

Stella Maria Costa de Abreu

# Redução do espaço de fase em campos de vectores simétricos



Departamento de Matemática Aplicada

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Fevereiro 2000

Stella Maria Costa de Abreu

# Redução do espaço de fase em campos de vectores simétricos



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
para obtenção do grau de Doutor em Matemática*

Departamento de Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Fevereiro 2000

Para a minha mãe

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer às orientadoras, Isabel Labouriau e Sofia Castro pelo extraordinário apoio, incentivo e empenhamento neste trabalho.

Em seguida à Paula, o meu obrigado, especialmente pela bibliografia que me enviou de Warwick e pela disponibilidade permanente para falar de Teoria de Bifurcação.

Agradeço também aos professores Jorge Buescu, Fátima Carvalho, Esmeralda Dias, Martin Golubitsky, Gabriela Gomes, Martin Krupa, Matthew Nicol, André Vanderbauwede o interesse em falarem comigo sobre alguma parte deste trabalho e ao professor Fernando da Silva pela ajuda na formatação da tese.

À Inês Cruz, João Costa, Helena Mena Matos, Manuela e Flávio pelas sugestões e ajudas.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Portucalense por todo o apoio que tive e pela dispensa de serviço docente.

Por fim, agradeço à minha família e amigos, especialmente à minha mãe e à Paula.

Este trabalho teve o apoio financeiro do programa PRODEP - Formação Avançada no Ensino Superior, Concurso Público 1/96 e da Universidade Portucalense.

Ao Institute for Mathematics and its Applications da Universidade de Minnesota e ao Instituto Superior Técnico o meu reconhecimento pela ajuda para despesas de alojamento.

Foi usado equipamento do Centro de Matemática Aplicada da Universidade do Porto na execução deste trabalho.

# Resumo

Nesta tese são estudadas acções de grupos de Lie compactos,  $\Gamma$ , em variedades diferenciáveis  $X$ . No caso em que as órbitas de grupo regulares têm codimensão 1 fazemos uma caracterização pormenorizada do espaço das órbitas quando a variedade  $X$  é compacta e simplesmente conexa de dimensão  $m \geq 3$ .

O principal resultado desta tese é o seguinte: para uma acção linear de um grupo de Lie compacto,  $\Gamma$ , em  $\mathbf{R}^{n+2}$  com órbitas regulares de codimensão 2 existe um plano que intersecta todas as órbitas de grupo.

Em seguida consideramos campos de vectores  $f : \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$  simétricos. Supomos que o grupo de simetrias tem órbitas regulares de codimensão  $k$  e que existe um subespaço vectorial  $V$  de  $\mathbf{R}^{n+k}$  de dimensão  $k$  que intersecta todas as órbitas de grupo. A dimensão das órbitas de grupo é usada para reduzir o estudo do campo de vectores  $f$  ao espaço  $V$  sem perda qualitativa de informação sobre a dinâmica de  $f$  em  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Esta construção só é feita nos pontos de órbitas de codimensão mínima. Estes pontos são um subconjunto aberto e denso de  $\mathbf{R}^{n+k}$ .

Os resultados anteriores são usados para encontrar condições suficientes para a existência de ciclos heteroclínicos estruturalmente estáveis em campos de vectores simétricos.

# Abstract

In this thesis we study compact Lie group actions on manifolds. When the regular group orbits have codimension 1 we make a detailed description of the orbit space for actions on compact, simply connected manifolds of dimension greater or equal to 3.

Our main result is the following: for a linear compact Lie group action on  $\mathbf{R}^{n+2}$  with codimension 2 regular orbits there exists a plane that intersects all group orbits.

Next we consider symmetric vector fields  $f : \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ . We suppose that the symmetry group has regular codimension  $k$  orbits and that there exists a  $k$ -dimensional vector subspace  $V$  of  $\mathbf{R}^{n+k}$  intersecting all group orbits. The dimension of the group orbits is used to reduce the study of the vector field  $f$  to the space  $V$  without losing any qualitative information about the dynamics of  $f$  in  $\mathbf{R}^{n+k}$ . This construction is done only on points with minimum codimension orbits, an open dense subset of  $\mathbf{R}^{n+k}$ .

The previous results are used to find sufficient conditions for the existence of structurally stable heteroclinic cycles in symmetric vector fields.

# Résumé

Dans cette thèse nous étudions des actions de groupes de Lie compacts sur des variétés différentiables. Quand les orbites régulières sont de co-dimension 1, nous faisons une caractérisation de l'espace des orbites pour des actions sur des variétés compactes, simplement connexes de dimension  $m \geq 3$ .

Notre résultat principal est le suivant: pour une action linéaire d'un groupe de Lie compact sur  $\mathbf{R}^{n+2}$  avec des orbites régulières de co-dimension 2, il y a un plan qui intersecte toutes les orbites du groupe.

Ensuite nous considérons des champs de vecteurs symétriques  $f : \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ . Nous supposons que le groupe de symétrie a des orbites régulières de co-dimension  $k$  et qu'il y a un sous-espace vectoriel de dimension  $k$  qui intersecte toutes les orbites du groupe. La dimension des orbites du groupe est utilisée pour réduire l'étude du champ de vecteurs  $f$  à l'espace  $V$  sans perdre l'information qualitative de la dynamique de  $f$  sur  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Cette construction est faite seulement sur les points avec des orbites de co-dimension minimum. Ces points constituent un sous-ensemble ouvert et dense de  $\mathbf{R}^{n+k}$ .

Ces résultats sont utilisés pour trouver des conditions suffisantes pour l'existence de cycles hétéroclines structurellement stables dans les champs de vecteurs symétriques.

# Índice

Agradecimentos	3
Resumo	4
Abstract	5
Résumé	6
<b>1 Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2 Conceitos preliminares</b>	<b>13</b>
2.1 Acções . . . . .	14
2.1.1 Acções lineares . . . . .	18
2.2 Espaço das órbitas . . . . .	19
2.2.1 Exemplo: acção de $\mathbf{Z}_2$ em $\mathbf{R}^2$ . . . . .	20
2.3 Campos de vectores com simetria . . . . .	23
2.3.1 O subespaço de pontos fixos por $\Sigma$ . . . . .	25
<b>3 Grupos de transformações e secções</b>	<b>26</b>
3.1 Acção de $\mathbf{O}(2)$ em $\mathbf{R}^3$ . . . . .	27
3.2 Existência de secções locais . . . . .	28
3.3 Existência de slices . . . . .	31
3.4 Existência de secções (globais) . . . . .	35
3.5 Caracterização adicional do espaço das órbitas . . . . .	39

<b>4</b>	<b>Redução do espaço de fase</b>	<b>43</b>
4.1	Restrição de acções lineares em $\mathbf{R}^{n+2}$ à esfera $\mathbf{S}^{n+1}$	44
4.2	Teorema da Redução	46
4.3	Decomposição do fluxo	48
4.3.1	O fluxo em $V$	49
4.3.2	Unicidade do fluxo em $V$	55
4.3.3	Decomposição em $V$	56
4.4	Mais exemplos	58
4.4.1	Acção de $\mathbf{SO}(3)$ num espaço de matrizes	58
4.4.2	Acção de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ em $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$	61
<b>5</b>	<b>Ciclos heteroclínicos</b>	<b>64</b>
5.1	Definição de ciclo heteroclínico	65
5.2	Construção de um ciclo heteroclínico	66
5.3	Teoremas de existência de ciclos	67
5.4	Extensão de simetria	69
5.5	Ciclos heteroclínicos de subgrupos de isotropia	74
5.6	Demonstração do teorema 5.5	76
5.6.1	Exemplo: ciclo heteroclínico de pontos de equilíbrio e soluções periódicas	76
5.6.2	Passo 1 da demonstração: forma normal de grau três	77
5.6.3	Passo 1 do exemplo	78
5.6.4	Passo 2: pontos de equilíbrio	79
5.6.5	Passo 2 do exemplo	80
5.6.6	Passo 3: ligação entre os pontos de equilíbrio	81
5.6.7	Passo 4: estabilidade assintótica do ciclo	83
5.6.8	Estabilidade assintótica do exemplo	84
5.6.9	Passo 5: estabilidade estrutural	85
5.6.10	Passo 5 do exemplo	86
	<b>Referências</b>	<b>87</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Muitos fenómenos naturais possuem simetrias mais ou menos exactas, que devem ser traduzidas nos modelos matemáticos que os descrevem. Nesta tese estudamos equações diferenciais ordinárias com simetria. As simetrias impõem fortes restrições às soluções do sistema e à sua forma geral. Por exemplo, o simétrico de uma solução é também solução.

O conjunto de todas as simetrias de um sistema de equações diferenciais ordinárias tem a estrutura de grupo. Suporemos nesta tese que este grupo é um grupo de Lie compacto,  $\Gamma$ .

Certas propriedades dos sistemas de equações diferenciais tornam-se persistentes quando há simetria, isto é, não são destruídas por pequenas perturbações no sistema.

Consideremos um sistema simétrico definido em  $\mathbf{R}^n$ . Uma consequência da simetria, é a existência de subespaços vectoriais em  $\mathbf{R}^n$  que são invariantes pelo fluxo do campo de vectores  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Este facto permite o aparecimento de um fenómeno recorrente, designado por *ciclo heteroclínico*. Um ciclo heteroclínico é um caminho fechado formado por conjuntos invariantes pelo fluxo (por exemplo pontos de equilíbrio) e trajectórias que os ligam. Em sistemas gerais não se espera que este fenómeno aconteça de um modo persistente, como acontece na presença de simetria.

Um ponto fundamental para se encontrar um ciclo é provar a existência de uma ligação persistente entre dois pontos de equilíbrio. Geralmente prova-se este facto usando o teorema de Poincaré-Bendixson (ver, por exemplo, Hirsch e Smale, [11],

capítulo 11, secção 4). No entanto este teorema só é válido em sistemas dinâmicos bi-dimensionais.

No artigo [18] de Melbourne *et al* esta dificuldade é ultrapassada num exemplo de sistema simétrico. Partindo de dois pontos de equilíbrio contidos num espaço invariante pelo fluxo, restringe-se o sistema a esse espaço (que tem dimensão 4). Existe um plano, nesse espaço de dimensão 4, ao qual é possível reduzir o estudo da ligação. Nesse plano já é possível usar o teorema de Poincaré-Bendixson para encontrar a ligação persistente. A existência do plano é consequência da simetria.

Este exemplo motivou o trabalho desta tese. Apresentamos aqui condições que um grupo de Lie compacto,  $\Gamma$ , deve satisfazer para que exista um plano ao qual seja possível reduzir o estudo do sistema com simetria  $\Gamma$ . Este resultado depende fortemente da topologia do grupo. Para o obter foram usados resultados de acções de grupos de Lie em variedades diferenciáveis.

Numa acção, o conjunto das sucessivas imagens de um ponto  $x$  por cada um dos elementos de  $\Gamma$  é designado por *órbita de  $x$* . As órbitas, numa acção de um grupo de Lie compacto  $\Gamma$  numa variedade diferenciável  $X$ , são variedades diferenciáveis e não têm necessariamente todas a mesma dimensão nem o mesmo número de componentes conexas. Aquelas que tiverem simultaneamente maior dimensão e menor número de componentes conexas chamam-se *órbitas regulares*. Uma acção em  $X$  faz uma partição de  $X$  em órbitas disjuntas. Este tema foi objecto de estudo nas décadas de 40 e 50. Gleason ([7], corolário 3.5) provou que, em certas condições existe, em  $X$ , um subconjunto fechado que intersecta uma única vez todas as órbitas numa vizinhança fechada de um ponto desse conjunto. Este subconjunto fechado é designado por *secção*.

Provamos a existência de um plano  $V$  que intersecta todas as órbitas de grupo usando uma secção.

Em seguida seria desejável conseguir, como no exemplo de Melbourne *et al*, reduzir o estudo de um campo de vectores com aquela simetria ao plano  $V$ . Este resultado é conseguido parcialmente, isto é, a redução é feita apenas nos pontos com órbitas de dimensão máxima, que são um subconjunto aberto e denso do espaço. Para obter a redução nesses pontos usamos a dimensão das órbitas de grupo.

Os resultados anteriores são usados para encontrar condições suficientes para a existência de ciclos heteroclínicos persistentes em campos de vectores simétricos.

Todos os resultados apresentados nesta tese que não forem originais têm referência. Omitiremos algumas demonstrações desses resultados. Por outro lado, incluiremos as demonstrações que ajudarem a entender esta dissertação.

O teorema 3.15 e o lema 3.14 são de Isabel Labouriau.

A tese está estruturada do seguinte modo:

- No próximo capítulo incluímos algumas definições e resultados necessários nos capítulos seguintes.
- O capítulo 3 começa com uma revisão de conceitos básicos de acções de grupos de Lie. Nem sempre enunciamos os resultados de um modo tão geral quanto na versão original. São incluídos dois teoremas, um de Mostert e outro de Hofmann e Mostert. O teorema de Mostert caracteriza topologicamente o espaço das órbitas de acções de grupos de Lie compactos  $\Gamma$  em variedades  $X$  com órbitas regulares de codimensão 1. Nas mesmas condições o teorema de Hofmann e Mostert prova a existência de uma secção. A seguir fazemos uma caracterização topológica do espaço das órbitas para acções em variedades compactas,  $X$ . Provamos que, se as órbitas de grupo regulares tiverem codimensão 1, o espaço das órbitas é homeomorfo a  $S^1$  ou a um segmento. Se, além de compacta,  $X$  for simplesmente conexa, provamos que o espaço das órbitas é homeomorfo a um segmento.
- No capítulo 4 são estudadas acções lineares de grupos de Lie compactos em  $\mathbf{R}^{n+2}$ , no caso em que as órbitas de grupo regulares têm codimensão 2. Provamos, nesse contexto, a existência de um plano  $V$  em  $\mathbf{R}^{n+2}$  que intersecta todas as órbitas de grupo (teorema da Redução 4.4). Em seguida consideramos campos de vectores  $f : \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$  simétricos. Supomos que o grupo de simetrias tem órbitas regulares de codimensão  $k$  e que existe um subespaço vectorial  $V$  de  $\mathbf{R}^{n+k}$  de dimensão  $k$  que intersecta todas as órbitas de grupo. Note-se que no caso  $k = 2$  a existência deste espaço  $V$  é garantida pelo teorema da Redução 4.4. A dimensão das órbitas de grupo é aproveitada para reduzir o estudo do campo de vectores

$f$  ao espaço  $V$  sem perda qualitativa de informação sobre a dinâmica de  $f$  em  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Esta redução só é feita nos pontos de órbitas de codimensão mínima, que são um subconjunto aberto e denso de  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Conjecturamos que é também possível obter a redução nos restantes pontos de  $\mathbf{R}^{n+k}$ .

- É apresentada uma aplicação dos resultados anteriores no capítulo 5. Mostramos como esses resultados podem ser usados para encontrar ciclos heteroclínicos estruturalmente estáveis em campos de vectores simétricos. Na verdade, os resultados do capítulo 5 foram a motivação do trabalho dos capítulos anteriores. Obtemos condições suficientes para a existência de ciclos heteroclínicos num aberto do espaço dos campos de vectores de classe  $C^\infty$ , equivariantes com respeito a um dado grupo  $\Gamma$  (teoremas 5.5 e 5.6). Estes teoremas já tinham sido obtidos em Abreu [1]. No entanto, com os resultados do capítulo anterior e da secção 5.4 são retiradas algumas condições do enunciado dos teoremas.

Provamos, na secção 5.4, um resultado que permite obter informação sobre a simetria que existe num plano, conhecendo-se a simetria em duas rectas ortogonais desse plano. Isto é, conhecendo como um grupo de Lie compacto actua em duas rectas ortogonais, é possível obter informação sobre a acção do grupo no plano definido por essas rectas.

# Capítulo 2

## Conceitos preliminares

Este capítulo contém definições e resultados básicos que serão necessários nos capítulos seguintes.

Começamos por definir acção de um grupo topológico  $\Gamma$  numa variedade diferenciável  $X$ . Entre outras, apresentamos as definições de órbita de grupo e de subgrupo de isotropia, relacionando-as entre si. Indicamos condições suficientes para que as órbitas de grupo sejam variedades diferenciáveis compactas. Este resultado será usado no capítulo 4.

As acções lineares de grupos de Lie compactos em  $\mathbf{R}^n$  são estudadas com mais pormenor.

A seguir exploramos alguns conceitos relacionados com a topologia do espaço das órbitas,  $\Gamma/X$ . Este espaço é obtido identificando todos os pontos duma órbita de grupo. As definições mais usadas são exemplificadas numa acção linear em  $\mathbf{R}^2$ .

Em 2.3 introduzimos a noção de equivariância de um campo de vectores por um grupo. São apresentadas várias propriedades de campos de vectores equivariantes.

A maioria das definições e resultados referentes a acções de grupos topológicos e topologia do espaço das órbitas são retiradas do livro de Bredon ([3]).

Os conceitos relacionados com campos de vectores simétricos por grupos ortogonais são de Golubitsky *et al* ([9]).

## 2.1 Acções

Um *grupo topológico* é um espaço topológico cujos pontos são elementos de um grupo abstracto, sendo as operações de grupo contínuas na topologia do espaço ([23], secção 1.11).

Seja  $X$  uma variedade diferenciável e  $\Gamma$  um grupo topológico. Uma *acção* de  $\Gamma$  em  $X$  ([3], capítulo I, secção 1) é uma aplicação contínua  $\Theta : \Gamma \times X \rightarrow X$  tal que

1.  $\Theta(I, x) = x$  para qualquer  $x \in X$ , onde  $I$  é a identidade em  $\Gamma$ ;
2.  $\Theta(\gamma, \Theta(\sigma, x)) = \Theta(\gamma\sigma, x)$ , para quaisquer  $\gamma, \sigma \in \Gamma$  e  $x \in X$ .

Também se diz que  $\Gamma$  é um *grupo de transformações* em  $X$  ou que  $X$  é um  $\Gamma$ -*espaço*.

Um elemento  $\sigma$  de  $\Gamma$  actua *trivialmente* em todo o  $X$  se  $\Theta(\sigma, x) = x$  para todo  $x$  de  $X$ .

O conjunto dos elementos de  $\Gamma$  que actuam trivialmente em todo o  $X$  forma um subgrupo fechado normal de  $\Gamma$  ([3], capítulo I, secção 1). Se este subgrupo se reduzir ao elemento identidade de  $\Gamma$ , então a acção de  $\Gamma$  em  $X$  diz-se *efectiva* ([3], capítulo I, secção 1).

De futuro, em vez de  $\Theta(\sigma, x)$ , escreveremos simplesmente  $\sigma.x$ .

Para qualquer  $x$  em  $X$ , define-se *órbita de  $x$*  pelo grupo  $\Gamma$  ([3], capítulo I, secção 3) do seguinte modo:

$$\Gamma(x) = \{\gamma.x : \gamma \in \Gamma\}.$$

Se  $C$  for um subconjunto de  $X$ , então

$$\Gamma(C) = \{\gamma.c : \gamma \in \Gamma, c \in C\}$$

é a união das órbitas dos elementos de  $C$  e designa-se por *saturação* de  $C$  ([3], capítulo I, secção 3).

**Proposição 2.1** ([3], capítulo I, corolário 1.3) *Seja  $\Gamma$  um grupo topológico compacto actuando na variedade  $X$ . Se  $C \subset X$  for um conjunto compacto (fechado) então  $\Gamma(C)$  é compacto (fechado).*

Em particular, se  $\Gamma$  for compacto, a órbita  $\Gamma(x)$  também o é, para qualquer  $x \in X$ . O *subgrupo de isotropia* de um ponto  $x$  ([3], capítulo I, secção 2) é

$$\Gamma_x = \{\sigma \in \Gamma : \sigma.x = x\}.$$

Os elementos  $\gamma.x$  and  $\delta.x$  de uma órbita de grupo são iguais se e só se  $\delta^{-1}\gamma.x = x$ , i.e.,  $\delta^{-1}\gamma \in \Gamma_x$ .

O subgrupo de isotropia de  $x$ , para qualquer  $x \in X$ , é sempre um subgrupo de  $\Gamma$  topologicamente fechado:

**Proposição 2.2** *Seja  $\Gamma$  um grupo topológico actuando na variedade diferenciável  $X$ . Para qualquer  $x \in X$  o subgrupo de isotropia  $\Gamma_x$  é um subconjunto fechado de  $\Gamma$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\gamma_n$  uma sucessão em  $\Gamma_x$  convergindo para  $\gamma \in \Gamma$ . Vamos ver que  $\gamma \in \Gamma_x$ .

Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n.x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(\gamma_n, x),$$

onde  $\Theta$  é a acção de  $\Gamma$  em  $X$ .

Como  $\Theta$  é contínua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(\gamma_n, x) = \Theta(\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n, x) = \Theta(\gamma, x) = \gamma.x.$$

Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n.x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x = x.$$

Isto é,  $\gamma.x = x$ , como queríamos provar. □

Um subgrupo de isotropia  $\Sigma \subset \Gamma$  é *maximal* se não existir nenhum subgrupo de isotropia  $\Delta$  de  $\Gamma$  satisfazendo  $\Sigma \subset \Delta \subset \Gamma$ . Um subgrupo de isotropia  $T \subset \Sigma \subset \Gamma$  é *submaximal* se for maximal em  $\Sigma$  (as inclusões são próprias). Ver [9], capítulo XIII, definição 2.6.

Uma acção  $\Theta$  de um grupo de Lie  $\Gamma$  numa variedade diferenciável  $X$  diz-se *diferenciável* se  $\Theta$  for uma aplicação diferenciável ([3], capítulo VI, secção 1). Para estas

acções as órbitas  $\Gamma(x)$  são variedades diferenciáveis, como se conclui nos próximos resultados.

**Teorema 2.3** ([3], capítulo VI, teorema 1.2) *Se  $\Theta : \Gamma \times X \rightarrow X$  for uma acção diferenciável e  $x \in X$ , então a aplicação canónica  $\alpha_x : \Gamma/\Gamma_x \rightarrow X$  dada por  $\alpha_x(\gamma\Gamma_x) = \gamma.x$  é um mergulho.*

**Corolário 2.4** ([3], capítulo VI, corolário 1.3) *Se um grupo de Lie compacto  $\Gamma$  actuar diferenciavelmente numa variedade diferenciável  $X$ , então cada órbita  $\Gamma(x)$  é uma subvariedade de  $X$  e a aplicação  $\alpha_x : \Gamma/\Gamma_x \rightarrow X$  é um difeomorfismo.*

A próxima proposição relaciona órbita de grupo com subgrupo de isotropia em acções lineares (ver definição de acção linear em 2.1.1). Quanto maior for a órbita, menor é o subgrupo de isotropia. O número de elementos de um conjunto  $K$  será denotado por  $|K|$ .

**Proposição 2.5** ([9], capítulo XIII, §0) *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando linearmente num espaço vectorial  $V$ . Então*

1. *se  $\Gamma$  for finito, então  $|\Gamma| = |\Gamma_x||\Gamma(x)|$ .*
2.  *$\dim \Gamma = \dim \Gamma_x + \dim \Gamma(x)$ .*

Sejam  $\Sigma \subset \Gamma$  um subgrupo e  $\gamma \in \Gamma$ . Então

$$\gamma\Sigma\gamma^{-1} = \{\gamma\sigma\gamma^{-1} : \sigma \in \Sigma\}$$

é um subgrupo de  $\Gamma$ , dito *conjugado* a  $\Sigma$ . Pontos numa mesma órbita de grupo têm subgrupos de isotropia conjugados, isto é,  $\Gamma_{\gamma.x} = \gamma\Gamma_x\gamma^{-1}$  ([9], capítulo XIII, lema 1.1).

Por outro lado, dados dois subgrupos de isotropia conjugados  $\Gamma_x$  e  $\Gamma_y = \gamma\Gamma_x\gamma^{-1}$ , existe um ponto na órbita de grupo de  $y$  cujo subgrupo de isotropia é  $\Gamma_x$ . De facto,  $z = \gamma^{-1}.y$  é tal que  $z \in \Gamma(y)$  e  $\sigma.z = z$  se e só se  $\sigma \in \Gamma_x$ .

O conjunto dos subgrupos de  $\Gamma$  que são conjugados a  $\Gamma_x$  é a *classe de conjugação* do subgrupo  $\Gamma_x$  de  $\Gamma$  e é denotada por  $[\Gamma_x]$ . Diz-se também que  $[\Gamma_x]$  é o *tipo de isotropia* ou *tipo de órbita* de  $x$  (Field [6], capítulo 1, secção 2).

