se $\dim(R) = 1$ (denotamos $R^{(1)}$), então $R^{(1)} = [a, b]$, para alguns $b \in \mathbb{R}$ e $b - a =: x > 0$, logo $R^{(1)} + tB_1 = [a - t, b + t]$ e $\text{vol}_1\left(\left(R^{(1)}\right)_t\right) = x + 2t$, donde $\mu_0(R^{(1)}) = 1 = e_0(x)$ e $\mu_1(R^{(1)}) = x = e_1(x)$, o mesmo acontecendo com qualquer paralelotopo de dimensão 1.

Seja, agora, $R^{(n)}$ um paralelotopo tal que $\dim(R) = n$ e com os lados de comprimento $x_1, \ldots, x_n$. Suponhamos que $\mu_j(R^{(n)}) = e_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Seja $R^{(n+1)}$ o rectângulo que se obtém de $R^{(n)}$ acrescentando-lhe mais uma dimensão. Portanto, supondo que $R^{(n)} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$, isto é, $R^{(n)} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times \{0\}$, com $b_i - a_i = x_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, então $R^{(n+1)} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$, com $b_i - a_i = x_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Ou seja, $R^{(n+1)}$ é um rectângulo de dimensão $n + 1$ e com os lados de comprimento $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

Então, os polinómios que definem $\mathrm{vol}_n\left(R^{(n)}+tB_n\right)$ e $\mathrm{vol}_{n+1}\left(R^{(n+1)}+tB_{n+1}\right)$ são, respectivamente

$$p^{(n)}_{R^{(n)}}(t)=\mu_n\left(R^{(n)}\right)+\cdots+\mu_j\left(R^{(n)}\right)\omega_{n-j}t^{n-j}+\cdots+\mu_0\left(R^{(n)}\right)\omega_n t^n$$

e

$$p^{(n+1)}_{R^{(n+1)}}(t)=\mu_{n+1}\left(R^{(n+1)}\right)+\cdots+\mu_j\left(R^{(n+1)}\right)\omega_{n+1-j}t^{n+1-j}+\cdots+\mu_0\left(R^{(n+1)}\right)\omega_{n+1}t^{n+1}$$

Queremos mostrar que

$$\mu_j\left(R^{(n+1)}\right)=\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq n+1}x_{i_1}\ldots x_{i_j},$$

para todo $j\in\{1,\ldots,n+1\}$, já que é óbvio que $\mu_0(R^{(n+1)})=1=e_0(x_1,\ldots,x_{n+1})$.

Usando o mesmo argumento da prova do teorema 2.2.9, concluímos que

$$\mathrm{vol}_{n+1}\left(R^{(n+1)}+tB_{n+1}\right)=\int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}}\mathrm{vol}_n\left(R^{(n)}+tB_n\right)ds+2\int_0^t\mathrm{vol}_n\left(R^{(n)}+\sqrt{t^2-s^2}B_n\right)ds.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
&\int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}}\mathrm{vol}_n\left(R^{(n)}+tB_n\right)ds+2\int_0^t\mathrm{vol}_n\left(R^{(n)}+\sqrt{t^2-s^2}B_n\right)ds\\
&=x_{n+1}\mathrm{vol}_n\left(R^{(n)}+tB_n\right)+2\int_0^t\left(\sum_{i=0}^n\mu_{n-i}\left(R^{(n)}\right)\omega_i\left(\sqrt{t^2-s^2}\right)^i\right)ds\\
&=x_{n+1}\sum_{i=0}^n\mu_{n-i}\left(R^{(n)}\right)\omega_i t^i+\sum_{i=0}^n\mu_{n-i}\left(R^{(n)}\right)\omega_i\times 2\int_0^t\left(\sqrt{t^2-s^2}\right)^i ds\\
&=x_{n+1}\sum_{i=0}^n\mu_{n-i}\left(R^{(n)}\right)\omega_i t^i+\sum_{i=0}^n\mu_{n-i}\left(R^{(n)}\right)\omega_{i+1}\,t^{i+1},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta do facto de que, usando a substituição $s=:tu$,

$$2\int_0^t\left(\sqrt{t^2-s^2}\right)^i ds=\left(2\int_0^1\left(\sqrt{1-u^2}\right)^i du\right)t^{i+1}=\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}\,t^{i+1}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n+1}\mu_{n+1-i}\left(R^{(n+1)}\right)\omega_i t^i=x_{n+1}\sum_{i=0}^n\mu_{n-i}\left(R^{(n)}\right)\omega_i t^i+\sum_{i=0}^n\mu_{n-i}\left(R^{(n)}\right)\omega_{i+1}t^{i+1}.$$

Então, para cada $j=1,\ldots,n+1$, temos que

$$\begin{aligned}
&\mu_j\left(R^{(n+1)}\right)\omega_{n+1-j}\,t^{n+1-j}\\
=\;&x_{n+1}\,\mu_{j-1}\left(R^{(n)}\right)\omega_{n+1-j}\,t^{n+1-j}+\mu_j\left(R^{(n)}\right)\omega_{n+1-j}\,t^{n+1-j}\\
=\;&\left(x_{n+1}\,\mu_{j-1}\left(R^{(n)}\right)+\mu_j\left(R^{(n)}\right)\right)\omega_{n+1-j}\,t^{n+1-j}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
\mu_j\left(R^{(n+1)}\right) &= x_{n+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{j-1}\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_{j-1}} + \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_j} \\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{j-1}\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_{j-1}}x_{n+1} + \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_j} \\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n+1} x_{i_1}\cdots x_{i_j}
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Extensão de valorações

A condição (2.7), na definição de valoração em $\mathcal{K}^n$, só é válida se a reunião de dois corpos convexos ainda for um corpo convexo. Esta condição é demasiadamente redutora pois, em geral, a união de dois conjuntos convexos não é um conjunto convexo. No entanto, em vez de considerar $\mathcal{K}^n$, podemos tomar um conjunto que seja fechado para uniões finitas e que contenha $\mathcal{K}^n$ e estender a esse conjunto qualquer valoração contínua definida em $\mathcal{K}^n$. Mostraremos neste capítulo que essa extensão é possível e única.

Definição 3.0.4 O conjunto dos *corpos policonvexos* ou *anel convexo* em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as uniões finitas de corpos convexos. Denotamo-lo por $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

É óbvio que $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n) \supset \mathcal{K}^n$ e que $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ é fechado para uniões finitas.

A forma como construímos a extensão a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ de uma valoração definida em $\mathcal{K}^n$ será explicada na segunda parte deste capítulo e resulta da iteração da identidade (2.7).

Para isso, torna-se necessário saber em que condições é possível estender univocamente uma valoração definida numa dada família de conjuntos, fechada para intersecções, a outra que a contenha e que seja fechada para intersecções e para uniões finitas. São essas condições que estudaremos na primeira parte deste capítulo. A existência e unicidade da extensão de uma valoração de $\mathcal{K}^n$ a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ é um caso particular deste problema.

Ainda neste capítulo abordaremos o caso da extensão de uma valoração definida num conjunto fechado para uniões e intersecções para outro que seja fechado também para diferenças. A utilidade deste estudo será verificada no estudo da característica de Euler e da Fórmula de Euler-Poincaré, no próximo capítulo.

3.1 Teorema do funcional de Groemer

Definição 3.1.1 Seja X um conjunto qualquer não vazio e A um seu subconjunto. A *função característica de* A denota-se por χ_A e é a função real em X dada por $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$.

Definição 3.1.2 Seja $f := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $A_i \subseteq X$. Então f é uma combinação linear finita de funções características e diz-se uma função *simples* ou *X-simples.* Representamos por $\mathcal{S}(X)$ o conjunto de todas as funções simples em X.

É óbvio que

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B \tag{3.1}$$

e que

$$\chi_{A\cup B} = 1 - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}, \tag{3.2}$$

para todos os elementos A e B de X, onde a primeira igualdade em (3.2) resulta de (3.1) e do facto de que $\chi_{A\cup B} + \chi_{(A\cup B)^c} = 1$, onde $(A \cup B)^c$ representa o complementar de $A \cup B$ em X.

Da mesma forma e iterando (3.1) e (3.2), obtemos a fórmula de inclusão-exclusão para funções características:

$$\begin{aligned} \chi_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m} &= 1 - \chi_{A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_m^c} \\ &= 1 - (1 - \chi_{A_1})(1 - \chi_{A_2}) \cdots (1 - \chi_{A_m}) \\ &= \sum_i \chi_{A_i} - \sum_{i<j} \chi_{A_i \cap A_j} + \sum_{i<j<k} \chi_{A_i \cap A_j \cap A_k} - \cdots . \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.1.1 Extensão a uma família fechada para uniões finitas

Seja L uma família de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, fechada para uniões e intersecções finitas. O caso que depois nos irá interessar é $L := \mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

Definição 3.1.3 Um subconjunto G de L, fechado para intersecções finitas diz-se um *conjunto gerador de* L se todo o elemento de L puder ser obtido como união finita de elementos de G.

Note-se que $\mathcal{K}^n$ é um conjunto gerador de $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

Sejam G e L como na definição anterior e μ uma valoração definida em G. Como todo o elemento $A \in L$ pode ser expresso como uma união, $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$, com $B_i \in G$, podemos estender μ a uma valoração em L, definindo

$$\mu(A) := \sum_i \mu(B_i) - \sum_{i<j} \mu(B_i \cap B_j) + \cdots, \tag{3.4}$$

como é sugerido por (2.8). No entanto, é necessário verificarmos se $\mu(A)$ está bem definida, pois A pode ser obtido como união de elementos de G de mais do que uma maneira.

Definição 3.1.4 Dada uma valoração μ em G, o *funcional* com respeito a μ é a forma linear $\mathcal{L}_\mu$, definida em $\mathcal{S}(L)$, tal que, se $f := \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$, com $A_i \in G$, então

$$\mathcal{L}_\mu(f) := \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i).$$

Em geral, uma função simples f pode ser escrita de várias maneiras como combinação linear de funções características. Logo, é necessário verificarmos que este funcional está bem definido.

Como vamos ver a seguir, a existência deste funcional e da extensão (3.4) são propriedades equivalentes de μ.

Teorema 3.1.5 (Teorema do funcional de Groemer) *Sejam G um conjunto gerador de uma família de conjuntos L fechada para uniões e intersecções finitas e μ uma valoração em G. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) μ estende-se de modo único a uma valoração em L.

(ii) μ satisfaz a relação de inclusão-exclusão

$$\mu(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = \sum_i \mu(B_i) - \sum_{i<j} \mu(B_i \cap B_j) + \cdots, \tag{3.5}$$

sempre que $B_i \in G$ e $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \in G$.

(iii) μ define um funcional $\mathcal{L}_\mu$ no espaço vectorial $\mathcal{S}(L)$ das combinações lineares finitas de funções características de conjuntos em L.

Demonstração. Vamos mostrar que *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*.

Se μ se estende a uma valoração única em L, então *(ii)* resulta da identidade (2.7). Portanto, *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

Suponhamos agora que se verifica *(ii)*, mas que o funcional $\mathcal{L}_\mu$ não está bem definido, isto é, suponhamos que existem $f \in \mathcal{S}(L)$ e $K_1, \ldots, K_m \in G$, tais que, para algum $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, $f = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \chi_{K_i}$ e $f = \sum_{i=k+1}^{m} \gamma_i \chi_{K_i}$ (com $\beta_1, \ldots, \gamma_m \neq 0$), ou seja,

$$\beta_1 \chi_{K_1} + \cdots + (-\gamma_m)\chi_{K_m} = 0,$$

mas que $\sum_{i=1}^{k} \beta_i \, \mu(K_i) \neq \sum_{i=k+1}^{m} \gamma_i \, \mu(K_i)$, isto é,

$$\beta_1 \mu(K_1) + \cdots + (-\gamma_m)\mu(K_m) \neq 0.$$

Portanto, estamos a supor que existem $K_1, \ldots, K_m \in G$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{K_i} = 0, \tag{3.6}$$

mas

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i) \neq 0. \tag{3.7}$$

Sejam $L_1 := K_1, L_2 := K_2, \ldots, L_m := K_m, L_{m+1} := K_1 \cap K_2, L_{m+2} := K_1 \cap K_3, \ldots,$ $L_{2m-1} := K_1 \cap K_m, L_{2m} := K_2 \cap K_3$ e assim sucessivamente, percorrendo todas as intersecções dos conjuntos K_i's, dois a dois, três a três, (por esta ordem) até ao último conjunto $L_p := \bigcap_{i=1}^{m} K_i$. Portanto os L_i's definem um conjunto finito, $A := \{L_1, L_2, \ldots, L_p\}$, contendo todas as intersecções possíveis dos conjuntos K_i's. Como G é fechado para intersecções, temos que $A \subset G$. Por outro lado, A também é fechado para intersecções.

Suponhamos que

$$\sum_{i=q}^{p} \delta_i \chi_{L_i} = 0, \tag{3.8}$$

enquanto que

$$\sum_{i=q}^{p} \delta_i \mu(L_i) \neq 0, \tag{3.9}$$

onde $\delta_q \neq 0$ e q é maximal, ou seja, não existe nenhum inteiro maior que q tal que (3.8) e (3.9) se verifiquem. Então, resulta de (3.6) e (3.7) que $q \geq 1$ (basta tomar $\delta_i = \alpha_i$, para $1 \leq i \leq m$ e $\delta_i = 0$, para $i > m$). Por outro lado, de (3.8) e de (3.9), conclui-se que $q < p$, caso contrário ter-se-ia $\chi_{L_p} = 0$ e $\mu(L_p) \neq 0$.

Se existir $x \in L_q \setminus \bigcup_{j=q+1}^{p} L_j$, então (3.8) implica que $\delta_q = \sum_{i=q}^{p} \delta_i \chi_{L_i}(x) = 0$, o que contradiz a hipótese sobre δ_q. Então, não existe tal x, logo $L_q \subseteq L_{q+1} \cup \cdots \cup L_p$, donde $L_q = L_q \cap (L_{q+1} \cup \cdots \cup L_p) = (L_q \cap L_{q+1}) \cup \cdots \cup (L_q \cap L_p)$. Note-se que, através da maneira como foram definidos os conjuntos L_i's, para $k > q$, tem-se $L_q \cap L_k = L_j$, para algum $j > q$.

Então, usando *(ii)*, temos que

$$\sum_{i=q}^{p} \delta_i \mu(L_i) = \delta_q \mu \left(\bigcup_{i=q+1}^{p} (L_q \cap L_i) \right) + \sum_{i=q+1}^{p} \delta_i \mu(L_i) = \sum_{i=q+1}^{p} \xi_i \mu(L_i),$$

donde, por (3.9),

$$\sum_{i=q+1}^{p} \xi_i \mu(L_i) \neq 0, \tag{3.10}$$

onde ξ_i é a soma dos coeficientes de $\mu(L_i)$. Por outro lado, do mesmo raciocínio aplicado às funções características, resulta que

$$\sum_{i=q}^{p} \delta_i \chi_{L_i} = \delta_q \chi_{\cup_{i=q+1}^{p}(L_q \cap L_i)} + \sum_{i=q+1}^{p} \delta_i \chi_{L_i} = \sum_{i=q+1}^{p} \xi_i \chi_{L_i},$$

logo

$$\sum_{i=q+1}^{p} \xi_i \chi_{L_i} = 0, \tag{3.11}$$

por (3.8). Mas, então, (3.10) e (3.11) contradizem a maximalidade de q.

Então não existem tais $K_1, \ldots, K_m \in G$ nem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ que verifiquem (3.6) e (3.7). Portanto, *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*.

Para mostrar que *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*, suponhamos que μ define um funcional $\mathcal{L}_\mu$ no espaço das funções L-simples. Então, para $A \in L$, seja

$$\mu(A) := \mathcal{L}_\mu(\chi_A).$$

O facto de μ, assim definida em L, ser uma valoração resulta da linearidade do funcional e de (3.2). □

3.1.2 Extensão a uma família fechada para uniões finitas e para diferenças

Em certos casos, será oportuno estender valorações definidas em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ para famílias de conjuntos que, além de serem fechadas para intersecções e reuniões finitas, também o sejam para a diferença de conjuntos em $\mathbb{R}^n$, uma vez que $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ não goza desta propriedade.

Seja $B(L)$ a álgebra Booleana relativa, gerada pela família L definida atrás, isto é, a menor família de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo L que é fechada para uniões e intersecções finitas e para diferenças de conjuntos, ou seja, dados $A, B \in B(L)$, então $A \cap B \in B(L)$, $A \cup B \in B(L)$ e $A \setminus B \in B(L)$.

Note-se que, dados $A, B \in L$,

$$\chi_{A\setminus B} = \chi_{A\setminus(A\cap B)} = \chi_A - \chi_{A\cap B} = \chi_A - \chi_A\chi_B. \tag{3.12}$$

Note-se também que o espaço vectorial $\mathcal{S}(L)$ é uma álgebra, pois o produto de funções características de elementos de L corresponde à função característica da intersecção desses elementos, que ainda pertence a L.

Resulta de (3.1), (3.2) e de (3.12) que, se $C \in B(L)$ puder ser escrito usando uma sucessão de uniões, intersecções e diferenças à custa de um número finito de elementos de L, então $\chi_C \in \mathcal{S}(L)$.

Vejamos então que todo o elemento de $B(L)$ tem a propriedade requerida. Para isso, definamos

$$B_1(L) := \left\{ \bigcup_{i\in I} A_i \setminus B_i, \text{ com } A_i, B_i \in L \text{ ou } A_i \in L \text{ e } B_i = \varnothing \right\},$$

onde I é um conjunto finito de índices. Observe-se que $L \subset B_1(L)$, pois está contemplada a hipótese de $B_i = \varnothing$. É também claro que $B_1(L) \subseteq B(L)$. Pela definição de $B_1(L)$, é óbvio que este conjunto é fechado para reuniões finitas. Vejamos que $B_1(L)$ também é fechado para intersecções finitas e diferenças.

Sejam $\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \setminus B_i), \bigcup_{j=1}^{m}(C_j \setminus D_j) \in B_1(L)$. Então,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \setminus B_i) \cap \bigcup_{j=1}^{m}(C_j \setminus D_j) &= \bigcup_{\substack{i\in\{1,\ldots,k\}\\ j\in\{1,\ldots,m\}}} ((A_i \setminus B_i) \cap (C_j \setminus D_j)) \\ &= \bigcup_{\substack{i\in\{1,\ldots,k\}\\ j\in\{1,\ldots,m\}}} ((A_i \cap C_j) \setminus (B_i \cup D_j)) \in B_1(L),\end{aligned}$$

porque L é fechado para reuniões e intersecções finitas.

Relativamente às diferenças, vejamos em primeiro lugar que, se $A \setminus B$ e $C \setminus D$ são elementos de $B_1(L)$ tais que $A, D \in L$ e $B, C \in L$ ou $B = \varnothing$ ou $D = \varnothing$, então resulta que $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) \in B_1(L)$. De facto,

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = A \setminus (B \cup C) \cup (A \cap D) \setminus B \in B_1(L), \tag{3.13}$$

pois L é fechado para uniões e intersecções finitas. Passando ao caso geral, temos que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \setminus B_i)\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m}(C_j \setminus D_j)\right) = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=1}^{m}\left((A_i \setminus B_i) \setminus (C_j \setminus D_j)\right). \tag{3.14}$$

Portanto, concluímos por (3.13) que a expressão em (3.14) pertence a $B_1(L)$ e que este conjunto é fechado para diferenças.

Resulta que $B(L) = B_1(L)$ e como qualquer elemento deste conjunto se escreve usando uma sucessão de uniões, (intersecções) e diferenças à custa de um número finito de elementos de L, deduzimos, finalmente, que $\chi_C \in \mathcal{S}(L)$, para todo $C \in B(L)$.

Corolário 3.1.6 *Uma valoração μ definida num conjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ fechado para reuniões e intersecções finitas, admite uma única extensão à álgebra Booleana relativa, $B(L)$.*

Demonstração. Pelo teorema 3.1.5, μ define um funcional $\mathcal{L}_\mu$ no espaço $\mathcal{S}(L)$. Dado $C \in B(L)$, já vimos que $\chi_C \in \mathcal{S}(L)$ e então definimos

$$\mu(C) := \mathcal{L}_\mu(\chi_C).$$

A linearidade do funcional juntamente com (3.3) implica que esta extensão de μ é uma valoração em $B(L)$. □

3.2 Extensão de valorações de $\mathcal{K}^n$ para $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$

Já vimos, na secção anterior, em que condições é que uma valoração definida em $\mathcal{K}^n$ se pode estender de maneira única a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

O seguinte teorema mostra que essas condições se verificam, no caso de uma valoração contínua.

Teorema 3.2.1 (Teorema da extensão de Groemer) *Uma valoração contínua μ em $\mathcal{K}^n$ admite uma única extensão a uma valoração em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.*

Demonstração. Seja μ uma valoração contínua, definida em $\mathcal{K}^n$. Pelo teorema do funcional de Groemer, para mostrar que μ se estende de modo único a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$, basta mostrar que μ define um funcional no espaço das funções simples em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

A prova será feita por indução sobre a dimensão do espaço. Em dimensão 0, $\mathbf{U}(\mathcal{K}^0)$ coincide com $\mathcal{K}^0$, logo o teorema é trivial.

Suponhamos que o teorema é válido em dimensão $n-1$, mas que não o é em dimensão n, isto é, admitamos que existem $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}^n$ tais que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{K_i} = 0, \tag{3.15}$$

mas

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu\left(K_i\right) = 1. \tag{3.16}$$

Seja m o menor inteiro positivo para o qual as expressões (3.15) e (3.16) existem. É óbvio que $m \geq 2$.

Seja H um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ tal que $K_1 \subset \operatorname{int}(H^+)$ (H^+ e H^- são os semi-espaços fechados associados a H). Como $\chi_{K_i \cap H^+} = \chi_{K_i}\chi_{H^+}$, de (3.15) concluímos que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{K_i \cap H^+} = 0.$$

Da mesma forma, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{K_i \cap H} = 0$ e $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{K_i \cap H^-} = 0$.

Por hipótese, μ é uma valoração em $\mathcal{K}^n$, donde temos que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H^+) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H^-) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H).$$

Como os conjuntos $K_i \cap H$ estão inseridos num espaço de dimensão $n-1$, por hipótese de indução, sai que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H) = 0$.

Por outro lado, $K_1 \cap H^- = \varnothing$, donde $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H^-) = 0$, pela minimalidade de m.

Então, de (3.16), resulta que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i \cap H^+) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(K_i) = 1.$$

Consideremos agora uma sequência de hiperplanos $H_1, H_2, \ldots$ tais que $K_1 \subset \text{int}(H_i^+)$ e tal que existe r de forma a que $H_1^+ \cap \cdots \cap H_r^+$ seja compacto. Iterando o argumento precedente, deduzimos que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu\left(K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+\right) = 1, \tag{3.17}$$

para todo $q \geq 1$.

Notemos que $\left(\bigcap_{i=1}^{q} H_i^+\right)_{q \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão decrescente (isto é, se $q_0 < q_1$, então $\bigcap_{i=1}^{q_0} H_i^+ \supset \bigcap_{i=1}^{q_1} H_i^+$) de conjuntos compactos (tomando $q \geq r$) em $\mathbb{R}^n$, logo concluímos que $\lim_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+ = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i^+$ ([Sc], pág. 48).

Como, para a distância de Hausdorff, cada corpo convexo é o limite de uma sucessão decrescente de politopos ([We], pág. 109) e como cada politopo é uma intersecção finita de semi-espaços fechados, podemos tomar a sucessão de semi-espaços $\left(H_i^+\right)_{i \in \mathbb{N}}$ de tal forma que

$$K_1 = \lim_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+,$$

ou seja

$$K_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i^+.$$

Então,

$$\left(K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+\right)_{q \in \mathbb{N}} \longrightarrow K_i \cap K_1$$

e, como μ é contínua, chega-se a que

$$\lim_q \mu(K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+) = \mu(K_i \cap K_1),$$

donde, por (3.17),

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu\left(K_i \cap K_1\right) = 1. \tag{3.18}$$

Usando (3.15), de um modo análogo depreendemos que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+} = 0, \tag{3.19}$$

para todo $q \geq 1$.

Por outro lado, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{q \to +\infty} \chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+}(x) = \chi_{K_i \cap \lim\limits_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+}(x).$$

De facto, se

$$\lim_{q \to +\infty} \chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+}(x) = 0,$$

então existe algum $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+}(x) = 0$, para todo $q \geq q_0$, donde $x \notin K_i \cap \bigcap_{i=1}^{q_0} H_i$, logo $x \notin K_i \cap \lim_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+$ e então $\chi_{K_i \cap \lim_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+}(x) = 0$. Invertendo o raciocínio, se

$$\chi_{K_i \cap \lim_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+}(x) = 0,$$

então $\lim_{q \to +\infty} \chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+}(x) = 0$. Portanto,

$$\lim_{q \to +\infty} \chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+}(x) = 0 \Leftrightarrow \chi_{K_i \cap \lim_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+}(x) = 0,$$

logo

$$\lim_{q \to +\infty} \chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+}(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_{K_i \cap \lim_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+}(x) = 1,$$

donde, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{q \to +\infty} \chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+}(x) = \chi_{K_i \cap \lim_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+}(x).$$

Portanto, pontualmente,

$$\lim_{q \to +\infty} \chi_{K_i \cap H_1^+ \cap \cdots \cap H_q^+} = \chi_{K_i \cap \lim\limits_{q \to +\infty} \bigcap_{i=1}^{q} H_i^+} = \chi_{K_i \cap K_1},$$

e por conseguinte, por (3.19)

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{K_i \cap K_1} = 0. \tag{3.20}$$

Partindo de (3.18) e de (3.20), e usando o mesmo argumento com $K_1 \cap K_2$ em vez de K_1, obtemos

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\mu(K_1 \cap K_2) + \alpha_3 \mu(K_1 \cap K_2 \cap K_3) + \cdots + \alpha_m \mu(K_1 \cap K_2 \cap K_m) = 1$$

e

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\chi_{K_1 \cap K_2} + \alpha_3 \chi_{K_1 \cap K_2 \cap K_3} + \cdots + \alpha_m \chi_{K_1 \cap K_2 \cap K_m} = 0,$$

o que contradiz a minimalidade de m.

Portanto, μ define um funcional no espaço das funções simples em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ e pode-se estender de modo único a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$. □

Dada uma valoração μ em $\mathcal{K}^n$, continuamos a notar por μ a sua extensão a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

Em particular, concluímos que podemos estender a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ os volumes intrínsecos definidos em $\mathcal{K}^n$.

Note-se que a extensão de uma valoração μ a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ não é necessariamente contínua neste seu domínio mais alargado. Por exemplo, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar subconjuntos A e B de $\mathbb{R}^n$ formados por um e dois pontos respectivamente, e tais que $d_H(A, B) < \epsilon$. Como se tem $\mu_0(A) = 1$ e $\mu_0(B) = 2$, concluímos que μ_0 não é contínua em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

Assim, quando dissermos que uma valoração é contínua, queremos simplesmente dizer que a sua restrição a $\mathcal{K}^n \setminus \{\varnothing\}$ é contínua.

Capítulo 4

Valorações no anel convexo

Viramos agora as nossas atenções para o conjunto dos policonvexos ou anel convexo. É este o ambiente natural para estudar os volumes intrínsecos e, mais geralmente, as valorações contínuas e positivamente invariantes por isometrias. É aqui que estudaremos as relações entre estas valorações e os volumes intrínsecos e onde ficará claro que o conjunto dessas valorações constitui (com as operações usuais) um espaço vectorial de dimensão $n+1$ e que $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ constitui uma sua base.

Para tal, teremos de definir a função suporte de um corpo convexo, que nos permitirá trabalhar com funções em vez de trabalhar com os próprios conjuntos, o que se revela ser vantajoso. A partir daqui, demonstraremos uma série de resultados que nos permitirão chegar ao Teorema de Hadwiger. O passo fundamental dessa prova, iniciado na secção 4.3 e concluído na secção 4.4, é a caracterização do volume como a única valoração contínua, simples e invariante em $\mathcal{K}^n$ - Teorema do Volume.

Começamos, no entanto, por uma caracterização mais profunda do volume intrínseco μ_0, que possui propriedades interessantes e que nos permitirá generalizar a qualquer dimensão um resultado devido a Euler, conhecido em dimensão 3.

4.1 Característica de Euler

Entre os volumes intrínsecos definidos em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ há um que é fundamental no estudo dos restantes. Trata-se de μ_0. Já vimos atrás que dado $K \in \mathcal{K}^n$, $\mu_0(K) = 1$. Pelo Teorema da Extensão de Groemer sai imediatamente o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1 *Existe uma única valoração μ definida em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ tal que $\mu(K) = 1$, sempre que $K \in \mathcal{K}^n$.*

Pelo que acabámos de dizer, resulta que a única valoração referida no corolário anterior é o volume intrínseco μ_0.

Definição 4.1.2 O volume intrínseco μ_0 designa-se por *característica de Euler.*

A característica de Euler é uma ferramenta bastante importante, usada em Topologia Algébrica e a definição anterior é uma definição alternativa da característica de Euler, à que é dada nesse ramo da Matemática.

Relembremos que um politopo convexo é, por definição, a envolvente convexa de um número finito de pontos. Resulta que qualquer politopo convexo é fechado.

Usando o corolário 3.1.6, podemos estender a valoração μ_0 à álgebra Booleana relativa gerada por $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$. Continuamos a notar por μ_0 essa extensão. Como o interior relativo de um politopo convexo P é tal que $\text{relint}(P) = P \setminus \text{relfr}(P)$ e como $\text{relfr}(P)$ é a união das faces de P, que são corpos convexos, então $\mu_0(\text{relint}(P))$ está bem definida e o seu valor é dado no seguinte resultado.

Teorema 4.1.3 *Seja P um politopo convexo de dimensão m em $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$\mu_0(\text{relint}(P)) = (-1)^m.$$

Demonstração. Como μ_0 está normalizado independentemente da dimensão do espaço ambiente, vamos calcular $\mu_0(\text{relint}(P))$ no espaço afim m-dimensional contendo P, isto é, em $\text{aff}(P)$ que, por simplicidade, supomos que é $\mathbb{R}^m$.

Assim, neste caso, temos que $\text{relint}(P) = \text{int}(P)$ e $\text{relfr}(P) = \text{fr}(P)$.

A prova deste teorema vai ser feita por indução sobre a dimensão do politopo P.

Se $\dim(P) = 1$, então, como $\text{relint}(P) = P \setminus \text{fr}(P)$, resulta que

$$\mu_0(\text{relint}(P)) = \mu_0(P) - \mu_0(\text{fr}(P)) = 1 - 2 = -1.$$

Suponhamos agora que, se $\dim(P) = m$, então $\mu_0(\text{relint}(P)) = (-1)^m$. Queremos mostrar que, se $\dim(P) = m+1$, então $\mu_0(\text{relint}(P)) = (-1)^{m+1}$. Para isso, necessitamos de um processo para calcular a característica de Euler de conjuntos de dimensão $m+1$,

sabendo o seu valor para conjuntos de dimensão m. Ou seja, precisamos de um processo recursivo para o cálculo de μ_0.

Como já se disse, podemos supor $P \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Seja $\mathcal{S}(\mathcal{K}^m)$ o conjunto das funções $\mathcal{K}^m$-simples. De acordo com os teoremas 3.1.5 e 3.2.1, μ_0 define um funcional linear $\mathcal{L}^m_{\mu_0} : \mathcal{S}(\mathcal{K}^m) \to \mathbb{R}$ tal que, se $K \in \mathcal{K}^m$, então $\mathcal{L}^m_{\mu_0}(\chi_K) = 1$.

Suponhamos que temos definido um tal funcional. Vamos determinar um funcional $\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0} : \mathcal{S}(\mathcal{K}^{m+1}) \to \mathbb{R}$ que defina μ_0 em $\mathbb{R}^{m+1}$.

Seja $f \in \mathcal{S}(\mathcal{K}^{m+1})$. Portanto, f é combinação linear de funções características de corpos convexos $K_1, \ldots, K_p$ de $\mathbb{R}^{m+1}$. Queremos definir a imagem de f por $\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}$.

Indicaremos por $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ os pontos de $\mathbb{R}^{m+1}$. Dado $t \in \mathbb{R}$, seja H_t o hiperplano de $\mathbb{R}^{m+1}$ de equação $x_{m+1} = t$ e consideremos a função

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x,t) \ . \end{aligned}$$

Pela escolha de f, concluímos que a função f_t é uma função $\mathcal{K}^m$-simples em $\mathbb{R}^m$, pois é uma combinação linear de funções características dos conjuntos $p(\mathbb{R}^m, K_i \cap H_t)$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$, onde $p(\mathbb{R}^m, \cdot)$ é a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^{m+1}$ em $\mathbb{R}^m$. Como $K_i \cap H_t$ é compacto e convexo em $\mathbb{R}^{m+1}$, então a sua projecção em $\mathbb{R}^m$ também o é. Logo $f_t \in \mathcal{S}(\mathcal{K}^m)$.

Podemos, então, definir uma função

$$\begin{aligned} g_f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \mathcal{L}^m_{\mu_0}(f_t) \ . \end{aligned}$$

Ora, g_f é combinação linear das funções características das projecções dos compactos convexos $K_1, \ldots, K_p$ no eixo x_{m+1}, projecções essas que são intervalos compactos em x_{m+1}, logo $g_f \in \mathcal{S}(\mathcal{K}^1)$ (identificamos o eixo x_{m+1} com $\mathbb{R}$). Para verificarmos que, de facto, g_f é a tal combinação linear, consideremos o caso em que f é a função característica de um corpo K. Então $(\chi_K)_t$ é a função característica de $p(\mathbb{R}^m, K \cap H_t)$, donde

$$\mathcal{L}^m_{\mu_0}((\chi_K)_t) = \begin{cases} 1 & \text{se } K \cap H_t \neq \varnothing \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} ,$$

ou seja,

$$g_{\chi_K}(t) = \mathcal{L}^m_{\mu_0}((\chi_K)_t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in p(x_{m+1}, K) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Como $p(x_{m+1}, K)$ é um intervalo compacto em x_{m+1}, então g_{χ_K} é a função característica desse intervalo. Agora, no caso em que f é uma combinação linear de funções características de corpos convexos $K_1, \ldots, \mathcal{K}^n_p$ de $\mathbb{R}^{m+1}$, sai pela linearidade das aplicações $f \mapsto f_t \mapsto \mathcal{L}^m_{\mu_0}(f_t)$, que g_f é a dita combinação linear.

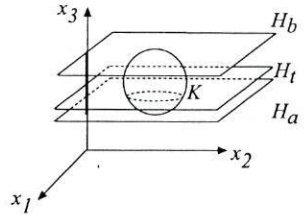


Figura 4.1: Nesta figura, g_f seria a função característica do intervalo $[a, b]$, que é a projecção de K no eixo x_3.

Finalmente, definamos

$$\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}(f) := \mathcal{L}^1_{\mu_0}(g_f).$$

Temos de verificar que $\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}$ é linear. Sejam $h, j \in \mathbb{S}(\mathcal{K}^{m+1})$. Como $\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}(h + j) = \mathcal{L}^1_{\mu_0}(g_{h+j})$, basta mostrar que $g_{h+j} = g_h + g_j$ e como estas duas funções são definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, basta ver que coincidem nas imagens de todos os reais.

Mas,

$$\begin{aligned} g_{h+j}(t) &= \mathcal{L}^m_{\mu_0}((h+j)_t) \\ &= \mathcal{L}^m_{\mu_0}((h)_t + (j)_t) \\ &= \mathcal{L}^m_{\mu_0}((h)_t) + \mathcal{L}^m_{\mu_0}((j)_t) \\ &= g_h(t) + g_j(t) \\ &= (g_h + g_j)(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

É também fácil mostrar que $\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}(\alpha h) = \alpha L^{m+1}_{\mu_0}(h)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall h \in F(k+1)$, logo $\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}$ é linear.

Por outro lado, se $f := \chi_K$, para algum $K \in \mathcal{K}^{m+1}$ então, como já vimos, g_f é a função característica de $p(x_{m+1}, K)$, isto é, de um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, logo $\mathcal{L}^1_{\mu_0}(g_{\chi_K}) = 1$, donde $\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}(\chi_K) = 1$. Portanto, $\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}$ define μ_0.

Suponhamos agora, por indução, que $\mu_0(\text{relint}(Q)) = (-1)^m$ sempre que Q for um politopo de dimensão m. Consideremos a função $\chi_{\text{relint}(P)}$. Então, pela hipótese de indução, $g_{\chi_{\text{relint}(P)}}$ é tal que $g_{\chi_{\text{relint}(P)}}(t) = \mathcal{L}^m_{\mu_0}\left(\left(\chi_{\text{relint}(P)}\right)_t\right) = (-1)^m$ se $t \in p(x_{m+1}, \text{relint}(P))$ e $g_{\chi_{\text{relint}(P)}}(t) = 0$, caso contrário. Mas $p(x_{m+1}, \text{relint}(P))$ é um intervalo aberto I em $\mathbb{R}$, logo $g_{\chi_{\text{relint}(P)}} = (-1)^m \chi_I$.

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{m+1}_{\mu_0}(\chi_{\text{relint}(P)}) &= \mathcal{L}^1_{\mu_0}\left(g_{\chi_{\text{relint}(P)}}\right) \\
&= \mathcal{L}^1_{\mu_0}\left((-1)^m \chi_I\right) \\
&= (-1)^m \mathcal{L}^1_{\mu_0}(\chi_I) \\
&= (-1)^m \mu_0(I) \\
&= (-1)^m(-1) \\
&= (-1)^{m+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu_0(\text{relint}(P)) = (-1)^{m+1}$. □

Por outro lado, como a fronteira de um politopo P é uma união finita de politopos (das faces de P), então $\text{relfr}(P) \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ e, portanto, $\mu_0(\text{relfr}(P))$ está definida e podemos calculá-la.

Teorema 4.1.4 *Se P é um politopo convexo e compacto de dimensão m, então*

$$\mu_0(\text{relfr}(P)) = 1 - (-1)^m.$$

Demonstração. Mais uma vez, usamos a extensão de μ_0 à álgebra Booleana relativa gerada por $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$. Como $\text{relfr}(P) = P \setminus \text{relint}(P)$ então

$$\mu_0(\text{relfr}(P)) = \mu_0(P \setminus \text{relint}(P)) = \mu_0(P) - \mu_0(\text{relint}(P)) = 1 - (-1)^m.$$ □

Podemos agora provar o seguinte teorema, que generaliza o resultado bem conhecido, descoberto por Euler e que diz que em todos os poliedros convexos há uma mesma relação entre o número de faces, f, de arestas, a, e de vértices, v, a saber, $v - a + f = 2$.

Teorema 4.1.5 (Teorema de Euler-Poincaré) *Seja P um politopo de dimensão m. Então, se f_i representa o número de faces de dimensão i de P ($i \in \{0, \ldots, m-1\}$), tem-se que*

$$f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^i f_i + \cdots + (-1)^{m-1} f_{m-1} = 1 - (-1)^m.$$

Demonstração. Já sabemos que a fronteira relativa de P é uma união de politopos, nomeadamente das faces de P. Se tomarmos os interiores relativos das faces de P, então a reunião disjunta de todos esses interiores continua a ser $\mathrm{relfr}(P)$.

Então, com F a percorrer todas as faces de P, temos que

$$\begin{aligned} \mu_0(\mathrm{relfr}(P)) &= \sum_F \mu_0(\mathrm{relint}(F)) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{F:\dim(F)=i} \mu_0(\mathrm{relint}(F)) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f_i. \end{aligned}$$

Como $\mu_0(\mathrm{relfr}(P)) = 1 - (-1)^m$, o teorema está provado. □

O teorema anterior foi o primeiro teorema combinatório acerca de politopos a ser descoberto. Ainda hoje se mantém como um dos resultados mais importantes acerca de politopos e muitas generalizações e modificações suas são conhecidas; ver [G-S] e [Sh].

4.2 Função suporte

Como um corpo convexo é a intersecção dos seus semi-espaços de suporte ([Mc-Sh], pág. 34), tal conjunto pode ser convenientemente descrito especificando a posição dos seus hiperplanos de suporte, através dos seus vectores normais exteriores. Esta descrição é-nos fornecida pela *função suporte* do conjunto em questão.

Vejamos como é construída essa função. Seja K um corpo convexo (não vazio) de $\mathbb{R}^n$ e u um vector não nulo de $\mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, sejam $H_{u,\alpha}$ o hiperplano de $\mathbb{R}^n$ definido do seguinte modo

$$H_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x\rangle = \alpha\}$$

e $H^-_{u,\alpha}$ o respectivo semi-espaço fechado tal que

$$H^-_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x\rangle \leq \alpha\}.$$

À medida que α aumenta, o hiperplano $H_{u,\alpha}$ descreve uma família de hiperplanos paralelos, cada um dos quais com u como vector normal.

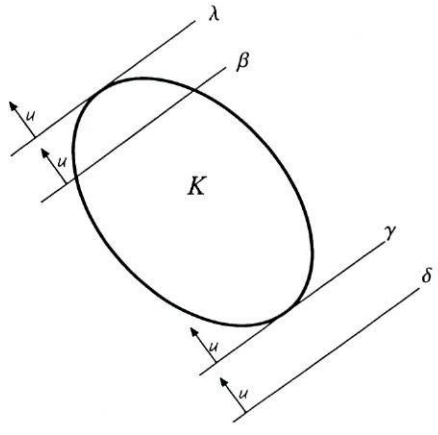


Figura 4.2:

Em geral, existirão dois valores de α para os quais o hiperplano $H_{u,\alpha}$ suporta o corpo K (na figura, são λ e γ). Só um destes valores (λ, na figura) é tal que $K \subset H^-_{u,\alpha}$.

Claramente, $K \subset H^-_{u,\alpha}$ se e só se $\langle u, a\rangle \leq \alpha$, para todo $a \in K$, isto é, se e só se

$$\max\{\langle u, a\rangle : a \in K\} \leq \alpha.$$

Note-se que, como K é compacto e a aplicação $x \mapsto \langle u, x\rangle$, com $x \in K$, é contínua, este máximo é atingido nalgum seu ponto.

Se, por outro lado, se forçar a que o hiperplano $H_{u,\alpha}$ suporte K, então, para algum ponto a_0 de K, $\langle u, a_0\rangle = \alpha$. Portanto, $H_{u,\alpha}$ é um hiperplano de suporte de K (e representamo-lo por $H_{u,\alpha}(K)$) se e só se

$$\alpha = \max\{\langle u, a\rangle : a \in K\}.$$

Definição 4.2.1 A *função suporte* de um corpo convexo K é a função $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $h_K(u) := \max\{\langle u, x\rangle : x \in K\}$.

Note-se que, pelo que vimos atrás, dado $u \in \mathbb{R}^n$, um corpo convexo K fica inteiramente situado no semi-espaço fechado definido pelo hiperplano $H_{u,h_K(u)}(K)$ determinado pela equação $\langle u, x\rangle = h_K(u)$ e tal que $\langle u, y\rangle \leq h_K(u)$, para todo $y \in K$. De facto, pelo que dissemos no início desta secção, K é a intersecção desses semi-espaços fechados. Portanto

$$K = \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n} H^-_{u,h_K(u)}(K).$$

Resulta que um corpo convexo K pode ser expresso como sendo o conjunto de todas as soluções de um sistema de inequações dado pela sua função suporte, isto é,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x\rangle \leq h_K(u),\ \forall u \in \mathbb{R}^n\}.$$

Assim, K fica completamente definido através da sua função suporte, ou seja, existe uma correspondência bijectiva entre dois tipos de conjuntos muito diferentes: conjuntos convexos e compactos de $\mathbb{R}^n$ e certas funções em $\mathbb{R}^n$. Que classe de funções é esta? Isto é, dada uma função em $\mathbb{R}^n$, como sabemos que se trata de uma função suporte de um corpo convexo? Esta é uma questão que, com a ajuda dos resultados provados na secção 1.2.2, será respondida mais adiante. No entanto, ainda necessitamos de mais alguns resultados.

Vejamos, primeiro, um exemplo de uma função suporte de um corpo convexo, neste caso, de um segmento de recta em $\mathbb{R}^n$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, se $[v, -v]$ representar o segmento de extremos v e $-v$, então $h_{[v,-v]}(u) = |\langle u, v\rangle|$, para cada $u \in \mathbb{R}^n$. De facto,

$$\begin{aligned}
h_{[v,-v]}(u) &= \max\{\langle u, y\rangle : y \in [v, -v]\} \\
&= \max\{|u||y|\cos(\angle(u, y)) : y \in [v, -v]\} \\
&= \begin{cases} |v||u|\cos(\angle(u, v)) & \Leftarrow\ \cos(\angle(u, v)) \geq 0 \\ |-v||u|\cos(\angle(u, -v)) & \Leftarrow\ \cos(\angle(u, -v)) > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle u, v\rangle & \Leftarrow\ \langle u, v\rangle \geq 0 \\ \langle u, -v\rangle & \Leftarrow\ \langle u, -v\rangle > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle u, v\rangle & \Leftarrow\ \langle u, v\rangle \geq 0 \\ -\langle u, v\rangle & \Leftarrow\ \langle u, v\rangle < 0 \end{cases} \\
&= |\langle u, v\rangle|.
\end{aligned}$$

Definição 4.2.2 Uma função real, f, definida num convexo (não vazio) X de $\mathbb{R}^n$ diz-se *convexa* se

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y),$$

sempre que $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \geq 0$, com $\alpha + \beta = 1$.

Definição 4.2.3 Seja f uma função real definida num conjunto convexo não vazio X de $\mathbb{R}^n$. O *epigráfico* de f nota-se por $\text{epi}(f)$ e é o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\text{epi}(f) := \{(x_1, \ldots, x_n, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \geq f(x_1, \ldots, x_n), \text{ com } (x_1, \ldots, x_n) \in X\}.$$

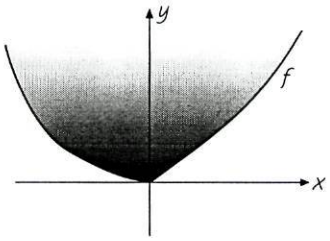


Figura 4.3: Epigráfico em $\mathbb{R}^2$ de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teorema 4.2.4 *Seja f uma função real definida num conjunto convexo não vazio X de $\mathbb{R}^n$. Então f é convexa se e só se o seu epigráfico é um conjunto convexo.*

Demonstração. Para cada $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e cada escalar λ, seja (x, λ) o ponto $(x_1, \ldots, x_n, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Suponhamos que f é convexa. Sejam $(x, \lambda), (y, \gamma) \in \text{epi}(f)$. Então $x, y \in X$ e $\lambda \geq f(x)$ e $\gamma \geq f(y)$. Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$. Da convexidade de f resulta que

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \leq \alpha\lambda + \beta\gamma.$$

Portanto, o ponto

$$\alpha(x, \lambda) + \beta(y, \gamma) = (\alpha x + \beta y, \alpha\lambda + \beta\gamma)$$

pertence a $\text{epi}(f)$, logo este conjunto é convexo.

Reciprocamente, suponhamos que $\text{epi}(f)$ é convexo. Sejam $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \geq 0$, com $\alpha + \beta = 1$. Como $\text{epi}(f)$ é convexo, o ponto

$$\alpha(x, f(x)) + \beta(y, f(y)) = (\alpha x + \beta y, \alpha f(x) + \beta f(y))$$

pertence a epi(f). Resulta que

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y),$$

o que mostra que f é uma função convexa. □

Definição 4.2.5 Um *cone convexo* C é um conjunto convexo não vazio tal que se $x \in C$, então $\lambda x \in C$, para todo $\lambda \geq 0$.

Teorema 4.2.6 *Seja C um cone convexo fechado em $\mathbb{R}^n$. Então cada hiperplano de suporte de C contém a origem de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $H_{u,\alpha}$ um hiperplano de suporte de C. Então, $\langle u, a\rangle \leq \alpha$, para todo $a \in C$ e existe $a_0 \in C$ tal que $\langle u, a_0\rangle = \alpha$. Portanto, $a_0 \in C \cap H_{u,\alpha}$.

Como $a_0 \in C$, então $\lambda a_0 \in C$, para todo $\lambda > 0$. Portanto, para todo $\lambda > 0$, temos que $\langle u, \lambda a_0\rangle \leq \alpha$, donde resulta que $\langle u, a_0\rangle \leq \frac{\alpha}{\lambda}$, ou seja, $\alpha\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \leq 0$. Concluímos, então, que $\alpha = 0$ e que $0_{\mathbb{R}^n} \in H_{u,0}$. □

Definição 4.2.7 Seja C um cone convexo. Uma função $f : C \to \mathbb{R}$ diz-se *positivamente homogénea de grau k* se

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x), \text{ para todos } \lambda \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

e f diz-se *subaditiva* se

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Uma função positivamente homogénea de grau 1 e subaditiva designa-se por *sublinear.*

É claro que uma função sublinear é convexa.

Passamos, agora, ao resultado mais importante desta secção.

Teorema 4.2.8 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função sublinear, então existe um único corpo convexo K tal que f é a sua função suporte.*

Demonstração. A unicidade já ficou clara com a construção das funções suporte. Passemos então à prova da existência. Como f é sublinear é convexa e como toda a função convexa é contínua no interior do seu domínio ([Sc], pág. 23), então f é contínua.

Consideremos então o seguinte conjunto

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle \leq f(v), \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Então K é a intersecção de semi-espaços fechados, um por cada normal v. Logo, K é convexo e fechado. Além do mais, K é limitado (logo compacto) pois, se $x \in K \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, tem-se que $|x| = \left\langle x, \frac{x}{|x|}\right\rangle \leq f\left(\frac{x}{|x|}\right)$ e, portanto, se $M := \max\{f(x) : x \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ (M existe porque f é contínua e $\mathbb{S}^{n-1}$ compacto), então K está contido em $B(0_{\mathbb{R}^n}, M)$.

Se $K \neq \varnothing$, então é óbvio que $h_K(u) \leq f(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$. Vamos, então, mostrar que $K \neq \varnothing$ e que $h_K(u) \geq f(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Já vimos que f é contínua e como também é sublinear, resulta que o seu epigráfico é um cone convexo em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Seja $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, qualquer. Como $(u, f(u)) \in \mathrm{fr}(\mathrm{epi}(f))$, então o teorema 1.2.9 garante a existência de um hiperplano de suporte, $H_{(y,\eta),\alpha}$ (com $y \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in \mathbb{R}$) a $\mathrm{epi}(f)$ no ponto $(u, f(u))$ e tal que

$$\mathrm{epi}(f) \subset H^-_{(y,\eta),\alpha} := \{(v, \nu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \langle (y, \eta), (v, \nu)\rangle \leq \alpha\}.$$

Pelo teorema 4.2.6, sabemos que $\alpha = 0$.

Vejamos que, de facto, temos $\eta < 0$. Seja $(u, \gamma) \in \mathrm{epi}(f) \setminus \mathrm{gr}(f)$, isto é, $\gamma > f(u)$. Então, $(u, \gamma) \in H^-_{(y,\eta),0}$. Mas, por outro lado, temos que $(u, f(u)) \in H_{(y,\eta),0}$, isto é, $\langle (u, f(u)), (y, \eta)\rangle = 0$, ou seja $\langle u, y\rangle + f(u)\eta = 0$. Ora, se $\eta > 0$, então como $\gamma > f(u)$, teríamos que $\langle u, y\rangle + \gamma\eta > 0$, ou seja, $\langle (u, \gamma), (y, \eta)\rangle > 0$, o que é uma contradição com o facto de que $(u, \gamma) \in H^-_{(y,\eta),0}$. Portanto, $\eta \leq 0$. Por outro lado, se $\eta = 0$, então $H_{(y,0),0}$ é um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal a $\mathbb{R}^n$ e que passa pela origem. Como o domínio de f é $\mathbb{R}^n$, então não pode ser hiperplano de suporte de $\mathrm{epi}(f)$. Portanto, $\eta < 0$.

Então, como $H^-_{(y,\eta),0} = H^-_{-\frac{1}{\eta}(y,\eta),0}$, pois $-\frac{1}{\eta} > 0$, podemos supor que $\eta = -1$. Assim,

$$\mathrm{epi}(f) \subset H^-_{(y,-1),0} = \{(v, \nu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \langle (y, -1), (v, \nu)\rangle \leq 0\},$$

logo $\langle y, v\rangle \leq f(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado, como $(u, f(u)) \in H_{(y,-1),0}$, temos que $\langle y, u\rangle = f(u)$. Isto mostra que $y \in K$, logo $K \neq \varnothing$ e $h_K(u) \geq f(u)$. □

4.3 Valorações simples nos policonvexos

Consideremos a soma $K + L$ de dois corpos convexos K e L, normalmente designada por *soma de Minkowski.*

Como, para cada $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\max\{\langle x+y, u\rangle : x \in K, y \in L\} = \max\{\langle x, u\rangle : x \in K\} + \max\{\langle y, u\rangle : y \in L\},$$

resulta que

$$h_{K+L} = h_K + h_L. \tag{4.1}$$

O próximo resultado mostra que a convergência de corpos convexos pode ser estudada usando a noção de função suporte. O uso da função suporte nestes casos traz claras vantagens, pois, normalmente, é mais fácil trabalhar com a convergência uniforme de sucessões de funções do que com os conjuntos propriamente ditos.

Proposição 4.3.1 *Dados, $K, L \in \mathcal{K}^n$, tem-se que*

$$d_H(K, L) = \sup_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_K(u) - h_L(u)|. \tag{4.2}$$

Demonstração. Seja $\alpha \geq 0$ qualquer. Se $d_H(K, L) \leq \alpha$, então, $K \subseteq L + \alpha B_n$, donde, para $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, $h_K(u) \leq h_{L+\alpha B_n}(u) = h_L(u) + \alpha$. Alternando os papéis de K e L, concluímos que $|h_K(u) - h_L(u)| \leq \alpha$, donde $\sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} |h_K(u) - h_L(u)| \leq \alpha$. Portanto, concluímos que $d_H(K, L) \geq \sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} |h_K(u) - h_L(u)|$.

Fazendo o raciocínio inverso, mostramos que $d_H(K, L) \leq \sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} |h_K(u) - h_L(u)|$, e o resultado sai. □

Assim, quando usamos a função suporte para estudar a convergência de sucessões em $\mathcal{K}^n$, restringimos essa função à esfera unitária para que a relação (4.2) seja válida.

Reciprocamente, podemos estender uma função definida em $\mathbb{S}^{n-1}$ de modo a que a extensão seja função suporte em $\mathcal{K}^n$. Uma função $h : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ é função suporte de um corpo convexo se e só se a sua extensão radial $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{h}(\alpha u) := \alpha h(u)$, para todos $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\alpha \geq 0$, for sublinear.

Definição 4.3.2 Um *zonotopo* é uma soma de Minkowski finita de segmentos de recta. Um *zonóide* é um corpo convexo que é o limite, para a distância de Hausdorff, de uma sucessão de zonotopos.

Definição 4.3.3 Dado $K \in \mathcal{K}^n$, seja $-K := \{x : -x \in K\}$ a reflexão de K pela origem. Se $K = -K$, dizemos que K é *centrado* ou *simétrico pela origem.* Um conjunto K diz-se *simétrico* se algum seu translatado é centrado. Representamos por $\mathcal{K}_c^n$ o conjunto de todos os corpos convexos em $\mathbb{R}^n$ que são centrados.

Note-se que qualquer zonotopo é um corpo convexo simétrico, de centro no ponto definido pelo vector que é soma dos vectores dos pontos médios dos segmentos que geram o zonotopo.

Observe-se também que a função suporte de um corpo convexo é par se e só se esse corpo for centrado.

Proposição 4.3.4 *Seja $K \in \mathcal{K}_c^n$ e suponha-se que a função suporte h_K é C^∞. Então, existem zonóides, Y_1 e Y_2, tais que $K + Y_2 = Y_1$.*

Demonstração. A *Transformação Cosseno*, $\mathcal{C}$, é a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : C^\infty(\mathbb{S}^{n-1}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{S}^{n-1}) \\ g \quad &\longmapsto \quad \mathcal{C}(g) : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad u \quad \longmapsto \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, g(v) d\sigma_{n-1}(v) \end{aligned}$$

A transformação $\mathcal{C}$ é um operador linear e bijectivo no espaço das funções pares e C^∞ em $\mathbb{S}^{n-1}$. Para o desenvolvimento desta questão, consultar o Apêndice A.

Como a função $h_K : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ é C^∞ e par (pois K é centrado), existe uma função $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, par e C^∞ tal que $k_K = \mathcal{C}(g)$, ou seja

$$h_K(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, g(v) d\sigma_{n-1}(v).$$

Sejam g^+ e g^- as funções reais definidas em $\mathbb{S}^{n-1}$ por

$$g^+(v) := \max\{g(v), 0\}$$

e

$$g^-(v) := \max\{-g(v), 0\}.$$

Tem-se que $g = g^+ - g^-$ e

$$h_K(u) + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, g^-(v) d\sigma_{n-1}(v) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, g^+(v) d\sigma_{n-1}(v). \tag{4.3}$$

Como as extensões radiais das funções $h_{Y_1} := \mathcal{C}(g^+)$ e $h_{Y_2} := \mathcal{C}(g^-)$ são sublineares e pares, então, pelo teorema 4.2.8 e pelo que se disse a seguir à proposição 4.3.1, elas são funções suporte de alguns corpos convexos centrados Y_1 e Y_2, respectivamente. Assim, pelo mesmo teorema e por (4.1), a equação (4.3) é equivalente a ter $K + Y_2 = Y_1$.