O *reticulado de isotropia* de  $\Gamma$  é ([9], capítulo XIII, 10) o conjunto das classes de conjugação  $[\Sigma]$  de subgrupos de isotropia  $\Sigma$  de  $\Gamma$ . Escreve-se  $[T] \rightarrow [\Sigma]$  se  $T \subset \Sigma$  para representantes adequados. Isto é, dados dois subgrupos de isotropia  $T$  e  $\Sigma$ , temos  $[T] \rightarrow [\Sigma]$  se e só se  $\gamma^{-1}T\gamma \subset \Sigma$  para algum  $\gamma \in \Gamma$ .

**Teorema 2.6 (Mostow [26])** *Se  $\Gamma$  for um grupo de Lie compacto actuando numa variedade  $X$  compacta, o número de tipos de isotropia é finito.*

Para simplificar a notação, de futuro serão omitidos os colchetes nas classes de conjugação.

Sejam  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto e  $k$  a maior dimensão de qualquer órbita de  $\Gamma$  em  $X$ . Denotemos por  $\hat{Q}$  o conjunto de todos os pontos de  $X$  em órbitas de dimensão  $k$ . Se  $x$  e  $y$  forem dois pontos de  $\hat{Q}$ , então  $\dim \Gamma_x = \dim \Gamma_y$ . Escolhamos em  $\hat{Q}$  um ponto  $p$  tal que  $\Gamma_p$  tem o menor número possível de componentes conexas como variedade. Um ponto  $p$  com estas propriedades chama-se *regular*. Os restantes pontos de  $\hat{Q}$  chamam-se *excepcionais*. Todos os pontos em órbitas de dimensão menor que  $k$  serão designados por *singulares* (Montgomery e Zippin [23], secção 5.4).

Terminamos esta secção com a definição de *domínio fundamental* para uma acção efectiva:

**Definição 2.7 ([6], capítulo 6, secção 2)** *Um domínio fundamental para a acção de um grupo  $\Gamma$  numa variedade diferenciável  $X$  é um subconjunto  $X^+$  de  $X$  com as seguintes propriedades*

- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma X^+ = X$ ;
- para todo  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma \cdot \text{int}(X^+) \cap \text{int}(X^+) \neq \emptyset$  se e só se  $\gamma = I$ , onde  $\text{int}(X^+)$  representa o interior de  $X^+$ .

### 2.1.1 Acções lineares

Nesta subsecção vamos supor que  $\Gamma$  seja um grupo de Lie e que  $X$  seja um espaço vectorial real de dimensão finita.

Se cada operação  $\Theta_\gamma : X \rightarrow X$ , com  $\Theta_\gamma(x) = \gamma.x$ , for uma transformação linear em  $X$ , então a acção diz-se *linear*.

Se cada operação  $\Theta_\gamma$  for uma transformação ortogonal em  $X$ , então a acção é *ortogonal*.

Denotemos por  $GL(n, X)$  o espaço das transformações lineares em  $X$ , sendo  $X$  um espaço vectorial real de dimensão  $n$ .

**Definição 2.8** ([9], capítulo XII, secção 1) *Numa acção linear de  $\Gamma$  em  $X$ , a aplicação que envia  $\gamma \in \Gamma$  em  $\Theta_\gamma \in GL(n, X)$  é designada por representação de  $\Gamma$  em  $X$ .*

Uma representação define um homomorfismo de  $\Gamma$  sobre  $GL(n, X)$ .

Uma representação  $\zeta : \Gamma \rightarrow GL(n, X)$  é equivalente a uma representação ortogonal se e só se existe um produto interno em  $\mathbf{R}^n$  preservado por  $\zeta$  tal que cada  $\zeta(\gamma)$  tem a forma de matriz ortogonal com respeito a uma base ortonormal em  $\mathbf{R}^n$  para esse produto interno.

**Teorema 2.9** ([3], capítulo 0, teorema 3.5) *Qualquer representação de um grupo compacto  $\Gamma$  num espaço vectorial real  $n$ -dimensional  $X$  é equivalente a uma representação ortogonal de  $\Gamma$  em  $\mathbf{R}^n$ .*

É possível restringir uma acção ortogonal em  $\mathbf{R}^n$  à esfera  $\mathbf{S}^{n-1}$  sem perder a informação qualitativa das órbitas, porque

- se  $x$  e  $y$  são colineares,  $x \neq 0 \neq y$ , então  $y = \lambda x$ , com  $\lambda \neq 0$ , e  $\Gamma(y) = \lambda \Gamma(x)$ ;
- se  $\Gamma \subset \mathbf{O}(n)$ , então  $\mathbf{S}^{n-1}$  é invariante por  $\Gamma$ .

Qualitativamente, a única órbita que se perde ao restringir à esfera é a da origem.

**Definição 2.10** *Os círculos máximos em  $\mathbf{S}^{n-1}$  são as curvas resultantes da intersecção de  $\mathbf{S}^{n-1}$  com os planos contendo a origem.*

Um subespaço vectorial  $W \subset \mathbf{R}^n$  é  $\Gamma$ -invariante se  $\gamma.w \in W$  para qualquer  $w \in W$  e  $\gamma \in \Gamma$ .

**Proposição 2.11** ([9], capítulo XII, secção 2) *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando num espaço vectorial  $X$ . Seja  $W \subset X$  um subespaço  $\Gamma$ -invariante. Então existe um subespaço  $Z \subset X$  complementar e  $\Gamma$ -invariante tal que*

$$X = W \oplus Z.$$

As representações ou acções de  $\Gamma$  em  $\mathbf{R}^n$  são *irreduzíveis* se os únicos subespaços  $\Gamma$ -invariantes de  $\mathbf{R}^n$  forem  $\{0\}$  e  $\mathbf{R}^n$ . Um subespaço  $W \subset \mathbf{R}^n$  é  $\Gamma$ -irreduzível se  $W$  for  $\Gamma$ -invariante e a acção de  $\Gamma$  em  $W$  for irreduzível ([9], capítulo XII, proposição 2.1).

## 2.2 Espaço das órbitas

Todas as definições apresentadas nesta secção foram retiradas de Bredon ([3]).

Denotemos por  $X/\Gamma$  o conjunto cujos elementos são as órbitas de  $\Gamma$  em  $X$ . Isto é, tomemos em  $X$  a relação de equivalência:  $x \sim y$  se e só se  $x$  e  $y$  estiverem na mesma órbita de grupo.

Seja  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  a aplicação natural que envia  $x$  na sua órbita,  $\Gamma(x)$ . O conjunto  $X/\Gamma$  munido com a topologia quociente ( $U \subset X/\Gamma$  é aberto se e só se  $\pi^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ ) é designado por *espaço das órbitas* de  $X$  (com respeito a  $\Gamma$ ).

A aplicação  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  é contínua (porque a órbita de um aberto é ainda um aberto) e aberta ([3], capítulo I, secção 3). Se  $\Gamma$  for compacto, então  $\pi$  é também fechada e própria ([3], capítulo I, teorema 3.1).

**Definição 2.12** ([3], capítulo I, secção 3) *Uma secção para  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  é uma aplicação contínua  $\sigma : X/\Gamma \rightarrow X$  tal que  $\pi\sigma$  é a identidade em  $X/\Gamma$ .*

Uma *secção local* definida em  $U \subset X/\Gamma$  é uma secção em  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ . As secções locais não existem em geral, como veremos no exemplo de 2.2.1 a seguir.

**Proposição 2.13** *Se existir uma secção  $\sigma : X/\Gamma \rightarrow X$  então  $\sigma$  é um homeomorfismo sobre a sua imagem.*

**Demonstração:**

Por definição de secção,  $\sigma$  é contínua e  $\pi\sigma$  é a identidade em  $X/\Gamma$ . Falta apenas ver que  $\sigma\pi$  é a identidade em  $C = \sigma(X/\Gamma)$ . O conjunto  $C$  intersecta cada órbita exactamente num ponto, caso contrário  $\sigma$  não estaria bem definida. Conclui-se que  $\pi$  é injectiva em  $C$ , portanto  $\sigma\pi(c) = c$  para todo  $c \in C$ .  $\square$

**Proposição 2.14** ([3], I, proposição 3.2) *A imagem de uma secção  $\sigma : X/\Gamma \rightarrow X$  é fechada em  $X$ .*

**Demonstração:**

Seja  $C = \sigma(X/\Gamma)$  e seja  $\{x_n\}$  uma sucessão em  $C$  convergindo para  $x \in X$ . Temos  $\lim \pi(x_n) = \pi(x)$ , de modo que

$$x = \lim x_n = \lim \sigma\pi(x_n) = \sigma\pi(x) \in C$$

e portanto  $C$  é fechado.  $\square$

### 2.2.1 Exemplo: acção de $\mathbf{Z}_2$ em $\mathbf{R}^2$

Consideremos a acção do subgrupo  $\Gamma = \{I, -I\}$  de  $\mathbf{O}(n)$ , (com  $n > 1$ ) em  $\mathbf{R}^n$ , tal que  $I.x = x$  e  $(-I).x = -x$ , para todo  $x \in \mathbf{R}^n$ . Não existe secção local definida na vizinhança de  $\pi(0)$  em  $\mathbf{R}^n/\Gamma$ . Esta afirmação encontra-se em [3], capítulo I, secção 3 sem demonstração. Demonstramos na proposição 2.15 o caso de  $n = 2$ . Para  $n > 2$  a demonstração é semelhante.

Antes da proposição vamos caracterizar o espaço das órbitas para a acção do subgrupo  $\Gamma = \{I, -I\}$  de  $\mathbf{O}(2)$  em  $\mathbf{R}^2$ .

### 2.2.1.1 Reticulado de isotropia

A órbita da origem é a própria origem.

Os restantes pontos, da forma  $p = (a, b)$ , têm órbita

$$\Gamma(p) = \{(a, b), (-a, -b)\}.$$

O reticulado de subgrupos de isotropia é:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \uparrow \\ I \end{array}$$

### 2.2.1.2 Geometria do espaço das órbitas

A aplicação  $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2/\Gamma$  identifica todos os pontos de uma mesma órbita. Para descrevermos geometricamente o espaço das órbitas, consideremos um subconjunto de  $\mathbf{R}^2$  que contém exactamente um ponto de cada órbita. Por exemplo

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0 \vee (x = 0 \wedge y \geq 0)\}$$

está nessas condições. Este conjunto está em correspondência bijectiva com o espaço das órbitas  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ .

Na topologia de  $\mathbf{R}^2/\Gamma$  a imagem por  $\pi$  da parte positiva do eixo dos  $yy$  é identificada com a imagem da parte negativa. Em qualquer recta contendo a origem identifica-se pontos de abcissa positiva  $x_1$  com os correspondentes pontos de abcissa simétrica,  $-x_1$ . Assim, podemos ver o espaço  $\mathbf{R}^2/\Gamma$  como uma superfície cónica cujo vértice é  $\pi(0)$ .

Vamos, em seguida, ver que não existe secção local em  $\pi(0)$ .

**Proposição 2.15** *Consideremos a acção acima do subgrupo  $\Gamma = \{I, -I\}$  de  $\mathbf{O}(2)$  em  $\mathbf{R}^2$ . Não existe secção local definida na vizinhança de  $\pi(0)$  em  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ .*

**Demonstração:**

Seja  $U$  uma vizinhança de  $\pi(0)$  em  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ . Suponhamos que exista uma secção para  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ , i.e., que exista  $\sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$  contínua tal que  $\pi\sigma$  seja a identidade em  $U$ .

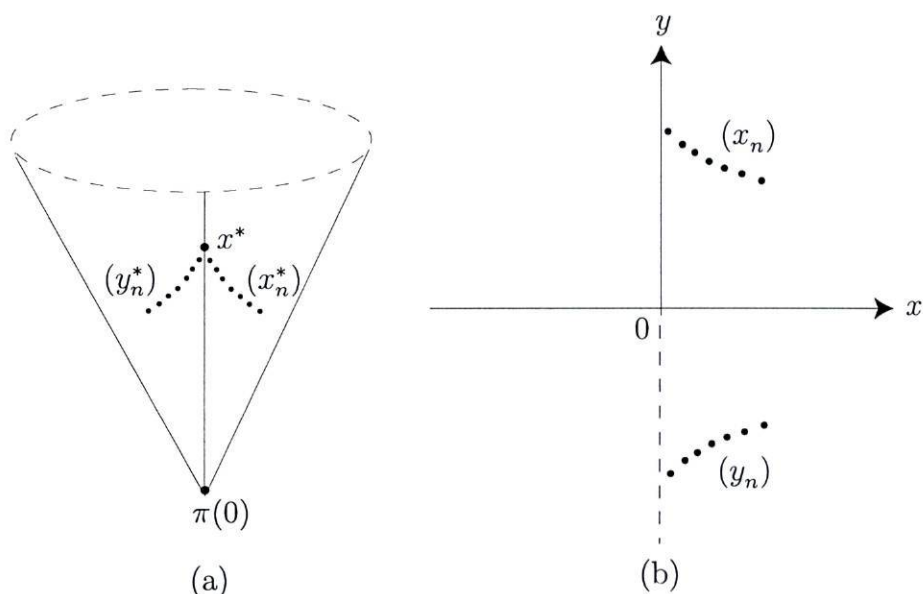


Figura 2.1 (a) sucessões  $(x_n^*)$  e  $(y_n^*)$  definidas num aberto  $U$  de  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ . (b) se existisse uma secção, então  $(x_n)$  e  $(y_n)$  seriam as imagens por essa secção das sucessões  $(x_n^*)$  e  $(y_n^*)$ .

Como a órbita da origem é a própria origem e  $\pi$  é contínua, o conjunto  $\pi^{-1}(U)$  é uma vizinhança da origem em  $\mathbf{R}^2$ . A vizinhança  $\pi^{-1}(U)$  é enviada por  $\pi$  numa superfície cónica em  $\mathbf{R}^2/\Gamma$  (figura 2.1 (a)) e nesta vizinhança a aplicação  $\sigma$  é a inversa de  $\pi$  em  $\pi^{-1}(U)$ .

Sejam  $B$  uma bola aberta de centro na origem contida em  $\pi^{-1}(U)$  e  $x = (0, b) \in B$  com  $b > 0$ . Então  $(-I).x = (0, -b) \in B$  e  $\pi(x) = \pi((-I).x) = x^* \in U$ .

Seja  $x_n = (a_n, b)$  uma sucessão em  $B$  que convirja para  $x = (0, b)$ , com  $a_n > 0$  e  $b_n > 0$ . A sucessão  $y_n = (a_n, -b_n) \in B$  converge para  $(0, -b)$  (ver figura 2.1 (b)). Embora as duas sucessões  $(x_n)$  e  $(y_n)$  tenham limites diferentes em  $\mathbf{R}^2$ , as suas imagens por  $\pi$  terão o mesmo limite,  $\pi(x)$ , em  $\mathbf{R}^2/\Gamma$ . Logo,  $\pi$  não pode ter uma inversa contínua em  $B$ . □

### 2.2.1.3 Exemplo de secção local

A acção deste grupo  $\Gamma$  pode ser usada para dar um exemplo de secção local:

**Proposição 2.16** *Consideremos a mesma acção do subgrupo  $\Gamma = \{I, -I\}$  de  $O(2)$  em  $\mathbf{R}^2$ . Seja*

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \|(x, y) - (2, 1)\| \leq 0.1\}.$$

*Existe uma secção local definida em  $\pi(C)$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\sigma : \pi(C) \rightarrow C$  tal que  $\sigma(x^*) = \Gamma(x) \cap C$ . É necessário apenas provar que  $\sigma$  é contínua. Seja  $A \subset C$  fechado. Ora,  $\sigma^{-1}(A) = \pi(A)$ , que é fechado porque  $\pi$  é fechada. □

O valor 0.1 na proposição 2.16 foi escolhido de modo que o conjunto  $C$  não contivesse a origem nem dois pontos da mesma órbita. Naturalmente, qualquer outro valor que respeite estas condições pode ser usado em vez de 0.1.

De um modo impreciso, mas intuitivo uma secção local existe num ponto  $p$  se a órbita de  $p$  tiver o mesmo aspecto que todas as órbitas vizinhas.

No próximo capítulo será usado o termo *secção local* também para designar o conjunto imagem de uma secção local. Este conjunto intersecta a órbita de cada ponto próximo de  $p$  apenas uma vez.

## 2.3 Campos de vectores com simetria

Consideremos o sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.1}$$

onde  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  é  $C^\infty$ .

Suponhamos que  $\Gamma$  seja um grupo compacto que actua em  $\mathbf{R}^n$  tal que

$$f(\gamma.x) = \gamma.f(x), \tag{2.2}$$

para quaisquer  $x \in \mathbf{R}^n$  e  $\gamma \in \Gamma$ . Então  $\gamma$  é uma *simetria* de (2.1).

O grupo  $\Gamma$  é designado por *grupo de simetrias do sistema* (2.1). Diremos também que  $f$  é  $\Gamma$ -equivariante.

Para cada condição inicial  $x(0) = p$  em  $\mathbf{R}^n$ , este sistema tem uma única solução  $x = x(t)$ , onde  $t$  pertence a um intervalo  $I \subseteq \mathbf{R}$  contendo 0.

Se  $x(t)$ , com domínio  $I$ , for uma solução de (2.1), então a sua restrição a qualquer intervalo  $J \subset I$  também o é. Tomando para  $I$  o maior intervalo no qual  $x(t)$  satisfaz (2.1) teremos uma solução *máxima*.

Obtém-se assim um *fluxo*,  $\varphi(t, p)$  do sistema (2.1), definido para todo  $p$  em  $\mathbf{R}^n$ , tal que:

$$\varphi(0, p) = p \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, p) = f(\varphi(t, p)).$$

A *trajectória* de  $p \in \mathbf{R}^n$  é a imagem da curva  $x(t, p)$ , ou simplesmente  $x(t)$ , dada por  $t \mapsto \varphi(t, p)$ .

Se  $x(t)$  for uma solução do sistema, o mesmo sucede com  $\gamma.x(t)$  para qualquer  $\gamma \in \Gamma$ . Em particular, se  $x(t) \equiv x_0$  for um ponto de equilíbrio de (2.1), o mesmo sucede com  $\gamma.x_0$ . Se  $\gamma.x_0 \neq x_0$  encontrámos um outro ponto de equilíbrio. Sempre que  $\gamma.x_0 = x_0$  diremos que  $\gamma$  é uma *simetria da solução*  $x_0$ .

Uma aplicação  $\Gamma$ -equivariante anula-se em (reuniões de) órbitas de grupo porque, se  $x_0$  for um ponto de equilíbrio de (2.1), o mesmo se verifica com todos os pontos da sua órbita de grupo.

Um *equilíbrio relativo*,  $R$ , é uma órbita de grupo invariante pelo fluxo de  $f$ .

O seguinte resultado será neccessário à frente:

**Teorema 2.17 (Sotomayor [28], capítulo VI, 3, teorema 2)** *Se  $x(t)$  é uma solução máxima de (2.1) no intervalo  $I$ , verifica-se uma única das seguintes alternativas:*

- $x(t)$  é injectiva;
- $I = \mathbf{R}$  e  $x(t)$  é constante;
- $I = \mathbf{R}$  e  $x(t)$  é periódica, isto é, existe um  $\tau > 0$  tal que  $x(t + \tau) = x(t)$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ , e  $x(t_1) \neq x(t_2)$  se  $|t_1 - t_2| < \tau$ .

### 2.3.1 O subespaço de pontos fixos por $\Sigma$

A  $\Gamma$ -equivariância força a existência de subespaços vectoriais invariantes pelo fluxo de  $f$ , os subespaços de pontos fixos.

Seja  $\Sigma \subset \Gamma$  um subgrupo de  $\Gamma$  e  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  uma aplicação  $\Gamma$ -equivariante. O subespaço de pontos fixos por  $\Sigma$  é

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in \mathbf{R}^n : \sigma.x = x, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Verifica-se facilmente que  $\text{Fix}(\Sigma)$  é um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^n$  e que

$$f(\text{Fix}(\Sigma)) \subset \text{Fix}(\Sigma).$$

Ver [9], capítulo XIII, secção 2.

Para encontrar pontos de equilíbrio de (2.1), com uma dada simetria  $\Sigma$ , basta restringir  $f$  a  $\text{Fix}(\Sigma)$  e resolver  $f(x) = 0$  neste subespaço.

Note-se que o facto de os espaços de pontos fixos serem invariantes pelo fluxo de  $f$  não implica, evidentemente, que sejam também invariantes pela acção do grupo  $\Gamma$ .

O maior subgrupo de  $\Gamma$  que deixa  $\text{Fix}(\Sigma)$  invariante é o *normalizador* de  $\Sigma$  em  $\Gamma$ , denotado  $N(\Sigma)$ , e definido do seguinte modo:

$$N(\Sigma) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma\Sigma = \Sigma\gamma\}.$$

Podemos restringir o campo de vectores  $f$  a  $\text{Fix}(\Sigma)$  e considerar apenas a acção de  $N(\Sigma)$ , isto é,

$$f|_{\text{Fix}(\Sigma)}(\gamma.x) = \gamma.f|_{\text{Fix}(\Sigma)}(x)$$

para todo  $\gamma \in N(\Sigma)$  e para todo  $x \in \text{Fix}(\Sigma)$ .

Existe, portanto uma acção natural de  $N(\Sigma)$  em  $\text{Fix}(\Sigma)$ . Os elementos de  $\Sigma$  actuam trivialmente em  $\text{Fix}(\Sigma)$ . Para obtermos, a partir da acção de  $N(\Sigma)$ , uma acção efectiva em  $\text{Fix}(\Sigma)$  é necessário considerar a acção induzida de  $N(\Sigma)/\Sigma$ .

## Capítulo 3

# Grupos de transformações e secções

Apresentamos aqui alguns tópicos da teoria de grupos de transformações compactos. O objectivo é fornecer conceitos e resultados básicos nesta teoria que permitam ao leitor uma melhor compreensão das demonstrações dos teoremas 3.10 e 3.11. Estes dois resultados, de Mostert (1957) e de Hofmann e Mostert (1966), são apresentados na secção 3.4. Considerámos pertinente incluir um esboço das demonstrações porque os dois teoremas são usados fortemente no próximo capítulo.

Na primeira secção é estudado um exemplo de acção linear de um grupo de Lie compacto em  $\mathbf{R}^3$ , que poderá facilitar a leitura do resto do capítulo. A seguir são apresentados alguns resultados sobre *secções* e sobre *slices*. Nem sempre enunciamos os resultados de um modo tão geral quanto na versão original.

Depois dos teoremas de Mostert e de Hofmann e Mostert indicamos algumas consequências que podem ser tiradas desses teoremas. Se as órbitas de grupo regulares tiverem codimensão 1 fazemos uma caracterização pormenorizada do espaço das órbitas quando a variedade  $X$  é compacta e simplesmente conexa de dimensão  $m \geq 3$ .

### 3.1 Acção de $\mathbf{O}(2)$ em $\mathbf{R}^3$

Consideremos a acção do grupo  $\mathbf{O}(2)$  em  $\mathbf{R}^3$  que reflecte no plano  $xy$  e roda em torno do eixo dos  $zz$ . Assim, o grupo  $\mathbf{O}(2)$  é gerado por  $\theta$  e  $k$ , onde

$$\begin{aligned}\theta.(x, y, z) &= (x \cos \theta, y \sin \theta, z), \theta \in [0, 2\pi[ \\ k.(x, y, z) &= (x, y, -z)\end{aligned}$$

O elemento  $k$  reflecte no plano  $xy$  e o único elemento da forma  $\theta$  que actua trivialmente em todo o  $\mathbf{R}^3$  é o elemento identidade de  $\mathbf{O}(2)$ . As compostas de  $k$  com  $\theta$  também vão ter esta propriedade, portanto esta acção é efectiva. No entanto não é irreduzível, pois, representando por  $\mathbf{Z}_2(k)$  o grupo  $\{I, k\}$ , é possível decompor

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^3 &= \text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k)) \oplus \text{Fix}(\mathbf{SO}(2)) \\ &= \{(x, y, 0)\} \oplus \{(0, 0, z)\}\end{aligned}$$

e os dois subespaços de pontos fixos são  $\mathbf{O}(2)$ -invariantes.

Se  $z \neq 0$  então a órbita de  $p = (x, y, z)$  é constituída por duas circunferências:

$$\Gamma(p) = \{(x \cos \theta, y \sin \theta, z), \theta \in [0, 2\pi[ \} \cup \{(x \cos \theta, y \sin \theta, -z), \theta \in [0, 2\pi[ \}.$$

Estes pontos são designados por pontos regulares (ver secção 2.1). As suas órbitas (órbitas regulares) têm duas componentes conexas de dimensão 1 (figura 3.1). O subgrupo de isotropia de  $p$  é  $\{I\}$ .

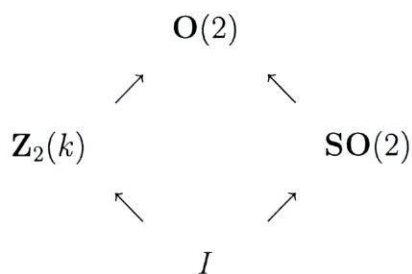
Os pontos excepcionais são da forma  $q = (x, y, 0)$  onde  $(x, y) \neq (0, 0)$ . A sua órbita é a circunferência

$$\Gamma(q) = \{(x \cos \theta, y \sin \theta, 0), \theta \in [0, 2\pi[ \}.$$

O subgrupo  $\Gamma_q$  é  $\mathbf{Z}_2(k) = \{I, k\}$ . A órbita da origem é a própria origem, que é um ponto singular. O subgrupo de isotropia da origem é o próprio  $\mathbf{O}(2)$ .

Pontos no eixo dos  $zz$  da forma  $r = (0, 0, z)$  com  $z \neq 0$  são também pontos singulares. A sua órbita é  $\{(0, 0, z), (0, 0, -z)\}$  e  $\Gamma_r = \mathbf{SO}(2)$ .

O reticulado de subgrupos de isotropia para esta acção de  $\mathbf{O}(2)$  em  $\mathbf{R}^3$  é:



Na figura 3.1, abaixo, está exemplificada uma órbita para cada tipo de isotropia.

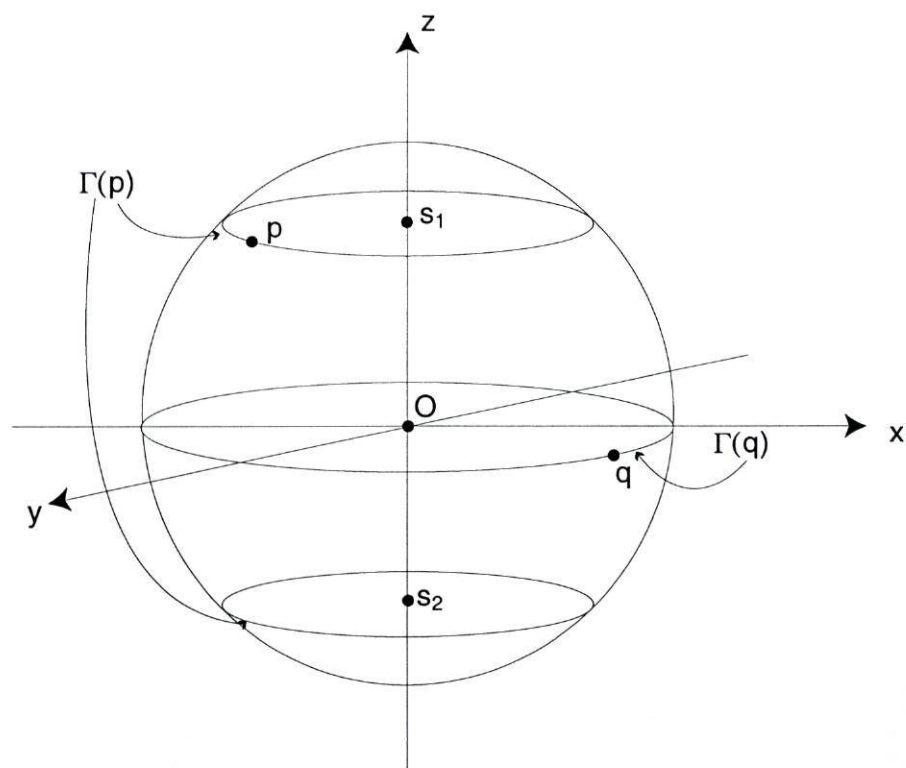


Figura 3.1 Ação de  $\text{O}(2)$  em  $\mathbf{R}^3$ : órbitas singulares:  $O$  e  $s_1 \cup s_2$ ; órbita excepcional:  $\Gamma(q)$ ; e órbita regular:  $\Gamma(p)$ .

### 3.2 Existência de secções locais

Consideremos uma variedade diferenciável  $X$  e um grupo de Lie compacto,  $\Gamma$ , actuando em  $X$ . As órbitas de  $\Gamma$  fazem uma *partição* de  $X$ . O estudo da estrutura topológica desta partição está relacionado com a topologia de  $\Gamma$  do seguinte modo: sejam  $x \in X$  e  $O$  um aberto qualquer em  $\Gamma$  que contenha o subgrupo de isotropia  $\Gamma_x$ ; para  $y$  suficientemente

próximo de  $x$  o subgrupo  $\Gamma_y$  está em  $O$  (Montgomery e Zippin [23], secção 5.3). Note-se que, sendo  $\Gamma$  compacto, os subgrupos de isotropia também o são, já que são sempre subgrupos fechados de  $\Gamma$  (proposição 2.2). Podemos, portanto afirmar que, a pontos próximos em  $X$  correspondem subgrupos de isotropia próximos em  $\Gamma$ . É natural agora perguntar qual a relação entre um subgrupo fechado de  $\Gamma$  e outro numa vizinhança aberta do primeiro. Respondendo a esta questão, Montgomery e Zippin provaram que todo subgrupo compacto suficientemente perto de um subgrupo compacto  $\Sigma$  é conjugado a um subgrupo de  $\Sigma$ :

**Teorema 3.1** (Montgomery e Zippin [22], teorema 1 e corolário) *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie e  $\Sigma$  um subgrupo compacto de  $\Gamma$ . Existe um aberto  $O$  em  $\Gamma$ , contendo  $\Sigma$ , com a seguinte propriedade: se  $\Delta$  for um subgrupo compacto de  $\Gamma$  e  $\Delta \subset O$ , então existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma^{-1}\Delta\gamma \subset \Sigma$ . Além disso, dada uma vizinhança  $W$  da identidade em  $\Gamma$ , o elemento  $\gamma$  acima pode ser escolhido em  $W$  se o aberto  $O$  for suficientemente pequeno.*

Uma consequência imediata deste resultado é que para todo  $x \in X$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que, para  $y \in U$ , o subgrupo de isotropia  $\Gamma_y$  é conjugado a um subgrupo de  $\Gamma_x$ . Na verdade vamos ver no próximo teorema que existe um subconjunto aberto de  $X$  tal que para todo  $x$  e para todo  $y$  nesse aberto, os subgrupos de isotropia  $\Gamma_x$  e  $\Gamma_y$  são conjugados. Note-se que o próximo teorema afirma que, sob certas condições,  $\Gamma_y$  é conjugado a  $\Gamma_x$ , o que é mais forte que a afirmação anterior de  $\Gamma_y$  ser conjugado a um subgrupo de  $\Gamma_x$ .

**Teorema 3.2** (Montgomery e Zippin [23], secção 5.4) *Em qualquer acção diferenciável de um grupo de Lie compacto  $\Gamma$  numa variedade  $X$  há um subconjunto,  $Q$ , aberto de  $X$  tal que para todo  $x$  e para todo  $y$  em  $Q$ , os subgrupos de isotropia  $\Gamma_x$  e  $\Gamma_y$  são conjugados.*

**Demonstração:**

Seja  $k$  a maior dimensão de qualquer órbita de  $\Gamma$  em  $X$  e denotemos por  $\hat{Q}$  o conjunto de todos os pontos de  $X$  em órbitas de dimensão  $k$ . O conjunto  $\hat{Q}$  é aberto

(ver Montgomery e Zippin [23], teorema 6.2.3) e, se  $x$  e  $y$  forem dois pontos de  $\hat{Q}$ , então  $\dim \Gamma_x = \dim \Gamma_y$ .

Seja  $Q \subset \hat{Q}$  o conjunto dos pontos  $p$  tais que  $\Gamma_p$  tem o menor número possível de componentes.

Pelo resultado de Montgomery e Zippin referido acima (teorema 3.1 e conclusão seguinte) segue que para todo  $x$  perto de  $p \in Q$  o subgrupo de isotropia  $\Gamma_x$  é conjugado a um subgrupo de  $\Gamma_p$ . Sabemos que  $\dim \Gamma_x = \dim \Gamma_p$  e, como  $\Gamma_x$  e  $\Gamma_p$  têm o mesmo número de componentes, conclui-se que para todo  $x$  perto de  $p$ , o subgrupo de isotropia  $\Gamma_x$  é conjugado a  $\Gamma_p$ . Em particular segue que  $x \in Q$ , portanto  $Q$  é aberto.  $\square$

O conjunto  $Q$ , além de ser aberto, é denso (Bredon [3], capítulo IV, teorema 3.1).

Por exemplo, para a acção de  $\mathbf{O}(2)$  em  $\mathbf{R}^3$ , o conjunto  $\hat{Q}$  é  $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$ , que é aberto e denso em  $\mathbf{R}^3$  e  $Q = \hat{Q} \setminus \{(x, y, 0)\}$ , também aberto e denso.

Como vimos na secção 2.1, um ponto  $p \in Q$  com as propriedades acima referidas chama-se regular. Os restantes pontos de  $\hat{Q}$  chamam-se excepcionais. Todos os pontos em órbitas de dimensão menor que  $k$  são designados por singulares.

Veremos a seguir que, se  $p$  for um ponto regular, as órbitas de  $\Gamma$  têm uma secção local em  $p$  (ver definição de secção no capítulo anterior).

Designaremos por *vizinhança fechada de  $p$*  um conjunto fechado que contém  $p$  no seu interior.

**Teorema 3.3 (Gleason [7], corolário 3.5)** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando numa variedade  $X$ . Se  $p \in Q$  então existe uma vizinhança fechada,  $U$ , de  $p$  e um subconjunto fechado  $C \subset U$ , tal que a órbita de cada ponto de  $U$  tem exactamente um ponto em comum com  $C$ .*

Por outras palavras, o teorema 3.3 afirma que existe uma secção local em  $p$ . Este conjunto  $C$  é formado apenas por pontos cujo subgrupo de isotropia é igual a  $\Gamma_p$  (ver [7], demonstração do corolário 3.5).

No exemplo da acção de  $\mathbf{O}(2)$  em  $\mathbf{R}^3$ , se  $p \in Q$ , consideremos o plano que contém  $p$  e o eixo dos  $zz$ . Qualquer conjunto fechado nesse plano, que contenha  $p$  e não interseccione

o eixo dos  $zz$  nem o plano  $z = 0$ , está nas condições do conjunto  $C$  do teorema 3.3.

**Teorema 3.4 (Gleason [7], teorema 2.3)** *Sejam  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando numa variedade  $X$  e  $\Sigma$  um subgrupo fechado de  $\Gamma$ . Suponhamos que  $C$  seja um subconjunto fechado de  $X$  tal que, se  $p \in C$  então  $\Gamma_p = \Sigma$  e  $\Gamma(p) \cap C = \{p\}$ . Então a aplicação  $(\gamma.\Gamma_p, p) \mapsto \gamma.p$  de  $(\Gamma/\Gamma_p) \times C$  sobre  $\Gamma(C)$  é um homeomorfismo.*

Isto é, existe uma vizinhança de  $p$  homeomorfa a  $(\Gamma/\Gamma_p) \times V$ , onde  $V$  é um aberto de  $X/\Gamma$  contendo  $\pi(p)$  (sendo  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  a projecção natural definida no capítulo anterior). Na verdade, nessa vizinhança,  $X$  é um fibrado trivial sobre  $X/\Gamma$  com aplicação projecção  $\pi$ , em que as fibras são as órbitas ([7], teorema 3.6).

Em resumo, dada uma secção local em  $\pi(p)$  e outro ponto qualquer  $x$ , distinto de  $p$ , no conjunto imagem,  $C$ , desta secção, então:

- os pontos  $p$  e  $x$  estão em órbitas distintas;
- os subgrupos de isotropia  $\Gamma_p$  e  $\Gamma_x$  são iguais;
- o conjunto  $\Gamma(C) = \{\gamma.c : \gamma \in \Gamma, c \in C\}$  é uma vizinhança de  $p$ ;
- esta secção local em  $p$  é também secção local para qualquer ponto no interior do conjunto  $\Gamma(C)$ .

Os resultados anteriores são válidos para espaços topológicos mais gerais que as variedades diferenciáveis. Apesar disto, as secções locais nem sempre existem, mesmo para acções de grupos de Lie compactos em variedades diferenciáveis (ver capítulo anterior, proposição 2.15).

### 3.3 Existência de slices

Uma noção relacionada com a secção é a de *slice*, que existe num âmbito mais geral que a secção. Usaremos o termo inglês “slice” por não conhecermos uma tradução adequada.

Se  $\Gamma$  for um grupo compacto é possível definir uma métrica riemanniana invariante em  $X$  ([10], capítulo II, proposição 27.2). Esta métrica é designada por métrica de Haar. Neste caso, uma slice em  $x \in X$  pode ser descrita *grosso modo* como um subconjunto  $S$  de  $X$  ortogonal à órbita  $\Gamma(x)$  em  $x$ , invariante por  $\Gamma_x$  (i.e.,  $\Gamma_x(S) = S$ ) e cuja dimensão é igual à dimensão complementar de  $\Gamma(x)$ . Se  $x$  for fixo por  $\Gamma$ , então uma slice em  $x$  é simplesmente uma vizinhança invariante de  $x$ .

Um exemplo simples é a acção do grupo  $\mathbf{SO}(2)$  em  $\mathbf{R}^2$  dada por

$$\theta.(x, y) = (\cos\theta, \text{sen}\theta), \theta \in [0, 2\pi[$$

As órbitas de grupo são circunferências centradas na origem. Consideremos, para cada  $(a, b) \neq (0, 0)$ , a semi-recta de extremidade na origem e contendo  $(a, b)$ . Qualquer subconjunto aberto dessa semi-recta, que contenha  $(a, b)$  é uma slice em  $(a, b)$ . Ver figura 3.2.

Uma slice em  $(0, 0)$  é uma vizinhança aberta de  $(0, 0)$ .

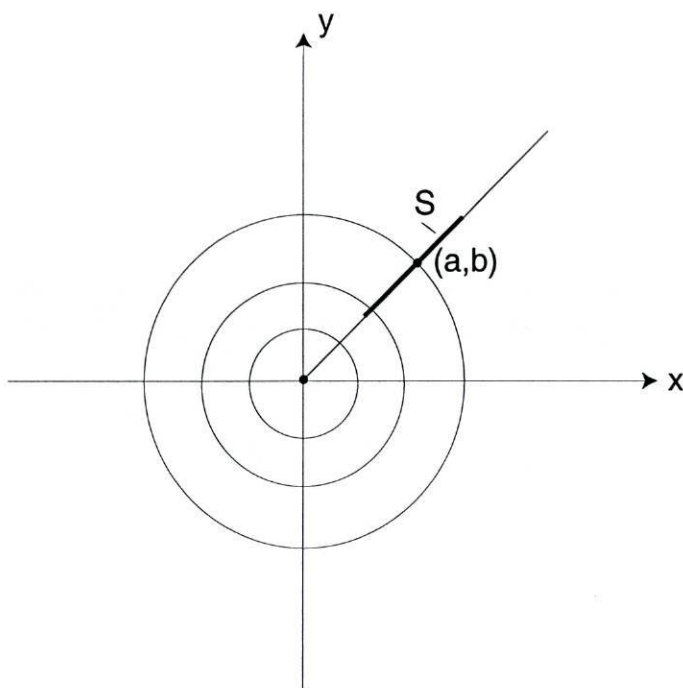


Figura 3.2 Slice  $S$  no ponto  $(a, b) \neq (0, 0)$  para a acção usual de  $\mathbf{SO}(2)$  em  $\mathbf{R}^2$ .

Existem várias definições de slice na literatura. Usaremos a seguinte:

**Definição 3.5** (Guillemin e Sternberg [10], capítulo II, secção 27) *Uma slice em  $x$  é um subconjunto  $S$  de  $X$  tal que  $x \in S$  e*

- $S$  é fechada em  $\Gamma(S)$ ;
- $\Gamma(S)$  é uma vizinhança aberta de  $\Gamma(x)$ ;
- $\Gamma_x(S) = S$ ;
- $(\gamma S) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow \gamma \in \Gamma_x$ .

No caso de  $\Gamma$  actuar diferenciavelmente numa variedade diferenciável  $X$  provou-se em [14] que em todo ponto de  $X$  existe uma slice.

No artigo [19] está provado o mesmo resultado. Incluímos aqui o enunciado por este esclarecer o conceito de slice:

**Proposição 3.6** (Montgomery *et al* [19], lema 3.1) *Seja  $X$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando diferenciavelmente em  $X$ . Para todo ponto  $p$  de  $X$  existe uma vizinhança compacta  $U$  de  $p$  e um subconjunto  $S$  compacto de  $U$  satisfazendo as seguintes condições:*

- i) *Para  $x \in S$  e  $\gamma \in \Gamma$ , o ponto  $\gamma.x \in S$  se e só se  $\gamma \in \Gamma_p$ , i.e.,  $S$  é invariante por  $\Gamma_p$ .*
- ii) *Se  $\dim \Gamma(p) = s$ , então  $S$  é um subconjunto de dimensão  $(n-s)$  e podemos escolher coordenadas  $(y_1, \dots, y_{n-s})$  em  $S$  de modo que*
  - $S$  seja dado por  $y_1^2 + \dots + y_{n-s}^2 \leq 1$  e
  - $\Gamma_p$  actue ortogonalmente em  $S$ .
- iii) *Existe um subconjunto fechado  $O$  de  $\Gamma$  com dimensão  $s$  tal que  $(\gamma, x) \mapsto \gamma.x$  é um homeomorfismo de  $O \times S$  sobre  $U$ .*

Note-se que o conjunto  $S$  desta proposição é uma slice em  $p$ . Uma consequência imediata da demonstração deste resultado é:

**Corolário 3.7** (Montgomery *et al* [19], (3.2)) *Sejam  $p$  e  $S$  nas condições da proposição anterior. Se  $x \in S$ , então  $\Gamma_x \subset \Gamma_p$  e*

$$\dim(\Gamma(x) \cap S) = \dim \Gamma(x) - \dim \Gamma(p).$$

Note-se que  $(\Gamma(x) \cap S) = \Gamma_p(x)$ , por **i**) da proposição 3.6.

Vamos ver na proposição 3.9 abaixo que, em alguns casos, podemos garantir a existência de secções dada a existência de uma slice.

**Definição 3.8** (Montgomery e Zippin [23], secção 1.27) *Um espaço topológico é localmente euclidiano de dimensão  $n$  se todo ponto desse espaço tiver uma vizinhança homeomorfa a  $\mathbf{R}^n$ .*

Se um espaço localmente euclidiano for separável e conexo, será designado por *variedade topológica*.

Para  $x \in X$  seja  $\Gamma_x^0$  a componente de  $\Gamma_x$  que contém a identidade. Então  $\Gamma_x^0$  é um subgrupo normal de  $\Gamma_x$  e a ordem do grupo quociente  $\Gamma_x/\Gamma_x^0$  é finita ([19], 1). Denotaremos esta ordem por  $m(x)$ .

Consideremos o conjunto

$$X_{u,v} = \{x \in X : \dim \Gamma(x) = u, m(x) = v\}$$

onde  $u \geq 0$  e  $v > 0$  são inteiros.

Sejam  $p \in X_{u,v}$  e  $S$  uma slice em  $p$ . A proposição seguinte afirma que existe, em  $S$ , um subconjunto fechado que intersecta uma única vez todas as órbitas numa vizinhança de  $p$  que tenham o mesmo tipo de isotropia de  $p$ . Por outras palavras, existe uma secção local em  $p$  cujos pontos pertencem a  $S$ .

**Proposição 3.9** (Montgomery *et al* [19], (4.1)) *Sejam  $p \in X_{u,v}$  e  $S, U, O$  como na proposição 3.6. Então  $S \cap X_{u,v}$  é um subconjunto de  $S$  fechado,  $U \cap X_{u,v}$  é também fechado e  $X_{u,v}$  é localmente euclidiano. Além disto o conjunto  $S \cap X_{u,v}$  é uma secção para as órbitas em  $\Gamma(U) \cap X_{u,v}$  e todos os pontos de  $S \cap X_{u,v}$  têm subgrupo de isotropia igual a  $\Gamma_p$ .*

**Demonstração:**

Pela proposição 3.6 i), o conjunto  $S \cap X_{u,v}$  é o conjunto dos pontos fixos por  $\Gamma_p$  em  $S$ . O grupo  $\Gamma_p$  actua ortogonalmente em  $S$  (proposição 3.6 ii)) e, portanto,  $S \cap X_{u,v}$  é um subconjunto fechado. Usando o item iii) da proposição 3.6, o conjunto  $U \cap X_{u,v}$  é o produto de  $O$  por  $S \cap X_{u,v}$  e portanto é também fechado. Se  $x \in S \cap X_{u,v}$ , então  $\Gamma_x = \Gamma_p$  (proposição 3.6 i)). Conclui-se que  $(\gamma \Gamma_p, x) \mapsto \gamma.x$  define um homeomorfismo de  $\Gamma/\Gamma_p \times (S \cap X_{u,v})$  sobre  $\Gamma(U) \cap X_{u,v}$ , o que completa a demonstração.  $\square$

A existência de slices foi estendida para o caso de  $\Gamma$  actuar não diferenciavelmente num espaço  $X$  completo, separável, métrico, de dimensão finita ([21]). Mostow fez algumas generalizações a este resultado no artigo [26].

Em seguida a existência de slices foi provada numa situação mais geral por Palais ([27]) para acções de grupos de Lie não compactos actuando em espaços designados por espaços de Cartan. Há exemplos de existência de slices em espaços que não se incluem na classe de espaços de Cartan (ver [13]).

### 3.4 Existência de secções (globais)

A seguir enunciamos e incluímos um esboço da demonstração de dois teoremas relacionados com secções que serão usados no próximo capítulo. Relembramos que a aplicação  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  envia  $x \in X$  na sua órbita. A partir de agora suporemos que a variedade  $X$  é conexa.

**Teorema 3.10 (Mostert [25], teorema 1)** *Sejam  $X$  uma variedade topológica de dimensão  $n+1$  e  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando em  $X$  de modo que as órbitas de dimensão máxima tenham dimensão  $n$ . O espaço das órbitas,  $X/\Gamma$ , é homeomorfo a um dos seguintes (i) circunferência, (ii) intervalo aberto unitário, (iii) intervalo semi-aberto unitário ou (iv) intervalo fechado unitário.*

**Esboço da demonstração:**

Sejam  $Q$  o conjunto dos pontos regulares e  $p \in Q$ . Isto é,  $p$  pertence a uma órbita de dimensão  $n$  e o subgrupo de isotropia  $\Gamma_p$  é mínimo no sentido de  $\dim \Gamma_p$  ser mínima e entre os subgrupos de isotropia da mesma dimensão, o número de componentes de  $\Gamma_p$  ser mínimo. Existe uma vizinhança compacta  $U$  de  $p$  tal que se  $x \in U$  então  $\Gamma_x$  é conjugado a  $\Gamma_p$  (teorema 3.1) e, pelo teorema 3.4, podemos supor que  $U$  é homeomorfa a  $\pi(U) \times (\Gamma/\Gamma_p)$ . Uma vez que  $\dim U = n + 1$  e  $\dim(\Gamma/\Gamma_p) = \dim \Gamma(p) = n$ , temos  $\dim \pi(U) = 1$ . Mais ainda, uma vez que  $U$  e  $\Gamma/\Gamma_p$  são localmente euclidianos, pelo teorema de Borsuk ([2], secção 9), conclui-se que  $\pi(U)$  é um arco.

Como  $Q$  é aberto e denso em  $X$  então  $\pi(Q)$  é aberto e denso em  $X/\Gamma$ . Resta ver o comportamento em torno dos pontos  $y \notin \pi(Q)$ .

Note-se que, neste caso,  $y$  pertence ao bordo de  $\pi(Q)$  e que  $X/\Gamma$  é conexo. Se mostrarmos que  $y$  pertence ao bordo de  $X/\Gamma$  segue-se que  $X/\Gamma$  é localmente euclidiano de dimensão 1, conexo e com bordo.

A ideia é usar o mesmo método que foi usado para  $\pi(Q)$ . A obstrução é o teorema 3.4 que não se aplica neste caso.