Além disso, é possível aproximar os integrais em (4.3) por combinações lineares finitas de funções suporte de segmentos de recta (ou seja, de funções suporte de zonotopos), donde Y_1 e Y_2 são zonóides. De facto, dado $\epsilon > 0$, vamos mostrar a existência de $a_i \geq 0$ e $v_i \in \mathbb{S}^{n-1}$ $(i = 1, \ldots, k)$ tais que

$$\left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g^+(v) |\langle u, v\rangle| d\sigma_{n-1}(v) - \sum_{i=1}^{k} a_i |\langle u, v_i\rangle| \right| < \epsilon, \text{ para todo } u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Como g^+ é contínua e está definida num compacto, então é uniformemente contínua, ou seja,

$$\exists \delta > 0 \, \forall v, v' \in \mathbb{S}^{n-1} : |v - v'| < \delta \Rightarrow |g^+(v) - g^+(v')| < \frac{\epsilon}{2\sigma_{n-1}}, \tag{4.4}$$

onde, como já dissemos, σ_{n-1} representa a área de superfície de $\mathbb{S}^{n-1}$. Então,

$$\begin{aligned}
&\left| g^+(v)|\langle u, v\rangle| - g^+(v')|\langle u, v'\rangle| \right| \\
&\leq \left| g^+(v)|\langle u, v\rangle| - g^+(v')|\langle u, v\rangle| \right| + \left| g^+(v')|\langle u, v\rangle| - g^+(v')|\langle u, v'\rangle| \right| \\
&= \left| g^+(v) - g^+(v') \right| |\langle u, v\rangle| + g^+(v') \left| |\langle u, v\rangle| - |\langle u, v'\rangle| \right| \\
&\leq \left| g^+(v) - g^+(v') \right| |\langle u, v\rangle| + g^+(v')|v - v'| \\
&\leq \left| g^+(v) - g^+(v') \right| + g^+(v')|v - v'| \\
&< \frac{\epsilon}{\sigma_{n-1}},
\end{aligned}$$

onde esta última desigualdade resulta do facto de se considerar δ tal que (4.4) se verifique e tal que $\delta < \frac{\epsilon}{2\sigma_{n-1} M}$, onde $M := \max\{g^+(v) : v \in \mathbb{S}^{n-1}\}$. Assim, ambas as parcelas da penúltima linha ficam menores que $\frac{\epsilon}{2\sigma_{n-1}}$ e a desigualdade sai daí.

Consideremos agora uma partição, $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ de $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que o diâmetro de cada Ω_i é menor que δ. Seja $v_i \in \Omega_i$ e consideremos a seguinte soma

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} g^+(v_i) |\langle u, v_i\rangle| d\sigma_{n-1}(v),$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{k} g^+(v_i)\sigma_{n-1}(\Omega_i)|\langle u, v_i\rangle|.$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g^+(v)|\langle u, v\rangle| d\sigma_{n-1}(v) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} g^+(v)|\langle u, v\rangle| d\sigma_{n-1}(v).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} g^+(v)|\langle u, v\rangle| d\sigma_{n-1}(v) - \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} g^+(v_i)|\langle u, v_i\rangle| d\sigma_{n-1}(v)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{k} \left(\int_{\Omega_i} g^+(v)|\langle u, v\rangle| d\sigma_{n-1}(v) - \int_{\Omega_i} g^+(v_i)|\langle u, v_i\rangle| d\sigma_{n-1}(v)\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left|\int_{\Omega_i} \left(g^+(v)|\langle u, v\rangle| - g^+(v_i)|\langle u, v_i\rangle|\right) d\sigma_{n-1}(v)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{\Omega_i} \left|g^+(v)|\langle u, v\rangle| - g^+(v_i)|\langle u, v_i\rangle|\right| d\sigma_{n-1}(v)\right) \\
&< \sum_{i=1}^{k} \left(\int_{\Omega_i} \frac{\epsilon}{\sigma_{n-1}} d\sigma_{n-1}(v)\right) \\
&= \frac{\epsilon}{\sigma_{n-1}} \sum_{i=1}^{k} \sigma_{n-1}(\Omega_i) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g^+(v)|\langle u, v\rangle| d\sigma_{n-1}(v) - \sum_{i=1}^{k} g^+(v_i)\sigma_{n-1}(\Omega_i)|\langle u, v_i\rangle|\right| < \epsilon$$

e podemos assim aproximar uniformemente em $\mathbb{S}^{n-1}$ o integral por uma função suporte de um zonotopo.

O mesmo se aplica ao integral

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, g^-(v) d\sigma_{n-1}(v).$$

Concluímos, finalmente, que Y_1 e Y_2 são zonóides. □

Seja $SO(n)$ o grupo especial ortogonal, isto é, o grupo de todas as isometrias lineares, em $\mathbb{R}^n$, de determinante positivo. Seja $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e denotemos por $SO(n, \mathcal{B})$ o conjunto de todos os elementos de $SO(n)$ que fixam, pelo menos, $n-2$ elementos de $\mathcal{B}$.

Proposição 4.3.5 *Seja $\phi \in SO(n)$. Existe uma colecção finita $\phi_1, \ldots, \phi_m$ de isometrias em $SO(n, \mathcal{B})$ tal que $\phi = \phi_1 \cdots \phi_m$.*

Demonstração. A proposição é claramente válida em $\mathbb{R}^2$, porque $SO(2, \mathcal{B}) = SO(2)$.

Suponhamos que $n \geq 3$ e que a proposição se verifica para a dimensão $n-1$. Seja $\phi \in SO(n) \setminus SO(n, \mathcal{B})$. Seja $v := \phi(e_n)$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $v \neq \pm e_n$. Seja $v' := \frac{p(\mathbb{R}^{n-1}, v)}{|p(\mathbb{R}^{n-1}, v)|}$, onde $p(\mathbb{R}^{n-1}, \cdot)$ é a projecção (ortogonal) de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n-1} = G\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, isto é, v' é a projecção ortogonal, normalizada, de v no espaço gerado por $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Existe $\psi \in SO(n)$ tal que $\psi(e_n) = e_n$ e $\psi(v') = e_{n-1}$. Como $v \in G\{v', e_n\}$, resulta que $\psi(v) \in G\{e_{n-1}, e_n\}$.

Seja ζ a isometria linear de determinante positivo que fixa $e_1, \ldots, e_{n-2}$ e tal que $\zeta(\psi(v)) = e_n$. Então, $\zeta \in SO(n, \mathcal{B})$ e $\zeta(\psi(\phi(e_n))) = \zeta(\psi(v)) = e_n$. Seja $\eta := \zeta\psi\phi$.

Como ψ e η fixam e_n, resulta da hipótese de indução em $SO(n-1)$ que existem $\psi_1, \ldots, \psi_i, \eta_1, \ldots, \eta_j \in SO(n, \mathcal{B})$ tais que $\psi = \psi_1 \cdots \psi_i$ e $\eta = \eta_1 \cdots \eta_j$. Portanto,

$$\phi = \psi^{-1}\zeta^{-1}\eta = \psi_i^{-1} \cdots \psi_1^{-1}\zeta^{-1}\eta_1 \cdots \eta_j. \qquad \square$$

Lema 4.3.6 *Qualquer politopo convexo em $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso como uma união finita de simplexos $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$, tal que $\dim(\Delta_i \cap \Delta_j) < n$, para todos $i \neq j$.*

Demonstração. Provemos este lema por indução sobre a dimensão. Consideremos o caso em que $n = 2$ e seja P um politopo convexo em $\mathbb{R}^2$. Se $\text{relint}(P) = \varnothing$, então P é um segmento de recta que é um simplexo de dimensão 1. Suponhamos, então, que $\text{relint}(P) \neq \varnothing$ e seja $x \in \text{relint}(P)$. Sejam $x_1, \ldots, x_k$ os vértices de P, ordenados de tal forma que os vértices x_i e x_{i+1} são os vértices de uma mesma faceta. Consideremos $\Delta_{i,i+1} := \text{conv}\{x, x_i, x_{i+1}\}$, com $i \in \{1, \ldots, k\}$ e identificando x_{k+1} com x_1. O facto de que

$\Delta_{i,i+1} \subset P$ está assegurado pela convexidade de P e como x, x_i e x_{i+1} são independentes afins em $\mathbb{R}^2$ (pois $x \in \text{relint}(P)$), então $\Delta_{i,i+1}$ é um simplexo. Por outro lado,

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_{i,i+1}.$$

De facto, a inclusão

$$P \supseteq \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_{i,i+1}$$

é óbvia. Relativamente à inclusão recíproca, dado $y \in P$, consideramos a semi-recta $ty + (1-t)x$, com $t \in \mathbb{R}_0^+$. Então existe algum $t_0 \geq 1$ tal que essa semi-recta intersecta uma faceta de P de vértices x_i e x_{i+1} num ponto y_0. Ou seja, $y_0 = t_0 y + (1-t_0)x$ e $y_0 = ax_i + bx_{i+1}$, com $0 \leq a, b \leq 1$ e $a + b = 1$, donde resulta que

$$y = \frac{a}{t_0}x_i + \frac{b}{t_0}x_{i+1} + \frac{t_0 - 1}{t_0}x$$

e $0 \leq \frac{a}{t_0}, \frac{b}{t_0}, \frac{t_0-1}{t_0} \leq 1$ e $\frac{a}{t_0} + \frac{b}{t_0} + \frac{t_0-1}{t_0} = 1$. Portanto, $y \in \Delta_{i,i+1}$ e então

$$P \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_{i,i+1}.$$

É óbvio que, se $i \neq j$, a dimensão de $\Delta_{i,i+1} \cap \Delta_{j,j+1}$ ou é zero (se $i+1 \neq j$ e $j+1 \neq i$) ou é um (se $i+1 = j$ ou $j+1 = i$).

Suponhamos, agora, que o lema é válido para dimensão $n-1$, com $n \geq 3$. Queremos provar que também o é para dimensão n.

Consideremos, portanto, um politopo P em $\mathbb{R}^n$ tal que $\text{relint}(P) \neq \varnothing$. Por hipótese, podemos supor que cada uma das facetas de P está expressa como uma união finita de simplexos, nas condições pretendidas. Então, basta considerar um ponto $x \in \text{relint}(P)$ e unir, por um hiperplano, esse ponto x a cada um dos vértices dos simplexos definidos nas facetas de P. Então, para cada um dos simplexos (de dimensão $n-1$) definidos nas facetas de P, obtemos um novo simplexo de dimensão n, pois obtemos um conjunto que é a envolvente convexa de $n+1$ pontos independentes afins em $\mathbb{R}^n$. Como os simplexos formados em cada faceta de P se intersectam, no máximo, num subespaço afim de dimensão $n-2$, resulta, da maneira como foram construídos os simplexos em P, que se intersectam, no máximo, num subespaço de dimensão $n-1$.

Falta ver que a união desses simplexos, $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, é o politopo P.

Se $u \in \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$, então $u \in \Delta_{i_0}$, para algum $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, isto é, u pertence à envolvente convexa dos vértices da base de Δ_{i_0} (que está contida numa faceta de P) e de x (pertencente ao interior relativo de P). Portanto, ou u pertence a essa faceta ou está no interior relativo de P, donde $u \in P$. Reciprocamente, se $u \in P$, então considerando o ponto de intersecção da semi-recta unindo x a u com uma faceta de P, concluímos através de um raciocínio análogo ao feito para o caso $n = 2$ que u pertence a um dos simplexos Δ_i. □

Notamos por $[0,1]^n$ o produto cartesiano (com n factores) do intervalo fechado $[0,1]$. Portanto, $[0,1]^n$ denota o *cubo unitário* em $\mathbb{R}^n$.

O próximo resultado é o passo fundamental na prova do teorema de Hadwiger que apresentamos (e que é devida a Daniel A. Klain).

Teorema 4.3.7 *Seja μ uma valoração em $\mathcal{K}^n$ contínua, invariante por translações e simples. Se $\mu([0,1]^n) = 0$ e $\mu(K) = \mu(-K)$, para todo $K \in \mathcal{K}^n$, então $\mu(K) = 0$, para todo $K \in \mathcal{K}^n$.*

Demonstração. Consideremos o caso em que $n = 1$. Em $\mathbb{R}$, os conjuntos compactos e convexos são os intervalos fechados. Assim, como

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{k} \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right],$$

então

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \mu\left(\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right), \ \forall k \in \mathbb{N},$$

pois $\mu([0,1]) = 0$ e μ é simples. Por outro lado, μ é invariante por translações, logo $k\left(\mu\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]\right)\right) = 0$, isto é

$$\mu\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]\right) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como qualquer intervalo fechado de comprimento racional, $\frac{p}{q}$, pode ser escrito como uma união (com p termos) de intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{q}$, onde cada termo dessa união intersecta outro, no máximo, num ponto, concluímos, usando as condições que μ verifica, que $\mu([a,b]) = 0$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $b - a \in \mathbb{Q}^+$. Da continuidade de μ concluímos que μ toma o valor 0 em todos os intervalos fechados e o teorema é válido quando $n = 1$.

Para $n > 1$, suponhamos que o teorema se verifica para valorações definidas em $\mathcal{K}^{n-1}$.

Como μ é invariante por translações e simples, então de $\mu([0,1]^n) = 0$ resulta que $\mu\left([0,\frac{1}{k}]^n\right) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $\mu([0,1]^n) = \sum_{i=1}^{k^n} \mu\left([0,\frac{1}{k}]^n\right) = k^n \mu\left([0,\frac{1}{k}]^n\right)$. Portanto, usando um argumento análogo ao caso $n = 1$, sai que $\mu(C) = 0$, para todo o rectângulo C com lados de comprimento racional. A continuidade de μ implica que $\mu(C) = 0$, para todo o rectângulo C.

Seja, agora, D um paralelotopo com os lados paralelos a um outro sistema de eixos ortogonal. Se $n = 2$, então D pode ser decomposto num número finito de "peças", translações das quais podem ser "coladas" para formar um rectângulo C com os lados

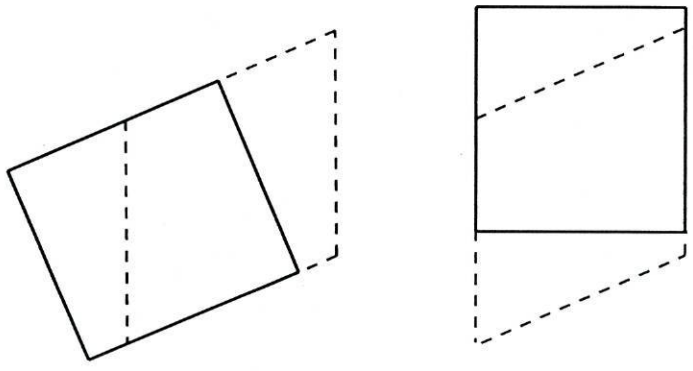


Figura 4.4: Re-orientação de um rectângulo usando "cortes", translações e "colagens".

paralelos aos eixos originais. Como μ é simples e invariante por translações, resulta que $\mu(D) = \mu(C) = 0$. Se $n > 2$, então para cada isometria directa $\zeta \in SO(n, \mathcal{B})$, um paralelotopo com os lados paralelos aos eixos da base $\zeta(\mathcal{B})$ pode ser "cortado", translatado e "colado" num paralelotopo com os lados paralelos aos eixos de $\mathcal{B}$, usando precisamente as operações seguidas no caso $n = 2$. Este procedimento resulta porque ζ fixa, pelo menos, $n - 2$ eixos coordenados do sistema ortogonal original e, portanto, no máximo 2 eixos de $\zeta(\mathcal{B})$ é que são operados, logo, basta operar segundo as direcções do paralelotopo que não são paralelas aos eixos de $\mathcal{B}$. Como estes são no máximo dois, podemo-nos restringir ao subespaço gerado pelos elementos de $\zeta(\mathcal{B})$ que não ficam fixos. Este subespaço é isomorfo a $\mathbb{R}^2$, logo podemos efectuar as mesmas operações efectuadas para o caso $n = 2$. Mais geralmente, se $\psi \in SO(n)$, a proposição 4.3.5 garante a existência de um número finito de elementos de $SO(n, \mathcal{B})$ tais que ψ é a composição dessas isometrias. Portanto, um paralelotopo com os lados paralelos aos eixos associados à base $\psi(\mathcal{B})$ pode ser "cortado",

translatado e "colado" num paralelotopo com os lados paralelos aos eixos de $\mathcal{B}$ usando um número finito de operações do tipo usado quando $n = 2$. Resulta, então, que se D é um paralelotopo com os lados paralelos a um qualquer sistema ortogonal de eixos de $\mathbb{R}^n$, então $\mu(D) = 0$, pelas condições a que μ verifica e porque D pode ser obtido de um paralelotopo C (com os lados paralelos ao sistema de eixos original) através de um processo constituído por decomposições, translações e "colagens".

Definamos, agora, uma valoração τ em $\mathcal{K}^{n-1}$ da seguinte forma. Dado $K \in \mathcal{K}^{n-1}$, seja

$$\tau(K) := \mu(K \times [0,1]).$$

Note-se que $\tau([0,1]^{n-1}) = \mu([0,1]^n) = 0$. Por outro lado, é óbvio que, sendo μ contínua, simples e invariante por translações, o mesmo acontece com τ. Também, temos que $-(K \times [0,1]) = -K \times [0,1] + v$, onde $v := (0,\ldots,0,-1)$, donde podemos concluir que $\mu(-(K \times [0,1])) = \mu(-K \times [0,1])$, pela invariância de μ por translações. Resulta que $\tau(-K) = \tau(K)$, para todo $K \in \mathcal{K}^{n-1}$. Então, τ satisfaz as condições do teorema, logo, por hipótese de indução, $\tau = 0$, ou seja, μ vale zero em todo o cilindro recto de base convexa e altura 1. Como μ é simples, sai que $\mu(K \times [a,b]) = 0$, para todo $K \in \mathcal{K}^{n-1}$ e todos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $b - a \in \mathbb{Q}^+$. A continuidade de μ implica que $\mu(K \times [a,b]) = 0$, para todo $K \in \mathcal{K}^{n-1}$ e todos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $b \geq a$. Ou seja, μ vale 0 em todo o cilindro recto de $\mathbb{R}^n$ de base convexa.

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ os eixos coordenados de $\mathbb{R}^n$. Identifiquemos $\mathbb{R}^{n-1}$ com o hiperplano $x_n = 0$. Os cilindros que acabámos de considerar têm a base e o topo congruentes e inseridos em hiperplanos paralelos ao hiperplano $x_n = 0$ (respectivamente de equações $x_n = a$ e $x_n = b$), ou seja, as arestas unindo a base e o topo são ortogonais a esse hiperplano. O mesmo processo pode ser aplicado a qualquer cilindro recto com base num qualquer hiperplano de $\mathbb{R}^n$. Como $\mu = 0$ em paralelotopos segundo qualquer orientação, concluímos, como em cima, que $\mu = 0$ em cilindros rectos segundo qualquer orientação.

Seja M um prisma tal que a sua base e o topo são congruentes e paralelos ao hiperplano $x_n = 0$, mas a sua fronteira não é ortogonal a esse hiperplano, isto é, um "cilindro inclinado". Decompomos M em duas peças, M_1 e M_2, separadas por um hiperplano que é ortogonal aos hiperplanos das "paredes" do prisma. Através de uma translação podemos "colar" as peças M_i de novo, agora segundo a base e o topo originais (que são

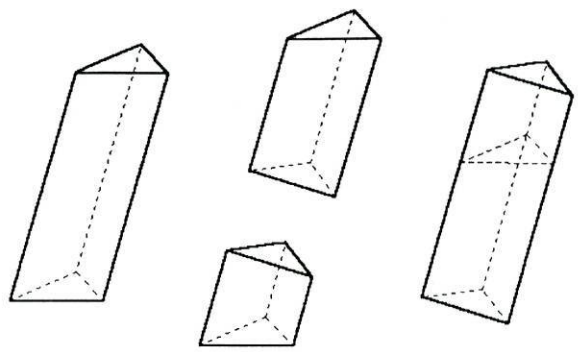


Figura 4.5: Transformação de um prisma num cilindro usando "cortes", translações e "colagens".

congruentes). Ficamos, então, com um cilindro recto C cujos hiperplanos das "paredes" são ortogonais à nova base e topo.

Como μ se mantém constante nesta operação, sai que

$$\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2) = \mu(C) = 0.$$

Na verdade, o procedimento acabado de descrever só é possível se o diâmetro da base/topo de M é suficientemente pequeno comparado com a altura de M e com o ângulo que os hiperplanos das "paredes" de M fazem com a base. Portanto, M não pode ser muito "gordo". No entanto, se a base de M for muito grande, podemos subdividir M em pequenos prismas, subdividindo a base e o topo de M em corpos convexos de diâmetro suficientemente pequeno e considerando, depois, cada prisma como a envolvente convexa da união de uma peça do topo de M com a peça correspondente da sua base.

Seja agora P um politopo convexo com facetas $P_1, \ldots, P_m$ e correspondentes vectores unitários normais exteriores $u_1, \ldots, u_m$. Sejam $v \in \mathbb{R}^n$ e $\overline{v}$ o segmento de recta que une v à origem. Sem perda de generalidade suponhamos que $P_1, \ldots, P_j$ são as facetas de P tais que $\langle u_i, v\rangle > 0$, para cada $1 \leq i \leq j$. Neste caso, a soma de Minkowski $P + \overline{v}$ pode ser expressa da seguinte forma

$$P + \overline{v} = P \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j} (P_i + \overline{v}) \right).$$

De facto, é fácil ver que $P+\overline{v} = P \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} (P_i + \overline{v})\right)$, logo $P+\overline{v} \supset P \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j} (P_i + \overline{v})\right)$.

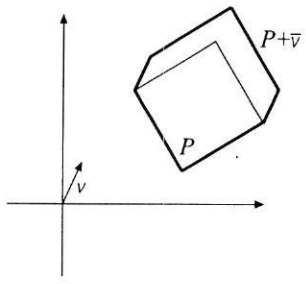


Figura 4.6: Exemplo, em $\mathbb{R}^2$, de um corpo convexo da forma $P + \overline{v}$, representado pela linha mais carregada.

Seja $x \in \left(\bigcup_{i=j+1}^{n} (P_i + \overline{v})\right)$, então $x \in P_{j_0} + \overline{v}$, para algum $j_0 \in \{j+1, \ldots, n\}$, donde $x = p_{j_0} + v'$, com $p_{j_0} \in P_{j_0}$ e $v' \in \overline{v}$. Se $x \in P$, então $x \in P \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j} (P_i + \overline{v})\right)$. Se $x \notin P$, então como $\langle u_{j_0}, v\rangle < 0$ e P é convexo, existe $p' \in p_{j_0} + \overline{v}$ tal que $p' \in P_{j_1}$, com $j_1 \in \{1, \ldots, j\}$ e, portanto, $x = p' + (v' - (p' - p_{j_0}))$, onde estamos a identificar $v' - (p' - p_{j_0})$ com o vector de $\overline{v}$ com o mesmo comprimento (note-se que $v' - (p' - p_{j_0})$ tem a mesma direcção de v e $|v' - (p' - p_{j_0})| < |v'| \leq |v|$). Portanto, $x \in P \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j} (P_i + \overline{v})\right)$.

Cada termo da união acima ou é disjunto dos outros ou intersecta outro num corpo convexo de dimensão menor ou igual a $n-1$. Portanto,

$$\mu(P + \overline{v}) = \mu(P) + \sum_{i=1}^{j} \mu(P_i + \overline{v}).$$

Notemos que cada $P_i + \overline{v}$ é um prisma, logo $\mu(P_i + \overline{v}) = 0$ e $\mu(P + \overline{v}) = \mu(P)$.

Por indução sobre a soma finita de segmentos, resulta que se Z é um zonotopo, então $\mu(P + Z) = \mu(P)$. Por outro lado, $Z = \sum_{i=1}^{l} v_i$, onde cada v_i é um segmento em $\mathbb{R}^n$, então $\mu(Z) = \mu(v_1) = 0$, por indução sobre a soma finita de segmentos e porque v_1 é um politopo convexo de dimensão 1 em $\mathbb{R}^n$. A continuidade de μ implica, então, que $\mu(K + Y) = \mu(K)$ e $\mu(Y) = 0$, para todo $K \in \mathcal{K}^n$ e todo o zonóide Y.

Continuando, consideremos o caso em que $K \in \mathcal{K}_c^n$ tal que h_K é C^∞. Pela proposição 4.3.4, existem zonóides Y_1 e Y_2 tais que $K + Y_2 = Y_1$. Então, neste caso, pelo que vimos no parágrafo anterior, $\mu(K) = \mu(K + Y_2) = \mu(Y_1) = 0$. Vejamos agora que qualquer corpo centrado pode ser aproximado por uma sucessão de corpos convexos centrados e C^∞ (no sentido de as respectivas funções suporte serem C^∞). De facto, qualquer corpo pode ser aproximado por uma sucessão de corpos C^∞ ([Sc], pág. 158). Então, seja K um corpo

centrado e, dado $\epsilon > 0$, seja L um corpo C^∞ tal que

$$\sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} |h_K(u) - h_L(u)| < \epsilon.$$

Consideremos um corpo F tal que

$$h_F(u) := \frac{h_L(u) + h_L(-u)}{2}.$$

F é C^∞ e centrado, uma vez que h_F é par e

$$\sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} |h_K(u) - h_F(u)| = \sup_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} \left|\frac{h_K(u) + h_K(-u) - h_L(u) - h_L(-u)}{2}\right| < \epsilon,$$

logo K pode ser aproximado por um corpo convexo centrado e C^∞. Assim, sai da continuidade de μ que $\mu(K) = 0$, para todo $K \in \mathcal{K}_c^n$.

Pela invariância de μ, tem-se que $\mu(K) = 0$, se K for simétrico.

A seguir, consideramos um simplexo n-dimensional, Δ, com um vértice na origem. Sejam $u_1, \ldots, u_n$ os outros vértices de Δ e P o paralelotopo gerado pelos vectores $u_1, \ldots, u_n$. Seja $z := u_1 + \cdots + u_n$. Seja ξ_1 o hiperplano que passa pelos pontos $u_1, \ldots, u_n$ e ξ_2 o hiperplano que passa pelos pontos $z - u_1, \ldots, z - u_n$. Finalmente, seja P_* o conjunto de todos os pontos de P que estão entre ξ_1 e ξ_2.

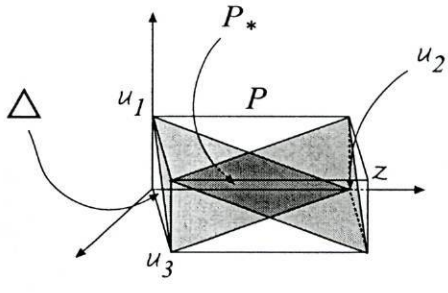


Figura 4.7: Caso em que $n = 3$. A sombreado estão representados os hiperplanos ξ_1 e ξ_2.

Então, temos que

$$P = \Delta \cup P_* \cup (-\Delta + z),$$

onde cada termo desta união intersecta cada um dos outros num subespaço de dimensão, no máximo, $n - 1$. P é simétrico de centro $u := \left(\frac{u_1}{2}, \ldots, \frac{u_n}{2}\right)$ e como, por outro lado, $P_* = P \setminus (\Delta \cup (-\Delta + z))$, então P_* também é simétrico com o mesmo centro de P, pois $P_* + (-u) = -P_* + u$. Verificamos, portanto, que

$$0 = \mu(P) = \mu(\Delta) + \mu(P_*) + \mu(-\Delta + v) = \mu(\Delta) + \mu(-\Delta).$$

Por outras palavras, $\mu(\Delta) = -\mu(-\Delta)$. Por outro lado, por hipótese, $\mu(\Delta) = \mu(-\Delta)$ e, portanto, $\mu(\Delta) = 0$ para todo o simplexo Δ.

Seja P um politopo convexo em $\mathbb{R}^n$. Pelo lema 4.3.6, o politopo P pode ser expresso como uma união finita de simplexos $P = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$, tal que $\dim(\Delta_i \cap \Delta_j) < n$, para todos $i \neq j$. Então,

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\Delta_i) = 0.$$

Como qualquer corpo convexo é o limite (para a distância de Hausdorff) de uma sucessão de politopos convexos, concluímos, finalmente, usando a continuidade de μ, que $\mu(K) = 0$, para todo $K \in \mathcal{K}^n$. □

O teorema que acabámos de provar e o seguinte podem deduzir-se um do outro.

Teorema 4.3.8 *Seja μ uma valoração em $\mathcal{K}^n$ contínua, invariante por translações e simples. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mu(K) + \mu(-K) = c\mu_n(K),$$

para todo $K \in \mathcal{K}^n$.

Seja μ uma valoração nas condições do teorema 4.3.8. Para cada $K \in \mathcal{K}^n$, defina-se

$$\nu(K) := \mu(K) + \mu(-K) - 2\mu([0,1]^n)\mu_n(K).$$

Então ν está nas condições do teorema 4.3.7, logo $\nu(K) = 0$, para todo $K \in \mathcal{K}^n$. Assim, $\mu(K) + \mu(-K) = c\mu_n(K)$, onde $c := 2\mu([0,1]^n)$. Logo o teorema 4.3.8 resulta do teorema 4.3.7.

Quanto à dedução contrária, consideremos uma valoração μ nas condições do teorema 4.3.7 e de modo que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(K) + \mu(-K) = c\mu_n(K)$, para $K \in \mathcal{K}^n$. Em particular, $\mu([0,1]^n) + \mu(-[0,1]^n) = c\mu_n([0,1]^n)$, logo $c = 0$, pois $\mu([0,1]^n) = 0$. Então, como $\mu(K) = \mu(-K)$, para todo o $K \in \mathcal{K}^n$, sai que $\mu(K) = 0$, para todo o corpo convexo K de $\mathbb{R}^n$. Portanto 4.3.7 resulta de 4.3.8.

4.4 Teorema do Volume

Nesta secção demonstramos o teorema que lhe dá o nome e que caracteriza todas as valorações contínuas, simples e positivamente invariantes.

Antes, necessitamos dos seguintes lemas.

Lema 4.4.1 *Todo o simplexo Δ em $\mathbb{R}^n$ possui uma esfera inscrita. Ou seja, existe uma esfera que é tangente a cada uma das facetas de Δ.*

Demonstração. Como Δ é compacto, existe uma esfera S contida em Δ que tem o maior raio de entre todas as esferas contidas em Δ.

Suponhamos que S não é tangente a todas as facetas de Δ. Sejam F uma das facetas em que S não é tangente e H o hiperplano que contém F. Seja v o vértice de Δ que não pertence a F. Efectuemos uma translação de H paralelamente a si mesmo, na direcção de v, até tocar pela primeira vez em S e seja H' o hiperplano assim obtido.

Consideremos agora a homotetia h de centro em v e razão $k \in]0,1[$ tal que $h(H) = H'$. Tem-se que $h(\Delta)$ é um simplexo que ainda contém S. Daqui resulta que $h^{-1}(S)$ é uma

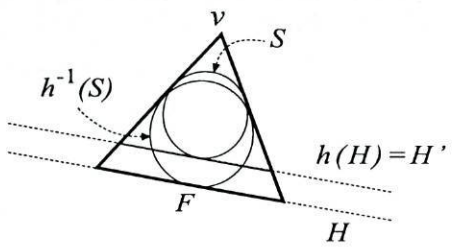


Figura 4.8: Caso em que $n = 2$.

esfera que ainda está contida em Δ e cujo raio excede o de S, pois h^{-1} é uma homotetia de centro v e razão $\frac{1}{k} > 1$.

Chegámos então a uma contradição quanto à escolha de S e, portanto, S é tangente a todas as facetas de Δ. □

Lema 4.4.2 *Seja Δ um simplexo n-dimensional. Existem politopos $P_1, \ldots, P_m$ tais que*

$$\Delta = P_1 \cup \cdots \cup P_m,$$

onde a intersecção dois a dois de termos (diferentes) desta união tem, no máximo, dimensão $n-1$ e onde cada um dos politopos P_i é simétrico em relação a um hiperplano.

Demonstração. Sejam $x_0, \ldots, x_n$ os vértices de Δ e Δ_i a faceta de Δ oposta a x_i, ou seja, $\Delta_i := \text{conv}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$. Pelo lema anterior, existe uma esfera inscrita a Δ. Sejam z o seu centro e z_i a projecção ortogonal de z na faceta Δ_i. Para todos $i < j$, seja

$$A_{i,j} := \text{conv}\{z, z_i, z_j, \Delta_i \cap \Delta_j\}.$$

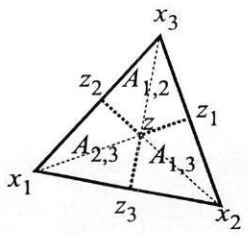


Figura 4.9: Caso em que $n = 2$.

Então, tem-se que os politopos $A_{i,j}$ são tais que

$$\Delta = \bigcup_{0 \leq i < j \leq n} A_{i,j},$$

onde dois termos distintos desta união se intersectam, no máximo, em dimensão $n-1$. Por outro lado, também se tem que cada politopo $A_{i,j}$ é simétrico em relação ao hiperplano definido por z e pela face $\Delta_i \cap \Delta_j$.

Note-se que temos $\binom{n+1}{2}$ politopos $A_{i,j}$ e então se $m := \binom{n+1}{2}$ e fazendo uma renomeação dos politopos referidos, sai que

$$\Delta = P_1 \cup \cdots \cup P_m,$$

onde cada politopo P_k é um dos politopos $A_{i,j}$ e, portanto, satisfaz as condições pretendidas. □

Teorema 4.4.3 (Teorema do Volume) *Seja μ uma valoração contínua, simples e positivamente invariante, definida em $\mathcal{K}^n$ (ou em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$). Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(K) = c\mu_n(K)$, para todo $K \in \mathcal{K}^n$ (ou $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$).*

Demonstração. Recordemos que uma valoração contínua está bem definida em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ se e só se está bem definida no seu conjunto gerador, $\mathcal{K}^n$.

Como μ é positivamente invariante, em particular é invariante por translações. Então, pelo teorema 4.3.8 existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(K) + \mu(-K) = a\mu_n(K)$, para todo $K \in \mathcal{K}^n$.

Em particular, dado um simplexo Δ em $\mathbb{R}^n$, temos que

$$\mu(\Delta) + \mu(-\Delta) = a\mu_n(\Delta). \tag{4.5}$$

Como a simetria de centro na origem, $x \mapsto -x$, é uma isometria positiva se e só se n é par, temos de separar os dois casos: n par e n ímpar.

Se n é par, então, como μ é positivamente invariante, $\mu(\Delta) = \mu(-\Delta)$, donde, por (4.5)

$$\mu(\Delta) = \frac{a}{2}\mu_n(\Delta).$$

Se n é ímpar, pelo lema 4.4.2, existem politopos $P_1, \ldots, P_m$ tais que

$$\Delta = P_1 \cup \cdots \cup P_m,$$

onde a intersecção dois a dois de termos (diferentes) desta união tem, no máximo, dimensão $n-1$ e onde cada um dos politopos P_i é simétrico em relação a um hiperplano. Daqui resulta que $-P_i$ se obtém de P_i através de uma isometria positiva. De facto, usando, se necessário, uma mudança de coordenadas (que fixa a origem), podemos supor que o hiperplano referido tem equação $x_n = \alpha$. Então $P_i = f(P_i)$, onde f é a seguinte isometria

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, 2\alpha - x_n). \end{aligned}$$

Se agora considerarmos a seguinte isometria

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) &\longmapsto (-x_1, \ldots, -x_{n-1}, x_n - 2\alpha), \end{aligned}$$

então $-P_i = g \circ f(P_i) = g(P_i)$. Como n é ímpar, então o determinante da parte linear de g é igual a 1, logo g é uma isometria positiva. Portanto, existe uma isometria positiva que envia P_i em $-P_i$, donde $\mu(-P_i) = \mu(P_i)$. Resulta que

$$\mu(-\Delta) = \sum_{i=1}^{m} \mu(-P_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(P_i) = \mu(\Delta). \tag{4.6}$$

Então, de novo por (4.5) e também por (4.6), concluímos que

$$\mu(\Delta) = \frac{a}{2}\mu_n(\Delta).$$

Seja agora $c := \frac{a}{2}$ e suponhamos que P é um politopo convexo em $\mathbb{R}^n$. O lema 4.3.6 permite-nos concluir que P pode ser escrito como uma união finita de simplexos

$$P = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_k,$$

tal que $\Delta_i \cap \Delta_j$ tem dimensão menor que n, para todo $i \neq j$. Então

$$\begin{aligned} \mu(P) &= \mu(\Delta_1) + \cdots + \mu(\Delta_k) \\ &= c\mu_n(\Delta_1) + \cdots + c\mu_n(\Delta_k) \\ &= c\mu_n(P). \end{aligned}$$

Como qualquer corpo convexo é o limite (para a distância de Hausdorff) de uma sucessão de politopos convexos, concluímos, usando a continuidade de μ, que $\mu(K) = c\mu_n(K)$, para todo $K \in \mathcal{K}^n$. □

4.5 Teorema da caracterização de Hadwiger

Podemos agora demonstrar um dos resultados mais importantes deste trabalho.

Teorema 4.5.1 (Teorema da caracterização de Hadwiger) *Os volumes intrínsecos $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ constituem uma base do espaço vectorial de todas as valorações contínuas e positivamente invariantes, definidas em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre a dimensão. Comecemos, então, pelo caso em que a dimensão é 1. Portanto, estamos a trabalhar em $\mathbb{R}$ e vamos

provar que se μ é uma valoração contínua e positivamente invariante em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^1)$, então μ pode ser escrita (de maneira única) como combinação linear de μ_0 e μ_1. Note-se que um elemento I de $\mathbf{U}(\mathcal{K}^1)$ é uma união finita de intervalos compactos, $\mu_0(I)$ é o número de componentes conexas de I e $\mu_1(I)$ é o comprimento de I.

Seja A um conjunto composto só por um elemento de $\mathbb{R}$. Então, $A \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^1)$ e sejam

$$c := \mu(A)$$

e

$$\mu' := \mu - c\mu_0.$$

Pela invariância positiva de μ, resulta que c não depende da escolha do conjunto A. Note-se que μ' é uma valoração contínua, positivamente invariante e simples logo, pelo Teorema do Volume, $\mu' = r\mu_1$, para algum $r \in \mathbb{R}$. Então, resulta que

$$\mu = c\mu_0 + r\mu_1$$

e é óbvio que esta combinação linear é única. Portanto, o teorema está provado para dimensão 1.

Seja agora μ uma valoração em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$, contínua e positivamente invariante. Seja H um hiperplano de $\mathbb{R}^n$. É óbvio que a restrição de μ a H é contínua e positivamente invariante. Suponhamos que

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i(A),$$

para todo o policonvexo $A \subset H$ e onde os escalares c_i são únicos.

Então, pela invariância positiva e continuidade de μ e dos volumes intrínsecos e porque qualquer corpo convexo de dimensão inferior a n está contido num hiperplano, resulta que a valoração

$$\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i$$

é simples, contínua e positivamente invariante. Logo, mais uma vez pelo Teorema do Volume, existe $c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i = c_n \mu_n.$$

Notemos que da maneira como foi determinado esse real c_n nos teoremas 4.3.8 e 4.4.3, resulta que c_n é único, porque depende só do valor de $\eta([0,1]^n)$, onde $\eta := \mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mu_i$.

Portanto, $\mu = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i$ e os volumes intrínsecos formam uma base do espaço considerado. □

Tendo em conta que os volumes intrínsecos são valorações invariantes, sai deste teorema que qualquer valoração positivamente invariante em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ é também invariante. Portanto,

Corolário 4.5.2 *Em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$, a família das valorações contínuas e positivamente invariantes coincide com a família das valorações contínuas e invariantes.*

Do Teorema de Hadwiger resulta também o seguinte corolário.

Corolário 4.5.3 *Sejam $k \in \{0, \ldots, n\}$ e μ uma valoração contínua, invariante e homogénea de grau k, definida em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(K) = c\mu_k(K)$, para todo $K \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.*

Demonstração. Pelo teorema 4.5.1, existem $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $\mu = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i$.

Tomemos então o cubo unitário em $\mathbb{R}^n$, isto é, $P := [0,1]^n$. Dado $\alpha > 0$, tem-se que

$$\mu(\alpha P) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i(\alpha P) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i(P) \alpha^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i \alpha^i.$$

Por outro lado,

$$\mu(\alpha P) = \alpha^k \mu(P) = \sum_{i=0}^{n} c_i \mu_i(P) \alpha^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i \alpha^k.$$

Concluímos que $c_i = 0$ se $i \neq k$, logo $\mu = c_k \mu_k$. □

Capítulo 5

Grassmanianas e volumes intrínsecos

É neste capítulo que vamos compreender a interpretação geométrica inerente ao k-ésimo volume intrínseco ($k \in \{0, \ldots, n\}$) de um corpo convexo K em $\mathbb{R}^n$. Esta interpretação está relacionada com as intersecções dos subespaços afins de dimensão $n-k$ com o corpo K.

Definição 5.0.4 Designamos por *Grassmaniana de dimensão* $n-k$, e denotamos por $\mathrm{Gr}(n, n-k)$, o conjunto de todos os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-k$. Ao conjunto dos subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ com a mesma dimensão, que denotamos por $\mathrm{Graff}(n, n-k)$, chamamos *Grassmaniana afim de dimensão* $n-k$.

Antes de chegarmos à relação entre volumes intrínsecos e elementos da Grassmaniana afim, torna-se necessária a definição de uma medida invariante neste conjunto. A construção dessa medida ocupará grande parte deste capítulo e será feita por etapas.

Primeiro, construímos, com a ajuda da Fórmula de Cauchy, uma medida invariante na Grassmaniana de dimensão 1; depois, construímos uma medida no conjunto das sequências de espaços lineares de dimensão 0 até n (passando por todas as dimensões) tal que cada espaço está contido nos espaços de dimensão superior (este é o conjunto das variedades bandeira); seguidamente, usando as medidas já definidas, construímos uma medida invariante na Grassmaniana de dimensão k; finalmente, depois de definida esta medida invariante, conseguimos construir a medida invariante que nos propusemos construir desde o início.

No final deste capítulo, mencionamos algumas aplicações desta interpretação geométrica dos volumes intrínsecos. Nomeadamente, generalizamos a qualquer dimensão n, a Fórmula de Crofton sobre o comprimento de uma curva em $\mathbb{R}^2$; vemos que, com a ajuda das Grassmanianas, podemos concluir algo sobre a monotonia dos volumes intrínsecos, isto é, podemos relacionar $\mu_i(K)$ e $\mu_i(L)$, para todo i, sabendo que $K, L \in \mathcal{K}^n$ são tais que $K \subseteq L$; finalmente, sendo K e L corpos convexos como atrás, também determinamos a probabilidade de um subespaço afim de dimensão $n-k$ intersectar K sabendo que intersecta L.

5.1 Medidas invariantes nas Grassmanianas

5.1.1 Medidas na Grassmaniana de dimensão 1

Começamos este capítulo com um resultado sobre a área de superfície de um corpo convexo K de $\mathbb{R}^n$. Este resultado vai-nos permitir definir uma medida invariante nas Grassmanianas e relacioná-la com os volumes intrínsecos.

A seguinte definição vai ser útil para a prova do próximo resultado.

Definição 5.1.1 O *produto vectorial* de m vectores $v_1, \ldots, v_m$ em $\mathbb{R}^{m+1}$ é único o vector v que representamos por $v_1 \times \cdots \times v_m$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\langle x, v \rangle = \det(x, v_1, \ldots, v_m),$$

onde $(x, v_1, \ldots, v_m)$ representa a matriz $(m+1) \times (m+1)$ cujas colunas são os vectores $x, v_1, \ldots, v_m$, por esta ordem.

Se $K \in \mathcal{K}^n$, relembremos que $S(K)$ representa a sua área de superfície e, se V é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$, então $K|V$ representa a projecção ortogonal de K sobre V.

Teorema 5.1.2 (Fórmula de Cauchy) *Seja $K \in \mathcal{K}^n$. Tem-se que*

$$S(K) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{n-1}(K|u^{\perp})\, d\sigma_{n-1}(u). \tag{5.1}$$

Demonstração. Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. A esfera $(n-1)$-dimensional,

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\},$$

pode ser dividida no hemisfério norte e no hemisfério sul, isto é, nas semi-esferas

$$\mathbb{S}^{n-1}_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \text{ e } x_n \geq 0\}$$

e

$$\mathbb{S}^{n-1}_- := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \text{ e } x_n \leq 0\},$$

respectivamente.

Consideremos o hemisfério norte de $\mathbb{S}^{n-1}$. Tem-se que $\mathbb{S}^{n-1}_+$ é o gráfico da seguinte função:

$$\begin{aligned} f : \quad B_{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}) &\longmapsto \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi : \quad B_{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}_+ \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) \end{aligned}$$

é uma parametrização de $\mathbb{S}^{n-1}_+$.

Se $u \in \mathbb{S}^{n-1}_+$, então $u^\perp$ tem dimensão $n-1$, isto é, é um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ e, dado $F \in \mathcal{K}^{n-1}$, consideremos a função $h := \mu_{n-1} \circ g$, onde

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^{n-1}_+ &\longrightarrow \mathcal{K}^{n-1} \\ u &\longmapsto F|u^\perp \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu_{n-1} : \mathcal{K}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ K &\longmapsto \mu_{n-1}(K). \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}_+} \mu_{n-1}(F|u^\perp)\, d\sigma_{n-1}(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}_+} h(u)\, d\sigma_{n-1}(u)$$

e, pelo que se viu antes,

$$\int_{\mathbb{S}_+^{n-1}} h(u)\, d\sigma_{n-1}(u) = \int_{B_{n-1}} (h \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_{n-1}) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \right| dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Aqui usámos o facto de que a forma volume, em coordenadas locais segundo uma parametrização φ, de uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$ é dada pela norma do produto vectorial $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}$ ([Li], pág. 422-423). Uma regra prática para calcular este produto vectorial é pelo "determinante" da matriz $n \times n$, cuja primeira coluna é composta pelos elementos da base canónica de $\mathbb{R}^n$ e as restantes colunas são, por esta ordem, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}$ ([Li], pág. 409). Assim,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_i & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \\ e_n & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} = \left((-1)^n \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, (-1)^n \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}, (-1)^{n+1} \right),$$

donde

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \right| = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}}. \tag{5.2}$$

Para os detalhes sobre formas diferenciais e os seus integrais em variedades, consultar [Bo], [Li], [Ma] ou [Sp].

Seja $u \in \mathbb{S}_+^{n-1}$ tal que $u := (x_1, \ldots, x_n)$ e suponhamos que F está contido no hiperplano H de equação $x_n = 0$. Então, se θ for o ângulo formado por H e $u^\perp$, tem-se que $\mu_{n-1}(F|u^\perp) = \cos(\theta)\mu_{n-1}(F)$. Como e_n é ortogonal a H e u é ortogonal a $u^\perp$, resulta que $\theta = \angle(e_n, u)$. Então, como $|e_n| = 1 = |u|$, resulta que

$$\cos(\theta) = \langle e_n, u \rangle = x_n = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}.$$

Então,

$$\mu_{n-1}(F|u^{\perp}) = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\ \mu_{n-1}(F). \tag{5.3}$$

Portanto, de (5.2) e (5.3),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}_+^{n-1}} \mu_{n-1}(F|u^{\perp}) d\sigma_{n-1}(u) &= \int_{B_{n-1}} \frac{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\,\mu_{n-1}(F)}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}} dx_1 \ldots dx_n \\ &= \mu_{n-1}(F) \int_{B_{n-1}} dx_1 \ldots dx_{n-1} \\ &= \omega_{n-1}\mu_{n-1}(F).\end{aligned}$$

Aplicando o mesmo raciocínio a $\mathbb{S}_-^{n-1}$, deduz-se que

$$\int_{\mathbb{S}_-^{n-1}} \mu_{n-1}(F|u^{\perp}) d\sigma_{n-1}(u) = \omega_{n-1}\mu_{n-1}(F).$$

Portanto, conclui-se que

$$2\omega_{n-1}\mu_{n-1}(F) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{n-1}(F|u^{\perp}) d\sigma_{n-1}(u),$$

isto é,

$$\mu_{n-1}(F) = \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{n-1}(F|u^{\perp}) d\sigma_{n-1}(u).$$

Seja agora P um politopo compacto, convexo e de interior não vazio em $\mathbb{R}^n$. Tem-se que

$$\begin{aligned}S(P) &= \sum_{F \in \{\text{facetas de } P\}} \mu_{n-1}(F) \\ &= \sum_{F \in \{\text{facetas de } P\}} \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{n-1}(F|u^{\perp}) d\sigma_{n-1}(u) \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{2} \sum_{F \in \{\text{facetas de } P\}} \mu_{n-1}(F|u^{\perp}) d\sigma_{n-1}(u) \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{n-1}(P|u^{\perp}) d\sigma_{n-1}(u),\end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta do facto da soma dos $(n-1)$-volumes das projecções das facetas de P em $u^{\perp}$ dar duas vezes o valor de $\mu_{n-1}(P|u^{\perp})$, pois como P é compacto e convexo, cada ponto de $P|u^{\perp}$ é contado duas vezes (de cima e de baixo) quando se calcula $\sum_{F \in \{\text{facetas de } P\}} \mu_{n-1}(F|u^{\perp})$.

Como a área de superfície e μ_{n-1} são valorações contínuas, concluímos que (5.1) se verifica para qualquer corpo convexo, K. □

Como já sabemos que $\mu_{n-1}(K) = \frac{1}{2}S(K)$, podemos reescrever (5.1):

$$\mu_{n-1}(K) = \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{n-1}(K|u^{\perp})\, d\sigma_{n-1}(u). \tag{5.4}$$

Mas, notando que cada recta r em $\mathbb{R}^n$ que passe pela origem intersecta $\mathbb{S}^{n-1}$ sempre em dois pontos, podemos reescrever o integral anterior integrando sobre o conjunto dos subespaços vectoriais de dimensão 1, $\mathrm{Gr}(n,1)$, em vez de integrar na esfera. Depois, normalizamos a medida resultante em $\mathrm{Gr}(n,1)$, de modo que $\mathrm{Gr}(n,1)$ tenha medida 1. Esta medida é designada por *medida de probabilidade de Haar* em $\mathrm{Gr}(n,1)$. Assim, integrando segundo esta medida, o integral anterior fica

$$\mu_{n-1}(K) = \alpha \int_{\mathrm{Gr}(n,1)} \mu_{n-1}(K|r^{\perp})\, dr,$$

onde α é uma constante independente de K. Assim, para a determinar, consideremos $K := B_n$ e temos

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}(B_n) &= \alpha \int_{\mathrm{Gr}(n,1)} \mu_{n-1}(B_n|r^{\perp})\, dr \\ &= \alpha\omega_{n-1}, \end{aligned}$$

pois $\mu_{n-1}(B_n|r^{\perp}) = \omega_{n-1}$ e $\int_{\mathrm{Gr}(n,1)} dr = 1$. Como $\mu_{n-1}(B_n) = \frac{n\omega_n}{2}$, resulta que

$$\alpha = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}}.$$

Finalmente, se denotarmos por τ_n a medida invariante em $\mathrm{Gr}(n,1)$ tal que

$$\tau_n(\mathrm{Gr}(n,1)) = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}}, \tag{5.5}$$

a equação (5.4) fica

$$\mu_{n-1}(K) = \int_{\mathrm{Gr}(n,1)} \mu_{n-1}(K|r^{\perp})\, d\tau_n. \tag{5.6}$$

A medida τ_n em $\mathrm{Gr}(n,1)$ pode ser construída do seguinte modo. Dado um subconjunto mensurável A de $\mathrm{Gr}(n,1)$, seja A' o subconjunto de $\mathbb{S}^{n-1}$ assim definido

$$A' := \bigcup_{r \in A} (r \cap \mathbb{S}^{n-1}).$$

Então, definimos $\tau_n(A)$ por

$$\tau_n(A) := \frac{\sigma_{n-1}(A')}{2\omega_{n-1}}.$$

Note-se que com esta definição temos $\tau_n(\mathrm{Gr}(n,1)) = \frac{\sigma_{n-1}}{2\omega_{n-1}} = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}}$, o que está de acordo com (5.5).

Com esta construção, e tendo em conta a invariância da medida de Lebesgue esférica segundo isometrias em $\mathbb{S}^{n-1}$, torna-se óbvia a invariância da medida τ_n em relação às isometrias lineares de $\mathbb{R}^n$.

5.1.2 Medidas nas variedades bandeira

Denotemos por $[n]$ o valor de $\tau_n(\mathrm{Gr}(n,1))$, ou seja,

$$[n] := \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}} \tag{5.7}$$

Seja $L(n)$ o conjunto de todos os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^n$.

Definição 5.1.3 Uma *variedade bandeira* em $L(n)$ é uma sequência, $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tal que, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, $x_i \in L(n)$, $\dim(x_i) = i$ e se $j, k \in \{0, \ldots, n\}$ são tais que $j < k$, então $x_j \subset x_k$.

Notamos por $\mathbb{B}(n)$ o conjunto de todas as bandeiras em $L(n)$.

Note-se que, na definição anterior, temos sempre que $x_0 = 0_{\mathbb{R}^n}$ e $x_n = \mathbb{R}^n$. Observe-se também que, para x_k fixo, o conjunto $\mathbb{B}(x_k)$ de todas as sequências $(0_{\mathbb{R}^n}, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ (com $x_i \in L(n)$, $\dim(x_i) = i$ e $x_i \subset x_{i+1}$) pode ser identificado com $\mathbb{B}(k)$. Basta tomar uma isometria linear $g : x_k \to \mathbb{R}^k$ e considerar

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{B}(x_k) & \longrightarrow \quad \mathbb{B}(k) \\ & (0_{\mathbb{R}^n}, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) & \longmapsto (0_{\mathbb{R}^k}, g(x_1), \ldots, g(x_{k-1}), \mathbb{R}^k). \end{array}$$

Vamos construir uma medida invariante ϕ_n em $\mathbb{B}(n)$ através da construção de um funcional linear, definido no conjunto das funções contínuas em $\mathbb{B}(n)$.

Contudo, para podermos falar em continuidade de funções em $\mathbb{B}(n)$ é necessária a definição de uma topologia em $\mathbb{B}(n)$.

5.1.2.1 Topologia nas variedades bandeira

A maneira mais natural de construir uma topologia neste conjunto é através da topologia quociente.

Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1}$, com $n-1$ factores e o seu seguinte subconjunto

$$\mathcal{F}_1 := \{(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1} : \langle u_i, u_j \rangle = 0, \text{ se } i \neq j\}.$$

Portanto, $\mathcal{F}_1$ é o conjunto de todas as listas compostas por $n-1$ vectores ortonormais.

Notemos agora que, para cada elemento de $\mathcal{F}_1$ que fixemos, o conjunto

$$A := \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) : \ x_i := G\{u_1, \ldots, u_i\}\}$$

não é mais do que uma variedade bandeira em $\mathbb{B}(n)$. Claro que temos de juntar a esta sequência a origem $0_{\mathbb{R}^n}$ e o próprio espaço $\mathbb{R}^n$, mas como estes estão fixos, cada sequência do tipo da do conjunto acima define uma e uma só bandeira. Note-se também que se fixarmos um outro elemento $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ de $\mathcal{F}_1$ tal que $v_i := \pm u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, então o conjunto

$$A' := \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) : \ x_i := G\{v_1, \ldots, v_i\}\}$$

pertence a $\mathbb{B}(n)$, mas, mais do que isso, $A' = A$.

Definimos então uma relação de equivalência $\sim$ no conjunto $\mathcal{F}_1$ de tal modo que $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \sim (v_1, \ldots, v_{n-1})$ se e só se $v_i = \pm u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Seja então $f_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1/\sim$ a aplicação natural, que a cada elemento de $\mathcal{F}_1$ associa a sua classe de equivalência. Pelo que vimos atrás, podemos concluir que cada classe de equivalência pode ser identificada a uma bandeira e, portanto, que $\mathcal{F}_1/\sim = \mathbb{B}(n)$.

Definimos portanto a topologia quociente em $\mathbb{B}(n)$, isto é, V é aberto em $\mathbb{B}(n)$ se e só se $f_1^{-1}(V)$ é aberto em $\mathcal{F}_1$ (relativamente à topologia usual como subespaço de $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$).

Como exemplo, consideremos um aberto U de $\mathbb{R}^n$. Vamos verificar que o conjunto das bandeiras tais que o seu termo de dimensão i intersecta U, é um aberto em $\mathbb{B}(n)$. Seja, então

$$M := \{(0_{\mathbb{R}^n}, x_1, \ldots, x_{n-1}, \mathbb{R}^n) \in \mathbb{B}(n) : x_i \cap U \neq \varnothing\}.$$

Podemos supor que $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, porque se $i = 0$ ou $i = n$, então $M = \varnothing$ ou $M = \mathbb{B}(n)$, que são obviamente abertos. Queremos, portanto, mostrar que o conjunto

dos $(n-1)$-uplos $(u_1,\ldots,u_{n-1})$ tais que o subespaço de dimensão i correspondente (isto é, x_i) intersecta U, é um aberto em $\mathcal{F}_1$, ou seja, que $f_1^{-1}(M)$ é aberto em $\mathcal{F}_1$. Seja $(u_1,\ldots,u_{n-1}) \in f_1^{-1}(M)$. Então, $x_i := G\{u_1,\ldots,u_i\}$ é tal que $x_i \cap U \neq \varnothing$, donde existem $\lambda_1,\ldots,\lambda_i \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{k=1}^{i} \lambda_k u_k = p \in U$. Como U é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\text{int}(B(p,\epsilon)) \subseteq U$. Seja agora $(v_1,\ldots,v_n) \in \mathcal{F}_1$. Ora

$$\left|\sum_{k=1}^{i} \lambda_k v_k - p\right| = \left|\sum_{k=1}^{i} \lambda_k (v_k - u_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{i} |\lambda_k||v_k - u_k|.$$

Portanto, se $(v_1,\ldots,v_n)$ for tal que $|v_k - u_k| < \frac{\epsilon}{i|\lambda_k|}$, para todo $k \in \{1,\ldots,i\}$, então o subespaço gerado por $(v_1,\ldots,v_i)$ intersecta U. Assim, concluímos que

$$\left(B\left(u_1, \frac{\epsilon}{i|\lambda_1|}\right) \times \cdots \times B\left(u_i, \frac{\epsilon}{i|\lambda_i|}\right) \times \mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1}\right) \cap \mathcal{F}_1$$

é um aberto de $\mathcal{F}_1$ ao qual pertence $(u_1,\ldots,u_{n-1})$ e que está contido em $f_1^{-1}(M)$. Assim, $f_1^{-1}(M)$ é aberto em $\mathcal{F}_1$, donde M é aberto em $\mathbb{B}(n)$.