Suponhamos que  $y$  esteja no interior de  $X/\Gamma$  mas  $y \notin \pi(Q)$ . Então  $y$  desconecta, localmente, o espaço  $X/\Gamma$ . Logo  $\pi^{-1}(y)$  desconecta  $X$  e portanto tem dimensão  $n$  em  $X$ . Seja  $x \in \pi^{-1}(y)$ , então  $\Gamma_x$  tem dimensão mínima e mais componentes que o mínimo. Seja  $W$  uma vizinhança de  $\Gamma(x)$  tal que  $z \in W \Rightarrow \Gamma_z \subset \Gamma_x$  e consideremos a projecção  $W \xrightarrow{\pi_1} X_1 = W/\Gamma_x$ . Todos os elementos de  $W$  têm a mesma isotropia e podemos usar o teorema 3.4 para concluir que  $X_1$  é homeomorfo a  $C \times \Gamma/\Gamma_x$ . Como  $\Gamma/\Gamma_x$  tem dimensão  $n$ , então  $C$  tem dimensão 1.

Denotando  $\pi_1^{-1}(C) = P$ , temos que  $W$  é homeomorfo a  $P \times \Gamma/\Gamma_x$  e  $P \cap \Gamma(x) = \{x\}$ . Resta ver como se comporta  $\pi : P \rightarrow X/\Gamma$ . Há duas situações possíveis: se  $\pi|_P$  for injectiva então  $x \in Q$ ; se  $\pi|_P$  não for injectiva então será uma dobra em  $x$  e  $y = \pi(x)$  está no bordo de  $X/\Gamma$ .  $\square$

Da discussão acima, é claro que todos os subgrupos de isotropia de pontos de  $X$ , excepto os de pontos enviados por  $\pi$  no bordo, são conjugados entre si. De acordo com a classificação das órbitas feita no capítulo anterior, as órbitas que são enviadas por  $\pi$  no bordo são singulares ou excepcionais e as restantes são regulares.

O teorema 3.10 foi provado posteriormente por Bredon, retirando a hipótese de  $\Gamma$  ser grupo de Lie ([4], teorema 10).

Quando  $X$  e  $\Gamma$  estão nas condições do teorema 3.10 é possível construir uma secção  $\sigma : X/\Gamma \rightarrow X$  :

**Teorema 3.11 (Hofmann e Mostert [12], lema 2)** *Suponhamos que  $X/\Gamma$  seja uma variedade unidimensional com bordo totalmente ordenada e conexa (o bordo é constituído por pontos terminais apenas e pode ser vazio). Sempre que  $\pi(x)$  e  $\pi(y)$  não forem pontos do bordo de  $X/\Gamma$  supõe-se que  $\Gamma_x = \gamma^{-1}\Gamma_y\gamma$  para algum  $\gamma \in \Gamma$ . Seja  $p$  um ponto qualquer de  $X$  pertencente a uma órbita regular. Então existe uma secção  $\sigma : X/\Gamma \rightarrow X$  tal que*

- i)  $\sigma\pi(p) = p$ .
- ii) Para qualquer par de pontos  $a, b \in X/\Gamma$ , se  $a$  não pertence ao bordo de  $X/\Gamma$ , tem-se  $\Gamma_{\sigma(a)} \subset \Gamma_{\sigma(b)}$ .
- iii) Se  $a, b$  são pontos do bordo de  $X/\Gamma$ , então  $\Gamma_{\sigma(b)} \cdot (\sigma(X/\Gamma \setminus a))$  é uma slice em  $\sigma(b)$ .
- iv) A aplicação  $\psi : X/\Gamma \times \Gamma/\Gamma_p \rightarrow X$  definida por  $\psi(c, \gamma\Gamma_p) = \gamma \cdot \sigma(c)$  é aberta e contínua. Mais, se  $a$  e  $b$  forem pontos do bordo de  $X/\Gamma$ , então  $\psi|_{((X/\Gamma) \setminus \{a, b\}) \times \Gamma/\Gamma_p}$  é um homeomorfismo sobre  $\pi^{-1}((X/\Gamma) \setminus \{a, b\})$ .

### Demonstração:

Se  $X/\Gamma$  não tiver bordo, então  $X$  será localmente um fibrado trivial sobre  $X/\Gamma$  pelo teorema da secção de Serre-Borel ([24], teorema 10). Se  $X/\Gamma$  tiver dois pontos terminais, então  $\pi(p)$  cortará  $X/\Gamma$  em dois pedaços conexos  $A$  e  $B$  com  $A \cup B = X/\Gamma$  e  $A \cap B = \pi(p)$ . Note-se que, tanto  $A$  como  $B$ , têm apenas um ponto do bordo. No caso de existir apenas um ponto no bordo de  $X/\Gamma$ , seja  $A$  o espaço  $X/\Gamma$ .

O próximo passo é a construção de uma secção  $\sigma_1$  definida em  $A$ . Esta construção encontra-se no lema 3.12.

Se  $A = X/\Gamma$ , seja  $\sigma = \sigma_1$ . Caso contrário seja  $\sigma_2$  a secção definida para  $B$  do mesmo modo que foi definida para  $A$ . Então  $\sigma$  definida por  $\sigma(a) = \sigma_1(a)$  se  $a \in A$  e  $\sigma(a) = \sigma_2(a)$  se  $a \in B$  é a secção desejada, que satisfaz i) e iii). Dado que  $\Gamma_{\sigma(c)} \subset \Gamma_{\sigma(b)}$  para todo ponto  $c \in X/\Gamma$  não pertencente ao bordo, então ii) é claramente verificado.

O facto de  $\psi$  ser uma aplicação contínua aberta é consequência de  $\sigma$  ser uma secção. Além disso,  $\psi$  é um homeomorfismo entre os conjuntos indicados porque os grupos de isotropia são os mesmos em  $\sigma((X/\Gamma) \setminus \{a, b\})$ .  $\square$

O próximo lema é parte da demonstração do teorema de Hofmann e Mostert (teorema 3.11), que foi dividida para facilitar a exposição.

**Lema 3.12** *Suponhamos que  $X/\Gamma$  seja uma variedade unidimensional homeomorfa a um intervalo semi-aberto. Sempre que  $\pi(x)$  e  $\pi(y)$  não forem o ponto do bordo de  $X/\Gamma$  supõe-se que  $\Gamma_x = \gamma^{-1}\Gamma_y\gamma$  para algum  $\gamma \in \Gamma$ . Seja  $p$  um ponto qualquer de  $X$  pertencente a uma órbita regular. Então existe uma secção  $\sigma_1 : X/\Gamma \rightarrow X$  tal que  $\sigma_1\pi(p) = p$ , onde  $\pi$  é a aplicação projecção.*

### Esboço da demonstração:

Se todos os subgrupos de isotropia em  $X$  fossem conjugados, então  $X \xrightarrow{\pi} X/\Gamma$  seria um fibrado trivial e não haveria problemas em encontrar a secção.

Como  $X$  tem pontos não regulares (*i.e.*  $X/\Gamma$  tem bordo) a dificuldade está em que a imagem por  $\pi^{-1}$  da órbita não regular não é homeomorfa às outras fibras.

Consideremos o ponto,  $b$ , do bordo de  $X/\Gamma$  e  $q \in \pi^{-1}(b)$ .

Vamos provar a seguir que existe uma slice  $S$  em  $q$ . Depois, à custa de pontos desta slice, construiremos a secção  $\sigma_1$  pretendida.

Na acção de  $\Gamma$  sobre  $X/\Gamma_q$  todos os subgrupos de isotropia são conjugados e por isto  $X/\Gamma_q \rightarrow X/\Gamma$  é um fibrado trivial, com uma secção  $\tau$  que satisfaz  $\tau\pi(q) = \Gamma_q.q$ .

Consideremos a projecção

$$\mathcal{P} : X \rightarrow X/\Gamma_q.$$

A imagem inversa  $\mathcal{P}^{-1}(\tau(X/\Gamma))$  em  $X$  é uma slice em  $q$ . Denotemos essa slice por  $S$ .

Seja

$$T = \{s : s \in S \text{ e, (ou } s = q \text{ ou } \Gamma_s = \Gamma_{p'})\}$$

onde  $p' \in S \cap \Gamma(p)$  é um elemento fixado.

Note que qualquer ponto  $x$  de  $S$  que não esteja em  $T$  tem subgrupo de isotropia conjugado a  $\Gamma_{p'}$ . Usando essa conjugação é possível encontrar um elemento da órbita de  $x$  com subgrupo de isotropia  $\Gamma_{p'}$  (provado no capítulo 2).

Então  $T$  é um subconjunto fechado de  $S$  que intersecta qualquer órbita de  $\Gamma_q$ .

Seja  $N$  o normalizador de  $\Gamma_{p'}$  em  $\Gamma_q$ . Veremos no próximo parágrafo que existe uma secção  $T/N \rightarrow T$ .

O grupo  $N$  actua em  $T$ , pois  $\Gamma_s = \Gamma_{p'}$  e  $h \in N$  implica que

$$\Gamma_{h.s} = h^{-1}\Gamma_s h = \Gamma_s = \Gamma_{p'}.$$

Mais, se  $s \neq q$  e  $\Gamma_{g.s} = \Gamma_s = \Gamma_{p'}$ , então  $g^{-1}\Gamma_s g = \Gamma_s$ , o que implica que  $g \in N$ . Logo,  $N$  é transitivo em todo o conjunto  $T \cap \Gamma_q.s$  de modo que  $T/N$  é naturalmente homeomorfo a  $S/\Gamma_q$  e portanto a  $X/\Gamma$ . Logo, existe uma secção  $T/N \rightarrow T$ .

Seja  $\sigma_1$  a composição do homeomorfismo natural  $X/\Gamma \rightarrow T/N$ , com esta secção  $T/N \rightarrow T$  e com a transformação  $x \mapsto \gamma.x$  onde  $\gamma \in \Gamma$  é tal que  $\gamma.p' = p$ . Então  $\sigma_1$  satisfaz as exigências no que respeita a  $X/\Gamma$ .  $\square$

### 3.5 Caracterização adicional do espaço das órbitas

Sejam  $X$  uma variedade diferenciável e  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando em  $X$ . Se as órbitas de maior dimensão tiverem codimensão 1, então, vimos na secção anterior que  $X/\Gamma$  é uma variedade unidimensional com bordo (teorema 3.10) e existe

uma secção  $\sigma : X/\Gamma \rightarrow X$  (teorema 3.11). Nesse caso, pelo teorema 3.10, o conjunto  $X/\Gamma$  pode ser um segmento (aberto, semi-aberto, ou fechado) ou uma curva fechada simples.

Seja  $C = \sigma(X/\Gamma)$  o conjunto imagem da secção  $\sigma$  do teorema 3.11.

Fazemos a seguir algumas considerações sobre o conjunto  $C$ . Trata-se de um subconjunto de  $X$ , fechado, que intersecta cada órbita de  $\Gamma$  em  $X$  exactamente num ponto, como provado na secção 3.3.

Como são, topologicamente, as possíveis imagens por  $\sigma$  de um segmento (aberto, semi-aberto, ou fechado) ou de uma curva fechada simples?

**Proposição 3.13** *Sejam  $X$  uma variedade compacta de dimensão  $m > 1$  e  $\Gamma$  um grupo de Lie actuando em  $X$ . Se a órbita de maior dimensão tiver codimensão 1, ou  $C = \sigma(X/\Gamma)$  é homeomorfo a um segmento fechado ou é homeomorfo a uma curva fechada simples.*

**Demonstração:**

Note-se que, sendo  $X$  compacto, então  $X/\Gamma$  também é compacto e consequentemente  $C$  é compacto. O conjunto  $C$  não tem autointersecções porque  $\sigma$  é um homeomorfismo sobre a sua imagem (provado no capítulo 2).

O mesmo argumento explica que, se  $X/\Gamma$  for um segmento então  $\sigma(X/\Gamma)$  não pode ser uma curva fechada.

Conclui-se que, topologicamente,  $C$  pode ser uma de duas alternativas: ser homeomorfo a um segmento fechado ou ser homeomorfo a uma curva fechada simples.  $\square$

No caso de  $C$  ser homeomorfo a uma curva fechada simples todos os seus pontos têm subgrupos de isotropia conjugados. Este caso vai ser estudado a seguir. Em particular, vamos ver que, se  $X$  for uma variedade compacta simplesmente conexa de dimensão  $m \geq 3$ , então este caso nunca acontece.

Sejam  $\sigma(X/\Gamma) = C$  homeomorfo a  $\mathbf{S}^1$  e  $h : C \rightarrow \mathbf{S}^1$  um homeomorfismo.

Consideremos uma curva fechada simples em  $X$ , imagem de  $\alpha : \mathbf{S}^1 \rightarrow X$ . O diagrama a seguir define uma aplicação  $\varphi_\alpha : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  tal que  $\varphi_\alpha = h \circ \sigma \circ \pi \circ \alpha$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & X/\Gamma & \\
 \nearrow \pi & & \searrow \sigma \\
 X & \longrightarrow & C \\
 \alpha \uparrow & & \downarrow h \\
 \mathbf{S}^1 & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \mathbf{S}^1
 \end{array} \tag{3.1}$$

O gráfico de  $\varphi_\alpha$  é uma curva fechada simples no toro,  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ .

Seja  $\Phi_\alpha$  este gráfico, *i.e.*,

$$\Phi_\alpha = \{(z, \varphi_\alpha(z)) : z \in \mathbf{S}^1\}.$$

**Lema 3.14** *Sejam  $\alpha, \beta : \mathbf{S}^1 \rightarrow X$  curvas fechadas simples. Se  $\alpha$  e  $\beta$  forem homotópicas como curvas simples então  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\beta$  são curvas homotópicas em  $\mathbf{T}^2$ .*

**Demonstração:**

Seja  $H : [0, 1] \times \mathbf{S}^1 \rightarrow X$  uma homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$ , *i.e.*:

- $H$  é contínua;
- $H(0, z) = \alpha(z)$ ;
- $H(1, z) = \beta(z)$ ;
- $z \mapsto H(s, z)$  é uma curva fechada simples, para cada  $s \in [0, 1]$ .

Então  $f : [0, 1] \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  dada por  $f(s, z) = h \circ \sigma \circ \pi \circ H(s, z)$  é contínua. Logo  $\Phi_\alpha = \{(z, f(0, z))\}$  e  $\Phi_\beta = \{(z, f(1, z))\}$  são curvas homotópicas em  $\mathbf{T}^2$ .  $\square$

**Teorema 3.15** *Sejam  $X$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m > 1$  e  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando em  $X$ . Suponhamos que exista uma secção global  $\sigma : X/\Gamma \rightarrow X$  que seja um homeomorfismo sobre a sua imagem e que  $X/\Gamma$  seja homeomorfo a  $\mathbf{S}^1$ . Então  $X$  não é simplesmente conexa.*

**Demonstração:**

Como  $X/\Gamma$  é homeomorfo a  $\mathbf{S}^1$ , a construção do diagrama do esquema (3.1) pode ser feita e vale o lema 3.14.

O resultado fica demonstrado se encontrarmos duas curvas fechadas  $\alpha$  e  $\beta : \mathbf{S}^1 \rightarrow X$  tais que  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\beta$  não são homotópicas.

Para  $\alpha(\mathbf{S}^1) = C$  a aplicação  $\varphi_\alpha$  é a identidade.

Se  $\beta$  for uma curva fechada simples contida numa órbita, então a aplicação  $\varphi_\beta$  será constante. Logo  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\beta$  não serão homotópicas, como queríamos.

Resta verificar que existe sempre uma curva fechada  $\beta$  contida numa órbita. Como  $\dim X/\Gamma = 1$  existe algum ponto cuja órbita tem codimensão 1. Se  $\dim X \geq 3$  qualquer conjunto aberto naquela órbita contém uma curva fechada simples. Se  $\dim X = 2$  então aquela órbita é uma variedade compacta de dimensão 1 que por isso contém sempre uma curva fechada simples, como queríamos.  $\square$

Como consequência deste teorema observamos que, se  $X$  for a esfera  $\mathbf{S}^{n+1}$  e se as órbitas de maior dimensão tiverem dimensão  $n$ , então o espaço  $\mathbf{S}^{n+1}/\Gamma$  não é homeomorfo a  $\mathbf{S}^1$ .

Este facto vai ser usado no próximo capítulo para descrever o espaço das órbitas em acções ortogonais em  $\mathbf{R}^{n+2}$ .

# Capítulo 4

## Redução do espaço de fase

Neste capítulo serão estudadas acções lineares de grupos de Lie compactos em  $\mathbf{R}^{n+2}$ , no caso em que as órbitas de grupo regulares têm dimensão  $n$ . Nestas condições provaremos (teorema 4.4) a existência de um plano,  $V$ , em  $\mathbf{R}^{n+2}$ , que intersecta todas as órbitas de grupo. O plano  $V$  geralmente intersecta cada órbita mais de uma vez.

Em seguida serão considerados campos de vectores  $f : \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$  equivariantes. Suporemos que os grupos de simetria têm órbitas regulares de codimensão  $k$  e que existe um subespaço vectorial  $V$  de  $\mathbf{R}^{n+k}$  de dimensão  $k$  que intersecta todas as órbitas de grupo. Note-se que, no caso  $k = 2$ , a existência deste espaço  $V$  é provada no teorema 4.4. A dimensão das órbitas de grupo será aproveitada para reduzir o estudo do campo de vectores  $f$  ao espaço  $V$  sem perda qualitativa de informação sobre a dinâmica de  $f$  em  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Isto será feito em vários passos: primeiro, partindo do fluxo  $\varphi$  associado a  $f$  restringimos  $\varphi$  considerando apenas condições iniciais num domínio fundamental  $V^+$  contido em  $V$ ; a seguir projectamos em  $V^+$  este fluxo restrito e provamos que a projecção obtida é um fluxo  $\Psi(t, p)$ . Derivando  $\Psi$  em ordem a  $t$  obtém-se um campo de vectores  $f_{V^+} : V^+ \rightarrow TV^+$ .

Como motivação, voltamos a usar o exemplo da secção 3.1.

## 4.1 Restrição de acções lineares em $\mathbf{R}^{n+2}$ à esfera $\mathbf{S}^{n+1}$

Consideremos de novo a acção de  $\mathbf{O}(2)$  em  $\mathbf{R}^3$ . Existe um plano em  $\mathbf{R}^3$  que intersecta todas as órbitas de grupo, como se vê com a ajuda da figura 4.1. Para o encontrar analiticamente consideremos a acção de  $\mathbf{O}(2)$  restrita à esfera  $\mathbf{S}^2$  de raio 1 centrada na origem. A acção restrita está bem definida porque, para qualquer  $x$  em  $\mathbf{S}^2$ , a órbita  $\mathbf{O}(2)(x)$  está contida em  $\mathbf{S}^2$ .

Depois de restringir a acção à esfera  $\mathbf{S}^2$  vamos procurar um subconjunto de  $\mathbf{S}^2$  que intersecte uma só vez todas as órbitas em  $\mathbf{S}^2$ . Consideremos, por exemplo, o círculo máximo,  $C_m$ , definido pela intersecção do plano  $xz$  com  $\mathbf{S}^2$ . O arco,  $A$ , contido em  $C_m$  com extremidades  $(0, 0, 1)$  e  $(1, 0, 0)$  intersecta uma única vez todas as órbitas em  $\mathbf{S}^2$ . Ver figura 4.1.

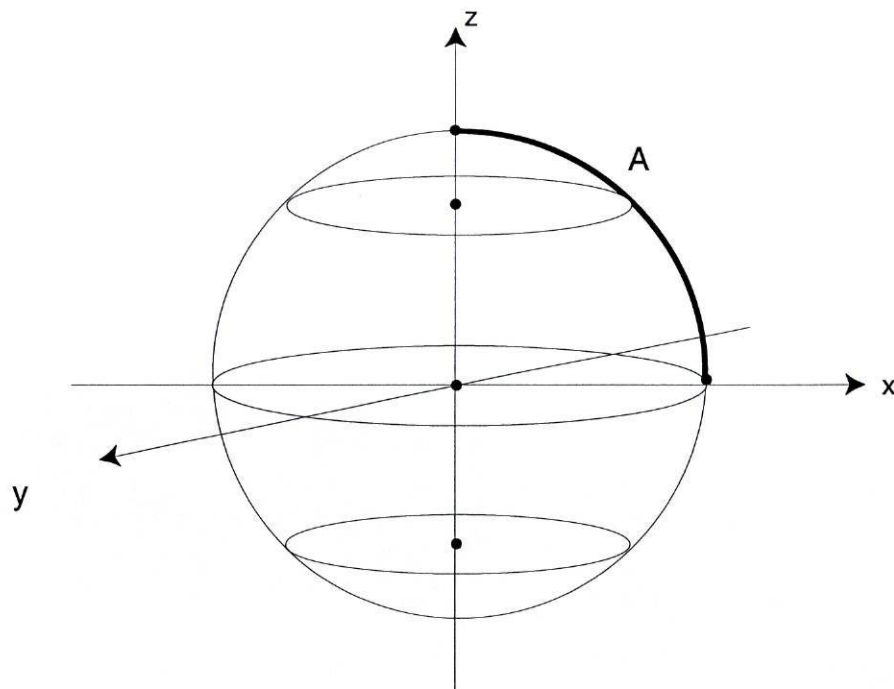


Figura 4.1 O conjunto  $A$  intersecta todas as órbitas de grupo em  $\mathbf{S}^2$ .

Usando a linearidade da acção, temos  $\mathbf{O}(2)(\lambda x) = \lambda \mathbf{O}(2)(x)$ , para  $x \in \mathbf{S}^2$  e  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Além disso, se  $x_1$  e  $x_2$  forem dois pontos distintos em  $\mathbf{S}^2$ , mas pertencentes à mesma

órbita de grupo, então  $\lambda x_1$  e  $\lambda x_2$  também pertencem a uma mesma órbita de grupo. Podemos, portanto, concluir que o plano  $xz$  intersecta todas as órbitas de grupo em  $\mathbf{R}^3$ . Note-se que este plano é definido pela origem e pelos dois pontos do bordo da secção  $\sigma(\mathbf{S}^2/\Gamma)$ .

Na verdade, qualquer outro plano resultante deste por rotação em torno do eixo dos  $zz$  tem a mesma propriedade. Vários aspectos deste exemplo aparecerão generalizados na próxima secção (teorema 4.4).

A restrição de uma acção ortogonal em  $\mathbf{R}^{n+2}$  à esfera  $\mathbf{S}^{n+1}$ , tal como acaba de ser feita para  $n = 1$ , permite reduzir a dimensão do espaço das órbitas sem que haja perda qualitativa de informação sobre as órbitas. Qualitativamente, a única órbita que se perde é a órbita da origem.

Pontos numa mesma recta  $l$  contendo a origem têm o mesmo subgrupo de isotropia, excepto a própria origem. Isto é,

**Proposição 4.1** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^n$ . Suponhamos que  $x$  e  $y$  pertencem a uma mesma recta  $l$  contendo a origem, isto é,  $y = \lambda x$ , com  $\lambda$  real não nulo. Então os subgrupos de isotropia  $\Gamma_x$  e  $\Gamma_y$  são iguais.*

**Demonstração:**

Os elementos  $\gamma$  de  $\Gamma_x$  são tais que

$$\gamma.y = \gamma.(\lambda x) = \lambda(\gamma.x) = \lambda x = y.$$

A segunda igualdade segue da linearidade da acção e a terceira da definição de subgrupo de isotropia.

Conclui-se que  $\Gamma_x \subset \Gamma_y$ . A inclusão contrária prova-se de modo semelhante.  $\square$

Atendendo à proposição anterior podemos afirmar que qualquer acção ortogonal de um grupo de Lie compacto em  $\mathbf{R}^n$  tem um número finito de tipos de isotropia. Para ver isso basta restringir a acção à esfera  $\mathbf{S}^{n-1}$  e usar o teorema 2.6.

## 4.2 Teorema da Redução

Suponhamos que  $X$  seja uma variedade conexa de dimensão  $n + 1$ , e que  $\Gamma$  seja um grupo compacto actuando efectivamente em  $X$ . Se existir pelo menos uma órbita de dimensão  $n$ , então  $X/\Gamma$  é uma variedade unidimensional com bordo. Isto é,  $X/\Gamma$  é um segmento (aberto, semi-aberto, ou fechado) ou uma curva fechada simples (teorema 3.10).

Nas condições do teorema 3.10 é possível encontrar uma secção, como foi visto no teorema 3.11.