5.1.2.2 Um funcional linear positivo nas variedades bandeira

Passemos agora à construção de um funcional linear positivo nas funções contínuas em $\mathbb{B}(n)$, que definirá uma medida invariante neste conjunto. Esta construção é válida devido ao Teorema da Representação de Riesz ([Ru], pág. 34 e 40). Note-se que sendo $\mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1}$ compacto e $\mathcal{F}_1$ um fechado desse conjunto, também é compacto e, portanto, o espaço quociente $\mathcal{F}_1/\sim$ (isto é, $\mathbb{B}(n)$) também é compacto, donde o teorema referido é válido aqui.

Seja $C(\mathbb{B}(n))$ o espaço das funções reais e contínuas, definidas em $\mathbb{B}(n)$. Vamos construir um funcional linear, positivo e invariante $\Lambda_n : C(\mathbb{B}(n)) \to \mathbb{R}$, que definirá a medida ϕ_n em $\mathbb{B}(n)$, supondo, por indução, que já construímos um tal funcional em $\mathbb{B}(n-1)$, que notamos por Λ_{n-1} e que define uma medida, ϕ_{n-1}, naquele conjunto.

Note-se que a medida τ_n em $\text{Gr}(n,1)$ induz uma medida $\widetilde{\tau}_n$ no conjunto dos subespaços lineares de dimensão $n-1$ em $\mathbb{R}^n$, $\text{Gr}(n,n-1)$, via dualidade ortogonal. Ou seja, se $A \subset \text{Gr}(n,1)$ é um conjunto mensurável, então $A^\perp := \{r^\perp : r \in A\}$, logo $A^\perp \subset \text{Gr}(n,n-1)$ e definimos $\widetilde{\tau}_n(A^\perp) := \tau_n(A)$.

Seja $\mathbb{B}(x)$ o conjunto de todas as bandeiras que contêm x, isto é, o conjunto de todas as sequências $(x_0,\ldots,x_n)$ de $x_i \in L(n)$ tais que $\dim(x_i) = i$ e que existe um $j \in \{0,\ldots,n\}$ tal que $x_j = x$.

Seja $f \in C(\mathbb{B}(n))$. Então definimos Λ_n do seguinte modo:

$$\Lambda_n(f) := \int_{\mathrm{Gr}(n,n-1)} \Lambda_{x_{n-1}}(f)\, d\widetilde{\tau}_n(x_{n-1}), \tag{5.8}$$

onde $\Lambda_{x_{n-1}}$ é um funcional em $C(\mathbb{B}(x_{n-1}))$, cuja construção é explicada mais abaixo, em (5.9). A função f cuja imagem por $\Lambda_{x_{n-1}}$ é integrada em (5.8) é a secção de f (definida em $\mathbb{B}(n)$) respeitante a $\mathbb{B}(x_{n-1})$. Denotamos ambas as funções por f, sem que haja perigo de confusão, devido à boa definição dos funcionais Λ_n e $\Lambda_{x_{n-1}}$.

Da linearidade e positividade de $\Lambda_{x_{n-1}}$ resultam as mesmas propriedades para Λ_n.

Para precisar melhor a definição (5.8), consideremos a função real A_f definida em $\mathrm{Gr}(n, n-1)$ por

$$A_f(x_{n-1}) := \Lambda_{x_{n-1}}(f).$$

Então,

$$\Lambda_n(f) := \int_{\mathrm{Gr}(n,n-1)} A_f(x_{n-1})\, d\widetilde{\tau}_n(x_{n-1}).$$

Assim, tomando $\phi_1(\{0\}, \mathbb{R}) := 1$, a medida ϕ_n fica definida recursivamente.

Definição 5.1.4 Chamamos *isometria de* $\mathbb{B}(n)$ a uma aplicação da forma

$$\begin{aligned} T: \quad & \mathbb{B}(n) \longrightarrow \mathbb{B}(n) \\ & (0_{\mathbb{R}^n}, x_1, \ldots, x_{n-1}, \mathbb{R}^n) \longmapsto (0_{\mathbb{R}^n}, T(x_1), \ldots, T(x_{n-1}), \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

onde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria linear de $\mathbb{R}^n$.

Mais uma vez usamos a mesma letra para nos referirmos a uma isometria entre bandeiras e a isometria em $\mathbb{R}^n$ à qual a primeira está associada. O perigo de confusão não existe devido à boa definição de ambas as isometrias.

Vejamos que o funcional Λ_n assim definido é invariante por isometrias de $\mathbb{B}(n)$ e, portanto, que a medida ϕ_n é invariante.

Para já, note-se que no funcional $\Lambda_{x_{n-1}}$ há uma identificação de x_{n-1} com $\mathbb{R}^{n-1}$. De facto, se $f \in C(\mathbb{B}(x_{n-1}))$, então definimos

$$\Lambda_{x_{n-1}}(f) := \Lambda_{n-1}(f \circ U), \tag{5.9}$$

onde $U : \mathbb{B}(n-1) \to \mathbb{B}(x_{n-1})$ é a isometria associada a uma isometria $U : \mathbb{R}^{n-1} \to x_{n-1}$. Ora, para que o funcional $\Lambda_{x_{n-1}}$ não dependa da isometria usada para identificar $\mathbb{R}^{n-1}$

com x_{n-1}, então Λ_{n-1} tem de ser invariante por isometrias. Senão, vejamos que se $U_1 : \mathbb{R}^{n-1} \to x_{n-1}$ e $U_2 : \mathbb{R}^{n-1} \to x_{n-1}$ são duas isometrias e se as mesmas letras denotarem as respectivas isometrias de $\mathbb{B}(n-1)$ em $\mathbb{B}(x_{n-1})$, então $\Lambda_{n-1}(f \circ U_1) = \Lambda_{n-1}(f \circ U_2)$ se e só se $\Lambda_{n-1}(f \circ U_1) = \Lambda_{n-1}\left(f \circ U_1 \circ (U_1^{-1} \circ U_2)\right)$, isto é, se e só se Λ_{n-1} for invariante por isometrias de $\mathbb{B}(n-1)$.

Podemos concluir que a invariância de Λ_{n-1} é uma condição necessária para que a construção de Λ_n tenha sentido. Supondo, portanto, que Λ_{n-1} é invariante, vejamos que Λ_n, definido por (5.8), também o é.

Sejam então $T : \mathbb{B}(n) \to \mathbb{B}(n)$ uma isometria (associada a uma isometria T de $\mathbb{R}^n$) e $f \in C(\mathbb{B}(n))$. Então,

$$\Lambda_n(f \circ T) = \int_{\mathrm{Gr}(n,n-1)} A_{f\circ T}(x_{n-1})\, d\widetilde{\tau}_n(x_{n-1}).$$

Mas,

$$\begin{aligned} A_{f\circ T}(x_{n-1}) &= \Lambda_{x_{n-1}}(f \circ T) \\ &= \Lambda_{T(x_{n-1})}(f) \\ &= A_f(T(x_{n-1})) \\ &= (A_f \circ T)(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Para justificar a segunda igualdade, note-se que, por definição,

$$\Lambda_{x_{n-1}}(f \circ T) = \Lambda_{n-1}(f \circ T \circ U_1) \text{ e } \Lambda_{T(x_{n-1})}(f) = \Lambda_{n-1}(f \circ U_2),$$

onde U_1 e U_2 são isometrias de $\mathbb{B}(n-1)$ em $\mathbb{B}(x_{n-1})$ e em $\mathbb{B}(T(x_{n-1}))$, respectivamente. Então temos que $\Lambda_{x_{n-1}}(f \circ T) = \Lambda_{n-1}\left(f \circ U_2 \circ (U_2^{-1} \circ T \circ U_1)\right)$ e como $U_2^{-1} \circ T \circ U_1$ é uma isometria de $\mathbb{B}(n-1)$, pela invariância de Λ_{n-1}, resulta que

$$\Lambda_{x_{n-1}}(f \circ T) = \Lambda_{n-1}(f \circ U_2) = \Lambda_{T(x_{n-1})}(f).$$

Finalmente, concluímos que

$$\begin{aligned} \Lambda_n(f \circ T) &= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-1)} (A_f \circ T)(x_{n-1})\, d\widetilde{\tau}_n(x_{n-1}) \\ &= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-1)} A_f(x_{n-1})\, d\widetilde{\tau}_n(x_{n-1}) \\ &= \Lambda_n(f), \end{aligned}$$

onde segunda igualdade se deve à invariância da medida $\widetilde{\tau}_n$, que resulta da invariância da medida τ_n.

Temos, portanto, definida uma medida invariante ϕ_n em $\mathbb{B}(n)$.

Por exemplo, consideremos a medida ϕ_2. Note-se que uma bandeira em $\mathbb{R}^2$ fica completamente definida se soubermos qual é a recta vectorial que faz parte dessa bandeira. Portanto, podemos identificar $\mathbb{B}(2)$ com $\mathrm{Gr}(2,1)$, isto é, estes dois conjuntos são isomorfos. Assim, podemos comparar as medidas ϕ_2 e τ_2. Vejamos que $\phi_2 = \tau_2$.

Então, sendo f uma função contínua em $\mathbb{B}(2)$,

$$\Lambda_2(f) = \int_{\mathrm{Gr}(2,1)} A_f(x_1)\, d\widetilde{\tau_2}(x_1).$$

Como $\phi_1(\mathbb{B}(1)) = 1$, então $\phi_1(\mathbb{B}(x_1)) = 1$, logo

$$A_f(x_1) = \Lambda_{x_1}(f) = f(0_{\mathbb{R}^2}, x_1, \mathbb{R}^2).$$

Como $\tau_2 = \widetilde{\tau_2}$, resulta que

$$\Lambda_2(f) = \int_{\mathrm{Gr}(2,1)} f(0_{\mathbb{R}^2}, x_1, \mathbb{R}^2)\, d\tau_2,$$

donde $\phi_2 = \tau_2$.

Seja agora

$$[n]! := [n][n-1]\cdots[2][1].$$

Proposição 5.1.5 *A medida de $\mathbb{B}(n)$ é dada por*

$$\phi_n(\mathbb{B}(n)) = \frac{n!\omega_n}{2^n}.$$

Demonstração. Vamos começar por provar, por indução sobre a dimensão, que

$$\phi_n(\mathbb{B}(n)) = [n]!.$$

Tem-se que $\mathbb{B}(1) = (\{0\}, \mathbb{R})$, donde

$$\phi_1(\mathbb{B}(1)) = 1 = [1].$$

Suponhamos que

$$\phi_{n-1}(\mathbb{B}(n-1)) = [n-1]! = [n-1][n-2]\cdots[2][1].$$

Então,

$$\begin{aligned}
\phi_n(\mathbb{B}(n)) &= \Lambda_n(1) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-1)} A_1(x_{n-1}) d\widetilde{\tau}_n(x_{n-1}) \\
&= \int_{\mathrm{Gr}(n,n-1)} \Lambda_{x_{n-1}}(1) d\widetilde{\tau}_n(x_{n-1}) \\
&= \phi_{n-1}(\mathbb{B}(n-1))\widetilde{\tau}_n(\mathrm{Gr}(n,n-1)) \\
&= [n][n-1]\cdots[2][1] \\
&= [n]!
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (5.7), tem-se que

$$[n]! = \frac{n!\omega_n\omega_{n-1}\cdots\omega_1}{2^n\omega_{n-1}\omega_{n-2}\cdots\omega_0} = \frac{n!\omega_n}{2^n}, \tag{5.10}$$

donde resulta o pretendido. □

5.1.3 Medidas na Grassmaniana de dimensão k

Podemos agora definir uma medida invariante ν_k^n em $\mathrm{Gr}(n,k)$ da seguinte maneira.

Dado $A \subseteq \mathrm{Gr}(n,k)$, seja $\mathbb{B}(A)$ o conjunto de todas as bandeiras $(0_{\mathbb{R}^n}, x_1, \ldots, \mathbb{R}^n)$ tais que $x_k \in A$. Então pomos

$$\nu_k^n(A) := \frac{\phi_n(\mathbb{B}(A))}{[k]![n-k]!}. \tag{5.11}$$

A normalização desta medida proveniente do factor $\frac{1}{[k]![n-k]!}$ é justificada para que num resultado que vamos provar posteriormente (teorema 5.2.1), a constante de proporcionalidade na relação entre os volumes intrínsecos e a medida de certos conjuntos na Grassmaniana afim, seja igual a 1.

A medida ν_k^n é evidentemente invariante e

$$\nu_k^n(\mathrm{Gr}(n,k)) = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

Denotemos por $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ este valor, ou seja,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

De (5.10), obtemos que

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}} = \binom{n}{k} \frac{\omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}}. \tag{5.12}$$

Estes valores designam-se por *coeficientes bandeira* ([Kl-Ro], pág. 63-83).

5.1.4 Medidas na Grassmaniana afim

Começamos por considerar o conjunto $\mathrm{Aff}(n)$ de todos os subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ e o seu subconjunto $\mathrm{Graff}(n,k)$ composto pelos elementos de dimensão k.

O grupo $\mathrm{Isom}(n)$ actua naturalmente em $\mathrm{Aff}(n)$.

Vamos demonstrar a existência de uma medida, λ_k^n, em $\mathrm{Graff}(n,k)$ que é invariante pela acção do grupo $\mathrm{Isom}(n)$. Para tal, vamos considerar a seguinte parametrização de $\mathrm{Graff}(n,k)$. Dado $V \in \mathrm{Graff}(n,k)$, sejam $\mathrm{or}(V)$ o subespaço vectorial paralelo a V e $V^\perp$ o suplementar ortogonal de $\mathrm{or}(V)$. Portanto, para cada $V \in \mathrm{Graff}(n,k)$ corresponde um par $(\mathrm{or}(V), p(V))$, onde $\mathrm{or}(V) \in \mathrm{Gr}(n,k)$ e $p(V) = V^\perp \cap V$.

Reciprocamente, dado um par (V_0, p), onde $V_0 \in \mathrm{Gr}(n,k)$ e $p \in V_0^\perp$, existe um único subespaço afim $V \in \mathrm{Graff}(n,k)$ tal que $\mathrm{or}(V) = V_0$ e $V \cap V^\perp = p$. Esse subespaço é, precisamente, $V = V_0 + p$.

Portanto, $\mathrm{Graff}(n,k)$ é isomorfo ao seguinte subconjunto fechado de $\mathrm{Gr}(n,k) \times \mathbb{R}^n$:

$$\{(V,p) \in \mathrm{Gr}(n,k) \times \mathbb{R}^n : p \in V^\perp\}.$$

A construção de uma medida invariante em $\mathrm{Graff}(n,k)$ será feita de novo, através do recurso a um funcional linear positivo e ao Teorema da Representação de Riesz. Neste caso, e ao contrário do que fizemos nas variedades bandeira, utilizaremos a notação de integral para o funcional. Mais uma vez, é necessária a introdução de uma topologia em $\mathrm{Graff}(n,k)$, para que seja possível falar em funções contínuas.

5.1.4.1 Topologia na Grassmaniana afim

Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1}$, com k factores e o seu seguinte subconjunto

$$\mathcal{F}_2 := \{(u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1} : \langle u_i, u_j \rangle = 0, \text{ se } i \neq j\}.$$

Portanto, $\mathcal{F}_2$ é o conjunto de todas as listas compostas por k vectores ortonormais.

Notemos agora que, para cada elemento de $\mathcal{F}_2$ que fixemos, o conjunto

$$A := G\{u_1, \ldots, u_k\}$$

é um elemento de $\mathrm{Gr}(n,k)$. Note-se também que se fixarmos um outro elemento $(v_1, \ldots, v_k)$ de $\mathcal{F}_2$ tal que $v_i := \sum_{i=1}^{k} p_{ij}\, u_i$, onde $P := (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ é uma matriz $k \times k$ ortogonal, então

$$A' := G\{v_1, \ldots, v_k\} = A.$$

Definimos uma relação de equivalência $\sim$ em $\mathcal{F}_2$ tal que $(u_1, \ldots, u_k) \sim (v_1, \ldots, v_k)$ se e só se existe uma matriz $k \times k$ ortogonal $P := (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ tal que $v_i = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}\, u_i$, ou, o que é o mesmo, $(u_1, \ldots, u_k) \sim (v_1, \ldots, v_k)$ se e só se $G\{u_1, \ldots, u_k\} = G\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Seja $f_2 : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2/\!\sim$ a aplicação canónica. Então, cada classe de equivalência é um subespaço linear de dimensão k e $\mathcal{F}_2/\!\sim = \mathrm{Gr}(n,k)$.

Definimos portanto a topologia quociente em $\mathrm{Gr}(n,k)$, o que torna este conjunto num espaço topológico compacto.

Note-se que esta topologia está, como seria de esperar, estreitamente relacionada com a topologia definida atrás, nas variedades bandeira. Vamos ver que a aplicação g entre $\mathbb{B}(n)$ e $\mathrm{Gr}(n,k)$, dada por $g(0_{\mathbb{R}^n}, x_1, \ldots, \mathbb{R}^n) = x_k$, é contínua. De facto, g é uma aplicação quociente, ou seja, $U \subseteq \mathrm{Gr}(n,k)$ é aberto se e só se $g^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{B}(n)$. Vejamos que se um conjunto U de $\mathrm{Gr}(n,k)$ é aberto, então $g^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{B}(n)$. Podemos considerar $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, porque se $k = 0$ ou $k = n$, então $g^{-1}(U) = \mathbb{B}(n)$ (ou $\varnothing$, se $U = \varnothing$), que é aberto. Portanto, de acordo com a notação introduzida agora e aquando da definição da topologia em $\mathbb{B}(n)$, vamos ver que se $f_2^{-1}(U)$ é aberto em $\mathcal{F}_2$, então $f_1^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ é aberto em $\mathcal{F}_1$. Portanto, temos que

$$f_2^{-1}(U) = \{(u_1, \ldots, u_k) \in \mathcal{F}_2 : G(u_1, \ldots, u_k) \in U\}$$

é aberto em $\mathcal{F}_2$. Ora,

$$g^{-1}(U) = \{(0_{\mathbb{R}^n}, x_1, \ldots, \mathbb{R}^n) \in \mathbb{B}(n) : x_k \in U\}$$

e, assim

$$f_1^{-1}\left(g^{-1}(U)\right) = \{(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathcal{F}_1 : G(u_1, \ldots, u_k) \in U\}$$

Então, é fácil perceber que

$$f_1^{-1}\left(g^{-1}(U)\right) = \left(f_2^{-1}(U) \times \underbrace{\mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1}}_{n-1-k \text{ factores}}\right) \cap \mathcal{F}_1$$

que é aberto em $\mathcal{F}_1$, pois $f_2^{-1}(U)$ é aberto em $\mathcal{F}_2$.

Agora, se $g^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{B}(n)$, então $f_1^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ é aberto em $\mathcal{F}_1$, ou seja, $\left(f_2^{-1}(U) \times \underbrace{\mathbb{S}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n-1}}_{n-1-k \text{ factores}}\right) \cap \mathcal{F}_1$ é aberto em $\mathcal{F}_1$, donde $f_2^{-1}(U)$ é aberto em $\mathcal{F}_2$, isto é, U é aberto em $\mathrm{Gr}(n,k)$.

Já vimos que $\mathrm{Graff}(n,k)$ se identifica com um subconjunto fechado de $\mathrm{Gr}(n,k) \times \mathbb{R}^n$, ficando desse modo munido de uma topologia a partir da topologia produto de $\mathrm{Gr}(n,k) \times \mathbb{R}^n$.

5.1.4.2 Um funcional linear positivo na Grassmaniana afim

Como $\mathrm{Gr}(n,k) \times \mathbb{R}^n$ é um espaço topológico localmente compacto, então $\mathrm{Graff}(n,k)$ também o é e nele é válido o Teorema da Representação de Riesz. Portanto, podemos definir uma medida em $\mathrm{Graff}(n,k)$ através da definição de um funcional linear positivo neste espaço.

Dado $V \in \mathrm{Gr}(n,k)$ e $p \in \mathbb{R}^n$, seja $V + p$ a translação do subespaço V segundo o vector p. Se f é uma função real, contínua e de suporte compacto em $\mathrm{Graff}(n,k)$, seja $\bar{f} : \mathrm{Gr}(n,k) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{f}(V_0, p) := f(V_0 + p),$$

e defina-se

$$\int_{\mathrm{Graff}(n,k)} f \, d\lambda_k^n := \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \int_{V_0^\perp} \bar{f}(V_0, p) \, dp \, d\nu_k^n(V_0),$$

onde dp representa a medida de Lebesgue ordinária em $V_0^\perp \cong \mathbb{R}^{n-k}$.

Vejamos que a medida λ_k^n é, de facto, invariante. Seja $g \in \mathrm{Isom}(n)$. Vamos considerar

dois casos distintos. Se g é uma isometria linear, então,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Graff}(n,k)} f\circ g\, d\lambda_k^n &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)}\int_{V_0^\perp} \overline{f\circ g}(V_0,p)\; dp\; d\nu_k^n(V_0)\\ &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)}\int_{V_0^\perp} f\left(g(V_0+p)\right)\; dp\; d\nu_k^n(V_0)\\ &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)}\int_{V_0^\perp} f(g(V_0)+g(p))\; dp\; d\nu_k^n(V_0)\\ &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)}\int_{g(V_0)^\perp} f(g(V_0)+p)\; dp\; d\nu_k^n(V_0)\\ &= \int_{\mathrm{Graff}(n,k)} f\; d\lambda_k^n,\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usámos a invariância da medida de Lebesgue, relativamente a isometrias e o facto de g ser uma isometria linear (donde resulta que $g(V_0^\perp) = g(V_0)^\perp$). Na última igualdade, usámos a invariância de ν_k^n.

Suponhamos agora que g é uma translação segundo um vector v. Neste caso, temos que

$$\overline{f\circ g}(V_0,p) = f\circ g(V_0+p) = f(V_0+p+v) = f(V_0+p+v|V_0^\perp).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Graff}(n,k)} f\circ g\, d\lambda_k^n &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)}\int_{V_0^\perp} \overline{f\circ g}(V_0,p)\; dp\; d\nu_k^n(V_0)\\ &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)}\int_{V_0^\perp} f(V_0+p+v|V_0^\perp)\; dp\; d\nu_k^n(V_0)\\ &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)}\int_{V_0^\perp} f(V_0+p)\; dp\; d\nu_k^n(V_0)\\ &= \int_{\mathrm{Graff}(n,k)} f\; d\lambda_k^n,\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é válida devido à invariância por translações da medida de Lebesgue dp.

Como toda a isometria é a composta de uma isometria linear com uma translação, resulta que λ_k^n é invariante por isometrias.

5.2 Volumes intrínsecos e a Fórmula de Hadwiger

Vamos agora considerar a relação existente entre os volumes intrínsecos de um corpo convexo, definidos no capítulo 2 e a medida λ_k^n acabada de definir.

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, denotemos por $\mathrm{Graff}(A,k)$ o conjunto de todos $V \in \mathrm{Graff}(n,k)$ tais que $V \cap A \neq \varnothing$.

A relação (no mínimo inesperada!) entre os volumes intrínsecos e λ_k^n é dada pelo seguinte teorema, que poderia ser dado como definição alternativa dos volumes intrínsecos.

Teorema 5.2.1 *Dado $K \in \mathcal{K}^n$ e $k \in \{0,\ldots,n\}$, tem-se que*

$$\mu_{n-k}(K) = \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(K,k)).$$

Portanto, os volumes intrínsecos que estão estreitamente relacionados com os coeficientes do polinómio do volume do corpo paralelo, são também dados pela medida (com uma certa normalização) das intersecções de subespaços afins com o corpo em questão.

Para provarmos este resultado, vai ser necessário o seguinte lema.

Lema 5.2.2 *Sejam A e B corpos convexos de $\mathbb{R}^n$ tais que $A \cup B$ é convexo. Seja V um subespaço afim tal que $V \cap A \neq \varnothing$ e $V \cap B \neq \varnothing$. Então $V \cap A \cap B \neq \varnothing$.*

Demonstração. Supomos que $\dim(V) \geq 1$, senão nada há a mostrar.

O conjunto $V \cap (A \cup B) = (V \cap A) \cup (V \cap B)$ é convexo, visto ser a intersecção de dois convexos.

Sejam $a \in (V \cap A) \setminus (V \cap B)$ e $b \in (V \cap B) \setminus (V \cap A)$. Seja I o segmento que une a a b. É óbvio que $I \subset V$ e $I \subset A \cup B$, donde $I = (I \cap A) \cup (I \cap B)$. Como I é conexo e $I \cap A$ e $I \cap B$ são fechados, resulta que

$$I \cap (A \cap B) = (I \cap A) \cap (I \cap B) \neq \varnothing,$$

donde $V \cap A \cap B \neq \varnothing$. □

O lema anterior pode ser reescrito do seguinte modo, mais útil para os nossos objectivos.

Se A e B são corpos convexos tais que $A \cup B$ é convexo, então, para todo $k > 0$, tem-se que

$$\mathrm{Graff}(A \cap B, k) = \mathrm{Graff}(A,k) \cap \mathrm{Graff}(B,k),$$

e, por conseguinte,

$$\lambda_k^n(\mathrm{Graff}(A \cup B, k)) = \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(A, k)) + \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(B, k)) - \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(A \cap B, k)). \quad (5.13)$$

Passemos agora para a prova do teorema 5.2.1.

Demonstração do teorema 5.2.1. Comecemos por definir uma função η em $\mathcal{K}^n$ por

$$\eta(K) := \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(K, k)). \quad (5.14)$$

De (5.13) concluímos que η é uma valoração em $\mathcal{K}^n$.

Sejam K um conjunto compacto e convexo e $\chi_{\mathrm{Graff}(K,k)}$ a função característica de $\mathrm{Graff}(K, k)$ em $\mathrm{Graff}(n, k)$. Pelo que já vimos anteriormente,

$$\lambda_k^n(\mathrm{Graff}(K, k)) = \int_{\mathrm{Graff}(n,k)} \chi_{\mathrm{Graff}(K,k)}\, d\lambda_k^n = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \int_{V_0^\perp} \overline{\chi_{\mathrm{Graff}(K,k)}}(V_0, p)\, dp\, d\nu_k^n(V_0). \quad (5.15)$$

Para $V_0 \in \mathrm{Gr}(n, k)$ fixo, temos que $\overline{\chi_{\mathrm{Graff}(K,k)}}(V_0, p) = \chi_{\mathrm{Graff}(K,k)}(V_0 + p) = 1$ se e só se $V_0 + p \in \mathrm{Graff}(K, k)$, isto é, se e só se $(V_0 + p) \cap K \neq \varnothing$. Ou, de outra maneira, $\overline{\chi_{\mathrm{Graff}(K,k)}}(V_0, p) = 1$ se e só se $p \in K|V_0^\perp$, ou seja, se e só se p pertence à projecção ortogonal de K no subespaço $V_0^\perp$.

Podemos concluir então que, para $V_0 \in \mathrm{Gr}(n, k)$ fixo, $\overline{\chi_{\mathrm{Graff}(K,k)}} = \chi_{K|V_0^\perp}$, como funções de p. Assim,

$$\eta(K) = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \int_{V_0^\perp} \chi_{K|V_0^\perp}(p)\, dp\, d\nu_k^n(V_0) = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mathrm{vol}_{n-k}(K|V_0^\perp)\, d\nu_k^n(V_0),$$

donde, da continuidade (para a métrica de Hausdorff) do volume $(n-k)$-dimensional e do operador de projecção ortogonal, sai que η é uma valoração contínua em $\mathcal{K}^n$. Pelo teorema 3.2.1, concluímos que η admite uma única extensão a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ (mas, note-se que a equação (5.14) só se verifica para corpos convexos e não para uniões finitas deles). Como λ_k^n é invariante, o mesmo acontece com a valoração η.

Sendo $\alpha > 0$, temos agora que

$$\lambda_k^n(\mathrm{Graff}(\alpha K, k)) = \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mathrm{vol}_{n-k}(\alpha K|V_0^\perp)\, d\nu_k^n(V_0). \quad (5.16)$$

Como o volume $(n-k)$-dimensional é uma valoração homogénea de grau $n-k$ e notando que $\alpha K|V_0^\perp = \alpha(K|V_0^\perp)$, resulta que

$$\lambda_k^n(\mathrm{Graff}(\alpha K, k)) = \alpha^{n-k} \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(K, k)),$$

donde η é homogénea em $\mathcal{K}^n$, logo também o é em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

Assim, vimos que

$$\eta(\alpha K) = \alpha^{n-k}\eta(K).$$

Portanto, η é uma valoração invariante, contínua e homogénea de grau $n-k$ definida em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

Então, pelo corolário 4.5.3, existe uma constante $\gamma_k^n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\eta(K) = \gamma_k^n \mu_{n-k}(K),$$

para todo $K \in \mathcal{K}^n$, isto é,

$$\lambda_k^n(\mathrm{Graff}(K,k)) = \gamma_k^n \mu_{n-k}(K),$$

para todo $K \in \mathcal{K}^n$.

Temos, finalmente, de provar que $\gamma_k^n = 1$. Para isso, basta considerarmos, por exemplo, o caso em que $K := B_n$.

Pelos resultados das secções 2.3 e 5.1.3, temos

$$\lambda_k^n(\mathrm{Graff}(B_n,k)) = \gamma_k^n \mu_{n-k}(B_n) = \gamma_k^n \binom{n}{n-k} \frac{\omega_n}{\omega_k} = \gamma_k^n \, \omega_{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, ainda pela fórmula da secção 5.1.3, temos

$$\begin{aligned} \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(B_n,k)) &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \mathrm{vol}_{n-k}(B_n|V_0^\perp)\, d\nu_k^n(V_0) \\ &= \int_{\mathrm{Gr}(n,k)} \omega_{n-k}\, d\nu_k^n(V_0) \\ &= \omega_{n-k}\, \nu_k^n(\mathrm{Gr}(n,k)) \\ &= \omega_{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $\gamma_k^n = 1$ e que

$$\mu_{n-k}(K) = \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(K,k)),$$

se $K \in \mathcal{K}^n$. □

No final desta prova ficou clara a importância da escolha da normalização que fizemos em (5.11).

Note-se que o teorema acabado de demonstrar só é válido para conjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$, isto é, só é válido em $\mathcal{K}^n$. No entanto, podemos estendê-lo a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ usando a *Fórmula de Hadwiger* (5.18). Para tal, definimos uma aplicação $\widetilde{\mu}_{n-k}$ em $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$, dada por

$$\widetilde{\mu}_{n-k}(L) := \int_{\mathrm{Graff}(n,k)} \mu_0(L \cap V)\, d\lambda_k^n(V), \tag{5.17}$$

para todo $L \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

É fácil ver que $\widetilde{\mu}_{n-k}$ é uma valoração. Vejamos que a sua restrição a $\mathcal{K}^n$ coincide com μ_{n-k}.

Note-se que se K for um corpo convexo qualquer e $V \in \mathrm{Graff}(n,k)$, então $K \cap V \in \mathcal{K}^n$ e, portanto, $\mu_0(K \cap V) = \chi_{\mathrm{Graff}(K,k)}(V)$. Então, (5.17) implica que

$$\widetilde{\mu}_{n-k}(K) = \lambda_k^n(\mathrm{Graff}(K,k)).$$

Pelo teorema anterior, resulta que $\widetilde{\mu}_{n-k} = \mu_{n-k}$ em $\mathcal{K}^n$ e concluímos que (5.17) nos dá a extensão de μ_{n-k} a $\mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$, e

$$\mu_{n-k}(L) = \int_{\mathrm{Graff}(n,k)} \mu_0(L \cap V)\, d\lambda_k^n(V), \tag{5.18}$$

para todo $L \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$.

Nesta fórmula está patente a grande importância da característica de Euler como volume intrínseco de um corpo convexo. A partir da característica de Euler é possível determinar todos os outros n volumes intrínsecos de um corpo policonvexo.

5.3 Aplicações e exemplos

Nesta secção damos algumas aplicações provenientes do que acabámos de mostrar, isto é, da relação existente entre a Grassmaniana Afim e os volumes intrínsecos de um corpo policonvexo.

5.3.1 Fórmula de Crofton

Em Geometria Diferencial a Fórmula de Crofton clássica relaciona o perímetro de uma curva regular que limita um corpo policonvexo L de $\mathbb{R}^2$, com a medida do conjunto de

todas as rectas que intersectam L, contando o número de intersecções de cada recta com L, a que chamamos a *multiplicidade* de cada recta. Ou seja, temos o seguinte

Teorema 5.3.1 (Fórmula de Crofton) *Seja $L \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^2)$. Então a medida de todas as rectas que intersectam L (contando com a multiplicidade de cada recta) é igual ao perímetro l de L. Ou seja, se m_r for o número de intersecções de uma recta r com a curva que delimita L (isto é, com $\mathrm{fr}(L)$), tem-se que*

$$l = \int_{\mathrm{Graff}(2,1)} m_r \, d\lambda_1^2(r).$$

Vamos ver que este teorema é um caso particular de um mais geral e que é consequência imediata da Fórmula de Hadwiger. Seja $L \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^2)$. Ora, para cada recta r, m_r toma o valor $0, 2, 4, \ldots$. É claro que há casos em que esse número de intersecções é ímpar ou infinito (ver figura seguinte), no entanto, mostra-se que esses casos têm medida nula em relação a λ_1^2.

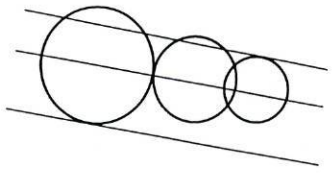


Figura 5.1: Casos de rectas que intersectam a fronteira de um corpo policonvexo num número ímpar de pontos: 1, 3 e 5.

Ora, sendo l o perímetro de L, tendo em conta a Fórmula de Hadwiger (5.18) e notando que $\mu_0(L \cap r)$ é igual ao número de componentes convexas de L (mais uma vez, exceptuando os casos mencionados atrás e que têm medida nula) e, portanto, é igual a $\frac{m_r}{2}$, temos que

$$\mu_1(L) = \int_{\mathrm{Graff}(2,1)} \mu_0(L \cap r) \, d\lambda_1^2(r) = \int_{\mathrm{Graff}(2,1)} \frac{m_r}{2} \, d\lambda_1^2(r).$$

Como $\mu_1(L) = \frac{l}{2}$, resulta que

$$l = \int_{\mathrm{Graff}(2,1)} m_r \, d\lambda_1^2(r).$$

Portanto, a Fórmula de Crofton deduz-se imediatamente da Fórmula de Hadwiger, quando estamos em $\mathbb{R}^2$.

Nada nos impede de passar para $\mathbb{R}^n$ e generalizar a Fórmula de Crofton. Consideremos um corpo policonvexo $L \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$ e seja $S(L)$ a área de superfície de L. Para cada recta V em $\mathbb{R}^n$, seja m_V igual ao número de intersecções de V com L. Mais uma vez se verifica que m_V toma "quase sempre" um valor par e que, como $\mu_0(L \cap V)$ mede o número de componentes convexas de L, então tem-se que $\mu_0(L \cap V) = \frac{m_V}{2}$. Então,

$$\frac{S(L)}{2} = \mu_{n-1}(L) = \int_{\text{Graff}(n,1)} \mu_0(L \cap V)\, d\lambda_1^n(V) = \int_{\text{Graff}(n,1)} \frac{m_V}{2}\, d\lambda_1^n(V),$$

logo

$$S(L) = \int_{\text{Graff}(n,1)} m_V\, d\lambda_1^n(V).$$

Portanto, o próximo resultado é uma generalização da Fórmula de Crofton a qualquer dimensão n.

Teorema 5.3.2 *Seja $L \in \mathbf{U}(\mathcal{K}^n)$. Então a medida de todas as rectas que intersectam L (contando com a multiplicidade de cada recta) é igual à área de superfície $S(L)$ de L. Ou seja, se m_V for o número de intersecções de uma recta V com a fronteira de L, tem-se que*

$$S(L) = \int_{\text{Graff}(n,1)} m_V\, d\lambda_1^n(V).$$

Esta fórmula ainda pode ser generalizada considerando intersecções de subespaços afins de dimensão $k \in \{0, \ldots, n\}$ com L e usando o volume intrínseco de ordem $m \in \{0, \ldots, n\}$ da intersecção, no lugar da característica de Euler ([Kl-Ro], pág. 124).

5.3.2 Monotonia dos volumes intrínsecos

Sejam A e B dois corpos convexos em $\mathbb{R}^n$ e tais que $A \subseteq B$. Vamos determinar uma relação entre $\mu_k(A)$ e $\mu_k(B)$, com $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Se V for um subespaço afim de dimensão $n-k$, temos a seguinte relação:

$$A \cap V \neq \varnothing \Rightarrow B \cap V \neq \varnothing.$$

Então, usando o teorema 5.2.1, temos que

$$\lambda_{n-k}^n(\text{Graff}(A, n-k)) \leq \lambda_{n-k}^n(\text{Graff}(B, n-k)).$$

Portanto, $\mu_k(A) \leq \mu_k(B)$.

Temos então o seguinte resultado nada óbvio tendo em conta a definição dos volumes intrínsecos dada a partir do polinómio do volume de um corpo paralelo.

Teorema 5.3.3 *Sejam $A, B \in \mathcal{K}^n$ tais que $A \subseteq B$ e $k \in \{0, \ldots, n\}$. Então*

$$\mu_k(A) \leq \mu_k(B).$$

5.3.3 Um problema de probabilidade

A partir do teorema 5.2.1, é também possível dar uma interpretação probabilística dos volumes intrínsecos e que está relacionada com a interpretação geométrica acabada de estudar.

Consideremos o seguinte problema. Dados dois corpos convexos A e B em $\mathbb{R}^n$ tais que $A \subseteq B$, qual é a probabilidade de um subespaço afim de dimensão k intersectar A sabendo que intersecta B?

Começando pelos casos mais simples, sabemos que a probabilidade de um ponto pertencer a A sabendo que pertence a B é dada por $\frac{\mathrm{vol}_n(A)}{\mathrm{vol}_n(B)}$, isto é

$$\frac{\mu_n(A)}{\mu_n(B)}.$$

Por outro lado, a probabilidade de uma recta intersectar A sabendo que intersecta B é dada por $\frac{S(A)}{S(B)}$ ou

$$\frac{\mu_{n-1}(A)}{\mu_{n-1}(B)}.$$

Generalizando e usando o que vimos na secção 5.2, podemos então responder à questão colocada. Se $A, B \in \mathcal{K}^n$ são tais que $A \subseteq B$ e V for um subespaço afim tal que $\dim(V) = k$ e $V \cap B \neq \varnothing$, então a probabilidade de V ser tal que $V \cap A \neq \varnothing$ é dada precisamente por

$$\frac{\mu_{n-k}(A)}{\mu_{n-k}(B)}.$$

Note-se que se B tiver, pelo menos, dimensão $n-k$ então irá conter alguma esfera de dimensão $n-k$, o que garante, em vista do teorema 5.3.3, que $\mu_{n-k}(B) > 0$. Nessas condições o quociente $\frac{\mu_{n-k}(A)}{\mu_{n-k}(B)}$ está, portanto, bem definido.

Apêndice A

Funções harmónicas na esfera

A razão da inclusão deste apêndice é a justificação de um pequeno passo na prova da proposição 4.3.4, no qual afirmámos que a Transformação Cosseno, $\mathcal{C}$, ali definida, é bijectiva no espaço das funções pares, integráveis e C^∞ em $\mathbb{S}^{n-1}$. De facto, só a sobrejectividade dessa transformação é necessária para a demonstração em causa, mas demonstraremos neste apêndice a sua bijectividade.

Ora, essa justificação requer a utilização das funções harmónicas na esfera, $\mathbb{S}^{n-1}$. Esta teoria generaliza a teoria das séries de Fourier a qualquer dimensão, $n \geq 2$.

Vamos ver que se $F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, então podemos determinar a respectiva expansão em série de harmónicas $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m$ (escrevemos $F \sim \sum_{m=0}^{\infty} Q_m$), onde m será a ordem de Q_m.

A prova da sobrejectividade de $\mathcal{C}$ será, no essencial, a seguinte.

Veremos que cada função harmónica é um vector próprio de $\mathcal{C}$, associado ao valor próprio $\omega_{n-1}\lambda_{n,m}$. Isto é, se H for uma função harmónica em $\mathbb{S}^{n-1}$ de ordem m, então $\mathcal{C}(H) = \omega_{n-1}\lambda_{n,m}H$, onde $\lambda_{n,m}$ é uma constante que depende de n e de m e é igual a zero se e só se m for ímpar. Por outro lado, se F for par então os termos de ordem ímpar da sua expansão harmónica são todos nulos, de modo que $F \sim \sum_{m=0,\ m \text{ par}}^{\infty} Q_m$ e, portanto, $\mathcal{C}(F) = \omega_{n-1} \sum_{m=0,\ m \text{ par}}^{\infty} \lambda_{n,m} Q_m$. Então, se $G := \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{m=0,\ m \text{ par}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n,m}} Q_m$, temos que $\mathcal{C}(G) = \sum_{m=0,\ m \text{ par}}^{\infty} Q_m = F$. Teremos, finalmente de verificar que G está bem definida, isto é que a série $\sum_{m=0,\ m \text{ par}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n,m}} Q_m$ converge para alguma função em $\mathbb{S}^{n-1}$, que será a função G. Para isso, demonstraremos que a série converge uniformemente. Nesta prova entrarão restrições quanto à diferenciabilidade da aplicação F.

Alguns dos resultados enunciados mais à frente, não são acompanhados pela respectiva

prova. Nestes casos, indicamos [Gr] como referência para as demonstrações omitidas.

A.1 Produto interno

Definimos o conjunto $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ como sendo o conjunto de todas as funções de quadrado integrável em $\mathbb{S}^{n-1}$. Portanto, $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ consiste em todas as funções reais F em $\mathbb{S}^{n-1}$ tais que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} F(u)^2 d\sigma_{n-1}(u) < \infty.$$

Definição A.1.1 Se $F, G \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, então o *produto interno*, $\langle F, G\rangle$, entre F e G é assim definido:

$$\langle F, G\rangle := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} F(u)G(u)d\sigma_{n-1}(u),$$

desde que o integral exista. A *norma* de F é dada por $\|F\| := \langle F, F\rangle^{1/2}$.

Se $F, G \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, então as desigualdades triangular, $\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$, e de Cauchy-Schwarz, $\langle F, G\rangle \leq \|F\|\|G\|$, também são válidas. O conjunto $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, munido das operações usuais e com a identificação usual de funções que são iguais em quase todo o ponto (qtp) é um espaço de Hilbert.

Generalizando, se Φ é uma função em $\mathbb{S}^{n-1}$ com valores em $\mathbb{R}^n$, então $\|\Phi\|$ é definida como a norma funcional da norma euclidiana de Φ, ou seja,

$$\|\Phi\| := \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Phi(u)|^2 d\sigma_{n-1}(u)\right)^{1/2}.$$

Definição A.1.2 Se $F, F_i \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ $(i = 0, 1, \ldots)$ e

$$\lim_{i\to\infty} \|F_i - F\| = 0,$$

diz-se que a sucessão $F_0, F_1, \ldots$ *converge em média* para F.

Definição A.1.3 Duas funções $F, G \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ dizem-se *ortogonais* se $\langle F, G\rangle = 0$.

Uma sequência $H_0, H_1, \ldots$, com $H_i \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ e $\|H_i\| \neq 0$ para todo i, diz-se uma *sequência ortogonal* se $\langle H_i, H_j\rangle = 0$, se $i \neq j$. Essa mesma sequência diz-se *ortonormal* se $\langle H_i, H_j\rangle = \delta_{ij}$.

Definição A.1.4 Se $F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ e $H_0, H_1, \ldots$ é uma sequência ortogonal de funções em $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, então os números

$$\alpha_i := \frac{\langle F, H_i \rangle}{\|H_i\|^2}$$

dizem-se os *coeficientes de Fourier* de F com respeito à sequência dada, e a série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i H_i$$

é designada por *série de Fourier* de F, com respeito à sequência dada. Para indicar que $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i H_i$ é a série de Fourier de uma dada função F, escrevemos

$$F \sim \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i H_i.$$

Através da definição dos coeficientes do Fourier, deduzimos imediatamente que

$$\left\| F - \sum_{i=0}^{m} \alpha_i H_i \right\|^2 = \|F\|^2 - \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^2 \|H_i\|^2$$

donde resulta que

$$\lim_{m \to +\infty} \left\| F - \sum_{i=0}^{m} \alpha_i H_i \right\| = 0 \tag{A.1}$$

se e só se se verifica a *equação de Parseval*, isto é

$$\|F\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \|H_i\|^2.$$

Portanto, podemos dizer que a série de Fourier de uma função $F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ com respeito a uma dada sequência ortogonal de funções $H_0, H_1, \ldots$ de $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ converge em média para F se e só se a equação de Parseval se verifica.

Definição A.1.5 Uma sequência ortogonal $H_0, H_1, H_2, \ldots$ de funções em $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ tal que para toda a função $F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, a relação (A.1) se verifica, diz-se *completa*.

Enunciamos agora um lema que expressa, no contexto de $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, uma propriedade bem conhecida da projecção ortogonal num subespaço finitamente gerado.

Lema A.1.6 *Sejam $H_0, H_1, \ldots, H_m$ funções mutuamente ortogonais e pertencentes a $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ tais que $\|H_i\| \neq 0$, para todo i. Se $F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, tem-se que $\|F - \sum_{i=0}^{m} \gamma_i H_i\|$, considerada como uma função de $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$, é minimal se e só se $\gamma_i = \langle F, H_i \rangle / \|H_i\|^2$.*

A.2 Gradiente e operador de Beltrami

Se f é uma função cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contém $\mathbb{S}^{n-1}$ e cujo contradomínio está em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{R}^n$, notamos por $\hat{f}$ ou $f\hat{}$ a restrição de f a $\mathbb{S}^{n-1}$. Se, por outro lado, F está definida em $\mathbb{S}^{n-1}$, então $\check{F}$ ou $F\check{}$ denotam a *extensão radial* de F a $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ou seja

$$\check{F}(x) := F\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Note-se que $(F\check{})\hat{} = F$, mas, em geral, $(f\hat{})\check{} \neq f$.

Definição A.2.1 Uma função F em $\mathbb{S}^{n-1}$ diz-se de *classe* C^k (onde $1 \leq k \leq \infty$), se a sua extensão radial, $F\check{}$, for de classe C^k.

Definição A.2.2 O *Laplaciano*, Δ, e o *gradiente*, ∇, de uma função suficientemente diferenciável e definida num aberto de $\mathbb{R}^n$, são definidos, respectivamente, por

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

e

$$\nabla := e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + e_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

onde $(e_1, \ldots, e_n)$ representa a base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Usando a extensão anterior, podemos definir o Laplaciano e o gradiente, como operadores de funções definidas em $\mathbb{S}^{n-1}$. Estes operadores denotam-se por Δ_o e ∇_o e são definidos por

$$\Delta_o F := (\Delta \check{F})\hat{}$$

e

$$\nabla_o F := (\nabla \check{F})\hat{}.$$

Definição A.2.3 O operador Δ_o é designado por *operador de Laplace-Beltrami* ou, simplesmente, *operador de Beltrami*, enquanto que ∇_o se designa, novamente, por *gradiente*.

Como veremos a seguir, com estes operadores, podemos escrever a *Fórmula de Green*. Esta fórmula permitir-nos-á verificar que o operador de Beltrami é um operador simétrico. A partir daí, poderemos deduzir algumas propriedades das harmónicas na esfera.

Teorema A.2.4 (Fórmula de Green) *Sejam Q um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, com interior não vazio e fronteira regular. Então, se f e g são funções de classe C^2 definidas num aberto contendo Q, tem-se*

$$\int_{\mathrm{fr}(Q)} f\, D_N g = \int_Q (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g)\, dx,$$

onde o primeiro integral é o integral de uma forma diferencial numa hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$ e o segundo é o integral usual num conjunto de $\mathbb{R}^n$. $D_N g : \mathrm{fr}(Q) \to \mathbb{R}$ representa a derivada direccional de g, na direcção N, normal unitária exterior a $\mathrm{fr}(Q)$.

A demonstração deste resultado requer, novamente, resultados relativos a formas diferenciais definidas em variedades de $\mathbb{R}^n$ e à sua integração. Para os detalhes e desenvolvimento destas questões, consultar [Li] e [Sp].

Demonstração. Seja $N := (v_1, \ldots, v_n)$ a direcção normal unitária a $\mathrm{fr}(Q)$. Quando for necessário especificar o ponto x onde estamos a considerar o vector normal exterior unitário, escrevemos $N(x) := (v_1(x), \ldots, v_n(x))$. Sabe-se que $D_u g(x) = \langle \nabla g(x), u \rangle$, qualquer que seja a direcção u.

Então, sendo ω a forma volume em $\mathrm{fr}(Q)$, temos que

$$\int_{\mathrm{fr}(Q)} f\, D_N g := \int_{\mathrm{fr}(Q)} f\, D_N g\, \omega = \int_{\mathrm{fr}(Q)} f \langle \nabla g, N \rangle \omega = \int_{\mathrm{fr}(Q)} f \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} v_i \right) \omega. \qquad \text{(A.2)}$$

Como $\mathrm{int}(Q) \neq \varnothing$, $\mathrm{fr}(Q)$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^n$. Portanto, ([Li], pág. 422-423) neste caso

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} v_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

onde $(dx_1, \ldots, dx_n)$ é a base do espaço vectorial das formas lineares de grau 1, dual da base canónica de $\mathbb{R}^n$. Usámos também $dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ para representar de modo mais simples a forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$. Esta forma, calculada nos vectores $w_1, \ldots, w_{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, é dada pelo determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtém omitindo-se a i-ésima linha da matriz $n \times (n-1)$ cujas colunas são os vectores $w_1, \ldots, w_{n-1}$.

Por outro lado, sendo $w_1, \ldots, w_{n-1}$ vectores do espaço vectorial tangente a $\mathrm{fr}(Q)$ em x, $T_x(\mathrm{fr}(Q))$, tem-se que o produto vectorial $w_1 \times \cdots \times w_{n-1}$ é um vector perpendicular

a $T_x(\mathrm{fr}(Q))$. Logo, $w_1 \times \cdots \times w_{n-1} = \alpha N(x)$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, dado um vector z em $\mathbb{R}^n$, temos que

$$\langle z, N(x)\rangle\langle N(x), w_1 \times \cdots \times w_{n-1}\rangle = \langle z, N(x)\rangle\alpha = \langle z, \alpha N(x)\rangle = \langle z, w_1 \times \cdots \times w_{n-1}\rangle. \quad \text{(A.3)}$$

Mas, pela definição de produto vectorial, sabemos que

$$\langle N(x), w_1 \times \cdots \times w_{n-1}\rangle = \det(N(x), w_1, \ldots, w_{n-1})$$

e, por outro lado ([Li], pág. 422),

$$\det(N(x), w_1, \ldots, w_{n-1}) = \omega_x(w_1, \ldots, w_{n-1}),$$

onde ω_x é a forma volume em $T_x(\mathrm{fr}(Q))$.

Substituindo z por e_j em (A.3), resulta que

$$v_j(x)\omega_x(w_1, \ldots, w_{n-1}) = (-1)^{j+1}\,(dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n)_x(w_1, \ldots, w_{n-1}).$$

Portanto,

$$v_j\omega = (-1)^{j+1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Voltando a (A.2), ficamos com

$$\int_{\mathrm{fr}(Q)} f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} v_i\right)\omega = \int_{\mathrm{fr}(Q)} \left(f \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n\right)\right).$$

Aplicando o Teorema da Stokes, $\int_{\mathrm{fr}(Q)} \omega = \int_Q d\omega$, sai que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{fr}(Q)} \left(f \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n\right)\right) \\
&= \int_Q d\left(\sum_{i=1}^{n} f\frac{\partial g}{\partial x_i}(-1)^{i+1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n\right) \\
&= \int_Q \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_Q \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right)(-1)^{i+1} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_Q \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\right)(-1)^{i+1}(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \int_Q (\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g)\, dx,
\end{aligned}$$

o que prova a Fórmula da Green. □

Aqui só será necessário considerar os casos em que Q é uma bola ou o conjunto entre duas bolas concêntricas.

Consideremos duas funções F e G em $\mathbb{S}^{n-1}$, de classe C^2, e sejam $f := \check{F}$ e $g := \check{G}$. Sejam $r_0 \in]0,1[$ qualquer, $r > r_0$ e Q a aderência de $B(0_{\mathbb{R}^n}, r) \setminus B(0_{\mathbb{R}^n}, r_0)$. Como, por construção, f e g são constantes na direcção radial de centro na origem, temos que $D_N f = D_N g = 0$. Da fórmula de Green, resulta então que

$$\int_Q (\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle + f(x)\Delta g(x))dx = 0,$$

ou seja

$$\int_{r_0}^{r} \left(\int_{\mathrm{fr}(B(0_{\mathbb{R}^n},\rho))} (\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle + f(x)\Delta g(x))d\sigma(\rho, x) \right) d\rho = 0,$$

onde $d\sigma(\rho, x)$ representa o elemento volume de $\mathrm{fr}(B(0_{\mathbb{R}^n}, \rho))$. Derivando em ordem a r e, depois, tomando $r = 1$, resulta (pois r_0 é qualquer em $]0,1[$) que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle + f(x)\Delta g(x))d\sigma_{n-1}(x) = 0,$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} F\Delta_o G \, d\sigma_{n-1} = -\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \nabla_o F, \nabla_o G \rangle \, d\sigma_{n-1}.$$

Daqui sai logo que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} F\Delta_o G \, d\sigma_{n-1} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} G\Delta_o F \, d\sigma_{n-1},$$

isto é,

$$\langle F, \Delta_o G \rangle = \langle \Delta_o F, G \rangle.$$

Portanto, o operador de Beltrami é um operador simétrico.

Outra relação importante é obtida em (A.5). Antes, vamos demonstrar a chamada Relação de Euler, necessária para o lema A.2.6 que antecede essa relação.

Proposição A.2.5 (Relação de Euler) *Sejam U um cone convexo aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e que é positivamente homogénea de grau m. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = m f(x).$$

Demonstração. Para demonstrar esta proposição, basta recorrermos à Regra da Cadeia, (A.4). Consideremos o seguinte caminho diferenciável $\lambda :]0, +\infty[\to U$,

$$\lambda(t) = tx = (tx_1, \ldots, tx_n) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)).$$

Então, $f \circ \lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t_0 e

$$(f \circ \lambda)'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0\, x)\, \lambda_i'(t_0). \tag{A.4}$$

Ora, $f \circ \lambda(t) = f(tx) = t^m f(x)$, donde $(f \circ \lambda)'(t) = mt^{m-1} f(x)$. Por outro lado, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\, x)\, \lambda_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\, x)\, x_i$. Tomando $t = 1$ em ambos os casos, e usando (A.4), sai que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = m f(x). \qquad \square$$

O próximo lema permitir-nos-á concluir, quando definirmos as funções harmónicas na esfera, que estas são vectores próprios do operador de Beltrami. Fornecer-nos-á também o respectivo valor próprio.

Lema A.2.6 *Sejam f, U e m como na proposição anterior e ponhamos*

$$g(x) := f\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Então,

$$\Delta g(x) = |x|^{-m} \Delta f(x) - m(m + n - 2)|x|^{-m-2} f(x).$$

Demonstração. A prova será exclusivamente computacional, isto é, vamos provar a fórmula acima por cálculo directo. Como f é positivamente homogénea de grau m, sai que $g(x) = |x|^{-m} f(x)$.

Verificamos que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = |x|^{-m} \left(-m f(x)\, x_i\, |x_i|^{-2} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

e também

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = |x|^{-m-4}\, x_i^2 (m^2 + 2m) f(x) + |x|^{-m-2} \left(-2m\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - m f(x)\right) + |x|^{-m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Portanto, usando a Relação de Euler da proposição anterior,

$$\begin{aligned}
\Delta(g(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \\
&= |x|^{-m-4}(m^2+2m)f(x)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - |x|^{-m-2}2m\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \\
&\quad -|x|^{-m-2}mf(x)n + |x|^{-m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\
&= |x|^{-m-2}(m^2+2m)f(x) - |x|^{-m-2}2m^2 f(x) - |x|^{-m-2}mnf(x) + \\
&\quad +|x|^{-m}\Delta f(x) \\
&= |x|^{-m-2}(-m^2+2m-mn)f(x) + |x|^{-m}\Delta f(x) \\
&= |x|^{-m}\Delta f(x) - m(m+n-2)|x|^{-m-2}f(x).
\end{aligned}$$

□

Deste lema resulta que, se $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$(\Delta_o \hat{f})(u) = (\Delta f)(u) - m(m+n-2)f(u). \tag{A.5}$$

A.3 Integração na esfera

Vamos provar o seguinte resultado que relaciona a integração em $\mathbb{S}^{n-1}$ com a integração em $[-1,1]$.