Seja  $C = \sigma(X/\Gamma)$  o conjunto imagem da secção  $\sigma$  do teorema 3.11. Vimos atrás (proposição 3.13) que, se  $X$  for uma variedade compacta de dimensão maior que 1, então  $C$  é homeomorfo a um segmento fechado ou a uma curva fechada simples. O seguinte corolário é imediato:

**Corolário 4.2** *Seja  $\Gamma$  um grupo compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^{n+2}$  e cujas órbitas regulares têm codimensão 2. Então  $\mathbf{S}^{n+1}/\Gamma$  é homeomorfo a um segmento fechado ou a  $\mathbf{S}^1$ .*

No lema 3.14 e no teorema 3.15 foi feita uma caracterização adicional do espaço das órbitas. Uma consequência do teorema 3.15 é:

**Corolário 4.3** *Seja  $\Gamma$  um grupo compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^{n+2}$  e cujas órbitas regulares têm codimensão 2. Então  $\mathbf{S}^{n+1}/\Gamma$  não é homeomorfo a  $\mathbf{S}^1$ .*

### Demonstração:

Para  $n > 1$  este resultado é imediato, se considerarmos a acção de  $\Gamma$  restrita a  $\mathbf{S}^{n+1}$  e usarmos o teorema 3.15.

Se  $n = 1$ , consideremos a acção de  $\Gamma$  em  $\mathbf{R}^3$ . O grupo  $\Gamma$  actua linearmente em  $\mathbf{R}^3$ . Restrinjamos a acção de  $\Gamma$  à esfera  $\mathbf{S}^2$  e suponhamos, por absurdo, que  $\mathbf{S}^2/\Gamma$  é homeomorfo a  $\mathbf{S}^1$ .

Existe, em  $\mathbf{S}^2$ , uma órbita de dimensão 1. Esta órbita é uma variedade diferenciável compacta, logo contém uma curva fechada simples,  $\beta$ . É possível construir a aplicação

$\varphi_\beta = h \circ \sigma \circ \pi \circ \beta$  da secção 3.5 (ver esquema (3.1)). Sejam  $C = \sigma(\mathbf{S}^2/\Gamma)$  e  $\alpha : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$  tais que  $\alpha(\mathbf{S}^1) = C$ . Construíamos também a aplicação  $\varphi_\alpha = h \circ \sigma \circ \pi \circ \alpha$  associada a  $\alpha$ .

A aplicação  $\varphi_\alpha$  é a identidade e a aplicação  $\varphi_\beta$  é constante.

Seguindo os passos da demonstração do teorema 3.15, podemos concluir que as curvas

$$\Phi_\alpha = \{(z, \varphi_\alpha(z)) : z \in \mathbf{S}^1\}$$

e

$$\Phi_\beta = \{(z, \varphi_\beta(z)) : z \in \mathbf{S}^1\}$$

não são homotópicas, obtendo-se uma contradição com o lema 3.14. Concluimos que o espaço das órbitas  $\mathbf{S}^2/\Gamma$  não é homeomorfo a  $\mathbf{S}^1$ .  $\square$

O conjunto  $C = \sigma(X/\Gamma)$  vai ser usado na obtenção de um plano que intersecte todas as órbitas de grupo de acções lineares que verifiquem as condições do teorema 3.11.

**Teorema 4.4 (da Redução)** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto que actua linearmente e efectivamente em  $\mathbf{R}^{n+2}$ , e cujas órbitas regulares são  $n$ -dimensionais. Então existe um subespaço vectorial de  $\mathbf{R}^{n+2}$  de dimensão dois que intersecta todas as  $\Gamma$ -órbitas.*

**Demonstração:**

Para  $n = 0$  o resultado é imediato. Nos outros casos, restringe-se a acção de  $\Gamma$  em  $\mathbf{R}^{n+2}$  (que é linear) à esfera unitária centrada na origem,  $\mathbf{S}^{n+1}$ . A acção restrita está bem definida porque  $\Gamma(x) \subset \mathbf{S}^{n+1}$  para qualquer  $x \in \mathbf{S}^{n+1}$ . Seja  $y$  um ponto qualquer numa órbita  $n$ -dimensional. O ponto  $s = y/||y||$  está em  $\mathbf{S}^{n+1}$  e também pertence a uma órbita  $n$ -dimensional, porque  $\Gamma(y) = ||y|| \cdot \Gamma(s)$ . Note-se que  $y$  e  $s$  têm o mesmo subgrupo de isotropia (proposição 4.1).

O grupo  $\Gamma$  actua efectivamente na esfera, que é uma variedade de dimensão  $(n+1)$ . Note-se ainda que, em  $\mathbf{S}^{n+1}$ , existe (pelo menos) uma órbita de codimensão um, por

exemplo a órbita de  $s$ . O teorema 3.10 permite concluir que o espaço das órbitas,  $\mathbf{S}^{n+1}/\Gamma$  é um segmento (aberto, semi-aberto, ou fechado) ou uma curva fechada simples. Usando o teorema 3.11, existe uma secção  $\sigma : \mathbf{S}^{n+1}/\Gamma \rightarrow \mathbf{S}^{n+1}$ .

Seja  $C = \sigma(\mathbf{S}^{n+1}/\Gamma)$ . Então  $C$  é um subconjunto de  $\mathbf{S}^{n+1}$  que intersecta cada órbita exactamente num ponto e é fechado. O conjunto  $C$  é homeomorfo a um segmento (corolários 4.2 e 4.3).

Sejam  $a$  e  $b$  os extremos de  $C$ . Denotaremos o arco  $C$  por  $[a, b]$ . Seja  $A$  um dos arcos no círculo máximo que contém  $a$  e  $b$ . Veremos a seguir que o plano que contém este círculo máximo é um espaço vectorial bidimensional que intersecta todas as  $\Gamma$ -órbitas.

Consideremos a aplicação  $f : A \rightarrow C$  definida por  $f(x) = \Gamma(x) \cap C$ . Esta aplicação é contínua porque  $f = \sigma\pi|_A$ . Note-se também que  $f$  fixa os extremos do arco  $[a, b]$ , isto é  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$ . Pelo teorema do valor intermédio  $f$  é sobrejectiva. Isto significa que  $A$  intersecta todas as  $\Gamma$ -órbitas de  $\mathbf{S}^{n+1}$ . Usando a linearidade da acção em  $\mathbf{R}^{n+2}$  o plano que contém  $A$  tem a propriedade requerida.

No caso de  $a$  e  $b$  serem colineares com a origem, *i.e.*  $a = -b$ , o círculo máximo que contém  $a$  e  $b$  não está univocamente definido. No entanto os argumentos do parágrafo anterior são válidos em qualquer círculo máximo que contenha  $a$  e  $b$ .  $\square$

Note-se que o plano que intersecta todas as órbitas de grupo pode intersectá-las mais de uma vez, como no exemplo da secção 4.1.

### 4.3 Decomposição do fluxo

Seja  $f : \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$  um campo de vectores  $\Gamma$ -equivariante e  $C^\infty$ , onde o grupo  $\Gamma$  é um grupo de Lie compacto que actua linearmente em  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Suponhamos que as órbitas regulares tenham dimensão  $n$  e que exista um espaço vectorial de dimensão  $k$  que intersecte todas as órbitas de grupo. Este espaço será denotado por  $V$ . A existência deste espaço no caso  $k = 2$  foi provada na secção anterior.

Para cada  $x \in \mathbf{R}^{n+k}$  seja  $x^*$  um ponto da intersecção da órbita de  $x$  com  $V$ . Existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $x = \gamma.x^*$  e portanto  $f(x) = f(\gamma.x^*) = \gamma.f(x^*)$ . Por este facto basta

estudar  $f$  nos pontos de  $V$  para se conhecer  $f$  em todo o espaço  $\mathbf{R}^{n+k}$ . No entanto não se tem necessariamente que  $f(v) \in V$  para  $v \in V$ .

Seria conveniente poder, de algum modo, estudar o campo  $f$  nos pontos  $v$  de  $V$  à custa de um outro campo  $f_V$  tal que  $f_V(v) \in V$  para qualquer  $v \in V$ .

Aparentemente não há motivos para que se possa definir um campo  $f_V : V \rightarrow TV$  à custa de  $f$ . No entanto veremos a seguir que o fluxo de  $f$  define em  $V$  um fluxo. Podemos concluir, então que, de facto,  $f$  define um campo de vectores  $f_V$  em  $V$ .

O processo de obtenção de  $f_V$  a partir de  $f$  é o seguinte: partindo do fluxo  $\varphi(t, p)$  associado a  $f$ , restringiremos  $\varphi$  a condições iniciais em  $V$ . Em seguida projectaremos este fluxo sobre  $V$  e provaremos que a projecção obtida é um fluxo  $\Psi$  em  $V$ . A projecção é efectuada usando as órbitas de grupo de pontos de  $V$ .

### 4.3.1 O fluxo em $V$

Seja  $\varphi(t, p)$  o fluxo associado a  $f$ , com  $t \in \mathbf{R}$  e  $p \in \mathbf{R}^{n+k}$ . Para cada ponto  $p$  de  $\mathbf{R}^{n+k}$  o fluxo está definido para  $t$  numa vizinhança  $I(p)$  de 0 e satisfaz

$$\varphi(0, p) = p \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, p) = f(\varphi(t, p)), \forall t \in I(p).$$

Uma consequência do teorema do fluxo tubular ([28], capítulo VI) é o seguinte resultado:

**Lema 4.5** *Se  $p$  não for um equilíbrio relativo então, existe uma vizinhança compacta  $W$  de  $p$  e existe  $t_0 > 0$  tais que para todo  $q \in W \cap \Gamma(p)$  e para  $|t| < t_0$  a aplicação  $(t, q) \mapsto \varphi(t, q)$ , é injectiva e é um difeomorfismo.*

Note-se que, se a solução de  $dx/dt = f(x)$  que contém  $p$  for periódica, então é necessário tomar  $t_0$  menor que o período.

**Proposição 4.6** *Existe  $t_0 > 0$  tal que o conjunto*

$$S_p = \{\Gamma(\varphi(t, p)) : |t| < t_0\}$$

*é uma variedade diferenciável. A sua dimensão é igual à dimensão da órbita de  $p$  mais um se  $p$  não pertencer a um equilíbrio relativo. Se  $p$  pertencer a um equilíbrio relativo a sua dimensão é igual à dimensão da órbita de  $p$ .*

**Demonstração:**

Se  $p$  pertencer a um equilíbrio relativo, então  $S_p$  é a órbita de  $p$ .

Caso contrário, note-se que

$$S_p = \{\Gamma(\varphi(t, p)), | t | < t_0\} = \{\varphi(t, \Gamma(p)), | t | < t_0\}. \quad (4.1)$$

Restrinjamos  $\varphi$  à variedade

$$K = \{(t, x) : | t | < t_0, x \in \Gamma(p) \cap \text{int}(W)\},$$

onde  $W$  e  $t_0$  satisfazem o lema 4.5.

A variedade  $K$  tem dimensão igual à dimensão da órbita de  $p$  mais 1.

Designa-se por  $\varphi^K$  a restrição de  $\varphi$  a  $K$ , isto é,

$$\varphi^K : K \rightarrow \mathcal{U} \cap S_p$$

$$(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$$

onde  $\mathcal{U}$  é um aberto de  $\mathbf{R}^{n+k}$  contendo  $p$ .

Então:

- a imagem de  $K$  por  $\varphi^K$  é  $S_p \cap \mathcal{U}$ , por (4.1);
- a aplicação  $\varphi^K$  é injectiva (lema 4.5);
- a aplicação  $\varphi^K$  é diferenciável pela diferenciabilidade do fluxo;
- em cada  $u = (t_1, x_1) \in K$ , sendo  $v = \varphi^K(u)$ , tem-se que

$$d(\varphi^K)_u : T_u K \rightarrow T_v S_p(t)$$

é inversível e a inversa é diferenciável (lema 4.5).

Conclui-se que  $\varphi^K$  é uma parametrização de  $S_p$  numa vizinhança de  $p$ .

Para se obter uma parametrização de  $S_p$  em  $\gamma.p$  note-se que

$$S_p = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.(\mathcal{U} \cap S_p).$$

Note-se também que a órbita  $\Gamma(p)$  é compacta porque  $\Gamma$  é um grupo de Lie compacto.  $\square$

Consideremos um domínio fundamental,  $V^+$ , em  $V$  para as órbitas de grupo.

Suponhamos que  $V^+$  seja uma subvariedade conexa de  $V$  com bordo, sendo o bordo uma reunião de domínios fundamentais para acções de subgrupos de  $\Gamma$ .

A variedade  $S_p$  vai ser usada para definir em todo  $p \in V^+$  um fluxo, à custa do fluxo de  $f$ .

Seja  $t_0$  como no lema 4.5 e para cada  $t \in ]-t_0, t_0[$  consideremos

$$S_p(t) = \Gamma(\varphi(t, p)) = \varphi(t, \Gamma(p)).$$

**Teorema 4.7** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^{n+k}$  e seja  $V^+$  um domínio fundamental para a acção de  $\Gamma$ , nas condições acima. Suponhamos que a dimensão de  $V^+$  seja igual à codimensão das órbitas regulares de  $\Gamma$  em  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Vamos supor ainda que, para qualquer  $v \in V^+$ , tal que  $\Gamma(v)$  é não singular, se tenha  $V^+ \cap T_v\Gamma(v) = \{0\}$ .*

Então a equação

$$\Psi(t, p) = S_p(t) \cap V^+$$

define um fluxo local em  $V^+$ .

Para provar o teorema é necessário verificar que:

- a expressão  $t \mapsto \Psi(t, p)$  é uma curva para cada  $p$  (lema 4.8).
- a aplicação  $\Psi$  está bem definida (lema 4.9).
- $\Psi(t + s, p) = \Psi(t, \Psi(s, p))$  e  $\Psi(0, p) = p$ . (lema 4.10).

Depois de provados estes pontos, a demonstração fica completa.

**Lema 4.8** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^{n+k}$  e seja  $V^+$  um domínio fundamental para a acção de  $\Gamma$ . Suponhamos que a dimensão de  $V^+$  seja igual à codimensão das órbitas regulares de  $\Gamma$  em  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Vamos supor ainda que, para  $p \in V^+$ , tal que  $\Gamma(p)$  é não singular, se tenha  $V^+ \cap T_p\Gamma(p) = \{0\}$ .*

Então a expressão

$$t \mapsto \Psi(t, p) = S_p(t) \cap V^+$$

é uma curva em  $V^+$ .

**Demonstração:**

Suponhamos que  $p$  não pertença a um equilíbrio relativo. Nesse caso, a variedade  $S_p$  tem dimensão igual à dimensão da órbita de  $p$  mais um, isto é  $n + 1$ . Como a intersecção  $V^+ \cap T_v\Gamma(v) = \{0\}$ , temos  $T\mathbf{R}^{n+2} = T_v\Gamma(v) \oplus V^+$ , para qualquer  $v \in V^+$  não singular. Isto significa que  $S_p$  intersecta transversalmente o conjunto  $V^+$ . Como  $V^+$  tem dimensão  $k$ , a intersecção  $S_p(t) \cap V^+$  é uma variedade diferenciável de dimensão 1, isto é, uma curva.

Se  $p$  pertencer a um equilíbrio relativo o conjunto  $S_p(t) \cap V^+$  só contém o ponto  $p$ .  $\square$

**Lema 4.9** *Seja  $\varphi(t, p), t \in I(p)$  uma trajectória de  $f$  e  $\Psi(t, p) = S_p(t) \cap V^+$  a sua projecção em  $V^+$ . Se existir  $q \in \Psi(t, p)$  tal que o conjunto  $S_p(t) \cap S_q(s) \cap V^+$  seja não vazio, então  $S_p(t) = S_q(s), \forall t, s \in I$ . Isto implica que  $\Psi$  está bem definida.*

**Demonstração:**

Se  $p$  pertencer a um equilíbrio relativo, todo elemento de  $S_p(t)$  será projectado em  $V^+$  num único ponto: o ponto  $p$ . Se  $p$  não pertencer a um equilíbrio relativo, consideremos um outro ponto  $q \neq p$  em  $S_p(t)$ . Suponhamos que  $q$  esteja na mesma órbita de grupo de  $p$ . Isto significa que existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $q = \gamma.p$ . Como  $p$  não pertence a um equilíbrio relativo, as trajectórias  $\varphi(t, p)$  e  $\varphi(s, q)$  (onde  $t$  e  $s$  pertencem aos intervalos de tempo em que as trajectórias estão definidas) são distintas.

Temos

$$\varphi(s, q) = \varphi(s, \gamma.p) = \gamma.\varphi(s, p).$$

O conjunto  $\gamma.\varphi(s, p)$  está contido em  $S_p(t)$  para  $|s| < t_0$  e portanto a sua projecção em  $V^+$  é  $\Psi(t, p)$ , com  $|t| < t_0$ .

Concluimos que todo ponto de  $S_p$  pertencente à mesma órbita de grupo de  $p$  é projectado na curva  $\Psi(t, p) = S_p(t) \cap V^+$ .

Resta ver o caso em que  $q$  é um ponto em  $S_p(t)$  pertencente a uma órbita de grupo diferente da de  $p$  e não contido na trajectória  $\varphi(t, p)$ . Será possível que  $\varphi(s, q)$  e  $\varphi(t, p)$  tenham projecções distintas em  $V^+$ ?

Suponhamos que sim. Isto implica que o conjunto  $S_p(t) \cap S_q(t) \cap V^+$  é não vazio. Existem  $\gamma$  e  $\delta$  em  $\Gamma$  tais que

$$\begin{aligned}\gamma \cdot \varphi(t_1, p) &= \delta \cdot \varphi(s_1, q) \\ \iff \delta^{-1} \gamma \cdot \varphi(t_1, p) &= \varphi(s_1, q) \\ \iff \varphi(t_1, \delta^{-1} \gamma \cdot p) &= \varphi(s_1, q)\end{aligned}$$

A última igualdade implica que

$$\varphi(t_1 + s, \delta^{-1} \gamma \cdot p) \equiv \varphi(s_1 + s, q), \forall s : t_1 + s \in I(p), s_1 + s \in I(q).$$

Isto significa que a trajectória por  $q$  é a mesma que a trajectória por  $\delta^{-1} \gamma \cdot p$ . Esta última projecta-se, junto com  $\varphi(t, p)$  numa mesma curva em  $V^+$ , contradizendo a hipótese.

Assim, dado um ponto  $p \in V^+$ , a curva  $S_p \cap V^+$  contém  $p$  e está univocamente definida.  $\square$

**Lema 4.10** *Com as mesmas hipóteses do teorema 4.7, a aplicação  $\Psi$  tem as seguintes propriedades:  $\Psi(t + s, p) = \Psi(t, \Psi(s, p))$  e  $\Psi(0, p) = p$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos que a variedade  $S_p(t)$  esteja bem definida num intervalo de tempo que contenha  $[-(t + s), t + s]$ . Temos que  $\Psi(t + s, p) = \Gamma(\varphi(t + s, p)) \cap V^+$  por definição de  $\Psi$ . Usando as propriedades de fluxo de  $\varphi$  a expressão anterior fica  $\Gamma(\varphi(t, \varphi(s, p))) \cap V^+$ , e, pela equivariância do fluxo, fica  $\varphi(t, \Gamma(\varphi(s, p))) \cap V^+$ . Mas,

$$\varphi(t, \Gamma(\varphi(s, p))) \cap V^+ = \varphi(t, \Gamma(\varphi(s, p) \cap V^+)) \cap V^+.$$

O segundo membro é  $\Psi(t, \Psi(s, p))$ .

Resta provar que  $\Psi(0, p) = p$ . Usando a definição de  $\Psi$  temos

$$\Psi(0, p) = \Gamma(\varphi(0, p)) \cap V^+,$$

mas  $\varphi(0, p) = p$ . Esta igualdade permite concluir que

$$\Psi(0, p) = \Gamma(p) \cap V^+ = p,$$

como queríamos. □

**Definição 4.11** *Um fluxo local  $\Psi$  definido numa subvariedade  $M$  de  $\mathbf{R}^n$  é um arrastamento se e só se  $\Psi(t, m) \in \Gamma(m), \forall t \in I, \forall m \in M$ .*

Analogamente,

**Definição 4.12** *Um campo de vectores  $f : M \rightarrow TM$ , onde  $M$  é uma variedade diferenciável, é um arrastamento se e só se  $f(m) \in T(\Gamma(m)), \forall m \in M$ .*

Podemos concluir que

**Corolário 4.13** *Seja  $f : \mathbf{R}^{n+k} \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$  um campo de vectores  $\mathbf{C}^\infty$  e  $\Gamma$ -equivariante nas condições do teorema 4.7. Seja  $\varphi$  o fluxo associado a  $f$ . Então  $\varphi$  restrito a condições iniciais em  $V^+$  e a sua projecção  $\Psi$  em  $V^+$  satisfazem a equação*

$$\varphi(t, p) = \Psi(t, p) + D(t, p),$$

com  $D(t, p) \in \Gamma(p)$ .

Isto é, basta estudar  $\Psi$  para conhecer o comportamento de  $\varphi$  a menos de arrastamento ao longo das órbitas de grupo.

Note-se que todos os pontos de  $V^+$  são equilíbrios relativos para o fluxo de arrastamento,  $D$ .

Derivando  $\Psi$  em ordem a  $t \in I$  obtemos um campo de vectores  $f_{V^+} : V^+ \rightarrow V^+$ .

Podemos concluir do corolário 4.13 que existe um campo de vectores  $f_{V^+}$ , definido em  $V^+$  e um campo de vectores de arrastamento,  $f_D$ , tais que

$$f(v) = f_{V^+}(v) + f_D(v), \quad (4.2)$$

para todo  $v \in V^+$ .

### 4.3.2 Unicidade do fluxo em $V$

A seguir vamos ver que o fluxo projectado,  $\Psi$ , é único.

**Teorema 4.14** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^{n+k}$  e seja  $V^+$  um domínio fundamental para a acção de  $\Gamma$ , contido num espaço vectorial. Se  $\varphi$  for um fluxo local com decomposições em  $V^+$  :*

$$\varphi(t, p) = \Psi_1(t, p) + D_1(t, p) = \Psi_2(t, p) + D_2(t, p)$$

onde os  $\Psi_i$  são fluxos locais em  $V^+$  e os  $D_i$  são arrastamentos, então  $\Psi_1 - \Psi_2$  é um arrastamento.

#### Demonstração:

Como a acção do grupo  $\Gamma$  é linear, a combinação linear de fluxos de arrastamento é ainda um fluxo de arrastamento. Logo  $\Psi_1 - \Psi_2$  é um arrastamento e

$$\Psi_1(t, p) - \Psi_2(t, p) \in V^+.$$

Isto é,

$$\Psi_1(t, p) - \Psi_2(t, p) \in \Gamma(p) \cap V^+ = \{p\},$$

o que implica que  $\Psi_1(t, p) - \Psi_2(t, p) = p, \forall t$ . □

Tendo definido um fluxo em  $V^+$ , obtemos um fluxo em  $V$  usando a acção do grupo  $\Gamma$  e considerando apenas pontos das órbitas que estejam em  $V$ . A órbita do bordo de  $V^+$  é  $\Psi$  invariante pois o bordo é da forma  $\text{Fix}(\Sigma) \cap V^+$ , sendo  $\Sigma$  um subgrupo de isotropia. Como  $\text{Fix}(\Sigma)$  é  $\varphi$  invariante, também é  $\Psi$  invariante.

### 4.3.3 Decomposição em $V$

Foi provada, na secção anterior, a existência de um fluxo local em  $V$ , denotado por  $\Psi$ . Derivando  $\Psi$  em ordem a  $t \in I_0$  obtém-se um campo de vectores  $f_V : V \rightarrow V$ .

Vamos calcular o campo de vectores  $f_V$  directamente a partir de  $f$ , no caso  $k = 2$ .

Nos pontos  $v \in V$  não singulares será obtida uma decomposição para  $f(v)$  numa soma de duas componentes diferenciáveis:

$$f(v) = f_V(v) + f_T(v), \quad (4.3)$$

onde  $f_V(v) \in V$  e  $f_T(v)$  pertence ao espaço tangente à órbita de  $v$ . O espaço tangente à órbita de  $v$  em  $v$  será denotado por  $T_v\Gamma(v)$ .

#### 4.3.3.1 Pontos não singulares

Seja  $v \in V$  um ponto não singular. A órbita  $\Gamma(v)$  tem dimensão  $n$ . Vamos supor que, para qualquer  $v \in V$ , não singular, se tenha  $V \cap T_v\Gamma(v) = \{0\}$ . Então

$$T\mathbf{R}^{n+2} = T_v\Gamma(v) \oplus V,$$

para qualquer  $v$  não singular.