Daqui em diante, aparece em diversas situações uma constante v que é definida por

$$v := \frac{n-3}{2}.$$

Lema A.3.1

(i) Se N é um subconjunto de $[-1,1]$ de medida nula, com respeito à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, então para todo $p \in \mathbb{S}^{n-1}$, o conjunto

$$U := \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \langle u, p\rangle \in N\}$$

tem medida nula, com respeito à medida de Lebesgue σ_{n-1} em $\mathbb{S}^{n-1}$.

(ii) Se Φ é uma função limitada e integrável (segundo Lebesgue) em $[-1,1]$, e se p é um ponto de $\mathbb{S}^{n-1}$, então $\Phi(\langle u,p\rangle)$, considerada como uma função de u em $\mathbb{S}^{n-1}$, é σ_{n-1}-integrável e

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(\langle u,p\rangle) d\sigma_{n-1}(u) = \sigma_{n-2} \int_{-1}^{1} \Phi(t)(1-t^2)^v dt. \tag{A.6}$$

Demonstração. Vamos começar por mostrar que *(ii)* é válido para funções características de algum subintervalo de $[-1,1]$. Suponhamos, então, que $\Phi = \chi_I$, onde I é um subintervalo qualquer de $[-1,1]$. Então $\chi_I(\langle u,p\rangle)$ é a função característica de uma região de $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_I(\langle u,p\rangle) d\sigma_{n-1}(u)$ é a área dessa região. Para calcularmos este integral, consideremos o seguinte difeomorfismo entre $\widetilde{\mathbb{S}}^{n-1} := \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{(0,\ldots,0,1),(0,\ldots,0,-1)\}$ e $\mathbb{S}^{n-2}\times\,]-1,1[$.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^{n-2}\times\,]-1,1[&\longrightarrow \widetilde{\mathbb{S}}^{n-1} \\ (x,t) &\longmapsto (\sqrt{1-t^2}\,x, t)\ . \end{aligned}$$

Sejam $(x,t) \in \mathbb{S}^{n-2}\times\,]-1,1[$ fixo e $D\phi_{(x,t)} : T_{(x,t)}\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{R} \to T_{\phi(x,t)}\widetilde{\mathbb{S}}^{n-1}$ a derivada de ϕ em (x,t).

Seja $b_1 := ((u_1,0),\ldots,(u_{n-1},0),(0,1))$ uma base ortonormada de $T_{(x,t)}\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{R}$. Então $\langle u_i, x\rangle = 0$, para todo $i \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Para cada $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, seja $\alpha :]-\epsilon,\epsilon[\to \mathbb{S}^{n-2}\times\,]-1,1[$ tal que $\alpha(s) := \left(\frac{x+u_i s}{\sqrt{1+s^2}}, t\right)$. Então $\alpha(0) = (x,t)$ e $\alpha'(0) = (u_i,0)$. Assim,

$$(\phi\circ\alpha)(s) = \left(\sqrt{1-t^2}\,\frac{x+u_i s}{\sqrt{1+s^2}}, t\right)$$

e

$$(\phi\circ\alpha)'(0) = \sqrt{1-t^2}(u_i,0).$$

Portanto,

$$D\phi_{(x,t)}(u_i,0) = \sqrt{1-t^2}(u_i,0).$$

Por outro lado, sendo $\beta :]-\epsilon,\epsilon[\to \mathbb{S}^{n-2}\times\,]-1,1[$ a curva definida por $\beta(s) := (x,t+s)$, temos que $\beta(0) = (x,t)$ e $\beta'(0) = (0,1)$. Então,

$$(\phi\circ\beta)(s) = \left(\sqrt{1-(t+s)^2}\,x, t+s\right)$$

e

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, x, 1 \right).$$

Portanto,

$$D\phi_{(x,t)}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(-tx, \sqrt{1-t^2} \right).$$

Consideremos a base ortonormada $b_2 := \left\{ (u_1, 0), \ldots, (u_{n-1}, 0), \left(-tx, \sqrt{1-t^2}\right) \right\}$ de $T_{\phi(x,t)}\widetilde{\mathbb{S}}^{n-1}$. A matriz de $D\phi_{(x,t)}$ em relação a b_1 e b_2 é

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{1-t^2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-t^2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} \langle \cdot, p \rangle : \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \langle u, p \rangle . \end{aligned}$$

e $f := \chi_I \circ \langle \cdot, p \rangle$.

Então, notando que $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \widetilde{\mathbb{S}}^{n-1}$ é um conjunto de medida de Lebesgue nula e considerando o caso em que $p = p_0 := (0, \ldots, 0, 1)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_I(\langle u, p_0 \rangle) d\sigma_{n-1}(u) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u) d\sigma_{n-1}(u) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-2} \times]-1,1[} (f \circ \phi)(x,t) |\det(M)|\, dx\, dt \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_{-1}^{1} \chi_I(\langle (x,t), p_0 \rangle)(1-t^2)^v\, dt\, dx \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-2}} \int_{-1}^{1} \chi_I(t)(1-t^2)^v\, dt\, dx \\ &= \sigma_{n-2} \int_{-1}^{1} \chi_I(t)(1-t^2)^v dt. \end{aligned}$$

Relativamente ao caso em que $p \neq p_0$, consideramos uma isometria linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (que, em particular, envia $\mathbb{S}^{n-1}$ em si mesma) tal que $T(p) = p_0$. Então, usando a invariância da medida esférica de Lebesgue por isometrias e o facto de que uma isometria

preserva o produto interno, deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_I(\langle u,p\rangle)d\sigma_{n-1}(u) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_I(\langle T^{-1}(u),p\rangle)d\sigma_{n-1}(u)\\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_I(\langle u,T(p)\rangle)d\sigma_{n-1}(u)\\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_I(\langle u,p_0\rangle)d\sigma_{n-1}(u)\\ &= \sigma_{n-2}\int_{-1}^{1} \chi_I(t)(1-t^2)^v dt.\end{aligned}$$

Das propriedades do integral de Lebesgue sai a validade de (A.6) para funções características de uniões numeráveis de intervalos disjuntos, em particular para funções características de abertos e para funções simples.

Agora, para provar *(i)*, seja G_n um aberto de $\mathbb{R}$ tal que $N \subset G_n$ e tal que a medida de Lebesgue de G_n é menor que $\frac{1}{n}$. Seja U_n o conjunto aberto $\{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \langle u,p\rangle \in G_n\}$. Já vimos que (A.6) é válido se $\Phi = \chi_{G_n}$ e resulta que

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1}(U_n) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{G_n}(\langle u,p\rangle)d\sigma_{n-1}(u)\\ &= \sigma_{n-2}\int_{-1}^{1} \chi_{G_n}(t)(1-t^2)^v dt\\ &= \sigma_{n-2}\int_{G_n} (1-t^2)^v dt.\end{aligned}$$

Como $t \mapsto (1-t^2)^v$ é uma função integrável, o último integral será menor do que qualquer $\epsilon > 0$ dado, desde que n seja suficientemente grande. Como $U \subset U_n$ para todo n, resulta que U tem medida nula.

Para provar *(ii)*, usamos a existência de uma sucessão monótona e limitada de funções simples g_i e de um conjunto de medida nula $N \subset \mathbb{R}$ tais que $\lim_{i\to+\infty} g_i(x) = \Phi(x)$, se $x \notin N$ ([Ru], pág. 69). Se U é o conjunto correspondente a N definido em *(i)*, resulta que, para p fixo $\lim_{i\to+\infty} g_i(\langle u,p\rangle) = \Phi(\langle u,p\rangle)$, se $u \notin U$ e que $\lim_{i\to+\infty} g_i$ é uma função mensurável e integrável. Portanto, $u \mapsto \Phi(\langle u,p\rangle)$ é integrável em $\mathbb{S}^{n-1}$. Finalmente, como (A.6) é válido para as funções simples g_i, podemos estender a sua validade a Φ através de uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada. (Note-se que, para $n = 2$, o factor a ser integrado no segundo membro de (A.6) não é limitado mas é dominado por uma função integrável). □

A.4 Funções harmónicas na esfera

Definição A.4.1 Um polinómio p diz-se *harmónico* se é homogéneo e se $\Delta p = 0$.

Definição A.4.2 Uma função *harmónica na esfera* de dimensão n é a restrição a $\mathbb{S}^{n-1}$ de um polinómio harmónico em n variáveis.

Frequentemente, em vez de função harmónica na esfera, dizemos simplesmente harmónica. Assim, por exemplo, as restrições a $\mathbb{S}^{n-1}$ das funções constantes ou das formas lineares $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são harmónicas.

Vamos, agora, introduzir as seguintes notações que serão usadas no seguimento. Assim, $\mathcal{V}_m^n$ representa o espaço de todos os polinómios homogéneos de grau m em n variáveis; $\mathcal{Q}_m^n$ representa o espaço de todos os polinómios harmónicos de grau m em n variáveis; $\mathcal{H}_m^n$ representa o espaço de todas as funções harmónicas de dimensão n na esfera que são obtidas através de restrições a $\mathbb{S}^{n-1}$ de polinómios de $\mathcal{Q}_m^n$ e $\mathcal{H}^n$ representa o espaço de todas as somas finitas de harmónicas de dimensão n.

O termo "espaço" aplicado na definição das estruturas anteriores refere-se à sua estrutura de espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, pois convencionamos que 0 é um elemento destes conjuntos. Obviamente, todos estes espaços, à excepção de $\mathcal{H}^n$, têm dimensão finita.

Definição A.4.3 A *ordem* de uma n-harmónica H não nula é o único número m tal que $H \in \mathcal{H}_m^n$. Ou seja, H tem ordem m se é a restrição a $\mathbb{S}^{n-1}$ de um polinómio harmónico de grau m.

Representamos a ordem de uma harmónica H por $\chi(H)$, e o (único) polinómio harmónico cuja restrição a $\mathbb{S}^{n-1}$ é H, por $H^{\mathcal{Q}}$ (ver teorema A.4.4).

Quando $n = 2$, exemplos de harmónicas de ordem m são $f(x,y) = \mathrm{Re}\,((x+iy)^m)$ e $g(x,y) = \mathrm{Im}\,((x+iy)^m)$.

Note-se que $H^{\mathcal{Q}} \neq \check{H}$, pois $H^{\mathcal{Q}}$ é um polinómio de grau m, enquanto que $\check{H}$ é homogénea de grau 0.

Observe-se que (A.5) implica que as funções harmónicas de ordem m são vectores próprios do operador de Beltrami associadas ao valor próprio $-m(m+n-2)$.

Relembrando as propriedades em relação à ortogonalidade das séries trigonométricas de Fourier, podemos ser levados a esperar propriedades análogas em relação às harmónicas esféricas. De facto, o resultado seguinte contém o resultado principal a esse respeito.

Teorema A.4.4 *A aplicação $f \to \hat{f}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{Q}_m^n$ e $\mathcal{H}_m^n$. Além disso, se $G \in \mathcal{H}_m^n$ e $H \in \mathcal{H}_l^n$, com $m \neq l$, então G e H são ortogonais.*

Demonstração. Que a aplicação $f \to \hat{f}$ é sobrejectiva resulta da definição de $\mathcal{H}_m^n$; é óbvio que também é uma aplicação linear. Quanto à injectividade, consideremos $f, g \in \mathcal{Q}_m^n$ tais que $\hat{f} = \hat{g}$. Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, temos que

$$f(x) = f\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = |x|^m f\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Mas, como $\hat{f} = \hat{g}$, sai que $f\left(\frac{x}{|x|}\right) = g\left(\frac{x}{|x|}\right)$, donde

$$f(x) = |x|^m g\left(\frac{x}{|x|}\right) = g(x),$$

isto é, $f = g$ e a aplicação é injectiva.

Para mostrar a última parte do teorema, basta notar que G é um vector próprio de Δ_0 associado ao vector próprio $-m(m+n-2)$ e que o mesmo acontece a H, mas associado ao valor próprio $-l(l+n-2)$. Resulta que G e H são vectores próprios associados a valores próprios distintos de um operador simétrico. Portanto, G e H são ortogonais. De facto,

$$\begin{aligned} \langle \Delta_0 G, H\rangle = \langle G, \Delta_0 H\rangle &\Leftrightarrow \langle -m(m+n-2)G, H\rangle = \langle G, -l(l+n-2)H\rangle \\ &\Leftrightarrow (-m(m+n-2) + l(l+n-2))\langle G, H\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle G, H\rangle = 0, \end{aligned}$$

pois $-m(m+n-2) \neq -l(l+n-2)$. □

Este lema mostra, em particular, que os espaços $\mathcal{H}_m^n$, para diferentes valores de m, só têm o 0 em comum. Além disso, também mostra que, para cada $m \geq 1$, $\mathcal{H}_1^n + \cdots + \mathcal{H}_m^n$ é uma soma directa, ou seja se $H_i \in \mathcal{H}_i^n$, então $H_1 + \cdots + H_m = 0$ implica que $H_1 = \cdots = H_m = 0$. De facto, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\langle H_1 + \cdots + H_m, H_j\rangle = \langle 0, H_j\rangle = 0$, mas também $\langle H_1 + \cdots + H_m, H_j\rangle = \|H_j\|^2$, donde resulta que $H_j = 0$.

A dimensão de $\mathcal{H}_m^n$ denota-se por $N(n,m)$. O lema anterior mostra que $N(n,m) = \dim \mathcal{H}_m^n = \dim \mathcal{Q}_m^n$. O próximo resultado é consequência do facto (não demonstrado aqui) de a aplicação linear de $\mathcal{V}_m^n$ em $\mathcal{V}_{m-2}^n$ tal que $f \mapsto \Delta f$ ser sobrejectiva e ter núcleo $\mathcal{Q}_m^n$

([Gr], pág. 64). Assim, designando por $K(n,m)$ a dimensão de $\mathcal{V}_m^n$, e considerando que $\mathcal{V}_{-2}^n$ e $\mathcal{V}_{-1}^n$ são iguais ao espaço nulo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema A.4.5 *Tem-se que* $N(n,m) = K(n,m) - K(n,m-2)$.

De facto, mostra-se que, se $m \geq 0$, então $K(n,m) = \binom{n+m-1}{m}$ ([Gr], pág. 65). Portanto, resulta que

$$N(n,m) = \binom{n+m-1}{m} - \binom{n+m-3}{m-2} = \frac{2m+n-2}{m+n-2}\binom{m+n-2}{n-2}, \tag{A.7}$$

onde o segundo coeficiente binomial é igual a 0 se $m < 2$ e a fracção $\frac{2m+n-2}{m+n-2}$ vale 1 se $n = 2$ e $m = 0$. Alguns valores particulares de $N(n,m)$ são

$$N(n,0) = 1, \qquad N(n,1) = n, \qquad N(2,m) = 2 \ (m > 0), \qquad N(3,m) = 2m+1.$$

Note-se que (A.7) implica que se n estiver fixo e m tender para $+\infty$, então $N(n,m)$ cresce na mesma ordem de m^{n-2}, isto é, $N(n,m) = O(m^{n-2})$. Isto quer dizer que existem constantes positivas fixas, mas dependentes de n, a_n e b_n tais que

$$a_n m^{n-2} \leq N(n,m) \leq b_n m^{n-2}. \tag{A.8}$$

Finalmente, designando uma harmónica H por *par* quando $H(u) = H(-u)$, para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ e por *ímpar* quando $H(-u) = -H(u)$, para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, notamos que harmónicas de ordem par são pares e as de ordem ímpar são ímpares.

A.5 Expansão em série

Se considerarmos um conjunto de harmónicas linearmente independentes e da mesma ordem, podemos, pelo método de Gram-Schmidt, transformar este conjunto noutro, constituído pelo mesmo número de harmónicas que o primeiro, mas que seja ortogonal.

Portanto, existem sequências ortogonais de harmónicas esféricas que, para cada $m > 0$, contêm $N(n,m)$ termos de ordem m. Uma tal sucessão de harmónicas diz-se *sequência standard* de harmónicas esféricas.

Vamos, agora, discutir a expansão de funções de $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ respeitante a uma dada sucessão standard de harmónicas.

Se $H_0, H_1, \ldots$ é uma sucessão standard de harmónicas na esfera, então, de acordo com as definições dadas na secção A.1, a série de Fourier de $F \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ é definida por

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j,$$

com $c_j := \langle F, H_j \rangle / \|H_j\|$, e para o indicar, escrevemos

$$F \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j \tag{A.9}$$

e dizemos que $\sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j$ é a *expansão harmónica* de F.

Se considerarmos uma expansão da forma (A.9), podemos associar todos os termos $c_j H_j$ que têm a mesma ordem. Deste procedimento resulta uma nova série da forma $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m$, onde cada Q_m é uma harmónica esférica de ordem m. Ou seja,

$$Q_m = \sum_{\chi(H_j)=m} c_j H_j.$$

Note-se que esta série não depende da sequência standard da qual foi obtida. De facto, o lema A.1.6 mostra que Q_m pode ser definida como a única harmónica de ordem m que melhor aproxima F, no sentido de L^2.

Chamamos a $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m$ a *expansão harmónica condensada* de F e escrevemos, de novo

$$F \sim \sum_{m=0}^{\infty} Q_m. \tag{A.10}$$

Note-se que Q_m tem sempre ordem m e que nas expressões (A.9) e (A.10), os termos de ordem ímpar são nulos se F é par e os termos de ordem par são nulos se F é ímpar.

Por exemplo, no caso das séries de Fourier trigonométricas é usual considerar a expansão condensada, agrupando-se os termos $a_j \cos j\theta$ e $b_j \operatorname{sen} j\theta$ de igual índice.

Vamos ver agora que uma sequência standard de harmónicas esféricas é completa.

Começamos por demonstrar um teorema que diz respeito à escrita de polinómios em $\mathbb{S}^{n-1}$ como soma de funções harmónicas e que será útil para provar que, de facto, as harmónicas constituem uma sequência completa.

Proposição A.5.1 *Seja $p(x_1, \ldots, x_n)$ um polinómio de grau k em n variáveis. Então existem harmónicas esféricas $P_0, P_1, \ldots, P_k$, onde P_i tem ordem i e tais que*

$$\hat{p} = P_0 + P_1 + \cdots + P_k.$$

Demonstração. Seja p um polinómio nas condições do enunciado. O caso em que $k = 0$ ou $k = 1$ é trivial porque qualquer polinómio homogéneo de grau 0 ou 1 é harmónico. Consideremos então o caso em que $k \geq 2$.

Seja $x := (x_1, \ldots, x_n)$ e consideremos o espaço vectorial $\mathcal{P}$ definido por

$$\mathcal{P} := \{q_k(x) + |x|^2 q_{k-2}(x) + |x|^4 q_{k-4}(x) + \cdots + |x|^{k-\delta} q_\delta(x) : q_i \in \Omega_i^n\},$$

onde δ é igual a 0 ou 1, consoante k é par ou ímpar.

Consideremos a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned} f : \Omega_k^n \times \Omega_{k-2}^n \times \Omega_{k-4}^n \times \cdots \times \Omega_\delta^n &\longrightarrow \mathcal{V}_k^n \\ (q_k, q_{k-2}, q_{k-4}, \ldots, q_\delta) &\longmapsto q_k(x) + |x|^2 q_{k-2}(x) + |x|^4 q_{k-4}(x) + \cdots + |x|^{k-\delta} q_\delta(x) \,. \end{aligned}$$

Seja $(q_k, q_{k-2}, q_{k-4}, \ldots, q_\delta)$ tal que $f(q_k, q_{k-2}, q_{k-4}, \ldots, q_\delta) = 0$, ou seja,

$$q_k(x) + |x|^2 q_{k-2}(x) + |x|^4 q_{k-4}(x) + \cdots + |x|^{k-\delta} q_\delta(x) = 0.$$

Então $\hat{q}_k + \hat{q}_{k-2} + \hat{q}_{k-4} + \cdots + \hat{q}_\delta = 0$, onde $\hat{q}_k, \hat{q}_{k-2}, \hat{q}_{k-4}, \ldots, \hat{q}_\delta$ são as harmónicas respectivas. Como $\mathcal{H}_k^n + \mathcal{H}_{k-2}^n + \mathcal{H}_{k-4}^n + \cdots + \mathcal{H}_\delta^n$ é uma soma directa, concluímos que $\hat{q}_k = \hat{q}_{k-2} = \hat{q}_{k-4} = \cdots = \hat{q}_\delta = 0$. Portanto, $q_k = q_{k-2} = q_{k-4} = \cdots = q_\delta = 0$. Resulta que f é injectiva e como

$$\begin{aligned} & \dim(\Omega_k^n \times \Omega_{k-2}^n \times \Omega_{k-4}^n \times \cdots \times \Omega_\delta^n) \\ = \; & N(n,k) + N(n,k-2) + N(n,k-4) + \cdots + N(n,\delta) \\ = \; & K(n,k) \\ = \; & \dim(\mathcal{V}_k^n), \end{aligned}$$

sai que $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{V}_k^n$, ou seja $\mathcal{P} = \mathcal{V}_k^n$.

Portanto, se $q(x)$ é um polinómio homogéneo de grau k em n variáveis, existem polinómios harmónicos $q_k(x), q_{k-2}(x), q_{k-4}(x), \ldots, q_\delta(x)$ tais que

$$q(x) = q_k(x) + |x|^2 q_{k-2}(x) + |x|^4 q_{k-4}(x) + \cdots + |x|^{k-\delta} q_\delta(x).$$

Restringindo a equação acima a $\mathbb{S}^{n-1}$ e notando que qualquer polinómio se pode escrever como soma de polinómios homogéneos, verificamos que se $p(x)$ é um polinómio qualquer de grau k, então existem harmónicas esféricas $P_0, P_1, \ldots, P_k$, com $P_i \in \mathcal{H}_i^n$, tais

que $\hat{p}(u) = P_0(u) + P_1(u) + \cdots + P_k(u)$, para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. □

Demonstramos agora que qualquer sequência standard de harmónicas é completa.

Teorema A.5.2 *Seja $H_0, H_1, \ldots$ uma sequência standard de harmónicas na esfera e se F é uma função qualquer em $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ tal que $F \sim \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i H_i$, então*

$$\lim_{l \to +\infty} \left\| F - \sum_{i=0}^{l} \alpha_i H_i \right\| = 0.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Por um teorema acerca da aproximação em média por funções contínuas ([Ru], pág. 69), sabemos que existe uma função contínua G em $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que $\|F - G\| < \frac{\epsilon}{2}$. Por outro lado, sendo $\| \cdot \|_\infty$ a norma do supremo em $\mathbb{S}^{n-1}$ ([Ru], pág. 65), o Teorema da Aproximação de Weierstrass, garante a existência de um polinómio P em $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que

$$\|G - P\|_\infty < \frac{\epsilon}{2\sqrt{\sigma_{n-1}}}.$$

Resulta que

$$\|G - P\| = \sqrt{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (G(u) - P(u))^2 \, d\sigma_{n-1}(u)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora, pela proposição anterior, P pode ser escrito como uma soma $\sum_{i=0}^{k} P_i$ de harmónicas e, portanto, temos que

$$\left\| F - \sum_{i=0}^{k} P_i \right\| < \epsilon.$$

Mas, então, pelo lema A.1.6, e tomando $l(k)$ de tal forma que $H_0, H_1, \ldots, H_{l(k)}$ contenha todos os termos da sequência standard de grau menor ou igual a k, resulta que, para $l \geq l(k)$,

$$\left\| F - \sum_{i=0}^{l} \alpha_i H_i \right\| \leq \left\| F - \sum_{i=0}^{k} P_i \right\| < \epsilon$$

e, portanto,

$$\lim_{l \to +\infty} \left\| F - \sum_{i=0}^{l} \alpha_i H_i \right\| = 0.$$

□

A.6 Polinómios de Legendre

Esta é uma secção auxiliar para que possamos definir os chamados polinómios de Legendre, que serão, juntamente com alguns resultados aqui enunciados (sem demonstração), úteis para a demonstração dos resultados da secção seguinte.

A definição dos polinómios de Legendre sai do seguinte teorema.

Teorema A.6.1 *Sejam $n \geq 2$ e $m \geq 0$. Existe exactamente um polinómio $P_m^n(t)$ com a seguinte propriedade: Se $H_1, \ldots, H_{N(n,m)}$ é uma base ortonormada de $\mathcal{H}_m^n$, então*

$$\sum_{i=1}^{N(n,m)} H_i(u)H_i(v) = \frac{N(n,m)}{\sigma_{n-1}} P_m^n(\langle u, v\rangle), \tag{A.11}$$

para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Além disso, o grau de P_m^n é m e para um fixo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, a função $P_m^n(\langle \cdot, v\rangle)$ é uma harmónica esférica n-dimensional de ordem m.

Note-se que no teorema acima se m é par então P_m^n é uma função par e que se m é ímpar então P_m^n é uma função ímpar.

Definição A.6.2 O polinómio P_m^n referido no teorema anterior designa-se por *polinómio de Legendre* de dimensão n e grau (ou ordem) m.

Do teorema A.6.1 sai que, para todo $m \geq 0$,

$$P_m^n(1) = 1. \tag{A.12}$$

De facto, pondo $v = u$ no teorema anterior e integrando em $\mathbb{S}^{n-1}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P_m^n(1)\, d\sigma_{n-1}(u) &= \frac{\sigma_{n-1}}{N(n,m)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{i=1}^{N(n,m)} H_i(u)^2\, d\sigma_{n-1}(u) \\ &= \frac{\sigma_{n-1}}{N(n,m)} \sum_{i=1}^{N(n,m)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_i(u)^2\, d\sigma_{n-1}(u) \\ &= \sigma_{n-1}, \end{aligned}$$

donde resulta que $P_m^n(1) = 1$.

Como consequência imediata dos teoremas A.4.4 e A.6.1, temos a ortogonalidade das funções $P_m^n(\langle u, v\rangle)$, para diferentes valores de m e com v fixo, que se reflecte num outro

tipo de ortogonalidade dos polinómios de Legendre. Para o verificar, introduzimos um novo produto interno.

Sendo f e g duas funções limitadas e integráveis em $[-1,1]$, esse produto interno entre f e g é dado por:

$$[f,g] := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)^v dt. \tag{A.13}$$

Proposição A.6.3 *Se P_m^n e P_l^n são polinómios de Legendre de dimensão n e graus m e l respectivamente, então*

$$[P_m^n, P_l^n] = \delta_{ml} \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2} N(n,l)}.$$

Proposição A.6.4 *Os polinómios de Legendre são tais que*

$$P_m^n(t) = \frac{(-1)^m}{2^m(v+1)(v+2)\cdots(v+m)} (1-t^2)^{-v} \frac{d^m}{dt^m}(1-t^2)^{v+m}. \tag{A.14}$$

Desta proposição sai que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $P_0^n(t) = 1$

Lema A.6.5 *Se m é ímpar, então $P_m^n(0) = 0$ e se m é par*

$$P_m^n(0) = (-1)^{m/2} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (m-1)}{(n-1)(n+1)\cdots(n+m-3)}. \tag{A.15}$$

A.7 Teorema de Funk-Hecke e Transformação Cosseno

Nesta secção vamos estudar a Transformação Cosseno, utilizada na proposição 4.3.4. Esta aplicação é um caso particular de um conjunto de aplicações lineares em $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, denominadas *Transformações Integrais* e que são da forma

$$\mathcal{T}(F)(u) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(\langle u,v\rangle) F(v) d\sigma_{n-1}(v),$$

onde Φ é uma função integrável em $[-1,1]$.

Recordemos que a Transformação Cosseno é dada por

$$\mathcal{C}(F)(u) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u,v\rangle| F(v) d\sigma_{n-1}(v).$$

As propriedades desta transformação resultam do seguinte teorema.

Teorema A.7.1 (Teorema de Funk-Hecke) *Se Φ é uma função limitada e integrável em $[-1,1]$ e $H \in \mathcal{H}_m^n$, então $\Phi(\langle u,v\rangle)$, com $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ fixo, é uma função integrável em $\mathbb{S}^{n-1}$ e*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(\langle u,v\rangle)H(v)d\sigma_{n-1}(v) = \alpha_{n,m}(\Phi)H(u), \tag{A.16}$$

com

$$\alpha_{n,m}(\Phi) := \sigma_{n-2}\int_{-1}^{1} \Phi(t)P_m^n(t)(1-t^2)^v dt.$$

Demonstração. Podemos supor que $\|H\| = 1$. A integrabilidade de $\Phi(\langle u,v\rangle)$ já foi demonstrada no lema A.3.1.

Suponhamos primeiro que $\Phi = P_l^n$. Se $m \neq l$, então, pela proposição A.6.3, sabemos que P_l^n e P_m^n são ortogonais relativamente ao produto interno definido em (A.13), donde o segundo membro de (A.16) é igual a zero. Pelo teorema A.6.1, com v fixo, $P_l^n(\langle \cdot, v\rangle)$ é uma função harmónica em $\mathbb{S}^{n-1}$, de grau l, donde pelo teorema A.4.4 é ortogonal a H, e o primeiro membro é igual a zero. Portanto, podemos prosseguir com a hipótese $m = l$. Seja $\{H_1, \ldots, H_{N(n,m)}\}$ uma base ortonormada de $\mathcal{H}_m^n$ e $H \in \mathcal{H}_m^n$ tal que $H_1 = H$. Então, por (A.11)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(\langle u,v\rangle)H(v)d\sigma_{n-1}(v) &= \frac{\sigma_{n-1}}{N(n,m)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{N(n,m)} H_i(u)H_i(v)H_1(v)\right) d\sigma_{n-1}(v) \\ &= \frac{\sigma_{n-1}}{N(n,m)}H(u),\end{aligned}$$

e a proposição A.6.3 mostra que o mesmo valor é obtido no segundo membro de (A.16).

Como todo o polinómio pode ser escrito como combinação linear de polinómios de Legendre de dimensão n e como ambos os membros de (A.16) dependem linearmente de Φ, resulta que (A.16) se verifica quando Φ é um polinómio. Através do Teorema da Aproximação de Weierstrass, obtemos (A.16) para funções contínuas. Finalmente, se Φ é uma função limitada e integrável em $[-1,1]$, existe uma sucessão $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas que converge em quase todo o ponto de $[-1,1]$ para Φ e tal que $|g_i(u)| \leq \|\Phi\|_\infty$ ([Ru], pág. 55). Além disso, o lema A.3.1 mostra que $g_i(\langle u,v\rangle)$ converge (com v fixo) para $\Phi(\langle u,v\rangle)$ em quase todo o ponto de $\mathbb{S}^{n-1}$. Assim, (A.16) resulta de uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada a ambos os membros de

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g_i(\langle u,v\rangle)H(u)d\sigma_{n-1}(u) = \sigma_{n-2}\int_{-1}^{1} g_i(t)P_m^n(t)(1-t^2)^v dt. \qquad \square$$

Observemos que, quando Φ é uma função par (como é o caso de $|\cdot|$ associada à Transformação Cosseno), se tem $\alpha_{n,m}(\Phi) = 0$, para m ímpar.

Interessa-nos saber qual o valor explícito de $\alpha_{n,m}$, no caso da Transformação Cosseno. O próximo lema dá-nos esse valor.

Lema A.7.2 *Se $H \in \mathcal{H}_m^n$ $(n \geq 2)$, então, para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$*

$$\mathcal{C}(H)(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle| H(v) d\sigma_{n-1}(v) = \omega_{n-1}\lambda_{n,m}H(u), \tag{A.17}$$

com $\lambda_{n,m} = 0$, se m é ímpar, e

$$\lambda_{n,m} = (-1)^{(m-2)/2}\, 2\, \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (m-3)}{(n+1)(n+3)\cdots(n+m-1)}, \tag{A.18}$$

se m é par ($\lambda_{n,0} = 2$ e $\lambda_{n,2} = \frac{2}{n+1}$).

Demonstração. Comecemos por relembrar que $\sigma_{n-2} = (n-1)\omega_{n-1}$.

Se $m = 0$, então o teorema A.7.1 mostra que

$$\lambda_{n,0} = (n-1)\int_{-1}^{1} |t|(1-t^2)^v dt = 2.$$

Se m é ímpar, então $H(v)$ é uma função ímpar, donde resulta imediatamente que $\lambda_{n,m} = 0$.

Consideremos, então, o caso em que m é par e $m \geq 2$. Neste caso, resulta de (A.16) e de (A.14) que

$$\lambda_{n,m} = \frac{n-1}{2^m(v+1)(v+2)\cdots(v+m)} \int_{-1}^{1} |t| \frac{d^m}{dt^m}(1-t^2)^{v+m} dt. \tag{A.19}$$

Integrando por partes e usando novamente (A.14), fica

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |t| \frac{d^m}{dt^m}(1-t^2)^{v+m} dt &= 2\int_0^1 t \frac{d^m}{dt^m}(1-t^2)^{v+m} dt \\
&= 2\left[\frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}}(1-t^2)^{v+m}\right]_{t=0} \\
&= 2\left[(1-t^2)^{-(v+2)} \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}}(1-t^2)^{(v+2)+(m-2)}\right]_{t=0} \\
&= 2^{m-1}(v+3)\cdots(v+m)P_{m-2}^{n+4}(0),
\end{aligned}$$

convencionando-se que a última expressão vale 2 se $m = 2$. Daqui, de (A.15) e de (A.19) resulta (A.18). □

O próximo lema, cuja demonstração omitimos, mostra que o crescimento de $\frac{1}{|\lambda_{n,m}|}$, para valores pares de m, não excede o de uma potência fixa (dependente de n) de m.

Lema A.7.3 *Seja m par e $m \geq 2$. Se $n \geq 2$, então*

$$|\lambda_{n,m}| \geq 2(n-1)\beta_n(m(m+n-2))^{-\frac{n+2}{4}},$$

onde β_n é definida da seguinte forma:

$$\beta_n := \begin{cases} (n-1)^{-\frac{n-2}{4}} 1 \times 3 \times \cdots \times (n-3) & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(n-1)^{-\frac{n-2}{4}} 2 \times 4 \times \cdots \times (n-3) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

$(\beta_2 = 1, \beta_3 = 2^{-\frac{3}{4}})$.

O próximo resultado diz-nos, em particular, que $\mathcal{C}$ é uma transformação contínua para a norma $\|\cdot\|$ em $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. Como resultado dessa continuidade, obteremos a expansão harmónica de $\mathcal{C}(F)$, conhecendo a de F.

Proposição A.7.4 *Sejam $F, G \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$.*

(i) Então

$$|\mathcal{C}(F)(u) - \mathcal{C}(G)(u)| \leq \sqrt{\sigma_{n-1}}\,\|F - G\|,$$

para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(ii) Se F tiver expansão harmónica

$$F \sim \sum_{m=0}^{\infty} Q_m, \tag{A.20}$$

então

$$\mathcal{C}(F) \sim \omega_{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} Q_m. \tag{A.21}$$

Demonstração. Dado $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(F)(u) - \mathcal{C}(G)(u)| &= \left| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle| (F(v) - G(v))\, d\sigma_{n-1}(v) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle| . |F(v) - G(v)|\, d\sigma_{n-1}(v) \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v\rangle|^2\, d\sigma_{n-1}(v)} \sqrt{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |F(v) - G(v)|^2\, d\sigma_{n-1}(v)} \\ &\leq \sqrt{\sigma_{n-1}}\,\|F - G\|, \end{aligned}$$

o que prova *(i)*.

Passemos agora à prova de *(ii)*. Uma vez que

$$\left\| F - \sum_{i=0}^{m} Q_i \right\| \longrightarrow 0$$

quando $m \to +\infty$, resulta de *(i)* que $\mathcal{C}(F)$ é o limite uniforme de $\mathcal{C}\left(\sum_{i=0}^{m} Q_i\right)$, ou seja, como $\mathcal{C}$ é linear, é o limite uniforme de

$$\omega_{n-1} \sum_{i=0}^{m} \lambda_{n,i} Q_i,$$

quando $m \to +\infty$. Logo, tem-se

$$\mathcal{C}(F) \sim \omega_{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} Q_m. \qquad \square$$

Como já foi referido, desta proposição sai a continuidade de $\mathcal{C}$ para a norma em $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. Esta continuidade resulta do facto de que

$$\|\mathcal{C}(F) - \mathcal{C}(G)\| \leq \sqrt{\sigma_{n-1}}\, \|\mathcal{C}(F) - \mathcal{C}(G)\|_\infty,$$

donde $\|\mathcal{C}(F) - \mathcal{C}(G)\| \leq \sigma_{n-1} \|F - G\|$.

Vamos, agora, provar a próxima proposição que revela, para algumas classes de funções em $\mathbb{S}^{n-1}$, a injectividade da Transformação Cosseno.

Se F é uma função real em $\mathbb{S}^{n-1}$, sejam F^+ e F^- as funções definidas por

$$F^+(u) := \frac{1}{2}\big(F(u) + F(-u)\big), \quad F^-(u) := \frac{1}{2}\big(F(u) - F(-u)\big).$$

Então, $F = F^+ + F^-$, F^+ é uma função par e F^- é uma função ímpar em $\mathbb{S}^{n-1}$. Note-se também que (A.20) implica que

$$F^+ \sim \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \text{ par}}} Q_m, \qquad F^- \sim \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \text{ ímpar}}} Q_m.$$

Proposição A.7.5 *Sejam $F_1, F_2 \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. Tem-se que $\mathcal{C}(F_1) = \mathcal{C}(F_2)$ se e só se $F_1^+(u) = F_2^+(u)$ em quase todo o ponto.*

Demonstração. Seja $F := F_1 - F_2$ e seja (A.20) a sua expansão condensada. Se $\mathcal{C}(F) = 0$, então de (A.21) sai que $0 \sim \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} Q_m$ e a equação de Parseval implica que

$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m}^2 \|Q_m\|^2 = 0$. Por outro lado, pelo lema A.7.2, $Q_m = 0$, se m é par. Portanto, $F^+ \sim 0$ e outra aplicação da equação de Parseval mostra que $\|F^+\| = 0$, logo $F^+ = 0$ em quase todo o ponto.

Relativamente à outra implicação, é óbvio que $F^+ = 0$ implica $\mathcal{C}(F) = 0$ qtp. □

Para mostrarmos o resultado análogo ao anterior, mas relativo à sobrejectividade, necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Lema A.7.6 *Sejam $H_1, \ldots, H_{N(n,m)}$ uma base ortonormada de $\mathcal{H}_m^n$ e*

$$G := a_1 H_1 + \cdots + a_{N(n,m)} H_{N(n,m)}.$$

Então

$$|G(u)| \leq \sum_{i=1}^{N(n,m)} |a_i||H_i(u)| \leq \sqrt{\frac{N(n,m)}{\sigma_{n-1}}}\, \|G\| \,,$$

para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Demonstração. Só a segunda desigualdade não é óbvia. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o teorema A.6.1 e a relação (A.12) sai que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{N(n,m)} |a_i||H_i(u)| \right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{N(n,m)} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{N(n,m)} H_i(u)^2 \right) \\ &= \|G\|^2 \frac{N(n,m)}{\sigma_{n-1}} P_m^n(1) \\ &= \frac{N(n,m)}{\sigma_{n-1}} \|G\|^2. \end{aligned}$$

□

Este lema permite-nos demonstrar a próxima proposição, análoga ao teorema relativo ao tamanho dos coeficientes das séries de Fourier trigonométricas de certas funções suficientemente deriváveis.

Proposição A.7.7 *Sejam F uma função em $\mathbb{S}^{n-1}$ de classe C^{2k} e $H_0, H_1, \ldots$ uma sequência standard de harmónicas esféricas de dimensão n. Se as correspondentes expansões*

harmónica e harmónica condensada de F são

$$F \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i \qquad e \qquad F \sim \sum_{m=0}^{\infty} Q_m,$$

então, para todo $m \geq 0$ e $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$|Q_m(u)| \leq \sum_{\chi(H_j)=m} |a_j H_j(u)| \leq \eta_n \|\Delta_o^k F\| m^{\frac{n}{2}-2k-1}, \tag{A.22}$$

onde Δ_o^k representa a $k-$ésima iteração do operador de Beltrami e onde η_n depende só de n.

Demonstração. A primeira desigualdade é óbvia, tendo em conta a definição de Q_m.

Vamos, então, provar a segunda desigualdade. Suponhamos que $\|H_i\| = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Então, $a_i = \langle F, H_i \rangle$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Como F é de classe C^{2k}, tem sentido falar em $\Delta_o^k F$. Ora, para cada i, usando que H_i é vector próprio do operador simétrico Δ_o, associado ao valor próprio $-\chi(H_i)(\chi(H_i)+n-2)$, resulta que

$$\begin{aligned} \langle \Delta_o^k F, H_i \rangle &= \langle F, \Delta_o^k H_i \rangle \\ &= (-\chi(H_i)(\chi(H_i)+n-2))^k a_i, \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_o^k F \sim \sum_{i=0}^{\infty} (-\chi(H_i)(\chi(H_i)+n-2))^k a_i H_i.$$

Usando a equação de Parseval, daqui, resulta que

$$\begin{aligned} \|\Delta_o^k F\|^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \chi(H_i)^{2k} (\chi(H_i)+n-2)^{2k} a_i^2 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} m^{2k} (m+n-2)^{2k} \sum_{\chi(H_i)=m} a_i^2 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} m^{2k} (m+n-2)^{2k} \|Q_m\|^2 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Por outro lado, se $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m^{\Delta}$ for a expansão harmónica condensada de $\Delta_o^k F$, temos que, para cada $m \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q_m^{\Delta} &= \sum_{\chi(H_j)=m} (-\chi(H_j)(\chi(H_j)+n-2))^k a_j H_j \\ &= (-m(m+n-2))^k \sum_{\chi(H_j)=m} a_j H_j \\ &= (-m(m+n-2))^k Q_m. \end{aligned} \tag{A.24}$$

e

$$\|Q_m^{\Delta}\|^2 = m^{2k}(m+n-2)^{2k}\|Q_m\|^2 \leq \|\Delta_o^k F\|^2. \tag{A.25}$$

Portanto, pelo lema anterior, por (A.23), (A.24) e (A.25), temos, para cada $m \geq 0$ e $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\chi(H_j)=m} |a_j H_j(u)|\right)^2 &\leq \frac{N(n,m)}{\sigma_{n-1} m^{2k}(m+n-2)^{2k}}\|Q_m^{\Delta}\|^2 \\ &\leq \frac{N(n,m)}{\sigma_{n-1} m^{2k}(m+n-2)^{2k}}\|\Delta_o^k F\|^2.\end{aligned}$$

Agora, por (A.8), sabemos que existe uma constante b_n fixa, mas dependente de n tal que $N(n,m) \leq b_n m^{n-2}$, logo, notando que (como sempre ao longo deste capítulo) $n \geq 2$,

$$\left(\sum_{\chi(H_j)=m} |a_j H_j(u)|\right)^2 \leq \frac{b_n}{\sigma_{n-1}}\|\Delta_o^k F\|^2 m^{n-4k-2}$$

e, se $\eta_n := \sqrt{\frac{b_n}{\sigma_{n-1}}}$,

$$\sum_{\chi(H_j)=m} |a_j H_j(u)| \leq \eta_n \|\Delta_o^k F\| m^{\frac{n}{2}-2k-1}.$$

□

Se $k = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$, então $\frac{n}{2} - 2k - 1$ em (A.22) é menor que -1 e, portanto, resulta imediatamente o seguinte corolário.

Corolário A.7.8 *Se F é de classe $C^{2(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1)}$, então as séries $\sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i$ e $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m$ convergem uniformemente para F.*

O facto de que as séries convergem para F resulta da convergência em média das séries para F, da continuidade de F e do facto de que convergência uniforme implica convergência em média para a mesma função.

Como uma aplicação da proposição A.7.7, podemos agora provar o próximo resultado, que estabelece, num certo sentido, a sobrejectividade da Transformação Cosseno.

Proposição A.7.9 *Seja F uma função real par em $\mathbb{S}^{n-1}$. Se $n \geq 2$ e F é $C^{2\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor}$, existe uma função par G em $\mathbb{S}^{n-1}$ tal que $F = \mathcal{C}(G)$.*

Demonstração. Se $F \sim \sum_{m\geq 0,\ m \text{ par}} Q_m$ é a expansão condensada de F, consideramos

$$G := \frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{\substack{m\geq 0 \\ m \text{ par}}} \frac{1}{\lambda_{n,m}} Q_m, \tag{A.26}$$

onde $\lambda_{n,m}$ é definido como no lema A.7.2. Pela fórmula (A.21), só temos de mostrar que a série dada em (A.26) converge uniformemente, para garantir a existência da aplicação G. O lema A.7.3 mostra que

$$\frac{1}{|\lambda_{n,m}|} \leq c_n m^{\frac{n+2}{2}}, \tag{A.27}$$

onde c_n só depende de n. Portanto, se fizermos $k := \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$, então F é de classe C^{2k}, donde, pela proposição A.7.7, temos que, para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\frac{1}{|\lambda_{n,m}|} |Q_m(u)| \leq \eta_n c_n \|\Delta_o^k F\| m^{n-2k}.$$

Como $n - 2k = n - 2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor < -1$, a convergência uniforme resulta daqui. □

Suponhamos a partir de agora que F é como na proposição anterior, mas de classe C^∞. Vamos ver que, neste caso, G (como foi definida na demonstração da proposição anterior) também é C^∞.

Primeiro, vamos necessitar de um resultado que vai ser útil para os nossos objectivos.

Teorema A.7.10 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira é uma hipersuperfície compacta de classe C^{k+1}. Seja $g : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k, e suponhamos que g e todas as suas derivadas parciais até à ordem k se estendem continuamente à aderência de Ω. Então g admite um prolongamento de classe C^k, definido em $\mathbb{R}^n$.*

Para a demonstração deste teorema, consultar [Ni], página 436, do volume 2 e página 255 do volume 1.

Representamos também por Q_m a extensão homogénea de grau m a $\mathbb{R}^n$ da harmónica esférica Q_m (ou seja, o polinómio harmónico cuja restrição a $\mathbb{S}^{n-1}$ é essa harmónica).

Lema A.7.11 *Seja Q_m como acabada de definir. Então*

$$\left\| \frac{\partial Q_m}{\partial x_i} \right\| \leq \sqrt{(2m+n-3)m}\ \|Q_m\|.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Green,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Q_m(u)\langle \nabla Q_m(u), N(u)\rangle \, d\sigma_{n-1}(u) = \int_{B_n} \left(\langle \nabla Q_m(x), \nabla Q_m(x)\rangle + Q_m(x)\Delta Q_m(x)\right) \, dx,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Q_m(u)\langle \nabla Q_m(u), u\rangle \, d\sigma_{n-1}(u) = \int_{B_n} |\nabla Q_m(x)|^2 \, dx.$$

Usando a Relação de Euler, ficamos com

$$m \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (Q_m(u))^2 \, d\sigma_{n-1}(u) = \int_{B_n} |\nabla Q_m(x)|^2 \, dx, \tag{A.28}$$

Por outro lado, como Q_m é homogéneo de grau m, então cada coordenada do gradiente de Q_m, $\nabla Q_m := \left(\frac{\partial Q_m}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial Q_m}{\partial x_n}\right)$ é um polinómio homogéneo de grau $m-1$, donde sai que $|\nabla Q_m|^2 = \left(\frac{\partial Q_m}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial Q_m}{\partial x_n}\right)^2$ é um polinómio homogéneo de grau $2m-2$.

Assim, utilizando este facto e representando por $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ a esfera de centro $0_{\mathbb{R}^n}$ e raio r, com $0 \leq r \leq 1$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_n} |\nabla Q_m(x)|^2 \, dx &= \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} |\nabla Q_m(u)|^2 \, d\sigma(u) \, dr \\
&= \int_0^1 r^{n-1} r^{2m-2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla Q_m(u)|^2 \, d\sigma_{n-1}(u) \, dr \\
&= \frac{1}{2m+n-2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla Q_m(u)|^2 \, d\sigma_{n-1}(u).
\end{aligned}$$

Daqui e de (A.28), resulta que

$$\sqrt{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\nabla Q_m(u)|^2 \, d\sigma_{n-1}(u)} = \sqrt{(2m+n-2)m} \, \sqrt{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (Q_m(u))^2 \, d\sigma_{n-1}(u)},$$

e, portanto

$$\sqrt{\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{\partial Q_m}{\partial x_i}(u)\right)^2 \, d\sigma_{n-1}(u)} \leq \sqrt{(2m+n-2)m} \, \|Q_m\|,$$

ou seja

$$\left\| \frac{\partial Q_m}{\partial x_i} \right\| \leq \sqrt{(2m+n-2)m} \, \|Q_m\|. \qquad \square$$

Como Q_m é homogéneo, sabemos pela prova da proposição A.7.9, que a série

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \text{ par}}} \frac{1}{\lambda_{n,m}} Q_m$$

é uniformemente convergente na bola unitária B_n, denotamos ainda por G a função definida em B_n por essa mesma série. O que vamos mostrar é que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada escolha de $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, a série das derivadas parciais

$$\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \text{ par}}} \frac{1}{\lambda_{n,m}} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} Q_m(x)$$

é uniformemente convergente em B_n, desse facto resultando que G é C^∞ em $\text{int}(B_n)$. É essa a estratégia para provar a seguinte proposição.

Proposição A.7.12 *A função G é C^∞ em $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Demonstração. Como Q_m é harmónico de grau m, então $\Delta Q_m = 0$. Por outro lado,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta Q_m = \Delta \frac{\partial Q_m}{\partial x_i},$$

logo $\frac{\partial Q_m}{\partial x_i}$ é um polinómio harmónico de grau $m-1$.

Em geral, se $\mathcal{L}$ for um operador em $\mathcal{Q}_m^n$, tal que $\mathcal{L} := \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$, então $\mathcal{L}(Q_m)$ é um polinómio harmónico de grau $m-k$ (ou zero, se $k \geq m$). Usando o lema anterior, é fácil ver por indução que se tem

$$\|\mathcal{L}(Q_m)\| \leq ((2m+n-2)m)^{k/2} \, \|Q_m\|.$$

Daqui sai que existe uma constante $a_{k,n}$ dependente só de k e n tal que

$$\|\mathcal{L}(Q_m)\| \leq a_{k,n} m^k \|Q_m\|.$$

Agora, de (A.23), sai que

$$\|Q_m\| \leq \frac{\|\Delta_o^{k'} F\|}{m^{k'}(m+n-2)^{k'}},$$

para todo $k' \in \mathbb{N}$. Então

$$\|\mathcal{L}(Q_m)\| \leq a_{k,n} m^k \frac{\|\Delta_o^{k'} F\|}{m^{k'}(m+n-2)^{k'}} \leq a_{k,n} m^k \frac{\|\Delta_o^{k'} F\|}{m^{2k'}},$$

para todo $k' \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, pelo lema A.7.6, e notando que $N(n,m)$ é crescente em função de m, dado $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$|\mathcal{L}(Q_m)(u)| \leq \sqrt{\frac{N(n,m-k)}{\sigma_{n-1}}} \|\mathcal{L}(Q_m)\| \leq \sqrt{\frac{N(n,m)}{\sigma_{n-1}}} \|\mathcal{L}(Q_m)\|$$

e, portanto, sendo b_n a constante definida por (A.8) e $\eta_n := \sqrt{\frac{b_n}{\sigma_{n-1}}}$, concluímos que

$$|\mathcal{L}(Q_m)(u)| \leq \eta_n a_{k,n} \|\Delta_o^{k'} F\| m^{\frac{n-2}{2}+k-2k'}, \tag{A.29}$$

qualquer que seja $k' \in \mathbb{N}$.

Portanto, por (A.27) e por (A.29)

$$\frac{1}{|\lambda_{n,m}|}|\mathcal{L}(Q_m)(u)| \leq c_n \eta_n a_{k,n} \|\Delta_o^{k'} F\| m^{n+k-2k'}, \ \forall k' \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, note-se que se $x \in B_n$, então da homogeneidade de $\mathcal{L}(Q_m)$, resulta que $|\mathcal{L}(Q_m)(x)| \leq |\mathcal{L}(Q_m)(u)|$, com $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $tu = x$, com $t \in [0,1]$. Portanto,

$$\frac{1}{|\lambda_{n,m}|}|\mathcal{L}(Q_m)(x)| \leq c_n \eta_n a_{k,n} \|\Delta_o^{k'} F\| m^{n+k-2k'}, \ \forall k' \in \mathbb{N} \forall x \in B_n$$

e onde c_n, η_n, $a_{k,n}$ e $\|\Delta_o^{k'} F\|$ são constantes não dependentes de m.

Ora, como F é de classe C^∞, podemos tomar k' suficientemente grande para que $n + k - 2k' < -1$. Fazendo essa escolha, concluímos que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n,m}} \mathcal{L}(Q_m)(x)$$

é uniformemente convergente em B_n e, portanto, como este raciocínio é válido para todo o $k \in \mathbb{N}$ e toda a escolha de $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, sai que G é C^∞ em $\text{int}(B_n)$. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$, G e todas as suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k prolongam-se continuamente a $\mathbb{S}^{n-1}$.

Então pelo teorema A.7.10, concluímos que G admite, para cada $k \in \{1, 2, \ldots\}$, uma extensão de classe C^k a $\mathbb{R}^n$, logo a restrição de G a $\mathbb{S}^{n-1}$ é de classe C^k, para cada $k \geq 1$ (comparar com a definição A.2.1). Portanto, essa restrição é de classe C^∞. □

Bibliografia

[Ai-Zi] AIGNER, M. & ZIEGLER, G. M. : *Proofs from The Book*, Berlin, Springer Verlag, 2001.

[Ba] BAKER, J. A. : *Integration Over Spheres and the Divergence Theorem for Balls*, Am. Math. Mon., 104, No 1, 1997, 37-47.

[Bo] BOOTHBY, W. M. : *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, 120, San Diego, Academic Press, 1986.

[Ve] BORGES, V. R. : *Geometria Convexa e Curvas de Largura Constante*, Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática, Porto, 1999.

[Ew] EWALD, G. : *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 168, New York, Springer Verlag, 1996.

[Fi] FIGUEIREDO, D. G. : *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projecto Euclides, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

[Fo] FOLLAND, G. B. : *How to Integrate a Polynomial Over a Sphere*, Am. Math. Mon., 108, No 5, 2001, 447-448.

[Ge-He-Zi] GEBERT, J. R. & HENK, M. & ZIEGLER, G. M. : *Basic Properties of Convex Polytopes*, Handbook of Discrete and Computational Geometry, CRC Press, Boca Raton, 1997, 243-270.

[Gr] GROEMER, H. : *Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 61, New York, Cambridge University Press, 1996.

[Gr 2] GROEMER, H. : *On the Extension of Additive Functionals on Classes of Convex Sets*, Pacific Journal of Mathematics, 75, No 2, 1978, 397-410.

[G-S] GRÜNBAUM, B. & SHEPHARD, G. C. : *A New Look at Euler's Theorem for Polyedra*, Am. Math. Mon., 101, No 2, 1994, 109-128.

[Kl] KLAIN, D. A. : *A Short Proof of Hadwiger's Characterization Theorem*, Mathematika, 42, 1995, 329-339.

[Kl 2] KLAIN, D. A. : *Even Valuations on Convex Bodies*, Trans. Am. Math. Soc., 352, No 1, 2000, 71-93.

[Kl-Ro] KLAIN, D. A. & ROTA, G.C. : *Introduction to Geometric Probability.* Lezioni Lincee, New York, Cambridge University Press, 1997.

[Li] LIMA, E. L. : *Curso de Análise vol.2*, Projecto Euclides, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1985.

[Ma] MAGALHÃES, L. : *Integrais em Variedades e Aplicações*, Textos Universitários, Lisboa, Texto Editora, 1999.

[Mc] MCMULLEN, P. : *Non-Linear Angle Sum Relations for Polyhedral Cones and Polytopes*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 78, 1975, 247-261.

[Mc-Sc] MCMULLEN, P. & SCHNEIDER, R. : *Valuations on Convex Bodies*, Convexity and Its Applications, Peter M. Gruber e Jörg M. Wills, Eds., Boston, Birkhäuser Verlag, 1983, 170-247.

[Mc-Sh] MCMULLEN, P. & SHEPHARD, G. C. : *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, 3, London, Cambridge University Press, 1971.

[Ni] NIKOLSKY, S. M. : *A Course in Mathematical Analysis* (2 vols.), Mir Publishers, Moscow, 1977.

[Rc] ROCKAFELLAR, R. T. : *Convex Analysis*, Princeton Mathematical Series, 28, New Jersey, Princeton University Press, 1972.

[Ro] ROTA, G.C. : *Geometric Probability*, The Mathematical Intelligencer, 20, No 4, New York, Springer-Verlag, 1998, 11-16.

[Ru] RUDIN, W. : *Real and Complex Analysis*, Mathematics Series, McGraw-Hill International Editions, 1987.

[Sa] SANSONE, G. : *Orthogonal Functions*, New York, Dover Publications, 1991.

[Sc] SCHNEIDER, R. : *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 44, New York, Cambridge University Press, 1993.

[Sh] SHEPHARD, G. C. : *Euler-Type Relations for Convex Polytopes*, Proc. London Math. Soc., III Ser., No 18, 1968, 597-606.

[Sp] SPIVAK, M. : *Calculus on Manifolds - A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*, The Advanced Book Program, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[Sl] SALLEE, G. T. : *Polytopes, Valuations, and the Euler Relation*, Can. J. Math., 20, 1967, 1412-1424.

[We] WEBSTER, R. J. : *Convexity*, Oxford University Press, 1994.

[Zi] ZIEGLER, G. M. : *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, 152, New York, Springer Verlag, 1995