Para  $x \in \Gamma(v)$  seja  $N_x$  o espaço dos vectores normais a  $\Gamma(v)$  em  $x$ .

**Definição 4.15** *Um campo de vectores  $g$  é um campo de vectores normal se, para todo  $x$  em  $\Gamma(v)$ , o espaço  $N_x$  for invariante pelo fluxo de  $g$ .*

Como  $v$  é um ponto não singular, o espaço  $N_x$  tem dimensão 2, para todo  $x \in \Gamma(v)$ .

Em [15], Krupa provou o seguinte

**Teorema 4.16** ([15], teorema 2.1) *Seja  $f : \mathbf{R}^{n+2} \rightarrow \mathbf{R}^{n+2}$  um campo de vectores  $\Gamma$ -equivariante, onde  $\Gamma$  é um grupo de Lie compacto. Sejam  $v \in \mathbf{R}^{n+2}$  e  $\Gamma(v)$  a sua órbita. Existe uma vizinhança  $\Gamma$ -invariante,  $U$ , de  $\Gamma(v)$  em  $\mathbf{R}^{n+2}$ , um campo de vectores normal  $\mathbf{C}^\infty$  e  $\Gamma$ -equivariante,  $f_N$ , e um campo de vectores de arrastamento,  $f_T$ , também  $\mathbf{C}^\infty$  e  $\Gamma$ -equivariante tais que*

$$f(u) = f_N(u) + f_T(u)$$

para todo  $u \in U$ .

Seja  $u$  um ponto qualquer da vizinhança  $U$  do teorema 4.16. Usando coordenadas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  em  $N_u$  e coordenadas  $\alpha_3, \dots, \alpha_{n+2}$  em  $T_u\Gamma(u)$ , podemos escrever

$$f(u) = \alpha_1(u)\vec{u}_1(u) + \alpha_2(u)\vec{u}_2(u) + \sum_{k=3}^{n+2} \alpha_k(u)\vec{u}_k(u)$$

onde  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são uma base de  $N_u$  e  $\vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n+2}$  formam uma base de  $T_u\Gamma(u)$ . As coordenadas  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n+2}$  variam diferenciavelmente com  $u$ .

Seja  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  uma base de  $V$  e escrevamos os elementos desta base em coordenadas na base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n+2}\}$ :

$$\vec{v}_1 = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \sum_{k=3}^{n+2} \beta_k\vec{u}_k$$

$$\vec{v}_2 = \gamma_1\vec{u}_1 + \gamma_2\vec{u}_2 + \sum_{k=3}^{n+2} \gamma_k\vec{u}_k$$

Desde que  $\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 \neq 0$  e  $\beta_2 \neq 0$  é possível escrever  $f(u)$  em coordenadas na base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n+2}\}$ , sendo estas coordenadas diferenciáveis.

Podemos, portanto concluir que  $f_V(u)$  e  $f_T(u)$  variam diferenciavelmente com  $u$ .

#### 4.3.3.2 Pontos singulares

O que seria necessário fazer para se obter a decomposição acima também para os pontos singulares? Uma ideia de prova, em  $\mathbf{R}^5 = \mathbf{R}^{3+2}$ , é a seguinte:

Seja  $v \in V$  um ponto não singular e escolhamos coordenadas  $(a, b, c, d, e)$  em  $\mathbf{R}^5$  tais que  $(a, b) \in V$  e  $(c, d, e) \in T_v\Gamma(v)$ .

O campo de vectores no ponto  $v$  pode ser escrito na forma:

$$f(v) = f_V(v) + f_T(v).$$

Usando as coordenadas acima fica

$$f(v) = [f_1(v), f_2(v), f_3(v), f_4(v), f_5(v)]$$

onde

$$v_{12} = [f_1(v), f_2(v), 0, 0, 0] \in V \text{ e } [0, 0, f_3(v), f_4(v), f_5(v)] \in T_{v_{12}}\Gamma(v_{12}).$$

Seja  $u$  um ponto singular e  $\Sigma$  o seu subgrupo de isotropia. Então  $u \in \text{Fix}(\Sigma)$ .

Vamos supor que  $\text{Fix}(\Sigma)$  seja gerado pelas direcções  $a, c$  e  $d$ . A coordenada  $a$  define a direcção  $V \cap \text{Fix}(\Sigma)$ .

Como  $\text{Fix}(\Sigma)$  é invariante por  $f$  tem-se que, se

$$v = (a_v, b_v, 0, 0, 0) \in V \setminus \text{Fix}(\Sigma)$$

tende para

$$u = (a_u, 0, 0, 0, 0) \in V \cap \text{Fix}(\Sigma)$$

então  $f(v)$  tende para  $f(u)$ , onde

$$f(v) = [f_1(v), f_2(v), f_3(v), f_4(v), f_5(v)]$$

e

$$f(u) = [f_1(u), 0, f_3(u), f_4(u), 0].$$

É necessário provar que  $[0, 0, f_3(v), f_4(v), f_5(v)]$  tende para  $[0, 0, f_3(u), f_4(u), 0]$  quando  $v$  tende para  $u$ .

É também necessário provar que  $[0, 0, f_3(u), f_4(u), 0] \in T_{u1}\Gamma(u1)$ , onde  $u1$  denota o ponto  $[f_1(u), 0, 0, 0, 0]$ .

Provadas as duas afirmações anteriores, então  $[f_1(v), f_2(v), 0, 0, 0]$  também tende para  $[f_1(u), 0, 0, 0, 0]$  quando  $v$  tende para  $u$ . Neste caso teríamos também uma decomposição nos pontos singulares.

Conjecturamos que é possível obter esta decomposição nos pontos singulares.

## 4.4 Mais exemplos

### 4.4.1 Acção de $\text{SO}(3)$ num espaço de matrizes

Seja  $\mathcal{S}_{3 \times 3}$  o conjunto das matrizes simétricas  $3 \times 3$  com entradas reais. Consideremos, em  $\mathcal{S}_{3 \times 3}$ , o subconjunto

$$W = \{A \in \mathcal{S}_{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}.$$

O espaço  $W$  tem dimensão 5. Definimos a seguinte acção de  $\mathbf{SO}(3)$  em  $W$  :

$$\gamma.A = \gamma A \gamma^t$$

onde  $\gamma \in \mathbf{SO}(3)$  e  $A \in W$ . Note-se que  $\gamma.A$  denota a acção de  $\gamma$  em  $A$  enquanto  $\gamma A \gamma^t$  indica a multiplicação de matrizes.

Esta representação de  $\mathbf{SO}(3)$  em  $W$  é absolutamente irredutível.

Seja  $V \subset W$  o subespaço bidimensional das matrizes diagonais com traço zero. Verifica-se que  $V$  é o subespaço de pontos fixos do grupo  $\Sigma$  gerado por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O grupo  $\Sigma$  tem quatro elementos e é isomorfo a  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \subset \mathbf{SO}(3)$ .

O reticulado de subgrupos de isotropia para a acção de  $\mathbf{SO}(3)$  em  $W$  é:

$$\begin{array}{c} \mathbf{SO}(3) \\ \uparrow \\ \mathbf{O}(2) \\ \uparrow \\ \mathbf{D}_2 \end{array}$$

O plano  $V$  intersecta todas as órbitas de grupo da acção de  $\mathbf{SO}(3)$  em  $W$  porque, dada uma matriz simétrica  $A$  com traço zero, ela pode ser diagonalizada por uma mudança de coordenadas ortogonal, *i.e.*, existe  $\gamma \in \mathbf{SO}(3)$  tal que  $\gamma A \gamma^t$  é diagonal. O traço é invariante por esta mudança.

Na próxima tabela estão representados os subgrupos de isotropia, os subespaços de pontos fixos e sua dimensão para a acção de  $\mathbf{SO}(3)$  em  $W$ .

Subgrupo de isotropia	Subespaço de pontos fixos	Dimensão do subespaço
$\mathbf{SO}(3)$	$\{0\}$	0
$\mathbf{O}(2)$	$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix} : a \in \mathbf{R} \right\}$	1
$\mathbf{D}_2$	$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b) \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$	2

O espaço  $V$  é um espaço de pontos fixos, portanto é invariante pelo fluxo de qualquer campo de vectores  $f$  definido em  $W$  que seja  $\mathbf{SO}(3)$ -equivariante. Para estudar a dinâmica em  $W$  basta estudar a dinâmica de um campo de vectores  $f$  em  $V$  e  $\mathbf{S}_3$ -equivariante.

#### 4.4.1.1 Espaço das órbitas

Basta analisar a acção de  $\mathbf{SO}(3)$  no espaço  $V = \{\text{diag}(a, b, -a, -b) : a, b \in \mathbf{R}\}$  que identificaremos com  $\mathbf{R}^2$  (isomorfo a  $(a, b)$ ).

A acção de  $\mathbf{SO}(3)$  em  $V$  permuta os elementos da diagonal. Se a matriz  $A$  tiver 3 valores próprios distintos a intersecção da órbita de  $A$  com  $V$  serão as 6 matrizes com estes valores próprios na diagonal. Estas órbitas são todas regulares (não há subgrupos de isotropia de dimensão 2).

As órbitas singulares são as de  $\text{Fix}(\mathbf{O}(2))$ , que contém pontos da forma  $(a, a); (a, -2a)$

e  $(-2a, a)$ . Ou seja, os conjugados de  $\text{Fix}(\mathbf{O}(2))$  são as rectas  $y = x$ ;  $y = -2x$  e  $y = -x/2$ .

Um domínio fundamental é qualquer sector angular definido por duas semi-rectas adjacentes na colecção acima.

Por exemplo,

$$V^+ = \{(a, b) : a \leq 0 \text{ e } -a/2 \leq b \leq -2a\}.$$

Observe-se que o bordo de  $V^+$  é

$$\{a \leq 0, b = -2a\} \cup \{a \leq 0, b = -a/2\}$$

e é composto por órbitas distintas, ou rectas que são espaços de pontos fixos de subgrupos de isotropia conjugados mas não iguais.

Para esta escolha, o bordo é composto de metade do  $\text{Fix}(\Sigma_1)$  e metade do  $\text{Fix}(\Sigma_2)$  (metades correspondendo às órbitas não preenchidas pelo espaço de pontos fixos anterior), onde

$$\Sigma_1 = \mathbf{O}(2)_{xz} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e

$$\Sigma_2 = \mathbf{O}(2)_{yz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O espaço  $\text{Fix}(\Sigma_1)$  é a recta  $b = -2a$ .

#### 4.4.2 Acção de $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ em $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$

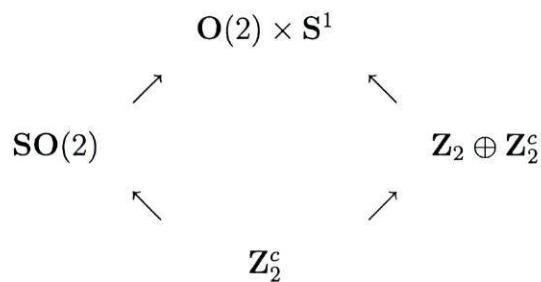
Consideremos a acção de  $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$  em coordenadas  $(z_1, z_2) \in \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$  tal que

- (a)  $\theta.(z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$  onde  $\theta \in \mathbf{S}^1$ ;
- (b)  $\varphi.(z_1, z_2) = (e^{-i\varphi}z_1, e^{i\varphi}z_2)$  onde  $\varphi \in \mathbf{SO}(2)$ ;
- (c)  $k.(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$ .

Esta acção está estudada em Golubitsky *et al* [9], p. 327.

**Proposição 4.17** ([9], capítulo XVII, proposição 1.1) *Há quatro classes de conjugação de subgrupos de isotropia para a acção standard de  $O(2) \times S^1$  em  $C \oplus C$ .*

A demonstração pode ser encontrada em [9], p. 329. O reticulado de subgrupos de isotropia está esquematizado a seguir. O grupo  $Z_2 \oplus Z_2^c$  é formado pelos elementos  $\{(0, 0), k, (\pi, \pi), k(\pi, \pi)\}$ .



A tabela abaixo contém informação pormenorizada sobre esta acção de  $O(2) \times S^1$  em  $C \oplus C$ .

Representante de órbita	Subgrupo de isotropia	Subespaço de pontos fixos	Dimensão do subespaço
$(0, 0)$	$O(2) \times S^1$	$\{0\}$	0
$(a, 0), a > 0$	$SO(2) = \{(\theta, \theta)\}$	$\{(z_1, 0)\}$	2
$(a, a), a > 0$	$Z_2 \oplus Z_2^c$	$\{(z_1, z_1)\}$	2
$(a, b), a > b > 0$	$Z_2^c = \{(0, 0), (\pi, \pi)\}$	$\{(z_1, z_2)\}$	4

Vamos procurar um subconjunto de  $C \oplus C$  que intersecte cada órbita uma só vez.

Usando a acção de  $\theta$  e de  $\varphi$ , podemos supor que  $(z_1, z_2) = (a, b)$  onde  $a, b \geq 0$  são reais. Aplicando  $k$  podemos supor que  $a \geq b \geq 0$ . O conjunto

$$V^+ = \{(a, b) \in C \oplus C : a, b \in \mathbf{R} \wedge a \geq b \geq 0\}$$

está nas condições pretendidas.

Assim, o plano

$$V = \{(z_1, z_2) : \text{Im}z_1 = 0, \text{Im}z_2 = 0\}$$

é um plano que intersecta todas as órbitas de grupo.

Consideremos a acção de  $\Gamma = \mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$  na esfera  $\mathbf{S}^3 \subset \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ . Seja  $\sigma : \mathbf{S}^3/\Gamma \rightarrow \mathbf{S}^3$  uma secção.

No plano  $V$ , seja  $\mathbf{S}^1$  a circunferência de raio 1. A curva fechada contida em  $\mathbf{S}^1$  de extremos  $(1, 0)$  e  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  é um arco nas condições do arco  $C$  da demonstração do teorema 4.4 (Teorema da Redução).

#### 4.4.2.1 Teoria invariante e dinâmica

Na proposição 2.1 de [9], capítulo XVII, Golubitsky *et al* mostram que, através de uma mudança de variável, é possível escrever qualquer germe  $f$  que seja  $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$ -invariante usando variáveis de amplitude ( $x$  e  $y$ ) e de fase ( $\psi_1$  e  $\psi_2$ ).

Acontece, neste exemplo, que as variáveis  $x$  e  $y$  podem ser tomadas como coordenadas no espaço  $V$  e as variáveis  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são coordenadas ao longo das órbitas.

Para se perceber como o grupo  $\Gamma$  actua em  $V$  basta substituir  $(z_1, z_2)$  por  $(x, y)$  na acção definida acima e ter em consideração o domínio fundamental,  $V^+$ , para as órbitas. Se considerarmos a acção de  $\theta, \varphi$  e  $k$  restrita a coordenadas no plano  $V$  obtemos uma acção do grupo  $\mathbf{D}_4$ .

A teoria de bifurcação e estabilidade assintótica do sistema com simetria  $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$  pode ser obtida a partir do estudo das equações de amplitude  $\mathbf{D}_4$ -equivariantes ([9], capítulo XVII, secção 4(b)).

A simetria  $\mathbf{D}_4$  pode ser interpretada como o que resta da simetria original  $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{S}^1$  depois da redução às equações de amplitude.

# Capítulo 5

## Ciclos heteroclínicos

Neste capítulo apresentamos uma aplicação dos resultados do capítulo anterior. Mostramos como esses resultados podem ser usados para encontrar ciclos heteroclínicos em campos de vectores simétricos.

Seja  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  um campo de vectores. Um *ciclo heteroclínico* é uma colecção de trajectórias  $\{A_j, x_j(t)\}$ , com  $j = 1, \dots, m$ , onde os  $A_j$  são pontos de equilíbrio de  $f$  e cada  $x_j$  é uma trajectória assintótica a  $A_{j+1}$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e a  $A_j$  quando  $t \rightarrow -\infty$  (convenciona-se que  $A_{m+1} = A_1$ ).

Não se espera que estes ciclos existam em sistemas gerais, no entanto a simetria permite o seu aparecimento de um modo estruturalmente estável.

Existe um grande número de artigos relacionados com este tema. Veja-se, por exemplo, o artigo [16] de Krupa que contém uma revisão sobre o assunto.

Em Melbourne *et al* ([18]) é provada a existência de ciclos heteroclínicos estruturalmente estáveis, assintoticamente estáveis em alguns exemplos de sistemas com simetria. Esses ciclos são encontrados nas formas normais (truncadas na terceira ordem) de interacção de modos ponto de equilíbrio/Hopf e Hopf/Hopf com simetria  $\mathbf{O}(2)$ . Uma ideia chave para a obtenção dos ciclos é a decomposição do campo de vectores restrito a subespaços de pontos fixos em equações de fase e amplitude. Combinando esta ideia com resultados do capítulo anterior, obtemos, neste capítulo, condições suficientes para a existência de ciclos heteroclínicos num aberto do espaço dos campos de vectores de classe  $C^\infty$ , equivariantes com respeito a um dado grupo  $\Gamma$  (teoremas

5.5 e 5.6). Estes teoremas já tinham sido obtidos em Abreu [1]. No entanto, com os resultados do capítulo anterior e da secção 5.4 são retiradas algumas hipóteses do enunciado dos teoremas.

Na secção 5.4 provamos um resultado que permite obter informação sobre a simetria que existe num plano, conhecendo-se a simetria em duas rectas ortogonais desse plano.

## 5.1 Definição de ciclo heteroclínico

Dado um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ , se existir uma trajectória  $x(t)$  tal que o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x(t)$ , denotado  $\alpha(x(t))$ , seja  $\bar{x}$  e o conjunto  $\omega$ -limite de  $x(t)$ , denotado  $\omega(x(t))$ , seja  $\bar{x}$ , diz-se que  $x(t)$  é uma *trajectória homoclínica*. Se tivermos  $m$  pontos de equilíbrio  $\bar{x}_j$ , com  $j = 1, \dots, m$ , e trajectórias  $x_j(t)$  tais que  $\alpha(x_j(t)) = \bar{x}_j$  e  $\omega(x_j(t)) = \bar{x}_{j+1}$ , dizemos que  $x_j(t)$  são *trajectórias heteroclínicas*.

Os *ciclos heteroclínicos* são caminhos fechados formados por pontos de equilíbrio e trajectórias heteroclínicas que os ligam.

Podemos generalizar a definição de ciclo heteroclínico de modo a englobar não só pontos de equilíbrio, mas também outros conjuntos invariantes pelo fluxo de  $f$  - os equilíbrios relativos.

Para se obter a estabilidade assintótica dos ciclos é necessário que os equilíbrios relativos sejam *hiperbólicos*. As próximas linhas explicam esta noção.

Em [15], Krupa mostrou que, numa vizinhança de um equilíbrio relativo,  $R$ , o campo de vectores  $f$  pode ser escrito como a soma de um campo de vectores normal,  $f_N$ , (ver definição 4.15) e um campo de vectores de arrastamento,  $f_T$ , (ver definição 4.12) ambos diferenciáveis e  $\Gamma$ -equivariantes:

$$f = f_N + f_T. \quad (5.1)$$

Além disso, numa vizinhança de  $R$ , a dinâmica de  $f$  pode ser descrita como a dinâmica de  $f_N$  modulada com arrastamento ao longo de órbitas de grupo (teorema 2.2 de [15]).

Se  $R$  for um equilíbrio relativo então todo  $r$  em  $R$  é um ponto de equilíbrio de  $f_N$ . Usando resultados de Field [5] conclui-se que as partes reais dos valores próprios

da linearização de  $f_N$  num ponto  $r$  de  $R$  são independentes da escolha do ponto  $r$  e independentes da decomposição em campos vectores normal e de arrastamento. Em particular, faz sentido dizer que um equilíbrio relativo  $R$  é hiperbólico se  $r \in R$  for um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $f_N$ .

**Definição 5.1** *Um equilíbrio relativo  $R$  diz-se hiperbólico se  $f_N$  restrito às fibras normais tiver zeros hiperbólicos em pontos de  $R$ .*

Finalmente, podemos definir ciclos heteroclínicos envolvendo equilíbrios relativos.

**Definição 5.2** ([17], definição 2.1) *Sejam  $R_j$ , com  $j = 1, \dots, m$ , equilíbrios relativos hiperbólicos com variedades instável e estável  $W^u(R_j)$  e  $W^s(R_j)$ . O conjunto das órbitas de grupo das variedades instáveis*

$$\Omega = \{W^u(\gamma.R_j) : j = 1, \dots, m, \gamma \in \Gamma\}$$

*forma um ciclo heteroclínico desde que  $\dim W^u(R_j) \geq 1$  e*

$$W^u(R_j) \setminus \{R_j\} \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} W^s(\gamma.R_{j+1}).$$

*Convencionase que  $R_{m+1} = R_1$ .*

## 5.2 Construção de um ciclo heteroclínico

A equivariância de um sistema de equações diferenciais ordinárias por um grupo de Lie compacto  $\Gamma$  permite o aparecimento de ciclos estruturalmente estáveis. A característica dos sistemas simétricos que permite a existência destes ciclos é a existência de subespaços invariantes pelo fluxo - os subespaços de pontos fixos. Certas estruturas no reticulado de subgrupos de isotropia levam a suspeitar a existência dos ciclos.

Para entendermos como a existência de espaços de pontos fixos pode forçar a existência de um ciclo heteroclínico, imaginemos a seguinte situação: existem dois pontos sela não nulos,  $A_1$  e  $A_2$ , para  $dx/dt = f(x)$  (onde  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  é  $C^\infty$ ) e dois subgrupos de  $\Gamma$ ,  $T_1$  e  $T_2$ , tais que:

- $A_1, A_2 \in \text{Fix}(T_1) \cap \text{Fix}(T_2)$ ;
- $\dim \text{Fix}(T_1) = 2 = \dim \text{Fix}(T_2)$ ;
- $\text{Fix}(T_1) \neq \text{Fix}(T_2)$ .

Suponhamos que no plano  $\text{Fix}(T_1)$  o ponto  $A_1$  seja uma sela,  $A_2$  seja um poço e a variedade instável da sela esteja ligada ao poço.

Simultaneamente é possível que no plano  $\text{Fix}(T_2)$  o ponto  $A_2$  seja uma sela,  $A_1$  um poço e a variedade instável de  $A_2$  ligue  $A_2$  a  $A_1$ . Deste modo podemos construir um ciclo heteroclínico ligando  $A_1$  a  $A_2$  e de novo a  $A_1$ .

Este ciclo é estruturalmente estável pois perturbações equivariantes de  $f$  ainda terão  $\text{Fix}(T_1)$  e  $\text{Fix}(T_2)$  como planos invariantes e ligações sela-poço são estruturalmente estáveis em  $\mathbf{R}^2$  (ver [1], secção 1.3).

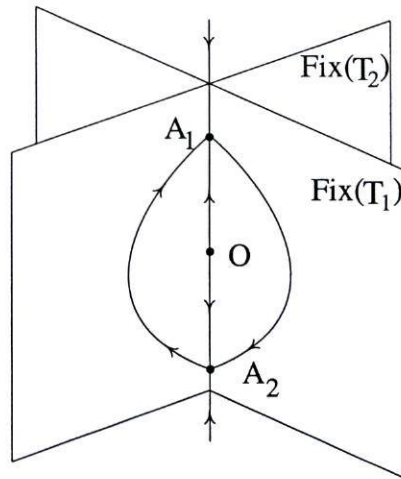
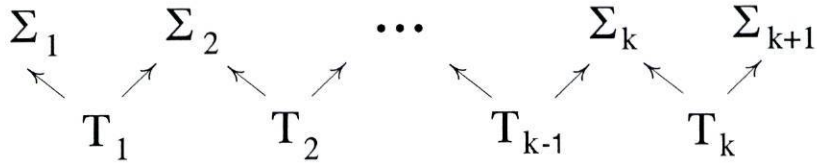


Figura 5.1 Ciclo heteroclínico entre dois pontos de equilíbrio.

### 5.3 Teoremas de existência de ciclos

Suponhamos que  $\Gamma$  seja um grupo de Lie compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^n$ .

**Definição 5.3** *Um ciclo heteroclínico de subgrupos de isotropia é uma sequência de subgrupos de isotropia  $\Sigma_j$ , com  $j = 1, \dots, k + 1$ , e  $T_i$ , com  $i = 1, \dots, k$ , onde os  $\Sigma_j$  são maximais e os  $T_i$  submaximais, estando relacionados do seguinte modo:*



com  $\Sigma_{k+1}$  conjugado a  $\Sigma_1$ .

A relação  $T_1 \rightarrow \Sigma_1$  significa  $T_1 \subset \Sigma_1$ .

Sejam  $E \subset \mathbf{R}^n$  um subespaço vectorial de dimensão dois e  $l_1, l_2 \subset E$  dois subespaços vectoriais de dimensão 1. As rectas  $l_1$  e  $l_2$  são *adjacentes* em  $E$  se não existir nenhuma recta  $r$  da forma  $r = E \cap \text{Fix}(\Sigma)$  (onde  $\Sigma \subset \Gamma$  é subgrupo de isotropia) num sector angular aberto definido por  $l_1$  e  $l_2$  em  $E$ .

**Definição 5.4** Diremos que um ciclo heteroclínico de subgrupos de isotropia tem uma acção maximal se  $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$  e, para todo  $j$ :

- existe  $V_j \subset \text{Fix}(T_j)$  tal que  $V_j$  é um subespaço vectorial de dimensão dois que intersecta todas as órbitas de  $\Gamma$  em  $\text{Fix}(T_j)$ ;
- $\dim \text{Fix}(\Sigma_j) \cap V_j = \dim \text{Fix}(\Sigma_{j+1}) \cap V_j = 1$ ;
- as rectas  $l_{1j} = \text{Fix}(\Sigma_j) \cap V_j$  e  $l_{2j} = \text{Fix}(\Sigma_{j+1}) \cap V_j$  são adjacentes em  $V_j$ .

Naturalmente as duas primeiras condições são satisfeitas se  $\dim \text{Fix}(\Sigma_j) = 1$  e  $\dim \text{Fix}(T_j) = 2$ , com  $j = 1, \dots, k$ .

Dado um subespaço vectorial  $V \subset \mathbf{R}^n$ , denotaremos por  $\Gamma_V$  o conjunto dos  $\gamma \in \Gamma$  tais que se  $x \in V$  então  $\gamma.x \in V$ . Se  $V = \text{Fix}(\Sigma)$  então  $\Gamma_V = N(\Sigma)$ .

Denotemos por  $C^\infty(\mathbf{R}^n, \Gamma)$  o espaço dos campos de vectores em  $\mathbf{R}^n$  de classe  $C^\infty$  que são  $\Gamma$ -equivariantes.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

**Teorema 5.5** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^n$  com uma acção maximal de um ciclo heteroclínico de subgrupos de isotropia. Suponhamos que qualquer campo de vectores  $f$  em  $V_j \subset \text{Fix}(T_j)$  obedeça à decomposição  $f = f_{V_j} + f_T$*

e

$$\Gamma_{V_j} \supset \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, \Gamma_{l_{ij}} \cong \mathbf{Z}_2$$

para todo  $j$  e para  $i = 1, 2$ . Então existe um aberto  $U$  em  $C^\infty(\mathbf{R}^n, \Gamma)$  tal que todo campo  $f$  em  $U$  tem um ciclo heteroclínico assintoticamente estável.

Para o caso particular em que  $\dim \text{Fix}(\Sigma_j) = 1$  e  $\dim \text{Fix}(T_j) = 2$  para todo  $j$  podemos enunciar o teorema do seguinte modo:

**Teorema 5.6** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando linearmente em  $\mathbf{R}^n$  com um ciclo heteroclínico de subgrupos de isotropia. Suponhamos que cada subgrupo do ciclo verifique as condições:*

$$\dim \text{Fix}(T_j) = 2, \dim \text{Fix}(\Sigma_j) = 1 \text{ e}$$

$$N(\Sigma_j)/\Sigma_j \cong \mathbf{Z}_2, N(T_j)/T_j \supset \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$$

com  $\text{Fix}(\Sigma_j)$  adjacente a  $\text{Fix}(\Sigma_{j+1})$  para todo  $j$ . Então existe um aberto  $U$  em  $C^\infty(\mathbf{R}^n, \Gamma)$  tal que todo campo  $f$  em  $U$  tem um ciclo heteroclínico assintoticamente estável.

Antes de demonstrar os teoremas simplificamos algumas hipóteses nas secções 5.4 e 5.5. Nomeadamente, mostramos (secção 5.4) que a condição  $\Gamma_{V_j} \supset \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$  é consequência de  $\Gamma_{l_{ij}} \cong \mathbf{Z}_2$  para todo  $j$  e para  $i = 1, 2$ .

## 5.4 Extensão de simetria

Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando num espaço vectorial  $E$  e seja  $\rho_\gamma$  a matriz associada a  $\gamma \in \Gamma$ . Então existe um produto interno em  $E$  tal que, para todo  $\gamma \in \Gamma$ , a matriz  $\rho_\gamma$  é ortogonal ([9], capítulo XII, proposição 1.3). Denotemos por  $\langle, \rangle_\Gamma$  esse produto interno. Se  $A$  for um subespaço de  $E$ , então

$$A^\perp = \{v \in E : \langle a, v \rangle_\Gamma = 0 \text{ para todo } a \in A\}.$$

Se  $A$  e  $B$  forem dois subespaços de  $E$  diremos que  $A$  é ortogonal a  $B$ , e escreveremos  $A \perp B$ , se  $\langle a, b \rangle_\Gamma = 0$  para todo  $a \in A$  e para todo  $b \in B$ .

**Teorema 5.7** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando em  $\mathbf{R}^n$  com uma acção maximal de um ciclo heteroclínico de subgrupos de isotropia,  $\Sigma_j$ , com  $j = 1, \dots, n$  e  $T_i$ , com  $i = 1, \dots, n - 1$ , onde*

$$\dim \text{Fix}(T_i) = 2, \dim \text{Fix}(\Sigma_j) = 1$$

*e  $\text{Fix}(\Sigma_j) \perp \text{Fix}(\Sigma_{j+1})$  para todo  $j = 1, \dots, n - 1$ . Suponhamos que  $N(\Sigma_j)/\Sigma_j \cong \mathbf{Z}_2$  e, se  $n > 3$ , que  $\Gamma$  seja abeliano. Então  $N(T_i)/T_i$  contém um subgrupo que actua em  $\text{Fix}(T_i)$  com a acção usual de  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ .*

**Demonstração:**

Começamos por demonstrar o resultado para  $n = 3$ . Neste caso temos

$$\text{Fix}(T_1) = \text{Fix}(\Sigma_1) \oplus \text{Fix}(\Sigma_2) \text{ e } \text{Fix}(T_2) = \text{Fix}(\Sigma_2) \oplus \text{Fix}(\Sigma_3).$$

Uma vez que  $\dim \text{Fix}(\Sigma_i) = 1$ , para  $i = 1, 2, 3$ , e  $\text{Fix}(\Sigma_i)$  é  $N(\Sigma_i)$ -invariante, sabemos que  $\text{Fix}(\Sigma_i)$  é  $N(\Sigma_i)$ -irredutível. Podemos então considerar as seguintes decomposições de  $\mathbf{R}^3$  em espaços  $N(\Sigma_i)$ -invariantes (ver proposição 2.11):

$$\mathbf{R}^3 = \text{Fix}(\Sigma_1) \oplus W_1 = \text{Fix}(\Sigma_2) \oplus W_2, \quad (5.2)$$

onde  $W_i$  é  $N(\Sigma_i)$ -invariante e  $\dim W_i = 2$ , com  $i = 1, 2$ .

Temos ainda uma outra decomposição (trivial) de  $\mathbf{R}^3$  :

$$\mathbf{R}^3 = \text{Fix}(\Sigma_1) \oplus \text{Fix}(\Sigma_2) \oplus (W_1 \cap W_2),$$

isto é

$$\mathbf{R}^3 = \text{Fix}(\Sigma_1) \oplus \text{Fix}(\Sigma_2) \oplus \text{Fix}(\Sigma_3).$$

Por hipótese, a acção de  $N(\Sigma_i)$  em  $\text{Fix}(\Sigma_i)$  é isomorfa a  $\mathbf{Z}_2$ . Atendendo à dimensão de  $W_i$ , a acção de  $N(\Sigma_i)$  em  $W_i$  é isomorfa à de algum subgrupo de  $\mathbf{O}(2)$ .

As decomposições em 5.2 podem ou não ser decomposições de  $\mathbf{R}^3$  em espaços  $N(\Sigma_i)$ -irredutíveis, conforme  $W_i$  seja  $N(\Sigma_i)$ -irredutível ou simplesmente  $N(\Sigma_i)$ -invariante. Neste último caso, temos que  $\text{Fix}(\Sigma_{i\pm 1})$  é  $N(\Sigma_i)$ -irredutível (porque é  $N(\Sigma_i)$ -invariante e de dimensão 1).

Assim, a demonstração prossegue considerando separadamente estes dois casos.

1.  $\text{Fix}(\Sigma_{i\pm 1})$  é  $N(\Sigma_i)$ -irreduzível

O lema enunciado imediatamente a seguir e demonstrado mais tarde conclui a prova.

**Lema 5.8** *Nas condições do teorema 5.7 e, se  $\text{Fix}(\Sigma_{i\pm 1})$  for  $N(\Sigma_i)$ -irreduzível, então  $N(\Sigma_i)$  actua em  $\text{Fix}(\Sigma_{i\pm 1})$  como  $\mathbf{Z}_2$  e  $N(T)/T$  contém um subgrupo que actua em  $\text{Fix}(T)$  com a acção usual de  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ .*

2.  $W_i$  é  $N(\Sigma_i)$ -irreduzível. Já vimos que a acção de  $N(\Sigma_i)$  em  $W_i$  é isomorfa à de algum subgrupo fechado de  $\mathbf{O}(2)$  ou à do próprio  $\mathbf{O}(2)$ .

De Golubitsky *et al* ([9], capítulo XIII, teorema 6.1) sabemos que os subgrupos fechados de  $\mathbf{O}(2)$  são conjugados a  $\mathbf{SO}(2)$ ,  $\mathbf{D}_n(n \geq 2)$ ,  $\mathbf{Z}_n(n \geq 2)$  ou ao grupo trivial (este último tem uma acção não irreduzível num espaço de dimensão 2). Sabemos também que qualquer representação irreduzível num espaço de dimensão 2 de  $\mathbf{O}(2)$ ,  $\mathbf{SO}(2)$ , ou  $\mathbf{D}_n$  contém uma representação de  $\mathbf{Z}_n(n \geq 2)$ .

Terminamos a prova com o seguinte lema, demonstrado adiante.

**Lema 5.9** *Sejam  $W_i$  componentes  $N(\Sigma_i)$ -irreduzíveis, ( $i=1,2$ ) de dimensão 2. O grupo  $N(T)/T$  contém um subgrupo que actua em  $\text{Fix}(T)$  com a acção usual de  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ .*

Para  $n > 3$ , os espaços  $W_i$  das decomposições 5.2 são  $N(\Sigma_i)$ -invariantes de dimensão  $n - 1$ . Sabemos ([9]) que, se  $\Gamma$  for abeliano, podemos decompor cada  $W_i$  em componentes  $N(\Sigma_i)$ -irreduzíveis, de dimensão menor ou igual a dois. A demonstração segue como anteriormente.  $\square$

**Demonstração do lema 5.8:**

Fazemos a demonstração supondo que  $\text{Fix}(\Sigma_2)$  é  $N(\Sigma_1)$ -irreduzível (isto é,  $i = 1$  e  $i \pm 1 = 2$ ).

Sendo  $\text{Fix}(T) = \text{Fix}(\Sigma_1) \oplus \text{Fix}(\Sigma_2)$  temos  $N(\Sigma_1) \subset N(T)$ .

O grupo  $N(\Sigma_1)$  actua em  $\text{Fix}(\Sigma_2)$  como  $\mathbf{Z}_2$ , uma vez que  $\dim \text{Fix}(\Sigma_2) = 1$  e a acção é não trivial.

Por hipótese do teorema 5.7 sabemos também que  $N(\Sigma_2)$  actua em  $\text{Fix}(\Sigma_2)$  como  $\mathbf{Z}_2$  e, analogamente a  $N(\Sigma_1)$ , temos  $N(\Sigma_2) \subset N(T)$ .

Logo,  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$  actua de modo não trivial em  $\text{Fix}(T)$ .

□

A demonstração do lema 5.9 depende de três resultados que enunciamos e provamos de seguida:

**Lema 5.10** *Os subgrupos fechados de  $\mathbf{SO}(3)$  contendo duas rotações em eixos perpendiculares são  $\mathbf{SO}(3)$  e o grupo das rotações do cubo.*

**Demonstração:** Denotemos por  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{I}$  os grupos das rotações do tetraedro, octaedro e icosaedro, respectivamente. Todo subgrupo fechado de  $\mathbf{SO}(3)$  é conjugado a  $\mathbf{SO}(3)$ ,  $\mathbf{O}(2)$ ,  $\mathbf{SO}(2)$ ,  $\mathbf{D}_n (n \geq 2)$ ,  $\mathbf{Z}_n, (n \geq 2)$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{I}$  ou ao grupo trivial ([9], capítulo XIII, teorema 6.1). Desta lista podemos excluir o grupo trivial e os subgrupos planares, que são:  $\mathbf{O}(2)$ ,  $\mathbf{SO}(2)$ ,  $\mathbf{D}_n (n \geq 2)$  e  $\mathbf{Z}_n, (n \geq 2)$ .

As rotações que são simetrias do tetraedro e do icosaedro não têm eixos perpendiculares.

Restam  $\mathbf{SO}(3)$  e o grupo das rotações do cubo.

□

**Lema 5.11** *Suponhamos que um grupo de Lie compacto  $\Gamma$  actue em  $\mathbf{R}^3$  e contenha um subgrupo  $G$  não planar e não fechado de  $\mathbf{SO}(3)$ . Se  $\Gamma$  contiver elementos de  $\mathbf{O}(3) \setminus \mathbf{SO}(3)$ , então  $\Gamma$  contém  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ .*

**Demonstração:**

O grupo  $G$ , sendo não planar e não fechado, é denso em  $\mathbf{SO}(3)$ .

Como  $\Gamma$  é fechado e contém elementos com determinante  $-1$ , então  $\Gamma$  tem de ser o próprio  $\mathbf{O}(3)$ . Os elementos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

estão em  $\mathbf{O}(3)$  e obtemos, com eles, o grupo  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ . □

**Lema 5.12** *O grupo de simetrias do cubo contém  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ .*

**Demonstração:**

O grupo das simetrias do cubo contém os elementos:

$$r_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que geram o grupo  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ . □

Podemos agora proceder à

**Demonstração do lema 5.9:**

As acções de  $N(\Sigma_1)$  em  $W_1$  e de  $N(\Sigma_2)$  em  $W_2$  contêm uma representação de  $\mathbf{Z}_n$  e  $\mathbf{Z}_m$ , respectivamente, ( $n, m > 2$ ).

Qualquer representação irredutível em dimensão dois de  $\mathbf{Z}_n$  é da forma

$$\begin{pmatrix} \cos(2k\pi/n) & -\text{sen}(2k\pi/n) \\ \text{sen}(2k\pi/n) & \cos(2k\pi/n) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

para algum  $0 < k < n$ . Sejam

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2k_1\pi/n) & -\text{sen}(2k_1\pi/n) \\ 0 & \text{sen}(2k_1\pi/n) & \cos(2k_1\pi/n) \end{pmatrix}, 0 < k_1 < n$$

e

$$a_2 = \begin{pmatrix} \cos(2k_2\pi/m) & 0 & -\text{sen}(2k_2\pi/m) \\ 0 & -1 & 0 \\ \text{sen}(2k_2\pi/m) & 0 & \cos(2k_2\pi/m) \end{pmatrix}, 0 < k_2 < m.$$

Existe pelo menos um elemento da forma  $a_1$  em  $N(\Sigma_1)$  e um elemento da forma  $a_2$  em  $N(\Sigma_2)$ , onde as matrizes  $a_1$  e  $a_2$  estão em coordenadas de

$$\text{Fix}(\Sigma_1) \oplus \text{Fix}(\Sigma_2) \oplus \text{Fix}(\Sigma_3).$$

Para concluir a demonstração vamos considerar um subgrupo  $G$  contido em  $N(\Sigma_1) \cup N(\Sigma_2)$  e, com a sua ajuda, provar que  $N(T)$  contém  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ .

Consideremos o grupo  $G$  gerado por  $a_1^2$  e  $a_2^2$ . Trata-se de um subgrupo de  $\mathbf{SO}(3)$ , finitamente gerado. Os elementos  $a_1^2$  e  $a_2^2$  são duas rotações em eixos perpendiculares.

Note-se que  $G \subset \Gamma$  e  $\Gamma$  é um subgrupo de Lie de  $\mathbf{O}(3)$ .

O grupo  $\mathbf{SO}(3)$  não é finitamente gerado. Há, portanto, duas hipóteses para  $G$ : o grupo  $G$  é um subgrupo não planar e não fechado de  $\mathbf{SO}(3)$  ou o grupo  $G$  é um subgrupo do grupo de simetrias do cubo.  $\square$

## 5.5 Ciclos heteroclinicos de subgrupos de isotropia

Suponhamos que  $T \subset \Gamma$  seja um subgrupo de isotropia, e que em  $\text{Fix}(T) = F$  exista uma  $N(T)$ -órbita de codimensão 2.

O teorema da redução (teorema 4.4) implica que exista  $V \subset F$ , com  $\dim V = 2$ , que intersecta todas as  $N(T)$ -órbitas.

O espaço  $F/N(T)$  é homeomorfo a um sector angular fechado (proposição 3.13 e corolário 4.3).

O interior de  $F/N(T)$  é composto por órbitas regulares. O conjunto dos pontos  $N(T)$ -regulares é aberto e denso em  $F$ . Estes pontos têm isotropia mínima em  $F$ ; isto é, o seu subgrupo de isotropia é  $T$  (não pode ser maior, se não o maior é que seria subgrupo de isotropia de  $\Gamma$ ).

O bordo de  $F/N(T)$  é composto por pontos com mais isotropia em  $N(T)$ . Sejam  $S_1$  e  $S_2$  os subgrupos de isotropia dos pontos não regulares e diferentes da origem em  $F$ . Então:  $T \subset S_j$  e  $S_j \subset N(T)$  (as inclusões são próprias), caso contrário não haveria dois subgrupos de isotropia distintos em  $N(T)$ , além de  $T$  e  $N(T)$ .

Os conjuntos  $l_j = \text{Fix}(S_j) \cap V$  são rectas adjacentes em  $V$  (não há mais subgrupos). Se  $T \subset \Sigma_1, \Sigma_2$  forem subgrupos ( $T$  submaximal e  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  maximais), então

$$\Sigma_j \cap N(T) = S_j \text{ e } \text{Fix}_{\mathbf{R}}(\Sigma_j) = \text{Fix}_F(S_j).$$

Fica assim provada a

**Proposição 5.13** *Sejam  $\Sigma_j$  e  $T_j$  um ciclo hetroclínico de subgrupos de isotropia de um grupo compacto  $\Gamma$ . Se  $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$  e se, para cada  $j$ , existir em  $\text{Fix}(T_j)$  uma  $N(T_j)$ -órbita de codimensão 2, então o ciclo de subgrupos tem uma acção maximal.*

Também provámos:

**Proposição 5.14** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando efectivamente em  $\mathbf{R}^n$  e sejam  $T_1, \dots, T_k$  subgrupos de isotropia de  $\Gamma$ , tais que em cada  $\text{Fix}(T_j)$  exista uma  $N(T_j)$ -órbita de codimensão 2. Suponhamos que para cada  $j$ ,*

$$\text{Fix}(T_j) \cap \Gamma \cdot \text{Fix}(T_{j+1}) \neq \{0\}$$

*(com a convenção  $T_{k+1} = T_1$ ). Então existe um ciclo heteroclinico de subgrupos de isotropia em  $\Gamma$ .*

## 5.6 Demonstração do teorema 5.5

Nesta secção será demonstrado o teorema 5.5, exemplificando com um campo de vectores em  $\mathbf{R}^6$  que apresenta um ciclo de pontos de equilíbrio e trajectórias periódicas (estudado em [18]). O teorema 5.6 fica automaticamente demonstrado. A demonstração do teorema 5.5 é construtiva e baseia-se no facto de os  $\text{Fix}(T_j)$  serem espaços invariantes por qualquer campo de vectores  $\Gamma$ -equivariante. Seguiremos os seguintes tópicos:

1. obtemos a forma normal de grau três de um campo de vectores  $\Gamma$ -equivariante arbitrário,  $f$ , em  $V_j \subset \text{Fix}(T_j)$ ;
2. obtemos condições satisfeitas num aberto de formas normais para que os pontos de equilíbrio de  $f_{V_j}$  sejam pontos sela do tipo desejado;
3. usamos argumentos do tipo Poincaré-Bendixson para obter a ligação entre os pontos de equilíbrio no plano  $V_j \subset \text{Fix}(T_j)$ ;
4. obtemos condições satisfeitas num aberto dos campos equivariantes de grau três, para que o ciclo obtido seja assintoticamente estável;
5. usamos argumentos de estabilidade estrutural para mostrar que o ciclo persiste em sistemas não truncados suficientemente próximos da forma normal.

### 5.6.1 Exemplo: ciclo heteroclínico de pontos de equilíbrio e soluções periódicas

Consideremos o campo de vectores  $f$  em  $\mathbf{C}^3$ , estudado em [18]:

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = (c_1 + i\delta c_2)z_0 + c_3\bar{z}_0 z_1 \bar{z}_2 \\ \dot{z}_1 = (P_1 + P_2\delta)z_1 + P_3 z_0^2 z_2 \\ \dot{z}_2 = (P_1 - P_2\delta)z_2 + P_3 \bar{z}_0^2 z_1 \end{cases} \quad (5.4)$$

onde

$$c_1 = c_{11}\lambda + c_{12}|z_0|^2 + c_{13}(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

$$P_1 = \omega i + P_{11}\lambda + P_{12}|z_0|^2 + P_{13}(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

$$\delta = (|z_2|^2 - |z_1|^2),$$

com  $c_{1j}, c_2, c_3, \lambda \in \mathbf{R}$  e  $P_{1j}, P_2, P_3 \in \mathbf{C}$ .

A aplicação  $df_{(0,0,0)}$  tem valores próprios 0 e  $\pm\omega i$  (cada um deles duplo) e  $f$  é  $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{SO}(2)$ -equivariante. A acção do grupo é dada por:

$$(\phi, \theta) \cdot (z_0, z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_0, e^{i(\theta+\phi)} z_1, e^{i(\theta-\phi)} z_2)$$

$$k \cdot (z_0, z_1, z_2) = (\bar{z}_0, z_2, z_1).$$

O campo de vectores acima é a forma geral de um campo de vectores  $\mathbf{O}(2) \times \mathbf{SO}(2)$ -equivariante de grau três em  $z_0, z_1$  e  $z_2$  e grau um em  $\lambda$ .

### 5.6.2 Passo 1 da demonstração: forma normal de grau três

Consideremos um campo de vectores  $\Gamma$ -equivariante,  $f$ , arbitrário no subespaço invariante  $\text{Fix}(T_1)$ , onde  $T_1 \subset \Gamma$  é um subgrupo de isotropia submaximal. Neste subespaço localizamos dois subespaços invariantes  $\text{Fix}(\Sigma_1)$  e  $\text{Fix}(\Sigma_2)$ , onde  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são subgrupos de isotropia maximais de  $\Gamma$ .

Pretendemos encontrar dois compactos invariantes,  $R_1$  e  $R_2$ , em  $\text{Fix}(\Sigma_1)$  e  $\text{Fix}(\Sigma_2)$ , respectivamente, e uma trajectória ligando estes subconjuntos. No plano  $V_1$  o campo de vectores  $f$  obedece à decomposição (4.2) e  $f_{V_1}$  está naturalmente bem definido nesse plano ( $V_1$  é  $f_{V_1}$ -invariante). O espaço  $V_1$  intersecta todas as órbitas de grupo de  $\Gamma$  em  $\text{Fix}(T_1)$ . Pontos de equilíbrio de  $f_{V_1}$  em  $V_1$  correspondem a trajectórias de  $f$  em  $\text{Fix}(T_1)$  contidas em  $\Gamma$ -órbitas. Se, ao restringir a dinâmica a  $V_1$ , um dos pontos de equilíbrio for uma sela e o outro um poço a ligação entre eles será persistente.

Consideremos as rectas  $l_{11} = \text{Fix}(\Sigma_1) \cap V_1$  e  $l_{21} = \text{Fix}(\Sigma_2) \cap V_1$  e seja  $\Gamma_{l_{i1}}$  o subgrupo que fixa  $l_{i1}$ .

As condições  $\Gamma_{l_{i1}} \cong \mathbf{Z}_2$  significam que o normalizador  $N(\Gamma_{l_{i1}})$  actua em  $l_{i1}$  como o grupo  $\mathbf{Z}_2$ .

Em coordenadas  $x \in l_{11}$  e  $y \in l_{12}$  o campo de vectores  $f_{V_1}$  é  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ -equivariante porque  $\Gamma_{V_1} \supset \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ . A forma normal de um campo de vectores em  $V_1$  que é  $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ -equivariante, segundo [8] (capítulo X, lema 1.1) é dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_1\lambda + b_1x^2 + c_1y^2) \\ \dot{y} = y(a_2\lambda + c_2x^2 + b_2y^2) \end{cases} \quad (5.5)$$

### 5.6.3 Passo 1 do exemplo

No que se segue será usada a seguinte notação:

$$\mathbf{Z}_2(k) = \{1, k\},$$

$$\mathbf{Z}_2^c = \{1, (\pi, \pi)\},$$

$$\mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi)) = \{1, k.(\pi, \pi)\}.$$

Na tabela a seguir listamos os subgrupos de isotropia, os seus subespaços de pontos fixos e a restrição da equação (5.4) a cada um destes subespaços.

Subgrupos de Isotropia	Subespaços de Pontos Fixos	Equações Restritas
$\Sigma_1 = \mathbf{Z}_2(k) \times SO(2)$	$(x, 0, 0)$	$dx/dt = c_1x$
$\Sigma_2 = \mathbf{Z}_2(k) \oplus \mathbf{Z}_2^c$	$(0, z_1, z_1)$	$dz_1/dt = P_1z_1$
$\Sigma_3 = \mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi)) \times SO(2)$	$(yi, 0, 0)$	$dy/dt = c_1y$
$T_1 = \mathbf{Z}_2(k)$	$(x, z_1, z_1)$	$dx/dt = (c_1 + c_3 z_1 ^2)x$ $dz_1/dt = (P_1 + P_3x^2)z_1$
$T_2 = \mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi))$	$(iy, z_1, z_1)$	$dy/dt = (c_1 - c_3 z_1 ^2)y$ $dz_1/dt = (P_1 - P_3y^2)z_1$

Nos subespaços de pontos fixos as partes complexas destas equações decompõem-se em equações amplitude/fase. Se escrevermos  $z_1 = re^{i\theta}$ , ficamos com equações mais simples nas variáveis de amplitude (ver tabela abaixo). Esta decomposição corresponde à decomposição 4.2.

Na tabela abaixo representamos por  $p_1$  e  $p_3$  as partes reais de  $P_1$  e  $P_3$ , respectivamente.

Subespaços	Coordenadas	Equações de Amplitude
$V_1 \subset \text{Fix}(T_1)$	$(x, r, r)$	$dx/dt = (c_1 + c_3 r^2)x$ $dr/dt = (p_1 + p_3 x^2)r$
$V_2 \subset \text{Fix}(T_2)$	$(yi, r, r)$	$dy/dt = (c_1 - c_3 r^2)y$ $dr/dt = (p_1 - p_3 y^2)r$
$l_{11}$	$(x, 0, 0)$	$dx/dt = c_1 x$
$l_{21} = l_{12}$	$(0, r, r)$	$dr/dt = p_1 r$
$l_{22}$	$(yi, 0, 0)$	$dy/dt = c_1 y$

Note-se que  $(x, 0, 0)$  e  $(iy, 0, 0)$  são subespaços de pontos fixos conjugados em  $\mathbf{C}^3$ .

Pontos de equilíbrio  $(x, r)$  das equações de amplitude correspondem a pontos de equilíbrio de (5.4) se  $r = 0$  e a soluções periódicas de (5.4) se  $r \neq 0$ .

Assim, temos:

$$\dim \text{Fix}(\Sigma_j) \cap V_j = \dim \text{Fix}(\Sigma_{j+1}) \cap V_j = 1$$

$$\dim V_j = 2,$$

para  $j = 1, 2$ , como se pretende.

Observe-se que as rectas  $(x, 0)$  e  $(0, r)$ , invariantes pelo fluxo de  $f$ , são adjacentes em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  enquanto  $(y, 0)$  e  $(0, r)$  são adjacentes em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k, (\pi, \pi)))$ .

Em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  as equações de amplitude são:

$$\begin{cases} \dot{x} = x[(2c_{13} + c_{30})r^2 + c_{11}\lambda + c_{12}x^2] \\ \dot{r} = r[(p_{12} + p_{30})x^2 + p_{11}\lambda + 2p_{13}r^2] \end{cases} \quad (5.6)$$

### 5.6.4 Passo 2: pontos de equilíbrio

**Proposição 5.15 ([18] proposição 2.6)** *Consideremos o sistema de equações diferenciais (5.5) onde  $a_1, a_2 > 0$  e  $b_1, b_2 < 0$ . Então, para  $\lambda > 0$ , todas as trajectórias que começam num círculo de raio  $O(\sqrt{\lambda})$  permanecem limitadas junto da origem se:*

$$C \equiv \frac{c_1 a_2}{b_2 a_1} + \frac{c_2 a_1}{b_1 a_2} > -2 \quad (5.7)$$

Note-se que, nas condições da proposição, a origem é uma fonte e o sistema (5.5) tem pontos de equilíbrio nos eixos,  $A_1^\pm = (\pm\sqrt{-a_1\lambda/b_1}, 0)$  e  $A_2^\pm = (0, \pm\sqrt{-a_2\lambda/b_2})$ . A condição de  $A_1^\pm$  serem dois poços e  $A_2^\pm$  serem duas selas é equivalente a

$$a_2 - c_2 \frac{a_1}{b_1} < 0 \text{ e} \quad (5.8)$$

$$a_1 - c_1 \frac{a_2}{b_2} > 0, \quad (5.9)$$

que é satisfeita para um aberto do espaço de parâmetros  $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ .

Se invertermos o sinal das desigualdades 5.8 e 5.9, os pontos de equilíbrio  $A_1^\pm$  são selas e  $A_2^\pm$  são poços.

**Lema 5.16** ([1], lema 3.1) *Consideremos um campo de vectores da forma (5.5). Se os pontos de equilíbrio nos eixos, para além da origem, forem duas selas e dois poços, então não há pontos de equilíbrio fora dos eixos.*

Existe, portanto, um aberto no espaço dos campos de vectores  $f$  no qual a sua restrição a  $\text{Fix}(T_1)$  truncada na terceira ordem tem cinco pontos de equilíbrio: a origem e um par em cada  $\text{Fix}(\Sigma_j)$ , com  $j = 1, 2$ . Não existem mais pontos de equilíbrio num sector angular  $W \subset V_1$ , delimitado por  $l_{11}$  e  $l_{12}$ . Além disso, existe um disco em  $\text{Fix}(T_1)$ , em torno de  $(0, 0)$ , que atrai o fluxo.

### 5.6.5 Passo 2 do exemplo

Se  $c_{11} > 0, p_{11} > 0, c_{12} < 0$  e  $p_{13} < 0$ , então, usando a proposição 5.15, conclui-se que, para  $\lambda > 0$ , todas as trajectórias com valor inicial num círculo de raio  $O(\sqrt{\lambda})$  permanecem limitadas junto da origem em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$ . Para isso é necessário supor ainda que:

$$\delta_1 \equiv \frac{(2c_{13} + c_{30})p_{11}}{2p_{13}c_{11}} + \frac{(p_{12} + p_{30})c_{11}}{c_{12}p_{11}} > -2.$$

Um cálculo semelhante usando as equações de amplitude em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi)))$  origina

$$\delta_2 \equiv \frac{(2c_{13} - c_{30})p_{11}}{2p_{13}c_{11}} + \frac{(p_{12} - p_{30})c_{11}}{c_{12}p_{11}} > -2.$$

Nas equações de amplitude em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  e  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi)))$  temos que:

1. os pontos de equilíbrio em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k) \times SO(2))$  são poços em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  e selas em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi)))$  se

$$\delta_3 \equiv p_{11} - (p_{12} + p_{30}) \frac{c_{11}}{c_{12}} < 0 \text{ e}$$

$$\delta_4 \equiv p_{11} - (p_{12} - p_{30}) \frac{c_{11}}{c_{12}} > 0;$$

2. os pontos de equilíbrio em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k) \oplus \mathbf{Z}_2^c)$  são selas em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  e poços em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi)))$  se

$$\delta_5 \equiv c_{11} - (2c_{13} + c_{30}) \frac{p_{11}}{2p_{13}} > 0 \text{ e}$$

$$\delta_6 \equiv c_{11} - (2c_{13} - c_{30}) \frac{p_{11}}{2p_{13}} < 0.$$

O facto de não haver mais pontos de equilíbrio em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  e  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi)))$  segue do lema 5.16.

### 5.6.6 Passo 3: ligação entre os pontos de equilíbrio

Escolhamos apenas um dos pontos de equilíbrio não nulos  $A_j^\pm$  em cada recta, por exemplo  $A_j^+$ . No plano invariante o ponto  $A_2$  é um ponto de sela. O conjunto  $\omega$ -limite da variedade instável de  $A_2$ ,  $\omega(W^u(A_2))$ , não pode conter 0 porque 0 é fonte. A recta que contém o ponto  $A_1$  é invariante pelo fluxo, logo  $A_1$  não pode ser um ponto de equilíbrio rodeado por uma órbita periódica. Como não existem mais pontos de equilíbrio em  $W$ , para além de  $A_1$ , concluímos que  $\omega(W^u(A_2))$  não pode conter nenhuma órbita periódica (teorema 2 de [11], capítulo 11, §5).

Só resta a alternativa de  $\omega(W^u(A_2))$  conter  $A_1$  (teorema de Poincaré-Bendixson - ver, por exemplo, [11], capítulo 11, secção 4).

Concluimos que existe uma ligação sela-poço entre  $A_2$  e  $A_1$  (ver figura 5.2).

No caso dos  $\Sigma_j$  serem todos conjugados obteremos o resto do ciclo se mostrarmos que  $A_1$  e  $A_2$  estão na mesma órbita do grupo.

**Lema 5.17** ([18], **proposição 2.4**) *Sejam  $A_2$  e  $A_1$  dois pontos de equilíbrio com subgrupos de isotropia  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  conjugados. Então  $A_2$  e  $A_1$  estão na mesma órbita do grupo.*

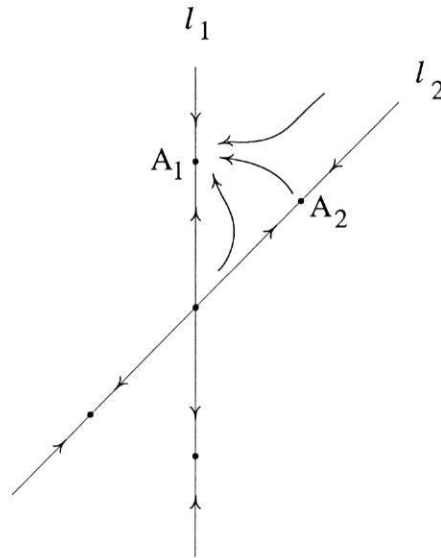


Figura 5.2 Ligação entre os pontos de equilíbrio  $A_1$  e  $A_2$ .

**Demonstração:**

Os grupos  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são subgrupos de isotropia conjugados, logo existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma.A_1 = A_2$  ou  $\gamma.A_1 = -A_2$ . No primeiro caso  $A_1$  e  $A_2$  estão na mesma órbita do grupo. Se  $\gamma.A_1 = -A_2$ , a condição

$$N(\Sigma_j)/\Sigma_j \cong \mathbf{Z}_2$$

implica que existe  $\delta$  em  $N(\Sigma_j)/\Sigma_j$  tal que  $\delta.A_2 = -A_2$ . Obtemos  $\gamma.A_1 = \delta.A_2$ , ou seja,  $\delta^{-1}\gamma.A_1 = A_2$ . Consequentemente  $A_1$  e  $A_2$  estão na mesma órbita do grupo.  $\square$

Depois de ver que  $A_1$  e  $A_2$  estão na mesma órbita do grupo obtemos o ciclo completo do seguinte modo. Existe  $\gamma$  tal que  $\gamma.A_1 = A_2$ , portanto  $\gamma.A_1 = A_2 = \tilde{A}_1$  e  $\gamma.A_2 = \tilde{A}_2$ . Para  $j = 1, 2$  os pontos  $\tilde{A}_j$  estão em  $\text{Fix}(\gamma\Sigma_j\gamma^{-1}) \subset \text{Fix}(\gamma T_1\gamma^{-1})$ . Em  $\text{Fix}(\gamma T_1\gamma^{-1})$  existe ligação sela-poço entre  $\tilde{A}_1$  e  $\tilde{A}_2$ , isto é, entre  $\gamma.A_2$  e  $A_2$ , pois neste espaço a dinâmica é a mesma que em  $\text{Fix}(T_1)$ . Esta situação repete-se para cada  $\text{Fix}(T_i)$ , com  $i = 3, \dots, k$ .

Caso os  $\Sigma_j$  não sejam conjugados, passamos ao plano  $\text{Fix}(T_2)$  e fazemos aí o mesmo estudo que foi feito em  $\text{Fix}(T_1)$ . Continuando este processo obteremos trajetórias ligando  $l_1$  e  $l_2$ ,  $l_2$  e  $l_3, \dots, l_k$  e  $l_{k+1}$ . As condições de estas ligações serem feitas nas

direcções correctas (de  $l_1$  para  $l_2$ , de  $l_2$  para  $l_3$ ,  $\dots$ , de  $l_k$  para  $l_{k+1}$ ) são satisfeitas num aberto do espaço dos parâmetros.

### 5.6.7 Passo 4: estabilidade assintótica do ciclo

Estes ciclos podem ser assintoticamente estáveis. Em [18], teoremas 2.10 e 5.1, são apresentadas condições suficientes para que isso aconteça. No caso de  $\Gamma$  finito (ciclo de pontos de equilíbrio) estas condições estimam as taxas de contracção ou expansão numa vizinhança de cada ponto de equilíbrio e combinam-nas de modo a obtermos uma estimativa conjunta dessa taxa. Uma contracção geral corresponde à estabilidade do ciclo.

Recentemente, em [17], estes teoremas sobre estabilidade assintótica foram melhorados em vários sentidos. Nesse artigo supõe-se que o ciclo  $\Omega$  satisfaz a seguinte hipótese:

**Hipótese 5.18** *para cada  $j$  existe um subespaço  $P_j$  invariante pelo fluxo tal que a variedade instável de  $A_j$  está contida em  $P_j$  e  $A_{j+1}$  é um poço em  $P_j$ ;*

Para cada ponto de equilíbrio  $A_j$  do ciclo sejam

1.  $-r_j$  o máximo das partes reais dos valores próprios de  $(df)_{A_j}$  restrito a  $P_{j-1} \cap P_j$ . O correspondente valor próprio é designado por valor próprio *radial* mais fraco;
2.  $-c_j$  o máximo das partes reais dos restantes valores próprios em  $P_{j-1}$ . O correspondente valor próprio é designado por valor próprio *contractivo* mais fraco;
3.  $e_j > 0$  o máximo das partes reais dos valores próprios de  $(df)_{A_j}$ . O correspondente valor próprio é designado por valor próprio *expansor* mais forte;
4.  $t_j < 0$  o máximo das partes reais dos valores próprios de  $(df)_{A_j}$  com vectores próprios normais a  $P_{j-1} + P_j$ . O correspondente valor próprio é designado por valor próprio *transversal* mais fraco. Se  $P_{j-1} + P_j = \mathbf{R}^n$ , então convencionam-se que  $t_j = -\infty$ .

**Teorema 5.19** ([17], teorema 2.7) *Suponhamos que exista um ciclo heteroclínico ligando pontos de equilíbrio hiperbólicos,  $A_j$ , com  $j = 1, \dots, m$ , satisfazendo a hipótese 5.18. Se*

$$\prod_{j=1}^m \min\{c_j, e_j - t_j\} > \prod_{j=1}^m e_j$$

*então o ciclo heteroclínico é assintoticamente estável.*

No caso de  $\dim \Gamma > 0$  os pontos de equilíbrio dos ciclos são substituídos por equilíbrios relativos.

Define-se do mesmo modo as direcções radial, contractiva e expansora. A única diferença é que se trabalha com a linearização do campo de vectores normal  $f_N$  em cada equilíbrio relativo  $R_j$ .

Mais precisamente, para cada  $j$  escolhe-se  $x_j \in R_j$  e considera-se a linearização  $(df_N)_{x_j}$ .

### 5.6.8 Estabilidade assintótica do exemplo

Aplicamos o teorema 5.19 para ver que o ciclo construído é assintoticamente estável.

Qualquer valor próprio não nulo do jacobiano de  $f$ , num ponto  $x$  pertencente a um equilíbrio relativo, é também valor próprio de  $(df_N)_x$  ([15], proposição 2.4).

Os valores próprios do jacobiano de  $f$  nos pontos de equilíbrio  $A_1$  em  $l_{11}$  e  $A_2$  em  $l_{21}$  estão indicados na tabela seguinte.

$A_1 \in l_{11}$	$A_2 \in l_{21}$
$-2c_{11}\lambda$	$-2p_{11}\lambda$
0	0 (duas vezes)
$\delta_3\lambda$ (duas vezes)	$(2p_2p_{11}\lambda)/p_{13}$
$\delta_4\lambda$ (duas vezes)	$\delta_5\lambda$
	$\delta_6\lambda$

Sejam  $P_1 = \text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  e  $P_2 = \text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k.(\pi, \pi)))$ . Com a excepção de  $(2p_2p_{11}\lambda)/p_{13}$ , todos os valores próprios diferentes de zero de  $df$  são determinados por  $df|_{(P_1 + P_2)}$  e pela multiplicidade (forçada pela isotropia).

Suponhamos que  $p_2 > 0$ .

Dados os sinais de  $\delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, p_{11}, p_{13}, p_2$  e da tabela anterior conclui-se que a hipótese 5.18 é válida.

A ligação entre  $A_1$  e  $A_2$  é percorrida de  $A_2$  para  $A_1$  em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  e no sentido oposto em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k, (\pi, \pi)))$ . Os valores próprios que contraem em  $A_1$  são  $\delta_3\lambda$  e  $-2c_{11}\lambda$  e o valor próprio que expande é  $\delta_4\lambda$ . De modo semelhante em  $A_2$  os valores próprios que contraem são  $\delta_6\lambda$  e  $(2p_2p_{11}\lambda)/p_{13}$  e o valor próprio que expande é  $\delta_5\lambda$ .

Sejam  $e_1 = \delta_4\lambda, e_2 = \delta_5\lambda, c_2 = -\delta_6\lambda$  e  $t_2 = (2p_2p_{11}\lambda)/p_{13}$ . A desigualdade do teorema 5.19 fica

$$e_1e_2 < \min\{c_2, e_2 - t_2\}. \tag{5.10}$$

Nestas condições o ciclo construído é assintoticamente estável.

Para outros valores dos parâmetros é possível obter um ciclo em que as ligações são no sentido oposto.

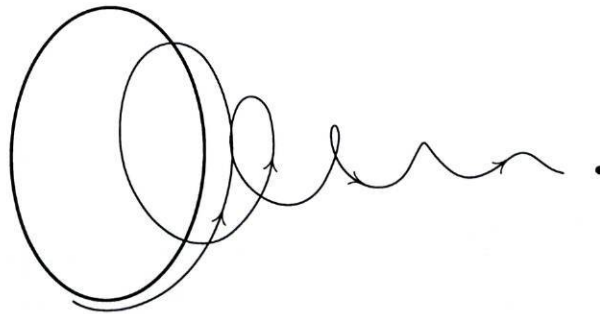


Figura 5.3 Ligação entre trajetória periódica e ponto de equilíbrio.

### 5.6.9 Passo 5: estabilidade estrutural

Como já foi observado, perturbações equivariantes de  $f$  ainda terão os  $\text{Fix}(T_j)$  como planos invariantes e ligações sela-poço são estruturalmente estáveis em  $\mathbf{R}^2$ .

O facto do ciclo ser atractor também não se altera porque os pontos de equilíbrio e os equilíbrios relativos são hiperbólicos. Assim, uma perturbação suficientemente pequena de  $f$  ainda se manterá nas condições do teorema. Portanto conclui-se que

a existência de termos de ordem superior suficientemente pequenos nas equações na forma normal não altera o que foi dito até aqui e os ciclos são estruturalmente estáveis.

### 5.6.10 Passo 5 do exemplo

Conclui-se, portanto, que existe um ciclo heteroclínico assintoticamente estável e estruturalmente estável ligando pontos de equilíbrio de isotropia  $\mathbf{Z}_2(k) \times SO(2)$  com soluções periódicas de isotropia  $\mathbf{Z}_2(k) \oplus \mathbf{Z}_2^c$ . As trajectórias que os ligam estão em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k))$  e em  $\text{Fix}(\mathbf{Z}_2(k, (\pi, \pi)))$ .

# Referências

- [1] S. Abreu. *Ciclos Heteroclínicos*, Tese de mestrado, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Dezembro 1994.
- [2] K.Borsuk. On the decomposition of a locally connected compactum into a product of a curve and a manifold, *Fund. Math.*, vol. 40, pp. 140-159, 1953.
- [3] G. E. Bredon. *Introduction to Compact Transformation Groups*, in Pure and Applied Mathematics 46, Academic Press, New York, London, 1972.
- [4] G. E. Bredon. Some Theorems on Transformation Groups, *Annals of Mathematics*, vol. 67, No. 1, pp. 105-118, Janeiro 1958.
- [5] M. Field. Equivariant Dynamical Systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 259, pp. 185-205, 1980.
- [6] M. Field. *Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 356, Longman, London, 1996.
- [7] A.M.Gleason. Spaces with a compact Lie group of transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol.48, pp. 35-43, 1950.
- [8] M. Golubitsky e D. Shaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. I, Applied Mathematical Sciences 51, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [9] M. Golubitsky, I. Stewart e D. Shaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. II, Applied Mathematical Sciences 69, Springer-Verlag, New York, 1988.

- [10] V. Guillemin e S. Sternberg. *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press, 1984.
- [11] M. W. Hirsch e S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [12] K. H. Hofmann e P. S. Mostert. Compact Groups Acting with  $(n-1)$ -Dimensional Orbits on Subspaces of  $n$ -Manifolds, *Math. Annalen*, 167, pp. 224-239, 1966.
- [13] L. M. King. Slices in transformation groups, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 147, pp. 381-388, Fevereiro 1970.
- [14] J. L. Koszul. Sur certains groupes de transformations, *Colloquium Inter. Strasbourg*, pp. 137-141, 1953.
- [15] M. Krupa. Bifurcations of Relative Equilibria, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, vol. 21, No. 6, pp. 1453-1486, Novembro 1990.
- [16] M. Krupa. Robust heteroclinic cycles, *J. Nonlin. Sci.*, 7, pp. 129-176, 1997.
- [17] M. Krupa e I. Melbourne. Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry, *Erg. Th. Dyn. Sys.*, 15, 121-147, 1995.
- [18] I. Melbourne, P. Chossat e M. Golubitsky. Heteroclinic cycles involving periodic solutions in mode interactions with  $O(2)$  symmetry, *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh*, 113A, 315-345, 1989.
- [19] D. Montgomery, H. Samelson e C. T. Yang. Exceptional orbits of highest dimension, *Annals of Mathematics*, vol. 64, No. 1, pp. 131-140, Julho 1956.
- [20] D. Montgomery, H. Samelson e L. Zippin. Singular Points of a Compact Transformation Group, *Annals of Mathematics*, vol. 62, No. 2, pp. 1-9, 1956.
- [21] D. Montgomery e C. T. Yang. The existence of a slice, *Annals of Mathematics*, vol. 65, No. 1, pp. 108-116, Janeiro 1957.

- [22] D. Montgomery e L. Zippin. A theorem on Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 48, pp. 448-452, 1942.
- [23] D. Montgomery e L. Zippin. *Topological Transformation Groups*, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc, New York, Reprint 1974.
- [24] P. S. Mostert. Sections in principal fiber spaces, *Duke Math. J.*, 23, pp. 57-72, 1956.
- [25] P. S. Mostert. On a Compact Lie Group Acting on a Manifold, *Annals of Mathematics*, vol. 65, No. 3, pp. 447-455, Maio 1957.
- [26] G. D. Mostow. On a conjecture of Montgomery, *Annals of Mathematics*, vol. 65, pp. 513-516, 1957.
- [27] R. S. Palais. On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, *Annals of Mathematics*, 73, pp. 295-323, 1961.
- [28] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA 1979.